студенты, которые дружат с логикой и имеют правильное представление о прямой и обратной теоремах. Иногда они даже приводят примеры таких теорем, как правило, вспоминают о прямой и обратной теоремах Пифагора. Кстати, о существовании последней многие выпускники школы не знают.

Приведенные высказывания косвенно подтверждают незавидные результаты выпускников средней школы на ЦТ по математике и наглядно демонстрируют, что, приступая к изучению вузовского курса высшей математики, они имеют весьма смутное представление о том, чем они занимались на уроках математики в школе.

Некоторые из них, когда напоминаешь им что-то совсем несложное из школьной математики, невозмутимо заявляют: *я такое не проходила; впервые слышу, у нас такого не было, мы такое не изучали, не помню*.

Отсутствие развитого логического мышления у школьников и студентов значительно ограничивает их возможности по применению имеющейся у них информации и приобретённых знаний для решения задач, предусмотренных учебными программами. Школьные учителя и вузовские преподаватели вынуждены сужать круг решаемых задач, исключая из него задачи, решения которых не сводятся к использованию готовых схем, а требуют оригинального подхода и разработки собственного алгоритма решения. Упор делается на шаблонные задачи, решаемые по известному заранее алгоритму, на задачи, решаемые по имеющемуся образцу, и на задачи, в которых фактически требуется в конкретную формулу подставить данные значения.

Список литературы

1 *Гальмак, А. М.* О самостоятельной работе студентов и не только / А. М. Гальмак, О. А. Шендрикова, И. В. Юрченко // Веснiк МДУ iм. А. А. Куляшова, Серыя С. – 2019. – № 1. – С. 46–60.

2 *Гальмак, А. М.* О практической направленности обучения в вузе / А. М. Гальмак, О. А. Шендрикова, И. В. Юрченко // Веснiк МДУ iм А. А. Куляшова, Серыя С. – 2022. – № 2. – С. 101–112.

УДК 519.218.7

МАТРИЧНАЯ ФОРМА МЕТОДА ИСКЛЮЧЕНИЯ ГАУССА

В. Э. ГАРИСТ
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилёв

Как известно, наиболее универсальным методом решения систем линейных уравнений (СЛУ) является метод Гаусса последовательного исключения переменных (в англоязычном варианте – Gaussian elimination). Его модификацией является метод полного исключения переменных – метод Жордана – Гаусса. Данные методы реализованы в различных системах компьютерной математики (СКМ). Умение обратиться к подходящей системе и пользоваться её возможностями являются важной частью не только учебной, но и научной работы. Такое умение характеризует квалификацию студента.

Рассмотрим реализацию указанных методов в СКМ MAPLE на примере конкретной СЛУ с матрицей системы размерностью 3×3 (рисунок 1).

```
> with(Student[LinearAlgebra]) :
A := ⟨⟨1, 2, 3⟩|⟨2,−3,−1⟩|⟨4, 5, 4⟩⟩;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
b := ⟨4,−3, 6⟩;
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
GaussianElimination(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

```
ReducedRowEchelonForm(⟨A|b⟩);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 1

После ввода данных в программу: матрицы системы и её правой части на выходе получаем решение СЛУ. Последняя матрица (Жордана – Гаусса) очевидным образом указывает решение системы, предпоследняя есть результат последовательного исключения переменных методом Гаусса исходной матрицы системы. С учебной точки зрения собственно решение здесь отсутствует – есть только ответ. Нашей целью является восполнение промежуточных выкладок. Восполнение этих выкладок предполагается в автоматическом режиме: вводится только условие СЛУ, далее работает программа. Выходными данными этой работы будет последовательность матриц, реализующих методы Гаусса и Жордана – Гаусса. Рабочая среда решения поставленной задачи – СКМ Smath Studio [1]. С причинами выбора СКМ Smath Studio в качестве рабочей среды можно ознакомиться в [2].

Технически решение СЛУ методом Гаусса представляет собой последовательность подходящих элементарных преобразований этой СЛУ, каждое из которых может быть реализовано как произведение некоторых матриц. Такие матрицы принято называть элементарными. Каждое элементарное преобразование характеризуется своей элементарной матрицей. Например, при умножении элементарной матрицы

$$E_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

полученной из единичной матрицы перестановкой i-й и j-й строк на расширенную матрицу системы уравнений, i-я и j-я строки расширенной матрицы переставляются местами. Умножение i-й строки расширенной матрицы на число a достигается умножением слева элементарной матрицы

$$E_{\mathrm{i}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & a & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на расширенную матрицу системы уравнений. Преобразование, заключающееся в сложении i-й строки с коэффициентом a с j-й строкой и дальнейшем размещении этой суммы в j-й строке расширенной матрицы, есть результат умножения матрицы

$$E_{\mathrm{ij}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots & a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на расширенную матрицу. Матрица $E_{\mathrm{ij}}(a)$ отличается от единичной матрицы E единственным элементом a, расположенным в i-й строке и j-м столбце. На рисунке 2 произведено исключение неизвестной x_1 в расширенной матрице системы.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \alpha 21 := -\frac{B_{2\,1}}{B_{1\,1}} \quad \alpha 31 := -\frac{B_{3\,1}}{B_{1\,1}} \quad E21 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha 21 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E31 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha 31 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E21 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & -11 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad E31 \cdot E21 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -7 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2

Аналогично исключаем неизвестную x_2 (рисунок 3)

$$\alpha 32 := -\frac{B1_{3\,2}}{B1_{2\,2}} \quad E32 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha 32 & 1 \end{bmatrix} \quad E32 \cdot B1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Рисунок 3

Последняя матрица соответствует завершению прямого хода метода Гаусса. Далее (рисунок 4) начинается полное исключение неизвестных (схема Жордана – Гаусса).

$$\alpha 23 := -\frac{(E32 \cdot B1)_{2\,3}}{(E32 \cdot B1)_{3\,3}} \quad E23 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha 23 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha 13 := -\frac{(E23 \cdot E32 \cdot B1)_{1\,3}}{(E23 \cdot E32 \cdot B1)_{3\,3}}$$

$$E23 \cdot E32 \cdot B1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \quad E13 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha 12 := -\frac{(E13 \cdot E23 \cdot E32 \cdot B1)_{1\,2}}{(E13 \cdot E23 \cdot E32 \cdot B1)_{2\,2}} \quad E12 := \begin{bmatrix} 1 & \alpha 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E12 \cdot E13 \cdot E23 \cdot E32 \cdot B1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Рисунок 4

Последнее преобразование формирует главную диагональ матрицы системы только из единиц (рисунок 5). Для краткости последняя матрица обозначена как C.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_{1\,1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{2\,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_{3\,3}} \end{bmatrix} \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 5

Данная программа работает с СЛУ размерностью 3×3, имеющими ненулевые коэффициенты. Если в конкретной задаче встречаются нулевые коэффициенты, то они могут быть устранены переходом к равносильной системе сложением уравнений этой системы. Очевидным образом программа дорабатывается для решения СЛУ больших размерностей.

Список литературы

1 SMath-Studio [Электронный ресурс] : офиц. сайт. – Режим доступа: https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме.

2 *Гарист, В. Э.* Применение системы компьютерной математики SMath-Studio при обучении аналитической геометрии и линейной алгебры в вузе / В. Э. Гарист Актуальные проблемы теории и практики обучения физико-математическим и техническим дисциплинам в современном образовательном пространстве : сб. ст. V Всерос. науч. конф. – Курск, 2021. – 313 с.

УДК 378.016:519.21

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПОДГОТОВКА СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В данной статье рассматривается проблема преподавания теории вероятностей и математической статистики в Белорусском государственном университете транспорта. Данная тема ранее уже исследовалась автором в ряде предыдущих публикаций [1–3].

Последние десятилетия характеризуются резким повышением интереса к тем разделам математики и ее приложений, которые анализируют явления, носящие «случайный» характер. Эта тенденция в значительной степени объясняется тем, что большинство возникших в последние десятилетия новых математических дисциплин, которые ныне обозначаются собирательным термином «кибернетика», оказались тесно связанными с теорией вероятностей. Тем самым теория вероятностей стала чуть ли не самой первой по прикладному значению из всех математических дисциплин. При этом возникновение новых, в большинстве своем «порождённых» теорией вероятностей наук, скажем «теория игр», «теория информации», «страховая математика» или «стохастическая финансовая математика», привело к положению, при котором теорию вероятностей также приходится рассматривать как объединение большого числа разнородных и достаточно глубоко развитых математических дисциплин.