1991

ДИМИТРІЙ ГРАВЕ
Заслуженный профессоръ Университета Св. Владиміра.

Дата 2007

НАЧАЛА АЛГЕБРЫ.

29217

Классное руководство для гимназій и другихъ среднихъ учебныхъ заведеній.

№ 6139

ПЕТРОГРАДЪ.
Изданіе К. Л. РИККЕРА.
Морская ул., 17.
1915.

Оглавленіе.

			стр.
Предисловіе		. . . . .	V
Глава	I.	Основныя знакоположенія алгебры	1
Глава	II.	Числа дробныя	6
Глава	III.	Числа отрицательныя	14
Глава	IV.	Формальная алгебра раціональныхъ дѣйствій .	27
Глава	V.	Объ уравненіяхъ 1-ой степени и неравенствахъ	62
Глава	VI.	Числа ирраціональныя	99
Глава	VII.	Понятіе о предѣлѣ перемѣнной	110
Глава	VIII.	Дѣйствія надъ радикалами	123
Глава	IX.	О числахъ комплексныхъ	154
Глава	X.	О квадратныхъ уравненіяхъ	162
Глава	XI.	Уравненія, приводящіяся къ уравненіямъ первой и второй степени	176
Глава	XII.	Прогрессіи и ряды	204
Глава	XIII.	Логариѳмы	210
Глава	XIV.	Алгориѳмъ Эвклида и непрерывныя дроби . .	252
Глава	XV.	Теорія соединеній, биномъ Ньютона	277
Глава	XVI.	Понятіе о функціональной зависимости	296
Таблица четырехзначныхъ логариѳмовъ			310
Четырехзначные антилогариѳмы			312
Таблица кратныхъ модуля перехода отъ обыкновенныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ и обратно			314

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Планъ настоящей книги задуманъ мною болѣе двадцати лѣтъ тому назадъ. Будучи начинающимъ приватъ-доцентомъ Петроградскаго Университета, я былъ приглашенъ читать лекціи по математикѣ въ Институтѣ Инженеровъ Путей Сообщенія. Я пригласилъ въ помощь себѣ въ качествѣ, такъ называемаго, репетитора Института Владиміра Андреевича Маркова (брата академика), который незадолго передъ тѣмъ кончилъ университетъ. Преждевременная смерть В. А. Маркова въ возрастѣ 26 лѣтъ отъ злѣйшей чахотки лишила русскую науку ея виднаго представителя, подававшаго громадныя надежды.

Мы съ Марковымъ горячо обсуждали вопросъ преподаванія элементарной математики въ связи съ серьезно поставленными тогда въ Институтѣ вступительными конкурсными экзаменами.

Мы считали, что современное тому времени состояніе науки давало возможность изложить элементарную алгебру какъ стройную науку, причемъ мы были убѣждены, что строго логическое изложеніе можно совмѣстить съ простотой, доступной для пониманія средняго ученика.

Особенно важнымъ мы считали упорядоченіе изложенія ирраціональныхъ чиселъ и предѣловъ.

Вскорѣ послѣ смерти Маркова я былъ приглашенъ профессоромъ въ Харьковскій Университетъ и предался всецѣло Университетскому преподаванію.

Въ настоящее время я рѣшилъ осуществить мою мысль о курсѣ элементарной алгебры въ томъ видѣ, какъ я ее понималъ въ моихъ бесѣдахъ съ Марковымъ.

Я долженъ прежде всего оговорить, что я предполагалъ написать классное руководство, а не самоучитель, поэтому я предполагаю въ моемъ изложеніи всегда наличность преподавателя, а потому нѣкоторыя мѣста моего курса доведены до возможной краткости изложенія.

Моя книга, конечно, отличается отъ другихъ и по содержанію и по характеру изложенія, но это отличіе касается главнымъ образомъ мелкаго шрифта, который можно пропустить при первоначальномъ преподаваніи. Въ крупномъ же шрифтѣ мое изложеніе почти ничѣмъ не отличается отъ изложенія другихъ авторовъ.

Изъ не совсѣмъ обычныхъ терминовъ мною введенъ лишь терминъ: „числовое поле“.

Это мною сдѣлано ввиду громаднаго значенія въ современной наукѣ теоріи абстрактныхъ полей.

Подъ абстрактнымъ полемъ разумѣется въ настоящее время совокупность предметовъ (какихъ угодно, не обязательно чиселъ), надъ которыми можно установить операціи, удовлетворяющія всѣмъ формальнымъ законамъ символики элементарной алгебры.

Большинство сказаннаго о поляхъ находится въ мелкомъ шрифтѣ. Въ крупномъ же шрифтѣ находятся лишь такія элементарныя соображенія, какъ указанія на извѣстные законы: переставительный, сочетательный и распредѣлительный, т. е. какъ разъ то, что не можетъ быть пропущено ни при какомъ изложеніи алгебры.

Прошу господъ преподавателей средней школы, которые окажутъ вниманіе моей книгѣ, подѣлиться со мною результатами своего опыта. Обѣщаю отвѣчать на всякое ихъ письменное ко мнѣ обращеніе.

Профессоръ **Д. Граве.**

3 Іюня 1915 г.

ГЛАВА I.

Основныя знакоположенія алгебры.

§ 1. Въ курсѣ ариѳметики мы познакомились съ правилами производства дѣйствій надъ цѣлыми числами и видѣли, что можно расположить эти числа въ порядкѣ ихъ возрастанія въ рядъ

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

Мы будемъ называть этотъ рядъ рядомъ натуральныхъ чиселъ.

§ 2. Если мы хотимъ указать нѣкоторое натуральное число, но при этомъ для насъ безразлично, которое именно взять, то можно обозначить это число какимъ-нибудь знакомъ. Обыкновенно въ алгебрѣ обозначаютъ числа буквами. Наиболѣе употребительны буквы латинскаго и греческаго алфавитовъ. Такъ, напримѣръ, мы можемъ сказать, что буква

$$a$$

обозначаетъ нѣкоторое натуральное число.

Если приходится разсматривать нѣсколько различныхъ чиселъ, то можно писать или различныя буквы, $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ или же одну и ту же букву съ различными значками

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad b_1, b_2, b_3, \ldots$$

или со штрихами

$$a', a'', a''', \ldots$$

§ 3. Если мы желаемъ указать, что надо сложить два натуральныхъ числа, обозначенныхъ буквами a и b, то это въ алгебрѣ записывается такъ

$$a + b.$$

Конечно до тѣхъ поръ, пока не будетъ сказано, какія именно числа подразумѣваются подъ буквами a и b, указаннаго сложенія произвести на самомъ дѣлѣ нельзя.

Совершенно подобнымъ образомъ вычитаніе числа b изъ числа a можно записать такъ

$$a - b.$$

Умноженіе числа a на число b записывается въ алгебрѣ обыкновенно

$$ab,$$

то есть буква, обозначающая множитель, ставится рядомъ относительно буквы, обозначающей множимое. Иногда между буквами множителей ставится точка, такъ что произведеніе двухъ множителей a и b обозначается такъ

$$a \,.\, b$$

Знакъ $\times$, употреблявшійся въ ариѳметикѣ, въ алгебрѣ считается не совсѣмъ удобнымъ, потому что его можно смѣшать съ буквой x.

Для выраженія результата дѣленія числа a на число b, употребляется или знакъ

$$a : b,$$

или же знакъ

$$\frac{a}{b}.$$

Послѣдній знакъ напоминаетъ намъ дробное число. Изъ ариѳметики извѣстно, что дробное число есть всегда частное отъ дѣленія числителя на знаменатель.

§ 4. Въ ариѳметикѣ мы познакомились съ главнѣйшими свойствами дѣйствій надъ числами натуральными. Такъ, напр., мы видѣли, что сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, что можно выразить такъ

$$a + b = b + a.$$

Подобнымъ же образомъ произведеніе натуральныхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка множителей, что можно записать такъ

$$ab = ba.$$

§ 5. **Всякая совокупность знаковъ, выражающая нѣкоторую математическую мысль, называется формулой.**

Такъ, напримѣръ, въ предыдущемъ §-ѣ мы видѣли двѣ формулы

$$a + b = b + a; \quad ab = ba.$$

Эти формулы выражаютъ, такъ называемый, перемѣстительный законъ сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ.

Обѣ эти формулы принадлежатъ къ числу формулъ, называемыхъ равенствами, ибо въ составъ ихъ входитъ знакъ $=$, выражающій равенство двухъ чиселъ.

§ 6. Когда мы напишемъ формулу

$$a+b+c,$$

то это показываетъ, что сначала надо къ числу a прибавить число b и къ полученному такимъ образомъ числу прибавить третье число c.

Употребляя знакъ скобокъ, уже разъясненный въ ариѳметикѣ, мы можемъ выразить только что высказанную мысль такою формулой

$$a+b+c=(a+b)+c.$$

Однимъ словомъ, сколько бы ни было слагаемыхъ, мы будемъ всегда считать формулу

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e$$

равносильной съ формулой

$$a+b+c+d+e.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ, если имѣется произведеніе нѣсколькихъ множителей

$$abcde,$$

то эта формула имѣетъ такое значеніе: сначала число a умножается на число b, потомъ полученное произведеніе умножается на c, далѣе полученное произведеніе умножается на d, и т. д.

Можно было бы написать формулу со скобками

$$\{[(a\,b)\,c]\,d\}\,e,$$

но обыкновенно скобки пропускаются, и произведеніе пишется по прежнему

$$abcde.$$

§ 7. Далѣе намъ извѣстенъ изъ ариѳметики, такъ называемый, сочетательный законъ сложенія и умноженія цѣлыхъ чиселъ.

Этотъ законъ для сложенія можетъ быть выраженъ формулой

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

то есть, другими словами, получается одинъ и тотъ же резуль-

татъ, если къ суммѣ двухъ чиселъ a и b прибавить третье число c, или же къ числу a прибавить сумму двухъ другихъ b и c.

Напримѣръ,

$$(2+5)+3=7+3=10,$$
$$2+(5+3)=2+8=10.$$

Сочетательный законъ для умноженія выражается формулой

$$(ab)c=a(bc).$$

§ 8. Перестановительный и сочетательный законы сложенія показываютъ, что при сложеніи натуральныхъ чиселъ можно измѣнять какъ угодно порядокъ слагаемыхъ, а также группировать слагаемыя въ частныя суммы и потомъ эти суммы складывать.

Какъ бы мы ни разнообразили процессъ сложенія, окончательная сумма всегда будетъ одна и та же.

То же самое относится къ группировкѣ множителей при умноженіи.

§ 9. Намъ извѣстенъ изъ ариѳметики также еще одинъ весьма важный законъ дѣйствій сложенія и умноженія натуральныхъ чиселъ, носящій названіе распредѣлительнаго закона.

Этотъ законъ выражается формулами [1])

$$(a+b)c=ac+bc,$$
$$(a-b)c=ac-bc.$$

Напримѣръ,

$$(2+3)5=5\,.\,5=25,$$
$$2\,.\,5+3\,.\,5=10+15=25,$$

слѣдовательно,

$$(2+3)5=2\,.\,5+3\,.\,5.$$

§ 10. Формула

(1) $$(a+b)c=ac+bc$$

представляетъ собою для насъ первый примѣръ приложенія соображеній формальной алгебры, какъ науки, показывающей какъ можно, не измѣняя результата, видоизмѣнять дѣйствія надъ знаками.

Переходъ отъ лѣвой части послѣдняго равенства (1) къ правой носитъ названіе раскрытія скобокъ. Обратный же пе-

---

[1]) Формулу $(a+b)c=ac+bc$ надо понимать такъ: выраженіе $(a+b)c$, стоящее въ лѣвой части равенства, получается, если сначала сложить числа a и b и полученную сумму умножить на c; выраженіе же $ac+bc$ получается, если вычислить сначала два произведенія ac и bc и затѣмъ ихъ сложить.

переходъ отъ правой части къ лѣвой носитъ названіе взятія множителя c за скобки.

§ 11. Если приходится перемножать нѣкоторое число одинаковыхъ множителей a, то для этого употребляютъ новый знакъ. Пишутъ

$$aa = a^2, \quad aaa = a^3, \quad aaaa = a^4,$$

Вообще говоря, знакомъ

(1) $$a^n$$

обозначается произведеніе n одинаковыхъ множителей, каждый изъ которыхъ равенъ числу a. Знакъ (1) читается: a въ степени n.

Дѣйствіе, состоящее въ вычисленіи числа a^n, называется возвышеніемъ числа a въ n-ую степень.

Само число a^n называется n-ою степенью числа a, а число n называется показателемъ степени.

Вторая степень называется квадратомъ, а третья степень кубомъ. Такъ, напримѣръ, a^3 читается a-кубъ.

§ 12. Если число a больше числа b, то это обозначается такъ

$$a > b, \quad \text{или} \quad b < a.$$

Напримѣръ,

$$5 > 3.$$

Формула $a > b$, носитъ названіе неравенства; a есть лѣвая часть неравенства, а b правая его часть.

§ 13. Пусть n обозначаетъ одно изъ чиселъ натуральнаго ряда

$$1, 2, 3, 4, \ldots . n, \ldots .$$

Число, предшествующее въ натуральномъ рядѣ числу n, будетъ

$$n-1.$$

Число, непосредственно слѣдующее за числомъ n, будетъ

$$n+1.$$

§ 14. Часть натуральнаго ряда около числа n будетъ имѣть видъ

$$\ldots . n-3, \; n-2, \; n-1, \; n, \; n+1, \; n+2, \ldots .$$

Если требуется написать натуральный рядъ чиселъ, продолженный до числа n, то пишутъ такъ

$$1, 2, 3, \ldots n-1, n.$$

Сумма всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n пишется такъ

$$1+2+3+\ldots+n.$$

Произведеніе всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n пишется такъ

$$1.2.3\ldots.n.$$

ГЛАВА II.

Числа дробныя.

§ 1. Цѣлыя или натуральныя числа, являющіяся результатомъ счета предметовъ, представляютъ изъ себя основаніе всей математики, но уже на самыхъ простыхъ задачахъ выясняется недостаточность этихъ чиселъ, какъ орудій изслѣдованія.

Приходится обобщить понятіе о числѣ, то есть *считать за числа*, кромѣ натуральныхъ чиселъ, еще нѣкоторые новые предметы.

Первое обобщеніе понятія о числѣ было дано уже въ ариѳметикѣ, гдѣ наряду съ натуральными числами были введены новыя числа, которыя назывались дробями.

Мы эти новыя числа будемъ называть *дробными числами*.

Въ ариѳметикѣ разсматривались подробно правила дѣйствій надъ дробями, а потому намъ нѣтъ надобности еще разъ входить въ эти подробности. Мы ограничимся лишь краткимъ напоминаніемъ теоріи чиселъ дробныхъ.

Дробью называется число вида

$$(1)\qquad \frac{a}{b},$$

гдѣ a и b суть натуральныя числа, причемъ верхнее число называется *числителемъ*, а нижнее число b называется *знаменателемъ*.

Если числитель a дѣлится *нацѣло* на знаменателя b, то дробь (1) представляетъ натуральное число; въ обратномъ случаѣ дробь (1) представляетъ число, которое мы будемъ называть дробнымъ.

Если задано дробное число $\frac{a}{b}$, то мы будемъ называть число $\frac{b}{a}$ числомъ обратнымъ.

I. Опредѣленіе равенства.

§ 2. Два дробныхъ числа

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{c}{d}$$

называются равными, если произведеніе числителя перваго на знаменатель второго равняется произведенію числителя второго на знаменатель перваго, то есть, если

$$ad = bc.$$

Равенство двухъ дробныхъ чиселъ записывается такъ же, какъ и равенство цѣлыхъ, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Напримѣръ,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6},$$

ибо

$$2.6 = 3.4.$$

§ 3. Изъ указаннаго опредѣленія вытекаетъ цѣлый рядъ весьма важныхъ слѣдствій.

Такъ, напримѣръ, справедливо равенство двухъ такихъ дробныхъ чиселъ

$$\frac{ap}{bp} = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

гдѣ p произвольное натуральное число, ибо провѣряется условіе равенства

$$(ap)\,b = a\,(bp).$$

Равенство (1) даетъ два важныхъ правила дѣйствій надъ дробными числами.

Если мы будемъ переходить отъ правой части равенства (1) къ лѣвой, то получаемъ слѣдующее важное замѣчаніе:

Можно безъ измѣненія величины дробнаго числа умножить числитель и знаменатель на одно и то же число p. На этомъ правилѣ основано, какъ мы знаемъ, приведеніе дробей къ одному знаменателю.

Если мы будемъ переходить отъ лѣвой части равенства (1) къ правой, то мы получаемъ возможность раздѣлить числитель и знаменатель дроби на общій множитель p. На этой возможности основано, такъ называемое, сокращеніе дробей.

§ 4. Итакъ, мы видимъ, что могутъ существовать различно написанныя дробныя числа, равныя между собой, напримѣръ,

$$\frac{15}{10}, \frac{6}{4}, \frac{3}{2}.$$

Всѣ такія равныя между собою дробныя числа считаются за одно число, такъ что мы видимъ, что одно и то же дробное число можетъ быть представлено различными знаками.

Если мы сократимъ числитель и знаменатель на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, то получимъ дробное число въ простѣйшемъ видѣ, такъ называемой, несократимой дроби.

Какъ частный случай дроби можетъ получиться цѣлое число, если числитель дѣлится нацѣло на знаменатель, или же знаменатель равенъ 1:

$$\frac{6}{3} = 2; \quad \frac{5}{1} = 5.$$

Дробнымъ числомъ мы будемъ называть дробь только въ томъ случаѣ, если числитель не дѣлится нацѣло на знаменатель.

Необходимо замѣтить, что если у двухъ равныхъ дробей одинаковы знаменатели, то должны быть одинаковы также и числители.

II. Опредѣленіе неравенства.

§ 5. **Мы будемъ считать дроби** $\frac{a}{b}$ **и** $\frac{c}{d}$ **различными, если** ad **не равно** bc.

Такъ напримѣръ, нетрудно убѣдиться, что дробное число $\frac{a}{b}$ не равно цѣлому $\frac{c}{1}$.

Ибо, если бы было

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{1},$$

то было бы $a = bc$, откуда выходило бы, что a дѣлится нацѣло на b.

III. Продолженіе опредѣленія неравенства.

§ 6. **Мы будемъ считать первую дробь $\frac{a}{b}$ больше второй дроби $\frac{c}{d}$, если произведеніе числителя первой дроби на знаменатель второй будетъ больше, чѣмъ произведеніе числителя второй на знаменатель первой,** т. е., другими словами, мы будемъ имѣть неравенство

(1) $$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

если

(2) $$ad > bc.$$

Конечно, будетъ обратно

(3) $$\frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

если

(4) $$ad < bc.$$

§ 7. Если $c = d$, то дробь $\frac{c}{d}$ равна 1. Неравенства (1) и (2) перепишутся такъ

$$\frac{a}{b} > 1, \text{ если } a > b.$$

Получаемъ, что **дробь больше единицы, если числитель больше знаменателя.**

Совершенно подобнымъ же образомъ изъ неравенствъ (3) и (4) получаемъ

$$\frac{a}{b} < 1, \text{ если } a < b.$$

Дробь меньше единицы, если числитель меньше знаменателя.

Дробныя числа, меньшія единицы, называются правильными дробями, а дробныя числа, бо́льшія единицы, неправильными дробями.

IV. Опредѣленіе сложенія.

§ 8. **Для сложенія двухъ дробныхъ чиселъ они приводятся къ одному знаменателю: $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$, и подъ суммой ихъ разумѣется дробь**

$$\frac{a+b}{c},$$

въ которой числитель есть сумма числителей заданныхъ слагаемыхъ, а знаменатель есть общій ихъ знаменатель.

Такъ, напримѣръ, если надо сложить двѣ дроби

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{c}{d},$$

то мы можемъ привести ихъ къ общему знаменателю bd, замѣняя заданныя дроби новыми

$$\frac{ad}{bd} \text{ и } \frac{cb}{db},$$

тогда, примѣняя наше правило сложенія, получимъ

$$\frac{ad+cb}{bd}.$$

§ 9. Для нахожденія правила вычитанія чиселъ дробныхъ нѣтъ надобности въ новомъ опредѣленіи.

Мы можемъ исходить изъ понятія о вычитаніи, какъ дѣйствіи обратномъ дѣйствію сложенія, а именно мы будемъ во всемъ дальнѣйшемъ понимать подъ вычитаніемъ такое **дѣйствіе, при которомъ по заданной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ получается другое.**

Итакъ, правило вычитанія выводится, какъ подлежащая доказательству т е о р е м а, выводимая, какъ слѣдствіе изъ опредѣленія сложенія.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что надо вычесть изъ дроби $\frac{a}{b}$ дробь $\frac{c}{b}$, которыя мы предполагаемъ приведенными къ одному знаменателю. Нужно найти, слѣдовательно, дробь, которая будучи сложена съ дробью $\frac{c}{b}$ давала бы дробь $\frac{a}{b}$. Является естественнымъ искать такую дробь, у которой знаменатель будетъ также b, т. е. дробь $\frac{d}{b}$, гдѣ d нѣкоторое цѣлое число. Итакъ, придется число d подобрать такъ, чтобы дроби $\frac{c}{b}$ и $\frac{d}{b}$ при сложеніи давали дробь $\frac{a}{b}$, то есть, чтобы было

$$\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{a}{b}.$$

По правилу сложенія получаемъ.

$$\frac{c+d}{b} = \frac{a}{b},$$

далѣе на основаніи конца § 4

$$c+d=a.$$

Итакъ, числитель d искомой разности долженъ быть такимъ цѣлымъ числомъ, которое, будучи сложено съ c, даетъ a, а значитъ, d будетъ не что иное, какъ разность

$$a-c,$$

и мы получаемъ искомый результатъ

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Отсюда получается такое правило вычитанія двухъ дробныхъ чиселъ: надо будетъ оба числа привести къ одному знаменателю и тогда изъ числителя уменьшаемаго вычесть числитель вычитаемаго.

Конечно, вычитаніе возможно, если числитель уменьшаемаго будетъ больше числителя вычитаемаго.

V. Опредѣленіе умноженія.

§ 10. **Подъ произведеніемъ двухъ дробныхъ чиселъ** $\frac{a}{b}$ **и** $\frac{c}{d}$ **разумѣется дробное число**

$$\frac{ac}{bd},$$

въ числителѣ котораго стоитъ произведеніе ac **числителей** a **и** c **заданныхъ дробей, а въ знаменателѣ произведеніе** bd **знаменателей** b **и** d **заданныхъ дробей.**

Напримѣръ,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

§ 11. Правило для дѣленія двухъ дробныхъ чиселъ не требуетъ новаго опредѣленія, а получается, какъ теорема изъ опредѣленія дѣйствія дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго умноженію.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что надо раздѣлить число $\frac{a}{b}$ на число $\frac{c}{d}$. Не трудно замѣтить, что искомое частное получится, если умножить дѣлимое $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{d}{c}$, обратную данной $\frac{c}{d}$, то есть частное будетъ

$$\frac{ad}{bc}.$$

Чтобы убѣдиться, что это дѣйствительно частное, умножимъ его на дѣлитель $\frac{c}{d}$; получаемъ

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd}.$$

Послѣднюю дробь можно сократить на cd и выйдетъ $\frac{a}{b}$, то есть получилось дѣлимое. Значитъ, дробь $\frac{ad}{bc}$ есть дѣйствительно искомое частное.

Отсюда получается слѣдующее правило дѣленія дробныхъ чиселъ: раздѣлить число на нѣкоторое другое, это все равно, что умножить это число на обратное дѣлителю.

Напримѣръ,

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

§ 12. Замѣчая, что

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = a : b,$$

мы видимъ, что всякую дробь $\frac{a}{b}$ можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія цѣлаго числа a на цѣлое число b. Это частное, если оно есть цѣлое число, отвѣчаетъ на вопросъ: во сколько разъ число a больше числа b; дробь

$$\frac{a}{b}$$

называютъ также геометрическимъ отношеніемъ двухъ цѣлыхъ чиселъ a и b.

Названіе „геометрическое“ происходитъ отъ того, что къ разсмотрѣнію подобныхъ отношеній приходится постоянно прибѣгать въ геометріи.

Геометрическое отношеніе можно записать еще знакомъ

$$a : b;$$

числитель a называется предыдущимъ членомъ отношенія, а знаменатель b называется послѣдующимъ членомъ отношенія.

На основаніи сказаннаго въ § 3 (стр. 7) мы замѣчаемъ, что отношеніе не мѣняется отъ умноженія или дѣленія на одно и то же число обоихъ его членовъ.

§ 13. Равенство двухъ геометрическихъ отношеній даетъ формулу

$$a : b = c : d,$$

которая называется геометрической пропорціей, или просто пропорціей. Члены b и c называются средними членами пропорціи, а члены a и d называются крайними членами.

Если написана пропорція, то говорятъ, что четыре числа, ее образующія, пропорціональны между собою.

Мы видѣли, что пропорція между четырьмя цѣлыми числами есть не что иное, какъ равенство двухъ дробныхъ чиселъ, а потому на основаніи опредѣленія равенства двухъ дробныхъ чиселъ, даннаго въ § 2, мы получаемъ такое основное свойство геометрической пропорціи.

Свойство. **Произведеніе крайнихъ членовъ геометрической пропорціи равно произведенію среднихъ ея членовъ**

$$ad = bc.$$

§ 14. Въ ариѳметикѣ мы производили вычисленія одинаково, какъ надъ цѣлыми, такъ и надъ дробными числами. Основная причина, по которой дробныя числа получили одинаковое въ математикѣ приложеніе съ цѣлыми числами, состоитъ въ томъ, что дѣйствія надъ дробными числами удовлетворяютъ тѣмъ же формальнымъ законамъ алгебры, какъ и числа цѣлыя.

Такъ, напримѣръ, для дробныхъ чиселъ справедливъ перемѣстительный законъ сложенія и умноженія; другими словами, если мы обозначимъ черезъ α какое-нибудь дробное число, а черезъ β другое дробное число, то будемъ имѣть, совершенно такъ же, какъ и для цѣлыхъ чиселъ, равенства

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ будутъ имѣть мѣсто законы сочетательный и распредѣлительный

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma); \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma); \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

ГЛАВА III.

Числа отрицательныя.

§ 1. Подобно тому, какъ при помощи дробныхъ чиселъ сдѣлалась возможною задача дѣленія одного числа на другое, такъ, приступая къ изученію алгебры, мы должны ввести новыя числа, называемыя отрицательными, цѣль введенія которыхъ состоитъ въ томъ, чтобы сдѣлать дѣйствіе вычитанія всегда возможнымъ, даже въ томъ случаѣ, когда изъ меньшаго числа вычитается большее.

§ 2. Будемъ называть ариѳметическимъ отношеніемъ двухъ цѣлыхъ или дробныхъ чиселъ формулу

$$a - b.$$

Ариѳметическое отношеніе, если указанное вычитаніе возможно, показываетъ, насколько число a больше числа b. Число a называется предыдущимъ членомъ ариѳметическаго отношенія, а число b называется послѣдующимъ членомъ отношенія. Подъ буквами a и b мы будемъ разумѣть какія угодно цѣлыя или дробныя числа.

Если число a больше числа b, то, производя вычитаніе по правиламъ дѣйствій надъ цѣлыми или дробными числами, получимъ для отношенія $a - b$ опредѣленное число.

Если число a равно числу b, то отношеніе будетъ представлять число нуль.

Если же, наконецъ, число a меньше числа b, то отношеніе $a - b$ будетъ представлять число новой природы, которое по причинамъ, о которыхъ мы скажемъ дальше, будемъ называть числомъ отрицательнымъ.

Мы просимъ не совмѣщать съ этими числами какихъ-либо представленій, которыя были бы навязаны изученіемъ чиселъ предыдущаго вида, то есть дробныхъ и цѣлыхъ; отрицательныя числа суть числа совершенно новыя, и дѣйствія надъ ними требуютъ новыхъ опредѣленій.

Мы поступимъ такъ: вмѣсто того, чтобы указывать, какъ надо производить дѣйствія надъ числами отрицательными, мы покажемъ, какъ производить дѣйствія надъ ариѳметическими отно-

шеніями, такъ что получатся сразу дѣйствія надъ всякими числами, судя по тому, какими будутъ эти отношенія. Дѣйствія надъ отношеніями мы опредѣлимъ такъ, чтобы въ томъ случаѣ, когда отношенія представляютъ числа намъ уже извѣстныя, то есть цѣлыя или дробныя, выходили у насъ прежнія дѣйствія уже изложенныя выше.

§ 3. Разсмотримъ равенство двухъ ариѳметическихъ отношеній

$$a - b = c - d.$$

Будемъ такое равенство называть ариѳметической пропорціей, причемъ числа a и d будемъ называть крайними членами пропорціи, a, b и c — средними ея членами.

Если оба отношенія, составляющія пропорцію, числа обыкновенныя, а не новыя, отрицательныя, то есть, если $a > b$ и $c > d$, то мы можемъ доказать относительно ариѳметическихъ пропорцій слѣдующее основное свойство:

Свойство. Сумма крайнихъ членовъ ариѳметической пропорціи равна суммѣ ея среднихъ членовъ, т. е.

$$a + d = b + c.$$

Чтобы это доказать, обозначимъ черезъ p общую величину двухъ отношеній $a - b$ и $c - d$. По предположенію число p принадлежитъ къ числу намъ извѣстныхъ, т. е. цѣлыхъ или дробныхъ. Итакъ, пусть

$$a - b = p,\ c - d = p.$$

По опредѣленію дѣйствія вычитанія имѣемъ

$$a = b + p,\ \ c = d + p.$$

Прибавляя къ равнымъ числамъ поровну, получимъ

$$a + d = b + p + d,$$
$$c + b = d + p + b;$$

такъ какъ числа $a + d$ и $c + b$ равны одному и тому же числу $b + p + d$, то

$$a + d = c + b,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда у насъ является полное основаніе поставить равенство суммы крайнихъ суммѣ среднихъ въ качествѣ опредѣленія во всѣхъ случаяхъ, то есть не только тогда, когда при вычисленіи отношеній можно произвести вычитаніе, но также и въ случаѣ чиселъ отрицательныхъ.

I. Опредѣленіе равенства.

§ 4. **Два отношенія $a - b$ и $c - d$ называются равными**

$$a - b = c - d,$$

когда

$$a + d = b + c.$$

Такъ, напримѣръ, два отрицательныхъ числа $2-7$ и $4-9$ равны между собой, ибо

$$2+9=4+7=11,$$

такъ что можно написать

$$2-7=4-9.$$

§ 5. Какъ слѣдствіе изъ опредѣленія равенства двухъ отношеній вытекаетъ, что къ обѣимъ частямъ отношенія, то есть къ предыдущему и къ послѣдующему членамъ, можно прибавить одно и то же число, потому что будетъ непремѣнно при всякомъ числѣ p существовать пропорція

$$(a+p)-(b+p)=a-b,$$

ибо будетъ, очевидно, имѣть мѣсто равенство

$$(a+p)+b=(b+p)+a.$$

Понятно, что подобнымъ образомъ можно будетъ вычитать число изъ обѣихъ частей отношенія.

То, что мы сейчасъ сказали, извѣстно, конечно, уже изъ ариѳметики для того случая, когда вычитаніе выполнимо, потому что въ ариѳметикѣ доказывалось уже, что разность не зависитъ отъ одинаковаго увеличенія или уменьшенія уменьшаемаго и вычитаемаго.

Теперь же мы доказали, что разность не мѣняется и въ томъ случаѣ, когда вычитаніе не выполнимо.

§ 6. Возможность вычитать изъ предыдущаго и послѣдующаго членовъ одно и то же число даетъ возможность упрощать видъ отрицательнаго числа; такъ, напримѣръ,

$$5-9=4-8=3-7=2-6=1-5=0-4.$$

Послѣдній видъ $0-4$ для отрицательнаго числа, въ которомъ предыдущій членъ равенъ нулю, является простѣйшимъ видомъ отрицательнаго числа. Нуль обыкновенно не пишется, и получается знакъ

$$-4,$$

который принятъ для обозначенія отрицательнаго числа.

Такъ какъ всякое прежнее число, напримѣръ, 4 можно записать такъ: $0+4$, то пропуская нуль, можно написать

$$+4.$$

Ввиду сказаннаго прежнія числа называются также числами положительными.

Въ знакѣ -4 отрицательнаго числа положительное число 4 называется абсолютною величиною. Абсолютную величину мы будемъ обозначать знакомъ

$$|-4|=4.$$

Итакъ, всякое число, которое въ этой главѣ мы будемъ разсматривать, будетъ состоять изъ абсолютной величины, которая будетъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, и изъ стоящаго передъ этой абсолютной величиной знака $+$ или $-$. Если этотъ знакъ $+$, то число будетъ положительнымъ; если этотъ знакъ $-$, то число будетъ отрицательнымъ.

§ 7. Теорема. **Два отрицательныхъ числа $-a$ и $-b$ равны тогда и только тогда, когда ихъ абсолютныя величины a и b равны.**

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи опредѣленія равенства отношеній (см. § 4, стр. 15) имѣемъ, что равенство

$$0-a=0-b$$

можетъ имѣть мѣсто только при равенствѣ

$$0+b=0+a,$$

то есть

$$a=b.$$

§ 8. На основаніи соображеній предыдущаго §-а мы замѣчаемъ, что будутъ имѣть мѣсто одновременно два равенства

$$-a=-b \text{ и } +a=+b,$$

то есть, другими словами, отъ измѣненія знака передъ равными числами числа остаются равными.

II. Опредѣленіе неравенства.

§ 9. **Два отношенія $a-b$ и $c-d$ неравны между собою, если сумма крайнихъ $a+d$ не равна суммѣ среднихъ $b+c$.**

Отсюда слѣдуетъ, что отрицательное число $a-b$ не можетъ равняться положительному $c-d$. Въ этомъ случаѣ $b>a$ и $c>d$; отсюда сумма $b+c$ чиселъ большихъ будетъ больше суммы $a+d$ чиселъ меньшихъ.

III. Продолженіе опредѣленія неравенства.

§ 10. **Отношеніе $a-b$ больше отношенія $c-d$, если сумма $a+d$ больше суммы $b+c$.**

39 21 7
БИБЛИОТЕКА
Белорусского
института инженеров
железнодорожного

Изъ послѣдняго опредѣленія будетъ слѣдовать, что всякое отрицательное число меньше нуля. Въ самомъ дѣлѣ, если $a=b$, то отношеніе $a-b$ равно нулю; съ другой стороны, если отношеніе $c-d$ есть отрицательное число, то $c<d$, а тогда будетъ, очевидно,

$$a+d>c+b,$$

и, значитъ, отрицательное число $c-d$ меньше нуля (т. е. $a-b$).

§ 11. Послѣ введенія въ разсмотрѣніе чиселъ отрицательныхъ число нуль является уже въ другой роли, а именно, раньше нулемъ мы называли простое отсутствіе числа, теперь же нуль является числомъ, стоящимъ на границѣ между числами положительными и отрицательными, причемъ нуль меньше всякаго положительнаго числа и больше всякаго отрицательнаго числа; напримѣръ;

$$-\frac{3}{2}<0<+2\,.$$

§ 12. Обращаясь къ сравненію между собою двухъ отрицательныхъ чиселъ, написанныхъ въ простѣйшемъ видѣ, мы можемъ доказать такую теорему:

Теорема. **Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютная величина меньше.**

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи опредѣленія неравенства, даннаго въ § 10 (стр. 17) получаемъ

$$0-a>0-b,$$

если

$$0+b>a+0,$$

или

$$a<b.$$

Такъ, напримѣръ,

$$-2>-5,$$

ибо 5 больше чѣмъ 2.

IV. Опредѣленіе сложенія.

§ 13. **Подъ суммой двухъ отношеній $a-b$ и $c-d$ разумѣется отношеніе**

$$(a+c)-(b+d),$$

въ которомъ предыдущій членъ $a+c$ равенъ суммѣ предыду-

щихъ членовъ a **и** c, **а послѣдующій** $b+d$ **равенъ суммѣ послѣдующихъ** b **и** d.

На основаніи этого опредѣленія получается правило для сложенія отрицательныхъ чиселъ между собой, а также для сложенія чиселъ отрицательныхъ и положительныхъ въ томъ случаѣ, когда числа отрицательныя написаны въ простѣйшемъ видѣ.

1°., **При сложеніи двухъ отрицательныхъ чиселъ складываются ихъ абсолютныя величины и передъ суммой абсолютныхъ величинъ ставится знакъ —, ибо**

$$(0-a)+(0-b)=(0+0)-(a+b),$$

то есть

$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

Напримѣръ,

$$(-2)+(-4)=-6.$$

2°., **При сложеніи отрицательнаго числа съ положительнымъ изъ большей абсолютной величины вычитается меньшая и передъ разностью ставится** знакъ, который стоялъ при слагаемомъ съ большей абсолютной величиной, ибо

$$(a-0)+(0-b)=(a+0)-(0+b)=a-b.$$

Если $a>b$, то число $(a-b)$ положительное.
Если $a<b$, то число $(a-b)$ отрицательное, равное $-(b-a)$.
Напримѣръ,

$$(-3)+(+2)=-(3-2)=-1.$$

§ 14. Для полученія правила вычитанія отношеній поступимъ такъ.

Пусть дано отношеніе

1) $$a-b;$$

если мы переставимъ предыдущій и послѣдующій члены одинъ на мѣсто другого, то есть, другими словами, составимъ отношеніе

(2) $$b-a,$$

то получимъ новое отношеніе (2), которое будемъ называть числомъ противоположнымъ числу (1), причемъ сумма всякаго числа (1) и противоположнаго числа (2) будетъ равна нулю, ибо

$$(a-b)+(b-a)=(a+b)-(b+a)=0.$$

Если отношеніе написано въ простѣйшемъ видѣ, то противо-

положное число получится простымъ измѣненіемъ знака, напримѣръ,

$$(4-0)+(0-4)=0 \text{ или } (+4)+(-4)=0,$$
$$(0-3)+(3-0)=0 \text{ или } (-3)+(+3)=0.$$

Нетрудно убѣдиться, что вычесть изъ числа α число β, это все равно, что прибавить къ числу α число противоположное числу β.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется изъ отношенія $a-b$ вычесть отношеніе $c-d$; нетрудно убѣдиться, что искомая разность получится, если мы къ числу $a-b$ прибавимъ обратное вычитаемому число $d-c$

$$(1) \qquad (a-b)+(d-c)=(a+d)-(b+c).$$

Что число (1) есть искомая разность чиселъ

$$a-b \text{ и } c-d,$$

слѣдуетъ изъ того соображенія, что черезъ прибавленіе къ числу (1) числа $c-d$ получится дѣйствительно число $a-b$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$[(a+d)-(b+c)]+(c-d)=(a+d+c)-(b+c+d)=$$
$$=a-b.$$

§ 15. Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію правила умноженія чиселъ отрицательныхъ, разсмотримъ, какъ надо перемножать отношенія

$$a-b,\ c-d$$

въ томъ случаѣ, когда эти отношенія суть положительныя числа

$$a-b=p,\ c-d=q.$$

Разсмотримъ произведеніе pq. Умножая на q два равныхъ числа p и $a-b$, получимъ

$$pq=(a-b)q.$$

Вслѣдствіе существованія распредѣлительнаго закона для положительныхъ чиселъ, имѣемъ

$$(a-b)q=aq-bq,$$

то есть

$$pq=aq-bq,$$

или

$$pq=a(c-d)-b(c-d).$$

На основаніи того же распредѣлительнаго закона получаемъ

$$a(c-d)=ac-ad,\ b(c-d)=bc-bd;$$

отсюда

$$pq=[ac-ad]-[bc-bd].$$

Примѣняя же правило вычитанія отношеній, получимъ

$$pq=(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc).$$

Правило, выражаемое послѣдней формулой, перенесемъ и на случай отрицательныхъ чиселъ.

V. Опредѣленіе умноженія.

§ 16. Умноженіе отрицательныхъ чиселъ будемъ опредѣлять при помощи формулы

$$(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(bc+ad). \tag{1}$$

Такъ, напримѣръ,

$$(3-6)(2-7)=3\,.\,2+6\,.\,7-(3\,.\,7+2\,.\,6)=48-33=15,$$

или

$$(-3)(-5)=+15.$$

Это опредѣленіе приводитъ къ простому правилу умноженія, если отрицательное число написано въ простѣйшемъ видѣ.

1°., Умноженіе положительнаго числа на отрицательное.

$$(+a)(-b)=(a-0)(0-b)=$$
$$=(a\,.\,0+0\,.\,b)-(ab+0\,.\,0)=-ab.$$

Итакъ,

$$(+a)(-b)=-ab.$$

2°., Умноженіе отрицательнаго числа на отрицательное.

$$(-a)(-b)=(0-a)(0-b)=(0\,.\,0+ab)-(0\,.\,b+0\,.\,a),$$

или

$$(-a)(-b)=+ab.$$

Мы получаемъ удобное для запоминанія правило умноженія

$$\begin{aligned}(+a)(+b)&=+ab,\\(+a)(-b)&=-ab,\\(-a)(+b)&=-ab,\\(-a)(-b)&=+ab.\end{aligned} \tag{2}$$

При умноженіи двухъ чиселъ перемножаются ихъ абсолютныя величины и къ полученному произведенію приписывается знакъ + (плюсъ), если оба множителя имѣютъ одинаковые знаки, и знакъ — (минусъ), если множители имѣютъ разные знаки.

§ 17. Изъ предыдущаго мы выводимъ простое правило для перемноженія какого угодно числа множителей.

Надо перемножить абсолютныя величины всѣхъ множителей и къ полученному произведенію приписать знакъ + или — въ зависимости отъ того, будетъ ли число отрицательныхъ множителей четное или нечетное, напримѣръ,

$$(-3)(+2)(+4)(-7)(-1)=-(3\,.\,2\,.\,4\,.\,7\,.1)=-168.$$

§ 18. Формулы

$$(+a)(-1)=-a,\ (-a)(-1)=+a$$

показываютъ, что умноженіе на —1 равносильно измѣненію знака.

§ 19. Если мы перепишемъ формулы (2) § 16 (стр. 21) въ такомъ видѣ

$$\frac{+ab}{+b}=+a,\quad \frac{-ab}{-b}=+a,$$
$$\frac{-ab}{+b}=-a,\quad \frac{+ab}{-b}=-a,$$

то получаемъ такое правило дѣленія чиселъ положительныхъ и отрицательныхъ:

При дѣленіи надо раздѣлить абсолютную величину дѣлимаго на абсолютную величину дѣлителя и знакъ поставить + или — въ зависимости отъ того, будетъ ли дѣлимое и дѣлитель одного знака или разнаго.

Напримѣръ,

$$(-3):(-5)=+\frac{3}{5}.$$

§ 20. Данное нами опредѣленіе дѣйствія умноженія отношеній приводитъ къ слѣдующей теоремѣ.

Отъ умноженія всякаго числа на нуль получается нуль.

Въ справедливости этой теоремы можно убѣдиться, полагая въ формулѣ (1) § 16 (стр. 21) вмѣсто b число a

$$(a-a)(c-d)=(ac+ad)-(ac+ad),$$

то есть

$$0(c-d)=0.$$

Точно такъ же, полагая c вмѣсто d, получимъ

$$(a-b)(c-c)=(ac+bc)-(ac+bc),$$

то есть

$$(a-b)0=0.$$

Мы приходимъ къ заключенію, что произведеніе двухъ или нѣсколькихъ чиселъ **тогда и только тогда равно нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю.** (Могутъ равняться нулю, конечно, и нѣсколько множителей).

Поле чиселъ раціональныхъ.

§ 21. Положительныя и отрицательныя числа могутъ имѣть какъ цѣлую, такъ и дробную абсолютную величину

$$+3,\ +\frac{11}{7},\ -8,-\frac{27}{35}.$$

Всѣ такія числа образуютъ совокупность, такъ называемыхъ, чиселъ раціональныхъ или соизмѣримыхъ.

Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ обозначать совокупность раціональныхъ чиселъ буквою R.

Разсматриваемыя нами числа получили названіе чиселъ соизмѣримыхъ по той причинѣ, что ихъ абсолютная величина имѣетъ общую мѣру съ единицей. Напримѣръ, если абсолютная величина есть

$$\frac{m}{n},\tag{1}$$

гдѣ m и n два натуральныхъ числа, то общая мѣра есть

$$\frac{1}{n}.$$

Эта общая мѣра заключается цѣлое число разъ (m разъ) въ числѣ (1) и также цѣлое число разъ (n разъ) въ единицѣ:

$$\frac{1}{n}.n=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{1}=\frac{1.n}{n.1}=1.$$

§ 22. Нетрудно убѣдиться, что числа раціональныя удовлетворяютъ слѣдующимъ **основнымъ законамъ формальной алгебры.**

. Перестановочный законъ сложенія и умноженія

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \quad \alpha\beta = \beta\alpha.$$

II. Сочетательный законъ сложенія и умноженія

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma; \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

III. Распредѣлительный законъ

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

IV. Произведеніе равно нулю тогда и только тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю

$$\alpha . 0 = 0.$$

V. Дѣйствіе вычитанія всегда возможно[1]).

VI. Дѣйствіе дѣленія всегда возможно, за исключеніемъ дѣленія на нуль[2]).

Провѣрка справедливости первыхъ трехъ законовъ для случая чиселъ отрицательныхъ не представляетъ никакого затрудненія, если предполагать, что мы уже убѣдились въ справедливости ихъ для чиселъ положительныхъ какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ.

Докажемъ который нибудь, на выборъ взятый, законъ; напримѣръ,

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

Пусть будетъ $\alpha = a - b$, $\beta = c - d$, тогда

$$\alpha\beta = (a - b)(c - d) = (ac + bd) - (bc + ad),$$
$$\beta\alpha = (c - d)(a - b) = (ca + db) - (da + cb);$$

но числа a, b, c, d положительныя, относительно которыхъ законы уже доказаны, слѣдовательно, выраженія $ac + bd$ и $ca + db$ представляютъ одно и то же число; подобнымъ образомъ даютъ одно и то же число выраженія $bc + ad$ и $da + cb$.

Справедливость законовъ IV, V, VI непосредственно вытекаетъ изъ всего сказаннаго въ настоящей главѣ.

§ 23. Мы будемъ называть числовымъ полемъ или просто полемъ такую совокупность чиселъ, надъ которыми можно производить всѣ четыре дѣйствія: сложеніе, умноженіе, вычитаніе и дѣленіе, причемъ эти дѣйствія должны быть такъ установлены, чтобы были справедливыми всѣ шесть, приведенныхъ въ § 22 законовъ.

Совокупность R чиселъ раціональныхъ представляетъ изъ себя поле.

§ 24. Разсмотримъ примѣры совокупностей чиселъ, которыя не могутъ быть названы полями.

---

[1]) Возможность вычитанія происходитъ отъ того, что числа отрицательныя уже включены въ нашу совокупность R.

[2]) Возможность дѣленія происходитъ отъ того, что въ нашей совокупности существуютъ числа дробныя.

Напримѣръ, разсмотримъ совокупность чиселъ цѣлыхъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ, включая въ ихъ число также нуль

$$\ldots . -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. 4, \ldots .$$

Эта совокупность удовлетворяетъ законамъ I, II, III, IV, V; но законъ VI не имѣетъ мѣста, ибо дѣленіе не всегда возможно, такъ какъ дробныхъ чиселъ въ нашей совокупности нѣтъ, а потому нельзя, напримѣръ, раздѣлить число 3 на число 5, такъ какъ получается число $\frac{3}{5}$, которое не входитъ въ нашу совокупность.

Подобнымъ же образомъ не будетъ полемъ совокупность всѣхъ положительныхъ чиселъ какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, ибо для такой совокупности справедливы законы I, II, III, IV, VI, но законъ V не имѣетъ мѣста, ибо вслѣдствіе отсутствія чиселъ отрицательныхъ нельзя вычитать изъ меньшаго числа бо́льшаго.

§ 25. Всѣ числа раціональныя обладаютъ свойствомъ, что между каждыми двумя изъ нихъ

$$\alpha < \beta.$$

существуетъ безчисленное множество промежуточныхъ.

Промежуточнымъ мы будемъ называть такое число γ, которое удовлетворяетъ неравенству

$$\alpha < \gamma < \beta.$$

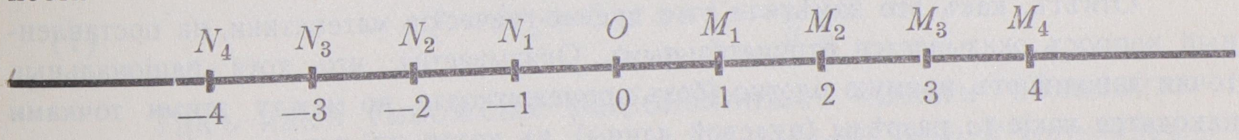
Это свойство носитъ названіе свойства плотности поля R.

Для доказательства справедливости этого свойства достаточно показать, что между каждыми двумя числсми α, β $(\beta > \alpha)$ поля R существуетъ по крайней мѣрѣ одно промежуточное число γ того же поля. Такое число γ мы получимъ, если къ меньшему числу α мы прибавимъ, напримѣръ, половину разности между большимъ и меньшимъ

$$\gamma = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Далѣе покажемъ, что между числами α, γ и между числами γ, β находятся новыя промежуточныя числа. Продолжая разсужденіе далѣе, мы приходимъ къ заключенію, что между числами α и β существуетъ безсчисленное множество промежуточныхъ чиселъ.

§ 26. Пояснимъ, въ чемъ состоитъ геометрическое толкованіе свойства плотности



Возьмемъ на прямой нѣкоторую произвольно выбранную точку O; отложимъ нѣсколько разъ направо отъ этой точки отрѣзокъ, длина котораго принята за единицу длинъ. Получимъ послѣдовательный рядъ точекъ $M_1, M_2, M_3, \ldots .$ Подобнымъ образомъ, откладывая единицу длины налѣво отъ точки O, получимъ точки $N_1, N_2, N_3, \ldots .$

Сопоставимъ точкѣ O число нуль, точкамъ

$$M_1, M_2, M_3, \ldots .$$

цѣлыя положительныя числа

$$1, 2, 3, \ldots\ldots$$

точкамъ же

$$N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$$

цѣлыя отрицательныя числа

$$-1, -2, -3, \ldots\ldots$$

Тогда всякому числу $\pm m$ будетъ соотвѣтствовать точка, разстояніе которой отъ основной точки O будетъ равно абсолютной величинѣ m. Знакъ же покажетъ, съ которой стороны относительно O находится точка, соотвѣтствующая числу $\pm m$. Если знакъ $+$, то есть разсматривается число $+m$, то соотвѣтствующая точка лежитъ направо отъ O; при знакѣ — точка лежитъ налѣво.

Если мы раздѣлимъ пополамъ при помощи новыхъ точекъ отрѣзки между точками

(1) $$\ldots N_3, N_2, N_1, O, M_1, M_2, M_3, \ldots$$

то, очевидно, что точки дѣленія будутъ соотвѣтствовать числамъ

$$\ldots\ldots -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots\ldots$$

Далѣе при помощи дѣленія отрѣзковъ на три части получимъ точки, соотвѣтствующія числамъ

$$\ldots\ldots -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots\ldots$$

Продолжая дѣленіе отрѣзковъ при помощи новыхъ точекъ на 4, 5, 6. . . . частей, получимъ точки соотвѣтствующія различнымъ раціональнымъ числамъ

$$\pm\frac{m}{n}.$$

Мы будемъ говорить, что точки, соотвѣтствующія раціональнымъ числамъ, заполняютъ плотно прямую, ибо, очевидно, что, какой бы малый отрѣзокъ на разсматриваемой прямой мы ни взяли, на немъ будетъ лежать безчисленное множество точекъ, соотвѣтствующихъ раціональнымъ числамъ.

Будемъ называть для сокращенія рѣчи точки, соотвѣтствующія раціональнымъ числамъ, раціональными точками.

§ 27. Является существеннымъ вопросъ, исчерпываются ли раціональными точками всѣ точки прямой.

Отвѣтъ, какъ это замѣтили уже древне-греческіе математики, на поставленный вопросъ оказывается отрицательнымъ. Оказывается, что, хотя раціональныя точки заполняютъ прямую плотно (безъ промежутковъ), но между этими точками находятся какіе-то разрѣзы (нулевой длины), въ которыхъ находятся (въ каждомъ по одной) точки, не соотвѣтствующія раціональнымъ числамъ

Эти точки приходится сопоставить новымъ числамъ, о которыхъ мы будемъ въ дальнѣйшемъ изложеніи говорить и которыя мы будемъ называть ирраціональными или несоизмѣримыми.

Хотя нѣтъ возможности представить себѣ наглядно разрѣзы съ длиною нуль, но фактъ ихъ существованія приходится, какъ мы увидимъ далѣе, признать.

ГЛАВА IV.

Формальная алгебра раціональныхъ дѣйствій.

§ 1. Будемъ во всемъ дальнѣйшемъ, пока не понадобится новаго обобщенія понятія о числѣ, подъ буквами, входящими въ формулы, подразумѣвать числа раціональныя.

Если мы надъ буквами, изображающими раціональныя числа, будемъ производить четыре дѣйствія: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, то въ результатѣ получится опять раціональное число. Это обстоятельство слѣдуетъ изъ данныхъ нами правилъ дѣйствій надъ числами раціональными.

Напримѣръ, разсмотримъ формулу

$$\frac{(a+b)c}{3(d-e)}$$

Пусть $a=-\frac{1}{2}, b=-3, \quad c=\frac{5}{3}, \quad d=0, e=\frac{7}{9}$; тогда получаемъ

$$a+b=-\frac{1}{2}-3=-\left(\frac{1}{2}+3\right)=-\frac{7}{2},$$

$$(a+b)c=\left(-\frac{7}{2}\right)\left(+\frac{5}{3}\right)=-\frac{35}{6},$$

$$d-e=0-\frac{7}{9}=-\frac{7}{9}, \quad 3(d-e)=-\frac{7}{3};$$

окончательно

$$\frac{(a+b)c}{3(d-e)}=\left(-\frac{35}{6}\right):\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{35}{6}:\frac{7}{3}=\frac{5}{2}.$$

Одночленъ.

§ 2. Одночленомъ называется всякое произведеніе ряда чиселъ, изъ которыхъ всѣ или нѣкоторыя могутъ быть обозначены буквами.

Напримѣръ,

$$(1) \qquad a(-b)(+3)c\,a\,a\left(-\frac{2}{5}\right)d.$$

Такъ какъ умноженіе раціональныхъ чиселъ обладаетъ перестановочнымъ закономъ, то можно будетъ нашъ одночленъ (1) переписать такимъ образомъ, чтобы во-первыхъ не было множителей со знаками минусъ, во-вторыхъ, чтобы числовые множители оказались написанными налѣво отъ буквенныхъ.

Получаемъ въ данномъ случаѣ

$$+3.\frac{2}{5}a\,bc\,a\,a\,d$$

или иначе, пропуская знакъ $+$,

$$3 . \frac{2}{5} a\, bc\, a\, a\, d .$$

Вслѣдствіе сочетательнаго закона умноженія получаемъ

$$\left(3 . \frac{2}{5}\right)(a\, a\, a)\, b\, c\, d = \frac{6}{5} a^3\, b\, c\, d.$$

Коэффиціентъ.

§ 3. Численный множитель, стоящій передъ буквеннымъ выраженіемъ въ одночленѣ, называется коэффиціентомъ или предстоящимъ.

Такъ, напримѣръ, въ выраженіи $\frac{6}{5} a^3\, b\, c\, d$ число $\frac{6}{5}$ есть предстоящій.

Цѣлый предстоящій показываетъ, сколько разъ берется слагаемымъ буквенное выраженіе.

Напримѣръ,

$$5\, ac^2 = ac^2 .\ 5 = ac^2 + ac^2 + ac^2 + ac^2 + ac^2 .$$

Дробный предстоящій показываетъ, какая дробная часть берется отъ буквеннаго выраженія.

Напримѣръ, $\frac{4}{3} \pi abc$ показываетъ, что берется четыре трети отъ числа πabc.

Если коэффиціента въ одночленѣ нѣтъ, напримѣръ, если написаны два одночлена

$$+ abc, \quad - a^2 d,$$

то мы будемъ говорить, что этотъ коэффиціентъ все таки существуетъ и равенъ $+1$ у одночлена $+abc$; у одночлена же $-a^2 d$ онъ равенъ -1.

Всякое число

$$\frac{4}{3}$$

мы будемъ считать за одночленъ, буквенное выраженіе котораго равно единицѣ, т. е. $\frac{4}{3} . 1$.

Многочленъ.

§ 4. Формула, составленная изъ нѣсколькихъ одночленовъ, соединенныхъ между собой знакомъ + или —, называется многочленомъ или полиномомъ. Напримѣръ,

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab.$$

Одночлены, изъ которыхъ составленъ многочленъ, называются его членами.

Члены многочлена обыкновенно разсматриваются съ ихъ знаками

$$+a^2, +b^2, +c^2, -bc, -ca, -ab.$$

Члены со знакомъ + называются положительными, а со знакомъ — отрицательными.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, называется двучленомъ или биномомъ; изъ трехъ членовъ — трехчленомъ и т. д.

§ 5. Необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что выраженіе вида

$$3a\ (b + c^2 - ed)\ q$$

приходится считать за одночленъ, ибо скобки показываютъ, что трехчленъ $b + c^2 - ed$ считается за одинъ множитель.

Подобные члены.

§ 6. Подобными называются такіе члены въ многочленѣ, у которыхъ буквенныя выраженія одинаковы.

На основаніи этого опредѣленія слѣдуетъ, что подобные члены могутъ отличаться только предстоящими и знаками этихъ предстоящихъ.

Напримѣръ, въ многочленѣ

$$3ax^3 - 5a^2b + \frac{3}{2}a^2b - ax^3 - y$$

первый членъ подобенъ четвертому $-ax^3$, ибо буквенная часть ax^3 одинакова въ обоихъ этихъ членахъ. Точно такъ же члены $-5a^2b$ и $+\frac{3}{2}a^2b$ подобны между собой. Пятый членъ $-y$ не имѣетъ себѣ подобнаго.

§ 7. Число буквенныхъ множителей въ одночленѣ называется степенью или измѣреніемъ одночлена.

Напримѣръ, въ многочленѣ

$$-5yz^5 - a^2xb + 3$$

первый членъ $-5yz^5 = -5y\ zzzzz$ имѣетъ шестое измѣреніе, $-a^2xb = -a\,a\,x\,b$ имѣетъ четвертое измѣреніе, а членъ 3 имѣетъ нулевое измѣреніе.

§ 8. Многочленъ называется однороднымъ, если всѣ его члены имѣютъ одинаковое измѣреніе.

Напримѣръ, выраженіе $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія.

§ 9. Очевидно, что подобные члены имѣютъ одно и то же измѣреніе.

Приведеніе подобныхъ членовъ.

§ 10. На основаніи выясненнаго въ § 22 (стр. 24) главы III факта, что для чиселъ раціональныхъ дѣйствія сложенія и умноженія обладаютъ тремя основными формальными законами: перемѣстительнымъ, сочетательнымъ и распредѣлительнымъ, слѣдуетъ возможность, не нарушая численной величины многочлена, дѣлать самыя разнообразныя преобразованія его внѣшняго вида. Такъ, напримѣръ, можно какъ угодно переставлять его члены, какъ угодно группировать въ скобки эти члены и, наконецъ, слѣдуя распредѣлительному закону, брать общіе множители за скобки.

Напримѣръ:

$$a - 3b + cd = cd - 3b + a = -3b + a + cd = \text{и. т. д.}$$

Что касается группировки въ частичныя суммы, то можно замѣтить, что вычисленіе многочлена

(1) $$a + b + c + d$$

можно привести къ вычисленію выраженія

$$(a + b) + (c + d),$$

въ которомъ надо сначала вычислить суммы $a + b$ и $c + d$, а потомъ эти двѣ суммы сложить. Получится тотъ же результатъ, который выходитъ по первоначальному выраженію.

§ 11. На основаніи сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ получается весьма важный способъ упрощенія вида многочлена, называемый приведеніемъ подобныхъ членовъ.

Переставляемъ члены такимъ образомъ, чтобы подобные члены стояли группами рядомъ.

Напримѣръ, многочленъ

$$4ab^2 - 3z^3 + \frac{5}{2}ab^2 - ac + z^3 - \frac{2}{3}ab^2 + 2z^3$$

послѣ такой перестановки принимаетъ видъ

$$(1) \qquad \left(4ab^2 + \frac{5}{2}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2\right) + (-3z^3 + z^3 + 2z^3) - ac.$$

Далѣе къ каждой группѣ рядомъ стоящихъ членовъ примѣняемъ распредѣлительный законъ, т. е. беремъ за скобку буквенное выраженіе этихъ подобныхъ членовъ.

Въ данномъ случаѣ выраженіе (1) преобразуется такъ

$$\left(4 + \frac{5}{2} - \frac{2}{3}\right)ab^2 + (-3 + 1 + 2)z^3 - ac.$$

Вычисляемъ числа, стоящія въ скобкахъ,

$$4 + \frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{24}{6} + \frac{15}{6} - \frac{4}{6} = \frac{35}{6},$$

$$-3 + 1 + 2 = 0,$$

слѣдовательно, получаемъ окончательно

$$\frac{35}{6}ab^2 - ac.$$

Члены $-3z^3 + z^3 + 2z^3$ дали въ суммѣ нуль и, какъ говорятъ, эти члены сократились.

Итакъ, описанное нами приведеніе подобныхъ членовъ есть операція, упрощающая видъ многочлена; при этой операціи каждая группа подобныхъ членовъ даетъ одинъ членъ, причемъ этотъ членъ можетъ совсѣмъ пропасть. Въ результатѣ получается многочленъ, не имѣющій подобныхъ членовъ.

Сложеніе одночленовъ и многочленовъ.

§ 12. На основаніи выведеннаго въ § 18 (стр. 22) главы III правила знаковъ можно представить всякій многочленъ

$$3a - 4bc + 5ad - 6$$

въ видѣ суммы членовъ

$$(+3a) + (-4bc) + (+5ad) + (-6),$$

а потому мы можемъ высказать такое общее правило:

Правило сложенія одночленовъ. Чтобы сложить рядъ одночленовъ необходимо составить изъ нихъ многочленъ, въ составъ котораго входили бы, какъ отдѣльные члены, всѣ эти слагаемыя съ ихъ знаками.

§ 13. Правило сложенія многочленовъ основывается на сочетательномъ законѣ, а именно въ выраженіи

$$(a+b+c)+(-d+e-f)+(g-h)$$

можно раскрыть скобки, причемъ получится

$$a+b+c-d+e-f+g-h,$$

и мы приходимъ къ правилу:

Правило сложенія многочленовъ. Сумма нѣсколькихъ многочленовъ составляется, какъ многочленъ, въ составъ котораго входятъ всѣ члены слагаемыхъ съ ихъ знаками.

Вычитаніе одночленовъ и многочленовъ.

§ 14. Въ § 14 главы III (стр. 20) мы видѣли, что вычитаніе числа b равносильно сложенію обратнаго числа $-b$, т. е.

$$a-b=a+(-b).$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило вычитанія одночленовъ и многочленовъ:

Правило вычитанія многочленовъ. Чтобы вычесть многочленъ, достаточно приписать къ уменьшаемому всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками.

Напримѣръ,

$$(3a-4b)-(-3ab^2+4bc^2-1)=$$
$$=3a-4b+3ab^2-4bc^2+1.$$

Умноженіе одночленовъ.

§ 15. Вслѣдствіе справедливости сочетательнаго закона умноженія для раціональныхъ чиселъ имѣемъ право при умноженіи одночленовъ высказать слѣдующее правило:

Въ составъ произведенія вводятся всѣ численные и буквенные множители изъ перемножаемыхъ одночленовъ. Знакъ произведенія устанавливается по знакамъ множителей по правилу знаковъ, изложенному въ § 17 главы III (стр. 22).

Напримѣръ,

$$(-15a^3bc)(-3ab^2)(+4ad^2e)=$$
$$=15\,a^3bc\,3ab^2\,4ad^2e.$$

Послѣднее выраженіе можно упростить, а именно соединить при помощи умноженія численные коэффиціенты 15, 3 и 4 въ одинъ коэффиціентъ 180; кромѣ того поставить рядомъ степени одинаковыхъ буквъ; тогда получимъ произведеніе заданныхъ одночленовъ въ такомъ видѣ

$$180\,a^3aa\,bb^2cd^2e;$$

но

$$a^3aa=(aaa)aa=aaaaa=a^5,$$
$$bb^2=b(bb)=bbb=b^3,$$

и мы получаемъ окончательно

$$180a^5b^3c\,d^2e.$$

Вышеприведенное правило можно видоизмѣнить и высказать въ такомъ окончательномъ видѣ.

Чтобы перемножить одночлены, достаточно перемножить ихъ коэффиціенты (съ ихъ знаками), сложить показателей одинаковыхъ буквъ, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, перенести въ произведеніе съ ихъ показателями.

Умноженіе многочлена на одночленъ.

§ 16. На основаніи доказанной для раціональныхъ чиселъ справедливости распредѣлительнаго закона умноженія получаемъ

$$(a+b-c)\,m=am+bm-cm.$$

Получаемъ такое правило:

Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, достаточно умножить на этотъ одночленъ каждый членъ многочлена (съ его знакомъ).

Вслѣдствіе перестановочности дѣйствія умноженія получается такое же правило для умноженія одночлена на многочленъ.

Напримѣръ,

1°., $(-3a^2x+5aby-c)(3aby)=(-3a^2x)(3aby)+(5aby)(3aby)+$
$+(-c)\,3aby=-9a^3bxy+15a^2b^2y^2-3abcy.$

$$2^0.,\quad \left(-\frac{5}{7}xy\right)(3x+4y-6)=\left(-\frac{5}{7}xy\right)(3x)+\left(-\frac{5}{7}xy\right)(4y)+$$
$$+(-6)\left(-\frac{5}{7}xy\right)=-\frac{15}{7}x^2y-\frac{20}{7}xy^2+\frac{30}{7}xy.$$

Умноженіе многочлена на многочленъ.

§ 17. Предположимъ, что надо умножить трехчленъ

$$a+b+c$$

на трехчленъ $\alpha+\beta+\gamma$; тогда, обозначая одной буквой m множителя $\alpha+\beta+\gamma$, получимъ

$$(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)=(a+b+c)m.$$

Разсматривая m, какъ одночленъ, получаемъ

$$(a+b+c)m=am+bm+cm=$$
$$=a(\alpha+\beta+\gamma)+b(\alpha+\beta+\gamma)+c(\alpha+\beta+\gamma)$$

и, наконецъ, получаемъ

$$(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)=a(\alpha+\beta+\gamma)+b(\alpha+\beta+\gamma)+c(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=a\alpha+a\beta+a\gamma+b\alpha+b\beta+b\gamma+c\alpha+c\beta+c\gamma.$$

Для умноженія многочлена на многочленъ необходимо умножить каждый членъ (съ его знакомъ) множимаго на каждый членъ (съ его знакомъ) множителя.

Напримѣръ,

$$(-3xya+7a^2b-3c)(-3xy+2ac-1)=$$
$$=(-3xya)(-3xy)+(+7a^2b)(-3xy)+(-3c)(-3xy)+$$
$$+(-3xya)(+2ac)+(7a^2b)(+2ac)+(-3c)(+2ac)+$$
$$+(-3xya)(-1)+(+7a^2b)(-1)+(-3c)(-1)=$$
$$=9x^2y^2a-21a^2bxy+9cxy-6a^2cxy+14a^3bc-6ac^2+3xya-7a^2b+3c.$$

Замѣчаніе о порядкѣ умноженія. Чтобы не пропустить ни одного изъ частныхъ произведеній, полезно держаться одного какого нибудь порядка умноженія, напримѣръ, умножать сначала всѣ члены множимаго (считая ихъ слѣва направо) на 1-й слѣва членъ множителя, затѣмъ въ томъ же порядкѣ умножать на 2-й членъ, и т. д.

Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.

§ 18. Очень часто бываетъ полезно при умноженіи многочленовъ расположить ихъ члены въ извѣстномъ особенномъ порядкѣ.

Мы говоримъ, что многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ одной буквы, если показатели надъ этой буквой убываютъ при счетѣ этихъ членовъ слѣва направо.

Такъ, напримѣръ, многочленъ

$$3x^5 - 7ax^4 + 8bx^3 - ax^2 + 7ax - 1 \quad (1)$$

расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x.

Совершенно подобнымъ образомъ устанавливается понятіе о расположеніи многочлена по возрастающимъ степенямъ буквы.

Напримѣръ, многочленъ

$$xa + 3xya^2 - a^5 \quad (2)$$

расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы a.

Будемъ называть главною ту букву, по которой расположенъ многочленъ.

Членъ съ наибольшимъ показателемъ надъ главной буквой называется старшимъ членомъ многочлена. Членъ же съ наименьшимъ показателемъ надъ главной буквой называется младшимъ. Если существуетъ членъ, незаключающій главной буквы, то онъ и считается младшимъ.

Такъ, напримѣръ, въ многочленѣ (1) старшій членъ есть $3x^5$, а младшій есть -1; въ многочленѣ же (2) старшій членъ есть $-a^5$, а младшій есть xa.

Если въ многочленѣ существуетъ нѣсколько членовъ съ одинаковою степенью главной буквы, то эту степень надо вынести общимъ множителемъ за скобку; напримѣръ, для расположенія многочлена

$$ax^3 - bx^2 + cx - 2acx^2 - 1$$

по убывающимъ степенямъ буквы x придется его переписать такъ

$$ax^3 - (b + 2ac)\,x^2 + cx - 1;$$

такимъ образомъ выраженіе $-(b + 2ac)$ является коэффиціентомъ при x^2.

§ 19. Можно посовѣтовать располагать умноженіе многочле-

новъ подобно тому, какъ располагается умноженіе цѣлыхъ чиселъ въ ариѳметикѣ.

Напримѣръ, требуется вычислить произведеніе

$$(4x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x)\,(2x^2 - x - 1).$$

То расположеніе, которое мы предлагаемъ, видно безъ всякихъ объясненій изъ слѣдующей таблицы вычисленія

$4x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x$
$2x^2 - x - 1$

$8x^7 - 4x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 6x^3$ . . . . . произведеніе множ. на $2x^2$
$-4x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2$ . . . произведеніе множ. на $-x$
$-4x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ произведеніе множ. на -1

$8x^7 - 8x^6 + 0 - x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x$

$8x^7 - 8x^6 - x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x$ . . . окончательное произведеніе.

§ 20. Весьма важно обратить вниманіе, что умноженіе цѣлыхъ чиселъ можно было бы вывести изъ только что разобраннаго пріема умноженія расположенныхъ многочленовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется перемножить числа

3471 и 256.

Эти числа можно представить такъ

$$3471 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1,$$
$$256 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6.$$

Обозначая $10 = x$, получаемъ два расположенныхъ многочлена

$3x^3 + 4x^2 + 7x + 1$
$2x^2 + 5x + 6$

$18x^3 + 24x^2 + 42x + 6$. произв. множимаго на 6
$15x^4 + 20x^3 + 35x^2 + 5x$ . . . произв. множимаго на $5x$
$6x^5 + 8x^4 + 14x^3 + 2x^2$ . . . . . произв. множимаго на $2x^2$

$6x^5 + 23x^4 + 52x^3 + 61x^2 + 47x + 6$. окончательное произведеніе.

$6x^5 = 6 \cdot 10^5 = 600000$
$23x^4 = 23 \cdot 10^4 = 230000$
$52x^3 = 52 \cdot 10^3 = 52000$
$61x^2 = 61 \cdot 10^2 = 6100$
$47x = 47 \cdot 10 = 470$
$6 = 6 = 6$

искомое произвед. . . 888576

Число членовъ произведенія.

§ 21. Старшій членъ произведенія происходитъ отъ перемноженія старшаго члена множимаго на старшій членъ множителя. Младшій членъ произведенія происходитъ отъ умноженія младшаго члена множимаго на младшій членъ множителя.

Если между членами произведенія, полученными отъ перемноженія отдѣльныхъ членовъ множителя не происходитъ сокращенія, то **общее число членовъ произведенія будетъ равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.**

Напримѣръ,

$$\begin{array}{l} 1+p+p^2+p^3 \quad \text{4 члена} \\ \underline{1+q+q^2} \quad \text{3 члена} \\ 1+p+p^2+p^3 \\ \quad q+qp+qp^2+qp^3 \\ \quad\quad q^2+q^2p+q^2p^2+q^2p^3 \\ \hline 1+p+p^2+p^3+q+qp+qp^2+qp^3+q^2+q^2p+ \\ \quad +q^2p^2+q^2p^3 \quad \text{(12 членовъ).} \end{array}$$

Если въ произведеніи происходитъ приведеніе подобныхъ членовъ, то окончательное число членовъ можетъ оказаться меньше. **Меньше двухъ это число членовъ однако быть не можетъ,** ибо старшій и младшій члены произведенія, не имѣя себѣ подобныхъ, не могутъ сократиться.

Приведемъ примѣръ, когда въ произведеніи остаются только два члена

$$\begin{array}{l} a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ \underline{a-b} \\ a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4 \\ \quad -a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5 \\ \hline a^5-b^5. \end{array}$$

Важныя формулы, относящіяся къ умноженію многочленовъ.

§ 22. **Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ**

(1) $$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

ибо

$$(a+b)\ (a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Если мы будемъ въ формулѣ (1) числа a и b предполагать какъ положительными, такъ и отрицательными, то можетъ встрѣтиться сомнѣніе, которое изъ этихъ чиселъ надо принимать за a и которое за b.

Очевидно, что за a надо будетъ принять то число, которое входитъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, какъ въ сумму, такъ и въ разность.

Напримѣръ,

$$(e-c)\ (-c-e);$$

здѣсь придется за a принять число $-c$, и мы получимъ

$$[(-c)+e]\ [(-c)-e] = (-c)^2 - e^2 = c^2 - e^2 .$$

§ 23. **Квадратъ двучлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго:**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

ибо

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

§ 24. **Кубъ двучлена равенъ кубу перваго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго на второй членъ, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго члена:**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 ,$$

ибо

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\ (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)\ (a+b) =$$
$$= a^3 + 2a^2 b + ab^2 + a^2 b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

§ 25. Формулы §§ 23 и 24 можно обобщить на случай возвышенія въ квадратъ разности $a-b$, ибо эту разность можно представить въ видѣ суммы $a+(-b)$. Мы получаемъ

$$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$

Совершенно подобнымъ образомъ

$$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 .$$

Дѣленіе одночленовъ и многочленовъ.

§ 26. Если надо раздѣлить выраженіе $2a^3 dc$ на выраженіе $3c - x^3$, то это можно будетъ обозначить знакомъ

(1) $$\frac{2a^3dc}{3c-x^3};$$

получается такимъ образомъ выраженіе (1), которое носитъ названіе алгебраической дроби.

Для полученія численнаго значенія дроби (1) при заданныхъ a, d, c, x надо вычислить отдѣльно числитель $2a^3dc$ этой дроби и знаменатель ея $3c-x^3$, и тогда, раздѣляя число, которое получилось для числителя, на число, которое получилось для знаменателя, получимъ окончательное численное значеніе всей дроби.

Напримѣръ, если $a=1$, $d=11$, $c=10$, $x=2$, то

$$2a^3dc=2.1^3.11.10=220,$$
$$3c-x^3=3.10-2^3=22,$$

откуда

$$\frac{2a^3dc}{3c-x^3}=\frac{220}{22}=10.$$

§ 27. Итакъ, всякое выраженіе дѣлится въ числовомъ смыслѣ на всякое другое. Является важнымъ обратить вниманіе на тѣ случаи дѣленія одночленовъ и многочленовъ, когда дѣленіе совершается, какъ говорятъ „алгебраически нацѣло“, т. е. когда знакъ алгебраической дроби можно удалить изъ формулы, и получается въ частномъ или одночленъ, или многочленъ. Часто одночлены и многочлены называются поэтому цѣлыми формулами.

Дѣленіе одночленовъ нацѣло.

§ 28. Дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію, а потому, если требуется раздѣлить одночленъ A на одночленъ $3a^3bc$ нацѣло, то это значитъ, что требуется найти новый одночленъ или многочленъ B, который въ произведеніи съ дѣлителемъ $3a^3bc$ далъ бы дѣлимое A, то есть, другими словами, надо опредѣлить выраженіе B такъ, чтобы было

(1) $$A=3a^3bc.B.$$

Очевидно, что выраженіе B должно быть одночленомъ, ибо, если-бы B было многочленомъ, то послѣ умноженія на одночленъ $3a^3bc$ выходилъ бы для A многочленъ.

Буквенные дѣлители $a^3 bc$ должны входить въ составъ выраженія A, и мы приходимъ къ слѣдующему важному замѣчанію:

Дѣленіе одночлена на одночленъ нацѣло невозможно, если

1.°, въ дѣлителѣ есть буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ,

2.°, показатель какой-нибудь буквы дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ дѣлителѣ.

Напримѣръ, нельзя раздѣлить алгебраически нацѣло одночленъ $4a^2 b$ на $2ac$, ибо въ дѣлителѣ входитъ буква c, которой нѣтъ въ дѣлимомъ.

Точно также нельзя раздѣлить нацѣло одночленъ $4a^3 b$ на $2ab^2$, ибо надъ буквой b стоитъ въ дѣлителѣ показатель 2, большій показателя 1, стоящаго надъ той же буквой въ дѣлимомъ.

§ 29. Исходя изъ опредѣленія дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго умноженію и припоминая, что при умноженіи одночленовъ коэффиціенты умножаются, а показатели одинаковыхъ буквъ складываются, получаемъ слѣдующее правило дѣленія одночленовъ нацѣло въ томъ случаѣ, когда оно возможно:

Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, надо коэффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффиціентъ дѣлителя, изъ показателей буквъ дѣлимаго вычесть показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя и перенести въ частное безъ измѣненія показателей тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ и, наконецъ, въ частное не войдутъ совсѣмъ множители, у которыхъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ одинаковые показатели.

Напримѣръ,

$$5a^5 b^3 c^2 d : 4a^2 b = \frac{5}{4} a^{5-2} b^{3-1} c^2 d = \frac{5}{4} a^3 b^2 c^2 d.$$

Дробность коэффиціента $\frac{5}{4}$ не нарушаетъ того обстоятельства, что дѣленіе совершилось алгебраически нацѣло.

§ 30. Правило знаковъ при дѣленіи одночленовъ остается то же самое, что и при умноженіи чиселъ, а именно одинаковые знаки даютъ $+$, а разные $-$.

Напримѣръ,

$$(-9a^3 bx) : (+3ax) = -3a^2 b,$$

$$(-6xy^2) : (-5xy) = \frac{6}{5} y.$$

Дѣленіе одночлена на многочленъ.

§ 31. **Дѣленіе одночлена A на многочленъ $B+C+D$ не совершается никогда алгебраически нацѣло.**

Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что частное $A:(B+C+D)$ есть одночленъ M, тогда получаемъ

$$A=(B+C+D)M;$$

но отъ умноженія $B+C+D$ на одночленъ M получаемъ многочленъ, что невозможно, ибо A есть одночленъ. Совершенно подобнымъ образомъ, какъ бы ни подбирать многочленъ M, произведеніе $(B+C+D)M$ будетъ всегда многочленомъ, наименьшее число членовъ котораго будетъ 2 (см. § 21, стр. 37), и, слѣдовательно никогда одночленомъ не будетъ. Итакъ алгебраическая дробь

$$\frac{A}{B+C+D}$$

не можетъ быть алгебраически приведена къ цѣлому виду.

Дѣленіе многочлена на одночленъ.

§ 32. Предположимъ, что требуется раздѣлить трехчленъ $A+B-C$ на одночленъ M. Оказывается, что искомое частное можно представить такъ

$$\frac{A}{M}+\frac{B}{M}-\frac{C}{M}. \tag{1}$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этой формулы, умножимъ предполагаемое частное (1) на дѣлителя M; получаемъ

$$\left(\frac{A}{M}+\frac{B}{M}-\frac{C}{M}\right)M=\frac{A}{M}M+\frac{B}{M}M-\frac{C}{M}M=$$
$$=A+B-C.$$

Такъ какъ въ произведеніи получилось дѣлимое, то, значитъ, формула (1) вѣрна.

При дѣленіи многочлена на одночленъ достаточно раздѣлить на дѣлителя каждый членъ дѣлимаго.

§ 33. Говорятъ, что дѣленіе многочлена на одночленъ совершилось алгебраически нацѣло, если совершились нацѣло (см. § 28, стр. 39) всѣ дѣленія отдѣльныхъ членовъ.

Дѣленіе многочлена на многочленъ.

§ 34. Лишь въ рѣдкихъ случаяхъ дѣленіе многочлена на многочленъ совершается алгебраически нацѣло, т. е. другими словами, частное представляется въ видѣ одночлена или многочлена, не заключающихъ знаковъ алгебраическаго дѣленія.

Въ § 20 (стр. 36) мы видѣли, что умноженіе полиномовъ, расположенныхъ по убывающимъ степенямъ одной буквы, имѣетъ большую аналогію съ умноженіемъ многозначныхъ цѣлыхъ чиселъ. По аналогіи можно указать правила дѣленія многочленовъ, расположенныхъ по убывающимъ степенямъ одной буквы. Лучше всего пояснимъ это правило на примѣрѣ.

Требуется раздѣлить полиномъ

(1) $$x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 1$$

на полиномъ

(2) $$x^2 + x - 1.$$

Очевидно, что старшій членъ дѣлимаго происходитъ отъ умноженія старшаго члена x^2 дѣлителя на старшій членъ искомаго частнаго, а потому для полученія старшаго члена частнаго необходимо раздѣлить старшій членъ x^5 дѣлимаго на старшій членъ x^2 дѣлителя. Искомый старшій членъ частнаго будетъ $x^5 : x^2 = x^3$. Умножаемъ всего дѣлителя на найденный членъ x^3, получимъ произведеніе

(3) $$x^5 + x^4 - x^3;$$

это произведеніе придется вычесть изъ дѣлимаго (1), и получимъ первый остатокъ

(4) $$5x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1.$$

Придется остатокъ (4) дѣлить на дѣлитель (2). Раздѣляя старшій членъ $5x^4$ остатка (4) на старшій членъ x^2 дѣлителя (2), получимъ $5x^2$, что дастъ второй членъ искомаго частнаго.

Умножаемъ дѣлителя $x^2 + x - 1$ на этотъ второй членъ, получимъ

(5) $$5x^4 + 5x^3 - 5x^2.$$

Вычитая (5) изъ перваго остатка (4), получаемъ второй остатокъ

(6) $$x^2 + x - 1.$$

Этотъ остатокъ дѣлится на дѣлителя и даетъ въ частномъ 1. Дѣленіе совершилось нацѣло.

Обыкновенно располагаютъ, по аналогіи съ дѣленіемъ многозначныхъ чиселъ, дѣленіе полиномовъ такимъ образомъ

Дѣлимое. . . . . $x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$ | x^2+x-1 . . . дѣлитель

$\overline{\mp x^5 \mp x^4 \pm x^3}$ | x^3+5x^2+1 . . частное

1-ый остатокъ. . . . . $5x^4+5x^3-4x^2+x-1$

$\overline{\mp 5x^4 \mp 5x^3 \pm 5x^2}$

2-ой остатокъ. . . . . x^2+x-1

$\overline{\mp x_2 \mp x \pm 1}$

3-ій остатокъ. 0

Пояснимъ дѣленіе еще на двухъ примѣрахъ.

I. Требуется раздѣлить $x^3+y^3+z^3-3xyz$ на $x+y+z$.

Дѣлимое. $x^3+0\,.\,x^2-3yz\,.\,x+(y^3+z^3)$ | $x+(y+z)$ . . . . дѣлитель

$\overline{\mp x^3 \mp (y+z)\,x^2}$ | $x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)$

1-й остатокъ. . . . . $-(y+z)\,x^2-3yz\,.\,x+(y^3+z^3)$

$\overline{\pm (y+z)\,x^2 \pm (y+z)^2\,x}$

2-й остатокъ. . . . . $(y^2-yz+z^2)\,x+(y^3+z^3)$

$\overline{\mp (y^2-yz+z^2)\,x \mp (y+z)(y^2-yz+z^2)}$

3-й остатокъ. 0

Дѣленіе совершилось нацѣло.

II. Требуется раздѣлить x^3+px^2+qx+r на $x-\alpha$.

x^3+px^2+qx+r | $x-\alpha$

$\overline{\mp x^3 \pm \alpha x^2}$ | $x^2+(p+\alpha)x+(\alpha^2+p\alpha+q)$

$(p+\alpha)\,x^2+qx+r$

$\overline{\mp (p+\alpha)\,x^2 \pm \alpha(p+\alpha)\,x}$

$(\alpha^2+p\alpha+q)\,x+r$

$\overline{\mp (\alpha^2+p\alpha+q)\,x \pm \alpha(\alpha^2+p\alpha+q)}$

$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r$

Такъ какъ 3-ій остатокъ не заключаетъ буквы x, то онъ не дѣлится алгебраически на $x-\alpha$, и дѣленіе не совершилось нацѣло. Если мы буквамъ p, q, r, α дадимъ нѣкоторыя численныя значенія, то дѣленіе будетъ совершаться нацѣло только въ томъ случаѣ, если 3-ій остатокъ равенъ нулю, т. е. при условіи

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0.$$

§ 35. Признаки невозможности дѣленія нацѣло многочлена на многочленъ.

1°., Если показатель главной буквы въ старшемъ членѣ дѣлимаго м е н ь ш е показателя той же буквы въ старшемъ членѣ дѣлителя.

2°., Если показатель главной буквы въ младшемъ членѣ дѣлимаго м е н ь ш е показателя той же буквы въ младшемъ членѣ дѣлителя.

Эти признаки даютъ возможность сразу судить о невозможности дѣленія.

Если показатели главной буквы въ крайнихъ членахъ дѣлимаго н е м е н ь ш е показателей тѣхъ же членовъ дѣлителя, то для рѣшенія вопроса о возможности дѣленія нацѣло необходимо приступить къ выполненію самого дѣленія и продолжать его до тѣхъ поръ, пока не обнаружится его возможность или невозможность.

Слѣдуя расположенію дѣлимаго и дѣлителя по убывающимъ степенямъ главной буквы, мы получаемъ такое правило сужденія о возможности дѣленія: **продолжаемъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока не придемъ:**

1°., или къ остатку нуль,

2°., или къ остатку степени ниже дѣлителя;

въ первомъ случаѣ дѣленіе нацѣло возможно, во второмъ невозможно.

§ 36. Дѣленіе можно было бы производить, расположивъ дѣлимое и дѣлителя по возрастающимъ степенямъ главной буквы.

Для уясненія механизма производства дѣйствія дѣленія достаточно взять примѣръ изъ § 34

$$\begin{array}{l|l}
-1+x-4x^2+4x^3+6x^4+x^5 & \dfrac{-1+x+x^2}{1+5x^2+x^3} \\
\pm 1 \mp x \mp x^2 & \\
\hline
\quad -5x^2+4x^3+6x^4+x^5 & \\
\quad \pm 5x^2 \mp 5x^3 \mp 5x^4 & \\
\hline
\qquad -x^3+x^4+x^5 & \\
\qquad \pm x^3 \mp x^4 \mp x^5 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

Для того, чтобы судить о невозможности дѣленія при расположеніи дѣлимаго и дѣлителя по возрастающимъ степенямъ главной буквы, поступаютъ такъ. Вычисляютъ заранѣе старшій членъ частнаго черезъ дѣленіе старшаго члена дѣлимаго на старшій

членъ дѣлителя, предполагая, конечно, при этомъ, что дѣленіе совершается нацѣло.

Вычисливъ такимъ образомъ старшій членъ частнаго, продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не появится членъ со степенью главной буквы тою же, что и въ вычисленномъ членѣ. Если при этомъ получится остатокъ, то дѣленіе невозможно.

Напримѣръ, требуется вычислить частное

$$(4 - 5a + 6a^2 - 8a^3) : (2 - 3a + a^2).$$

Если бы дѣленіе совершалось нацѣло, то старшій членъ частнаго долженъ былъ бы равняться

$$-8a^3 : a^2 = -8a.$$

Совершая дѣленіе, получаемъ

$$\begin{array}{r|l} 4 - 5a + 6a^2 - 8a^3 & 2 - 3a + a^2 \\ \hline \mp 4 \pm 6a \mp 2a^2 & 2 + \frac{1}{2}a \\ \hline a + 4a^2 - 8a^3 & \\ \mp a \pm \frac{3}{2}a^2 \mp \frac{1}{2}a^3 & \\ \hline \frac{11}{2}a^2 - \frac{17}{2}a^3 & \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что продолжая его далѣе, мы получили бы членъ $\frac{11}{4}a^2$, тогда какъ послѣдній членъ частнаго при возможности дѣленія долженъ былъ бы равняться $-8a$.

Дѣленіе многочлена, расположеннаго по буквѣ x, на двучленъ $x-a$.

§ 37. Пусть разсматривается нѣкоторый многочленъ

$$(1) \qquad Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x. Этотъ многочленъ представляетъ изъ себя нѣкоторую формулу, заключающую букву x. Будемъ нашъ многочленъ обозначать знакомъ

$$f(x),$$

подчеркивая этимъ знакомъ какъ разъ то обстоятельство, что онъ представляетъ формулу, заключающую x.

Знакомъ

$$f(b)$$

будемъ обозначать то число, которое дастъ весь многочленъ, если вмѣсто буквы x подставимъ число b.

Напримѣръ, если обозначить

$$f(x) = x^4 + 3x + 2,$$

то будетъ

$$f(1) = 1^4 + 3.\ 1 + 2 = 6,$$
$$f(2) = 2^4 + 3.\ 2 + 2 = 24,$$

и т. д.

Произведемъ дѣленіе многочлена $f(x)$, расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, на двучленъ $x—a$; тогда, если дѣленіе не совершается нацѣло, то долженъ получиться остатокъ, въ которомъ не заключается буква x.

Такъ, напримѣръ, въ примѣрѣ II § 34 (стр. 43) отъ дѣленія $x^3 + px^2 + qx + r$ на $x—\alpha$ получился остатокъ $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r$.

Итакъ, пусть отъ дѣленія $f(x)$ на $(x—a)$ получается частное Q и остатокъ R, причемъ Q есть полиномъ отъ x степени $m—1$, т. е. на единицу меньше, чѣмъ степень дѣлимаго, остатокъ же R не заключаетъ буквы x.

Мы знаемъ, что дѣленіе есть такое дѣйствіе, при которомъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, плюсъ остатокъ.

Итакъ, получаемъ

$$f(x) = (x - a)\,Q + R. \tag{2}$$

Это равенство есть тождество, то есть такое равенство, которое остается вѣрнымъ, какія бы численныя значенія мы ни приписывали главной буквѣ x.

Это тождество остается вѣрнымъ, если положить въ немъ $x = a$. Пусть отъ такого положенія частное Q обратится въ Q_1, тогда тождество (2) дастъ новое

$$f(a) = (a - a)\,Q_1 + R;$$

но $a - a = 0$, слѣдовательно, $(a - a)\,Q_1 = 0$ и мы получимъ

$$R = f(a).$$

Теорема. **Отъ дѣленія многочлена $f(x)$ на двучленъ $x—a$ получается остатокъ, равный $f(a)$, то есть равный числу, которое происходитъ отъ подстановки a вмѣсто x въ многочленъ $f(x)$.**

Эта теорема даетъ простой способъ узнать, дѣлится ли $f(x)$ на $x-a$. Такъ, напримѣръ, $f(x)=x^3-3x+2$ дѣлится на $x-1$, ибо $f(1)=1^3-3.1+2=0$.

Теорема Bézout.

§ 38. 1°., **Разность одинаковыхъ степеней x^n-a^n двухъ чиселъ x и a дѣлится на разность первыхъ степеней $x-a$ тѣхъ же чиселъ.**

Такъ какъ остатокъ отъ дѣленія x^n-a^n на $x-a$ равенъ $a^n-a^n=0$.

2°., **Сумма одинаковыхъ степеней x^n+a^n двухъ чиселъ x и a никогда не дѣлится на разность $x-a$ тѣхъ же чиселъ.**

Ибо остатокъ отъ дѣленія x^n+a^n на $x-a$ равенъ $a^n+a^n=2a^n$. Этотъ остатокъ отличенъ отъ нуля, если a не нуль.

3°., **Разность одинаковыхъ четныхъ степеней x^n-a^n двухъ чиселъ x и a дѣлится, на сумму первыхъ степеней $x+a$ тѣхъ же чиселъ.**

Доказательство состоитъ въ томъ, что мы представляемъ сумму $x+a$ въ видѣ разности $x-(-a)$; тогда для полученія остатка отъ дѣленія необходимо подставить въ дѣлимое вмѣсто x число $-a$. Мы получаемъ $(-a)^m-a^m$. При m четномъ выходитъ $a^m-a^m=0$, и теорема вѣрна. Если же m число нечетное, то остатокъ будетъ $-a^m-a^m=-2a^m$, и мы получаемъ, что разность нечетныхъ степеней не дѣлится на сумму первыхъ степеней.

4.°, **Сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней x^n+a^n двухъ чиселъ x и a дѣлится на сумму $x+a$ первыхъ степеней тѣхъ же чиселъ.**

Ибо остатокъ $(-a)^n+a^n$ равенъ нулю при n нечетномъ и равенъ $2a^n$ при n четномъ, такъ что сумма четныхъ степеней не дѣлится на сумму первыхъ степеней.

§ 39. Производя на самомъ дѣлѣ дѣленіе, мы получаемъ

$$\begin{array}{r|l} x^n-a^n & x-a \\ \hline \mp x^n \pm ax^{n-1} & x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1} \\ \hline \text{1-й остатокъ } \ldots\ ax^{n-1}-a^n & \\ \mp ax^{n-1} \pm a^2x^{n-2} & \\ \hline \text{2-й остатокъ } \ldots\ a^2x^{n-2}-a^n & \\ \mp a^2x^{n-2} \pm a^3x^{n-3} & \\ \hline \text{3-ій остатокъ } \ldots\ a^3x^{n-3}-a^n & \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

$(n-1)$-ый остатокъ . . . . . $a^{n-1}x - a^n$

$$\underline{\mp a^{n-1}x \pm a^n}$$

$$0$$

Итакъ, мы имѣемъ

(1) $$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}).$$

Замѣняя въ послѣднемъ тождествѣ a на $-a$, получимъ при n четномъ

(2) $$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-1}),$$

при n нечетномъ

(3) $$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-1}).$$

Разложеніе многочленовъ на множители.

§ 40. Въ предыдущемъ параграфѣ мы дали правила умноженія многочленовъ. Теперь мы должны сказать нѣсколько словъ объ обратной операціи, то есть о, такъ называемомъ, разложеніи многочленовъ на множители. Для этой обратной задачи нѣтъ возможности указать какихъ-либо общихъ пріемовъ. Все дѣло сводится къ упражненіямъ на рѣшеніе задачъ, а потому мы ограничимся лишь весьма малымъ числомъ замѣчаній.

1.°, Если всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, то его можно вынести за скобку.

Напримѣръ,

$$x^3 - 3x^2 + x = x(x^2 - 3x + 1).$$

2.°, Если данный двучленъ представляетъ изъ себя сумму или разность одинаковыхъ степеней, то можно выдѣлить множителя, представляющаго сумму или разность первыхъ степеней.

Напримѣръ, требуется разложить на множители

$$x^{12} - 1.$$

Прежде всего можно представить нашъ двучленъ въ видѣ разности двухъ квадратовъ

$$(x^6)^2 - 1^2,$$

и получаемъ

(1) $$x^{12} - 1 = (x^6)^2 - 1^2 = (x^6 - 1)(x^6 + 1).$$

Подобнымъ же образомъ можно разложить $x^6 - 1$, а именно

(2) $$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1).$$

Далѣе можно по формулѣ (1) § 39 получить

(3) $$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

а по формулѣ (3) § 39 получить

(4) $$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

И, наконецъ, по той же формулѣ (3) § 39 получаемъ

(5) $$x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Сопоставляя формулы (1), (2), (3), (4) и (5), получимъ окончательное разложеніе $x^{12} - 1$ на множители

$$x^{12} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

3.⁰, Искусственное комбинированіе членовъ многочлена даетъ возможность иногда удачно производить разложеніе на множители.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ небольшого числа примѣровъ.

I Примѣръ.

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - x^4 =$$
$$= [(x^4 + 1) + x^2][(x^4 + 1) - x^2] = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1);$$

далѣе

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 =$$
$$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x).$$

Отсюда получаемъ такое разложеніе на множители

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

II Примѣръ.

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d) =$$
$$= (a + b)(c + d).$$

III Примѣръ.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x^2 + 2xy + y^2) + z^2 + (2xz + 2yz) = (x + y)^2 + z^2 + 2z(x + y) = (x + y + z)^2.$$

Возвышеніе одночленовъ и многочленовъ въ степень.

§ 41. Пусть требуется возвысить въ 4-ую степень одночленъ $3a^2bc^3$

$$(3a^2bc^3)^4 = (3a^2bc^3)(3a^2bc^3)(3a^2bc^3)(3a^2bc^3).$$

Послѣднее выраженіе можно преобразовать, переставивъ множители слѣдующимъ образомъ

$$(3.3.3.3)\ (a^2.a^2.a^2.a^2)\ (b.b.b.b)\ (c^3c^3c^3c^3) = 3^4a^{2.4}b^{1.4}c^{3.4} = 81a^8b^4c^{12}.$$

Мы приходимъ къ слѣдующему правилу возвышенія въ степень одночлена.

Для возвышенія въ степень m одночлена надо возвысить въ степень m коэффиціентъ и умножить на m показателей всѣхъ буквенныхъ множителей.

§ 42. Обращаясь къ возвышенію въ степень многочленовъ, мы ограничимся лишь слѣдующей теоремой весьма важной на практикѣ.

Теорема. **Квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ его членовъ, плюсъ удвоенная сумма ихъ произведеній между собою попарно.**

Эта теорема справедлива для двучлена

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy.$$

Мы видѣли въ примѣрѣ III § 40, что она справедлива для трехчлена. Распространимъ теорему на многочленъ изъ n членовъ

$$P = x+y+z+\ldots+u+v.$$

Примѣнимъ къ доказательству нашей теоремы способъ разсужденія, который часто примѣняется въ математикѣ и заслуживаетъ особеннаго вниманія.

Доказывается теорема, въ которой играетъ роль произвольное цѣлое число n, такимъ образомъ: предполагается справедливость теоремы при числѣ n на единицу меньшемъ, то есть n—1. Если теорема, справедливая для случая n—1, остается справедливой для случая n, то достаточно убѣдиться простой провѣркой въ справедливости для малыхъ значеній n, напримѣръ, 1, 2, . . . чтобы сдѣлать заключеніе о ея справедливости въ общемъ случаѣ.

Обозначимъ черезъ Q сумму n—1 первыхъ членовъ

$$x+y+z+\ldots+u$$

многочлена P. Возвышая въ квадратъ выраженіе

$$P = Q+v,$$

какъ двучленъ, получимъ

$$(1)\qquad P^2 = Q^2+2Qv+v^2.$$

Допустимъ, что теорема справедлива для случая $n-1$ членовъ, тогда крадратъ Q^2 будетъ состоять изъ суммы квадратовъ

$$x^2+y^2+z^2+\ldots+u^2 \tag{2}$$

$n-1$ первыхъ членовъ многочлена P и суммы удвоенныхъ произведеній этихъ членовъ по два

$$2xy+2xz+2yz+\ldots+2xu+2yu+\ldots. \tag{3}$$

Теорема будетъ продолжать оставаться справедливой и для n членовъ, ибо въ квадратѣ P^2 къ суммѣ квадратовъ (2) присоединится еще недостающій квадратъ v^2, а къ суммѣ удвоенныхъ произведеній (3) присоединяются еще произведенія $2Qv$, члена v на всѣ остальные.

Итакъ, если теорема вѣрна для Q, то она остается вѣрной и для многочлена P, у котораго число членовъ на единицу больше. Но мы видѣли, что теорема вѣрна для 2-хъ членовъ, слѣдовательно, она будетъ вѣрна для 3-хъ членовъ. Если она вѣрна для 3-хъ членовъ, то она остается вѣрной и для 4-хъ членовъ. Продолжая разсужденіе далѣе, мы убѣдимся въ ея вѣрности для общаго случая.

Теорему можно будетъ записать слѣдующею символическою формулою

$$\left(\sum x\right)^2=\sum x^2+2\sum xy,$$

гдѣ символъ (знакъ) $\sum$ обозначаетъ суммированіе на всѣ члены, аналогичные тому члену, при которомъ этотъ символъ стоитъ.

Алгебраическія дроби.

§ 43. Въ § 26 (стр. 39) мы дали опредѣленіе алгебраической дроби. Подъ алгебраической дробью мы разумѣемъ частное двухъ алгебраическихъ выраженій A и B. Это частное можетъ быть написано такъ

$$\frac{A}{B}.$$

Дѣлимое A будемъ называть числителемъ дроби, а дѣлитель B ея знаменателемъ.

§ 44. Цѣлью нашихъ разсужденій объ алгебраическихъ дробяхъ будетъ убѣдиться, что дѣйствія надъ этими дробями совер-

шаются по тѣмъ же правиламъ, по которымъ совершаются въ ариѳметикѣ дѣйствія надъ дробями съ натуральными числителями и знаменателями.

§ 45. Доказательства правилъ дѣйствій надъ алгебраическими дробями будутъ подобны тѣмъ, которыя приведены въ главѣ II для дѣйствій надъ числами дробными. Мы обратимъ лишь вниманіе читателя на ту разницу, которая будетъ отличать доказательства главы II отъ того, что мы будемъ говорить относительно алгебраическихъ дробей.

Начнемъ съ разсмотрѣнія алгебраическихъ дробей, у которыхъ какъ числитель, такъ и знаменатель цѣлыя алгебраическія выраженія, т. е. одночлены и многочлены, причемъ подъ буквами будемъ разумѣть, какъ это было уже сказано въ § 1 (стр. 27), раціональныя числа.

Оставимъ вопросъ о неравенствахъ между алгебраическими дробями до особой главы, посвященной изученію свойствъ неравенствъ и ихъ приложеній въ алгебрѣ; а потому пока мы не будемъ разсматривать теоремъ аналогичныхъ опредѣленіямъ II и III главы II.

Что касается опредѣленій I, IV и V главы II, то для алгебраическихъ дробей **эти опредѣленія обращаются уже въ теоремы, подлежащія доказательству.** Чтобы понять, почему происходитъ такая разница, начнемъ съ доказательства теоремы аналогичной опредѣленію I главы II.

§ 46. Теорема. **Если двѣ алгебраическія дроби**

$$\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{c}{d}$$

равны, то $ad = bc$.

Для доказательства мы обозначимъ общую величину заданныхъ равныхъ дробей черезъ p, такъ что

$$\frac{a}{b} = p, \quad \frac{c}{d} = p.$$

На основаніи опредѣленія дѣйствія дѣленія мы замѣчаемъ, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, слѣдовательно, получаемъ

$$a = p \,.\, b, \quad c = p \,.\, d.$$

Помножаемъ обѣ части перваго равенства на d и обѣ части второго на b, получимъ

$$ad = pbd, \quad cb = pdb,$$

откуда

$$ad = cb.$$

Этотъ способъ доказательства въ примѣненіи къ дробямъ въ главѣ II не допустимъ, потому что, когда мы приступаемъ къ введенію въ разсмотрѣніе чиселъ дробныхъ, у насъ никакихъ другихъ чиселъ, кромѣ цѣлыхъ, пока не существуетъ и, слѣдовательно, величину дроби мы могли бы обозначать буквой p лишь въ томъ случаѣ, если бы числитель a дроби $\frac{a}{b}$ дѣлился нацѣло на знаменатель b. Если же дробь $\frac{a}{b}$ не представляетъ цѣлое число, то, пока не введены въ разсмотрѣніе числа дробныя, нельзя величину дроби $\frac{a}{b}$ обозначать буквою p, ибо нельзя буквой обозначать предметы несуществующіе.

Въ настоящей главѣ алгебраическая дробь имѣетъ всегда нѣкоторое раціональное численное значеніе за исключеніемъ лишь случая, когда при выбранныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ числитель и знаменатель, знаменатель обращается въ нуль. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ алгебраическая дробь теряетъ свой смыслъ, ибо на нуль дѣлить нельзя.

Если же мы не будемъ подъ буквами разумѣть такія числа, при которыхъ знаменатель нуль, то дробь имѣетъ нѣкоторое раціональное численное значеніе, которое можно обозначить буквой p, и доказательство будетъ вполнѣ правильное.

§ 47. Теорема. **Значеніе алгебраической дроби не измѣняется отъ умноженія числителя и знаменателя на одно и то же алгебраическое выраженіе.**

Пусть числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{b}$ мы желаемъ умножить на выраженіе m, численное значеніе котораго мы предполагаемъ отличнымъ отъ нуля.

Обозначимъ численное значеніе дроби $\frac{a}{b}$ черезъ p, то есть

$$\frac{a}{b} = p; \tag{1}$$

отсюда

$$a = p \cdot b.$$

Умножая два равныхъ числа на одно и то же третье m, получимъ

$$am = pbm;$$

дѣля же обѣ части послѣдняго равенства на bm, получимъ

$$\frac{am}{bm} = p. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получимъ

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \tag{3}$$

что и доказываетъ теорему.

Изъ формулы (1) видно, что **значеніе дроби не измѣняется, если числитель и знаменатель раздѣлить на одно и то же выраженіе.**

§ 48. Теорема послѣдняго §-a ведетъ къ тѣмъ же слѣдствіямъ въ алгебрѣ, къ которымъ ведетъ аналогичная теорема въ ариѳметикѣ.

Раздѣляя числитель и знаменатель на ихъ общихъ множителей, мы упрощаемъ дробь, то есть дѣлаемъ то, что въ ариѳметикѣ называлось сокращеніемъ дроби.

Напримѣръ, дробь

$$\frac{15a^3bc^2}{20a^5c^3}$$

можно упростить дѣленіемъ числителя и знаменателя на $5a^3c^2$, и мы получимъ

$$\frac{3b}{4a^2c}.$$

На возможности умножать числитель и знаменатель на одно и то же выраженіе основано приведеніе дробей къ общему знаменателю.

Напримѣръ, дроби

$$\frac{7a^3c^2}{2bd}, \quad \frac{8b}{5a^2b}, \quad \frac{7d}{abc}$$

можно привести къ знаменателю $10a^2bcd$ умноженіемъ числителя и знаменателя первой дроби на $5a^2c$, второй на $2cd$ и третьей на $10ad$; получаемъ дроби

$$\frac{35a^5c^3}{10a^2bcd}, \quad \frac{16bcd}{10a^2bcd}, \quad \frac{70ad^2}{10a^2bcd},$$

Если числитель и знаменатель дроби суть многочлены, то для сокращенія и приведенія къ одному знаменателю надо многочлены привести къ одночленному виду разложеніемъ на множители.

Напримѣръ, пусть требуется сократить дробь

$$\frac{a^6+b^6}{a^4-b^4}.$$

Раскладывая на множители числителя и знаменателя, получимъ

$$\frac{(a^2+b^2)\ (a^4-a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)\ (a^2+b^2)},$$

откуда видимъ, что дробь можно сократить на множителя a^2+b^2, и мы получимъ

$$\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2-b^2}.$$

Общій наибольшій дѣлитель и наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ одночленовъ.

§ 49. Въ ариѳметикѣ мы видѣли, что было полезно сокращать дроби сразу на наибольшаго общаго дѣлителя числителя и знаменателя. Поэтому введемъ аналогичное понятіе и въ алгебру.

Опредѣленіе. **Подъ наибольшимъ общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ одночленовъ съ цѣлыми коэффиціентами мы будемъ разумѣть одночленъ, коэффиціентъ котораго есть общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ заданныхъ одночленовъ, причемъ этотъ одночленъ дѣлитъ алгебраически нацѣло всѣ заданные одночлены и имѣетъ надъ своими буквами возможно большіе показатели.**

Напримѣръ, для одночленовъ

(1) $$16a^3bc^2,\quad 40a^2dc^4,\quad 8a^5c^3,$$

очевидно, что можно указать нѣсколько общихъ дѣлителей этихъ одночленовъ

$$4ac,\quad 2a^2c,\quad c^2,\quad 8a^2c^2.$$

Наибольшимъ общимъ дѣлителемъ будетъ $8a^2c^2$.

Нетрудно видѣть, что для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя нужно будетъ поступить такъ:

Собрать всѣ общія буквы всѣхъ данныхъ одночленовъ и

поставить надъ ними наименьшіе изъ показателей, съ которыми каждая изъ буквъ входитъ въ эти одночлены.

Напримѣръ, буква a входитъ во всѣ заданные одночлены, значитъ, она общая для всѣхъ этихъ одночленовъ. Буква a входитъ въ одночлены съ показателями 3, 2 и 5; наименьшій изъ нихъ 2 долженъ давать показателя, съ которыми буква a должна входить въ общаго наибольшаго дѣлителя.

§ 50. Въ ариѳметикѣ имѣла значеніе задача привести дроби къ наименьшему общему знаменателю, который былъ наименьшимъ кратнымъ знаменателемъ данныхъ дробей.

Опредѣленіе. **Наименьшимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ одночленовъ съ цѣлыми коэффиціентами назовемъ одночленъ, имѣющій коэффиціентомъ наименьшее кратное коэффиціентовъ заданныхъ одночленовъ, причемъ этотъ одночленъ дѣлится алгебраически нацѣло на всѣ заданные одночлены и имѣетъ надъ своими буквенными множителями возможно малые показатели.**

Для нахожденія наименьшаго кратнаго придется собрать всѣ различные буквенные множители, входящіе въ составъ заданныхъ одночленовъ, съ ихъ наибольшими показателями.

Напримѣръ, для одночленовъ

$$2a^3bc,\quad 3ab^3d,\quad 5abcd^2$$

наименьшее кратное будетъ

$$30a^3b^3cd^2.$$

Дѣйствія надъ алгебраическими дробями.

§ 51. Обращаясь къ дѣйствіямъ надъ алгебраическими дробями, мы должны прежде всего замѣтить, что опредѣленія IV и V дѣйствій сложенія и умноженія обращаются для алгебраическихъ дробей въ подлежащія доказательству теоремы.

Теорема. **Для сложенія дробей съ одинаковыми знаменателями складываютъ ихъ числители и подъ суммой подписываютъ ихъ общій знаменатель.**

Напримѣръ,

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m},$$

потому что черезъ умноженіе въ обѣихъ частяхъ равенства на m получимъ одно и то же выраженіе $a+b+c$.

Если требуется сложить дроби съ разными знаменателями, то ихъ надо будетъ предварительно привести къ одному знаменателю и затѣмъ примѣнить только что доказанную теорему.

§ 52. Совершенно подобнымъ образомъ доказывается, какъ теорема, правило для умноженія дробей.

Теорема. **Чтобы умножить одну дробь на другую перемножаютъ между собою отдѣльно числители и отдѣльно знаменатели и первое произведеніе дѣлятъ на второе.**

Пусть требуется умножить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$; обозначая численныя значенія этихъ дробей черезъ p и q, получимъ

$$a = bp,\ c = dq;$$

перемножая лѣвыя части этихъ равенствъ, а потомъ правыя части, получимъ два равныхъ произведенія

$$ac = bdpq.$$

Дѣля далѣе обѣ части равенства на bd, получимъ

$$\frac{ac}{bd} = pq \text{ или } \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d},$$

что и требовалось доказать.

Произведеніе нѣсколькихъ дробей равно дроби, происходящей отъ дѣленія произведенія числителей на произведеніе знаменателей.

Напримѣръ,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \ldots = \frac{ace \ldots}{bdf \ldots}$$

И, какъ слѣдствіе, получаемъ при натуральномъ числѣ n

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

§ 53. Выводъ дѣйствій вычитанія и дѣленія дробей можетъ быть произведенъ совершенно такъ, какъ это мы дѣлали для ариѳметическихъ дробей въ §§ 9, 11 главы II, и мы получаемъ формулы

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b};\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Отрицательные показатели.

§ 54. Данное въ § 29 (стр. 40) правило показателей при дѣленіи выражается формулой

(1) $$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Примѣненіе его возможно л и ш ь въ томъ случаѣ, если показатель n дѣлимаго б о л ь ш е показателя m дѣлителя.

Обобщимъ правило, выраженное формулой (1), на случай $n \leqslant m$; для этой цѣли придется разсматривать выраженія съ показателемъ нуль, а также съ отрицательнымъ показателемъ.

О п р е д ѣ л е н і е I. **Будемъ считать выраженіе a^0 равнымъ единицѣ, то есть $a^0 = 1$.**

О п р е д ѣ л е н і е II. **Будемъ подъ выраженіемъ a^{-p} понимать дробь**

$$\frac{1}{a^p}, \text{ то есть } a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

На основаніи этихъ опредѣленій мы придемъ къ убѣжденію, что формула (1) остается справедливой

1°., при $n = m$,

2°., при $n < m$.

Разсмотримъ случай $n = m$; въ этомъ случаѣ

$$a^n : a^m = a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1,$$

но по опредѣленію

$$a^{n-m} = a^{n-n} = a^0 = 1,$$

слѣдовательно,

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Разсмотримъ случай $n < m$. Пусть $m = n + k$, гдѣ k положительное цѣлое число

$$a^n : a^m = a^n : a^{n+k} = \frac{a^n}{a^{n+k}} = \frac{1}{a^k},$$

съ другой стороны по опредѣленію II

$$a^{n-m} = a^{n-(n+k)} = a^{-k} = \frac{1}{a^k},$$

слѣдовательно,

$$a^n : a^m = a^{n-m},$$

и справедливость формулы (1) доказана во всѣхъ случаяхъ.

Обобщеніе правила показателей при умноженіи.

§ 55. При положительныхъ показателяхъ мы доказали формулу

(1) $$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Покажемъ, что она остается справедливой, когда одинъ или даже оба показателя отрицательные.

Разсмотримъ сначала случай, когда n положительно, а m отрицательно. Пусть $m = -m'$, гдѣ m' положительное число (цѣлое).

Имѣемъ

$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot a^{-m'} = a^n \cdot \frac{1}{a^{m'}} = \frac{a^n}{a^{m'}},$$

но по обобщенному въ § 54 правилу показателей при дѣленіи мы имѣемъ

$$\frac{a^n}{a^{m'}} = a^{n-m'},$$

слѣдовательно,

$$a^n \cdot a^m = a^{n-m'};$$

эта же формула не отличается отъ формулы (1), ибо $n - m' = n + m$.

Разсмотримъ теперь второй случай, когда оба показателя n и m отрицательны. Пусть будетъ

$$n = -n', \quad m = -m',$$

тогда получаемъ

$$a^n \cdot a^m = a^{-n'} \cdot a^{-m'} = \frac{1}{a^{n'}} \cdot \frac{1}{a^{m'}} = \frac{1}{a^{n'} \cdot a^{m'}} =$$

$$= \frac{1}{a^{n'+m'}} = a^{-(n'+m')},$$

и формула (1) доказана, ибо

$$-(n' + m') = n + m.$$

Обобщеніе правила показателей при дѣленіи.

§ 56. При положительныхъ показателяхъ n и m мы доказали формулу

(1) $$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Покажемъ, что эта формула остается справедливой также и при отрицательныхъ значеніяхъ n и m.

1^0., случай $n > 0$, $m = -m'$

$$a^n : a^m = a^n : a^{-m'} = a^n : \frac{1}{a^{m'}} = a^n \cdot a^{m'} = a^{n+m'};$$

формула (1) оказывается вѣрною, ибо $n + m' = n - m$.

2^0., случай $n = -n'$, $m > 0$

$$a^n : a^m = a^{-n'} : a^m = \frac{1}{a^{n'}} : a^m = \frac{1}{a^{n'}} : \frac{a^m}{1} = \frac{1}{a^{n'} a^m} = \frac{1}{a^{n'+m}} = a^{-(n'+m)};$$

формула (1) вѣрна, ибо $-(n' + m) = -n' - m = n - m$.

3^0., случай $n = -n'$, $m = -m'$

$$a^n : a^m = a^{-n'} : a^{-m'} = \frac{1}{a^{n'}} : \frac{1}{a^{m'}} = \frac{a^{m'}}{a^{n'}} = a^{m'-n'};$$

формула (1) вѣрна, ибо $m' - n' = -n' - (-m') = n - m$.

Итакъ формула (1) провѣрена для всѣхъ случаевъ.

Обобщеніе правила показателей при возвышеніи въ степень.

§ 57. Мы доказали при положительныхъ n и m формулу

(1) $$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Покажемъ, что она будетъ справедлива также и при отрицательныхъ значеніяхъ показателей.

1^0., случай $n > 0$, $m = -m'$

$$(a^n)^m = (a^n)^{-m'} = \frac{1}{(a^n)^{m'}} = \frac{1}{a^{nm'}} = a^{-nm'};$$

формула (1) оказывается вѣрною, ибо $-nm' = nm$.

2^0., случай $n = -n'$, $m > 0$

$$(a^n)^m = (a^{-n'})^{m'} = \left(\frac{1}{a^{n'}}\right)^m = \frac{1}{(a^{n'})^m} = \frac{1}{a^{n'm}} = a^{-n'm};$$

формула (1) вѣрна, ибо $-n'm = nm$.

3^0., случай $n = -n'$, $m = -m'$

$$(a^n)^m = (a^{-n'})^{-m'} = \frac{1}{(a^{-n'})^{m'}} = 1 : \left(\frac{1}{a^{n'}}\right)^{m'} = 1 : \frac{1}{a^{n'm'}} = a^{n'm'};$$

формула (1) и въ этомъ случаѣ вѣрна, ибо $n'm' = n \cdot m$.

Свойства пропорцій.

§ 58. Разсмотримъ рядъ равныхъ отношеній

(1) $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots$$

Обозначивъ общую величину этихъ отношеній черезъ q, получимъ

$$a_1 = b_1 q,\ a_2 = b_2 q,\ a_3 = b_3 q, \ldots\ldots$$

Сложивъ эти равенства, будемъ имѣть

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots)q,$$

откуда

$$q = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots}$$

и мы приходимъ къ пропорціи

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots$$

Сумма предыдущихъ членовъ равныхъ геометрическихъ отношеній относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ каждый предыдущій къ своему послѣдующему.

§ 59. Теорема предыдущаго параграфа можетъ быть обобщена, если мы предварительно умножимъ на λ_1 оба члена перваго отношенія, на λ_2 члены второго отношенія, и т. д.

Получаемъ

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1\lambda_1}{b_1\lambda_1} = \frac{a_2\lambda_2}{b_2\lambda_2} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3\lambda_3}{b_3\lambda_3} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots$$

откуда

$$\frac{a_1\lambda_1}{b_1\lambda_1} = \frac{a_2\lambda_2}{b_2\lambda_2} = \frac{a_3\lambda_3}{b_3\lambda_3} = \ldots\ldots = \frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \ldots\ldots}{b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \ldots\ldots}.$$

Приходимъ окончательно къ свойству ряда отношеній, выражаемому равенствами

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots = \frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \ldots\ldots}{b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \ldots\ldots};$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\ldots$ совершенно произвольныя числа.

§ 60. Прибавляя ко всѣмъ отношеніямъ по 1 и вычитая по 1, получимъ

$$\frac{a_1}{b_1}+1=\frac{a_2}{b_2}+1=\frac{a_3}{b_3}+1=\ldots$$

$$\frac{a_1}{b_1}-1=\frac{a_2}{b_2}-1=\frac{a_3}{b_3}-1=\ldots$$

или, что одно и то же

$$(1)\qquad \frac{a_1+b_1}{b_1}=\frac{a_2+b_2}{b_2}=\frac{a_3+b_3}{b_3}=\ldots$$

$$(2)\qquad \frac{a_1-b_1}{b_1}=\frac{a_2-b_2}{b_2}=\frac{a_3-b_3}{b_3}=\ldots,$$

откуда, раздѣляя отношенія (1) на отношенія (2), получимъ окончательно

$$\frac{a_1+b_1}{a_1-b_1}=\frac{a_2+b_2}{a_2-b_2}=\frac{a_3+b_3}{a_2-b_3}=\ldots$$

т. е. сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго къ ихъ разности, и т. д.

Можно убѣдиться въ справедливости ряда отношеній

$$\frac{ka_1+lb_1}{ka_1+mb_1}=\frac{ka_2+lb_2}{ka_2+mb_2}=\frac{ka_3+lb_3}{ka_3+mb_3}=\ldots,$$

гдѣ k, l, m произвольныя числа.

ГЛАВА V.

Объ уравненіяхъ первой степени и неравенствахъ.

§ 1. Равенство

$$A=B$$

называется **тождествомъ, если оно удовлетворяется, то есть справедливо при всѣхъ численныхъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ.**

Напримѣръ, равенства

$$a^m\,.\,a^n=a^{m+n};\quad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

суть тождества, потому что они остаются справедливыми при вся-

кихъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ a и b. Буквы m и n обозначаютъ произвольныя (положительныя или отрицательныя) цѣлыя числа.

Къ числу тождествъ присоединяются также равенства, не заключающія буквъ и выражающія фактъ равенства двухъ одного или различнаго вида обозначеній одного и того же числа. Напримѣръ, равенства $1+2=3$, $4=4$ суть тождества.

§ 2. **Уравненіемъ** называется такого вида равенство, которое содержитъ буквы и справедливо только при нѣкоторыхъ значеніяхъ этихъ буквъ. Напримѣръ, равенство $2x=4$ справедливо только при $x=2$ и несправедливо при всѣхъ остальныхъ значеніяхъ числа x.

§ 3. Буквы, которымъ надо придать опредѣленныя численныя значенія или опредѣленныя буквенныя выраженія, носятъ названіе неизвѣстныхъ величинъ. Неизвѣстныя обозначаются обыкновенно послѣдними буквами латинскаго алфавита $x, y, z, \ldots$ По числу неизвѣстныхъ уравненія раздѣляются на уравненія съ одною, двумя и болѣе неизвѣстными. Напримѣръ, уравненіе

$$x^2+2-x=4$$

есть уравненіе съ одною неизвѣстною; уравненіе же $x+y+z=2$ есть уравненіе съ тремя неизвѣстными.

§ 4. **Рѣшить уравненіе**, значитъ, найти всѣ его рѣшенія, то есть тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ его въ тождество. Рѣшенія уравненія называются также его корнями.

Такъ, напримѣръ, числа 2 и 3 суть корни уравненія

$$x^2-5x+6=0, \tag{1}$$

ибо послѣ ихъ подстановки вмѣсто неизвѣстной величины x получаются два тождества

$$2^2-5\,.\,2+6=0,$$
$$3^2-5\,.\,3+6=0.$$

Мы иногда корень уравненія (1) будемъ называть корнемъ полинома x^2-5x+6.

§ 5. Уравненія, имѣющія одни и тѣ же корни, носятъ названія уравненій равносильныхъ.

Напримѣръ, уравненія

$$5x-3=2x \quad \text{и} \quad x-4=3-6x$$

равносильны, ибо они имѣютъ общій и единственный корень $x=1$.

§ 6. При рѣшеніи уравненій главнымъ пріемомъ является такъ называемое, преобразованіе его. Подъ преобразованіемъ уравненія разумѣется замѣна уравненія другимъ ему равносильнымъ.

Цѣлью рѣшенія уравненія при помощи преобразованія является замѣна уравненія ему равносильнымъ уравненіемъ, но рѣшающимся легче.

§ 7. Преобразованіе уравненія основывается на слѣдующихъ теоремахъ, легко доказываемыхъ на основаніи свойствъ чиселъ, принадлежащихъ полю.

Теорема I. **Къ обѣимъ частямъ уравненія $A=B$ можно прибавить одно и то же число C, причемъ новое уравненіе $A+C=B+C$ будетъ равносильно съ первоначальнымъ.**

Изъ этой теоремы вытекаетъ слѣдующая весьма важная

Теорема II. **Любой членъ уравненія можно перенести изъ одной его части въ другую, мѣняя лишь при этомъ его знакъ на обратный.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ задано уравненіе

$$5x-z+1=2y-7+x.$$

Требуется перенести членъ x изъ правой части въ лѣвую. Для этой цѣли достаточно къ обѣимъ частямъ прибавить по $-x$. Тогда въ правой части $x-x$ даетъ 0, и, слѣдовательно, получаемъ

$$5x-z+1-x=2y-7,$$

и теорема доказана.

Если мы перенесемъ всѣ члены изъ правой части въ лѣвую, то мы получимъ окончательно такое уравненіе

$$5x-z+1-x-2y+7=0,$$

въ которомъ въ правой части находится нуль.

Уравненіе послѣ приведенія подобныхъ членовъ принимаетъ видъ

$$4x-2y-z+8=0.$$

Итакъ, всякое уравненіе $A=B$ равносильно такому

$$A-B=0.$$

§ 8. Теорема III. **Всякое уравненіе $A=B$ можно въ обѣихъ частяхъ умножить на любое число C отличное отъ нуля; получаемое уравненіе $AC=BC$ будетъ равносильно съ первоначальнымъ.**

Первоначальное уравненіе можно переписать такъ $A-B=0$, уравненіе же $AC=BC$ можно переписать такъ $AC-BC=0$ или иначе

(1) $$(A-B)C=0.$$

Изъ уравненія $A-B=0$ получается уравненіе (1), ибо по свойству поля раціональныхъ чиселъ отъ умноженія нуля на всякое число получается нуль. И обратно, если произведеніе $(A-B)C$ есть нуль, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей долженъ равняться нулю, но C отлично отъ нуля, слѣдовательно, другой множитель $A-B$ долженъ равняться нулю.

На этой теоремѣ основывается возможность сокращать уравненіе на любой числовой множитель всѣхъ его коэффиціентовъ; напримѣръ, изъ уравненія

$$2x-4y+6z-10=0,$$

послѣ сокращенія всѣхъ членовъ на 2, получаемъ

$$x-2y+3z-5=0.$$

Подобнымъ же образомъ легко освободиться отъ дробныхъ коэффиціентовъ, если умножимъ всѣ члены уравненія на наименьшее кратное ихъ знаменателей; напримѣръ, изъ заданнаго уравненія

$$\frac{3}{5}x+\frac{1}{15}y+\frac{5}{6}z-\frac{1}{2}=0$$

черезъ умноженіе на 30 получимъ

$$18x+2y+25z-15=0.$$

Если умножить всѣ члены уравненія на -1, то мы приходимъ къ теоремѣ:

Можно перемѣнить знаки передъ всѣми членами уравненія.

§ 9. Предположимъ, что у насъ разсматривается уравненіе

(1) $$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$

въ которомъ всѣ члены перенесены въ лѣвую часть, причемъ лѣвая часть представляетъ собою полиномъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ неизвѣстнаго x. Коэффиціенты A_0, A_1, A_2, ... мы будемъ предполагать величинами извѣстными; эти величины могутъ быть опредѣленными числами,

или же алгебраическими выраженіями, заключающими буквы, напримѣръ,

$$2x^3 - 3x^2 + \frac{5}{6}x - 0{,}52 = 0,$$

$$ax^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{1}{a}x - 2b = 0.$$

Членъ A_0x^n, имѣющій наибольшій показатель n, носитъ названіе старшаго члена уравненія.

Степень старшаго члена считается степенью самого уравненія. Напримѣръ, уравненіе $2x + 3 = 0$ есть уравненіе 1-й степени; $x^2 - 3x + 5 = 0$ есть уравненіе 2-й степени; $x^5 + 1 = 0$ есть уравненіе 5-ой степени.

Рѣшеніе уравненій первой степени.

§ 10. Итакъ, приступимъ теперь къ рѣшенію уравненія первой степени

$$ax + b = 0.$$

Можно преобразовать это уравненіе такимъ образомъ, чтобы въ лѣвой части осталась одна неизвѣстная буква x, а въ правой выраженія извѣстныя.

Перенося членъ b въ правую часть, получимъ

$$ax = -b,$$

и, раздѣляя на a обѣ части уравненія, приходимъ къ окончательному рѣшенію уравненія

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Напримѣръ, уравненіе

$$2x - 3 = 0$$

даетъ $2x = 3$ и, наконецъ, $x = \frac{3}{2}$.

§ 11. Если уравненіе первой степени задано такъ, что неизвѣстная x входитъ въ обѣихъ частяхъ уравненія

$$ax + b = cx + d,$$

то уравненіе перенесеніемъ всѣхъ членовъ въ лѣвую часть приводится къ виду, разобранному въ § 10. Переносимъ члены съ

буквой x въ лѣвую часть, а извѣстные члены въ правую, получимъ

$$ax - cx = -b + d,$$

или иначе

$$x(a-c) = d - b,$$

и, раздѣляя на $a-c$, получимъ окончательно

$$x = \frac{d-b}{a-c}.$$

Изслѣдованіе рѣшенія уравненія первой степени.

§ 12. Разсмотримъ рѣшеніе уравненія

(1) $$ax = b,$$

гдѣ a и b обозначаютъ произвольныя числа изъ поля R.

Изслѣдовать рѣшеніе уравненія (1) это значитъ разсмотрѣть всѣ возможные случаи относительно численныхъ значеній a и b. Эти буквы могутъ быть числами положительными, отрицательными, а также могутъ равняться нулю.

1°., Если a не равняется нулю, то, раздѣляя уравненіе (1) на a, получимъ

$$x = \frac{b}{a}.$$

Получается единственный корень $\frac{b}{a}$ уравненія первой степени.

2°., Пусть $a=0$, а b не равняется нулю. Въ этомъ случаѣ буква x пропадаетъ изъ уравненія. Если мы подъ неизвѣстнымъ x будемъ предполагать произвольное число поля R, то въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе невозможно, ибо получаемъ $0 \cdot x = b$, или $0 = b$, что несправедливо на основаніи предположенія, что буква b выражаетъ число отличное отъ нуля.

Иногда этому случаю даютъ такое толкованіе. Если мы будемъ разсматривать очень малое по абсолютной величинѣ число a, тогда абсолютная величина дроби $\frac{b}{a}$ будетъ очень велика. Величина дроби будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше величина a [1]).

---

[1]) Напримѣръ, если число a принимаетъ значеніе 0,1; 0,01; 0,001, ... то $\frac{b}{a}$ принимаетъ значенія $10b$, $100b$, $1000b$, . . .

Поэтому говорятъ, что неизвѣстная x безконечно велика при $a=0$, и обозначаютъ это обстоятельство знакомъ

$$x=\infty .$$

3°., Допустимъ, наконецъ, что оба числа a и b равны нулю, тогда, очевидно, что уравненію

$$0 \cdot x=0$$

удовлетворяетъ всякое число x. Можно сказать, что уравненіе не опредѣляетъ числа x, или короче, что заданное уравненіе неопредѣленное.

Формула $x=\frac{b}{a}$ получаетъ видъ

$$x=\frac{0}{0},$$

поэтому знакъ $\frac{0}{0}$ называютъ иногда знакомъ неопредѣленности.

Наше изслѣдованіе можно для наглядности расположить въ слѣдующую таблицу

Предположеніе	Рѣшеніе	Говорятъ, что уравненіе	Формула
$a \neq 0$	однозначное	опредѣленно	$x=\frac{b}{a}$
$a=0,\ b \neq 0$	не существуетъ	невозможно	$x=\infty$
$a=0,\ b=0$	какое угодно число	неопредѣленно	$x=\frac{0}{0}$

Уравненія со многими неизвѣстными.

§ 13. Мы будемъ называть алгебраическимъ уравненіемъ съ неизвѣстными x, y, z, u уравненіе вида

$$A=0,$$

гдѣ A есть нѣкоторый полиномъ, заключающій въ членахъ не-

извѣстныя съ цѣлыми положительными показателями. Напримѣръ,

(1) $$2x^2y^3zu^4 - \frac{3}{2}xyz^3 + 5x - 15 = 0.$$

Въ этомъ уравненіи сумма показателей надъ неизвѣстными въ первомъ членѣ $2x^2y^3zu^4$ есть $2+3+1+4=10$, слѣдовательно, этотъ членъ мы будемъ называть членомъ 10-го измѣренія, или иначе, 10-ой степени. Членъ $-\frac{3}{2}xyz^3$ имѣетъ степень 5, членъ $+5x$ есть членъ первой степени, и, наконецъ, членъ -15 имѣетъ нулевую степень.

Наибольшую изъ степеней отдѣльныхъ членовъ называютъ **степенью алгебраическаго уравненія.** Такъ, напримѣръ, уравненіе (1) есть уравненіе 10-ой степени.

Самый общій видъ уравненія 1-ой степени съ n неизвѣстными $x_1, x_2, \ldots x_n$ будетъ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a = 0,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_n$, a заданныя числа или буквенныя выраженія.

Уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

§ 14. Очевидно, что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными не можетъ опредѣлять этихъ неизвѣстныхъ. Напримѣръ, разсмотримъ уравненіе

(1) $$2x - 3y + 1 = 0.$$

Тогда неизвѣстному y можно дать любое численное значеніе y_0; подставляя это значеніе въ уравненіе, получимъ уравненіе

(2) $$2x - 3y_0 + 1 = 0$$

съ однимъ неизвѣстнымъ x. Черезъ рѣшеніе уравненія (2) относительно x получимъ

$$x = \frac{3y_0 - 1}{2}.$$

Напримѣръ, если, $y_0 = 1$, то для x получаемъ значеніе $x_0 = 1$; если $y_0 = 2$, то $x_0 = \frac{5}{2}$, и т. д.

§ 15. Разсмотримъ систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными

(1) $$ax + by = c,$$

(2) $$a_1x + b_1y = c_1.$$

Требуется найти значенія неизвѣстныхъ x и y, удовлетворяющія сразу обоимъ уравненіямъ.

Предположимъ сначала, что всѣ четыре коэффиціента a, b, a_1, b_1 не равны нулю.

Предположимъ, что мы задачу рѣшили и нашли два числа x_0, y_0, которыя будучи подставлены вмѣсто x и y въ уравненіе (1) и (2), обращаютъ ихъ въ тождества.

Будемъ въ уравненіи (1) подъ x разумѣть число x_0, тогда въ этомъ уравненіи останется одна неизвѣстная y, и, рѣшая относительно y, получимъ

$$by = c - ax,$$

(3) $$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Такъ какъ для y получается единственное рѣшеніе, то очевидно, что оно должно совпадать какъ разъ съ числомъ y_0. Подставляя полученное выраженіе (3) въ уравненіе (2) вмѣсто y, получимъ уравненіе

(4) $$a_1x + b_1\frac{c - ax}{b} = c_1,$$

которое должно удовлетворяться значеніемъ x_0 для неизвѣстнаго x.

Перепишемъ уравненіе (4) такъ

$$(a_1b - b_1a)\ x = c_1b - b_1c,$$

то получимъ окончательно

$$x = \frac{bc_1 - cb_1}{ba_1 - ab_1}.$$

Подставляя послѣднее выраженіе вмѣсто x въ формулу (3), получимъ

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{bc_1 - cb_1}{ba_1 - ab_1} = \frac{ca_1 - ac_1}{ba_1 - ab_1}.$$

Итакъ, мы получаемъ искомое рѣшеніе уравненій (1) и (2) въ такомъ видѣ

(5) $$x = \frac{bc_1 - cb_1}{ba_1 - ab_1}, \quad y = \frac{ca_1 - ac_1}{ba_1 - ab_1}.$$

Изслѣдованіе рѣшенія двухъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными.

§ 16. Мы видѣли, что, если общій знаменатель $ba_1 - ab_1$ не равенъ нулю, то формулы (5) даютъ единственное рѣшеніе системы. Придется изслѣдовать только случай равенства нулю этого знаменателя

$$ab_1 - a_1b = 0.$$

§ 17. Скажемъ нѣсколько словъ объ эквивалентныхъ или равносильныхъ системахъ, понимая подъ такимъ названіемъ системы, удовлетворяющіяся одними и тѣми же значеніями неизвѣстныхъ.

Пусть задана система

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Разсмотримъ новое уравненіе

$$aA + bB = 0, \tag{2}$$

гдѣ a и b произвольныя числа. Мы будемъ называть уравненіе (2) линейной комбинаціей[1]) уравненій (1)

Покажемъ, что система

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ aA + bB &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

будетъ равносильна съ первоначальной системой (1), т. е. будетъ имѣть тѣ же самыя рѣшенія, если коэффиціентъ b отличенъ отъ нуля.

Покажемъ, что **неравенство нулю коэффиціента b есть условіе необходимое и достаточное для равносильности системъ (1) и (3).**

Въ самомъ дѣлѣ, если $b = 0$, то въ системѣ (3) пропадаютъ всякіе слѣды уравненія $B = 0$, и ясно, что такая система не можетъ быть равносильна первоначальной (1).

Если $b \neq 0$, то нетрудно показать, что системы (1) и (3) эквивалентны: 1^0., каждое рѣшеніе системы (1) удовлетворяетъ системѣ (3), ибо, если равны нулю два выраженія A и B, то будетъ равняться нулю и ихъ линейная комбинація $aA + bB = 0$;

---

[1]) Вообще говоря, всякое выраженіе $ax + by + cz + du + e$ первой степени отъ буквъ x, y, z, u носитъ названіе линейнаго относительно этихъ буквъ.

2^0., каждое рѣшеніе системы (3) будетъ обратно удовлетворять системѣ (1), ибо второе уравненіе $aA + bB = 0$ системы (3) на основаніи перваго уравненія $A = 0$ можетъ быть переписано такъ: $bB = 0$, но b отлично отъ нуля, слѣдовательно, получаемъ $B = 0$. Уравненія же $A = 0$ и $B = 0$ образуютъ систему (1).

§ 18. Итакъ, приступимъ къ изслѣдованію системы

(1) $$ax + by = c,$$

(2) $$a_1x + b_1y = c_1,$$

при условіи

$$ab_1 - ba_1 = 0.$$

Предположимъ, что a не равно нулю. Умножая уравненіе (1) на $-a_1$, а уравненіе (2) на a и складывая, получимъ уравненіе, которое вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) даетъ систему

(3) $$\begin{cases} ax + by = c, \\ (ab_1 - ba_1)y = ac_1 - a_1c; \end{cases}$$

согласно предположенію мы имѣемъ $ab_1 - ba = 0$, слѣдовательно, если будетъ

$$ac_1 - a_1c \neq 0,$$

то второе уравненіе системы (3) невозможно, и мы получаемъ $y = \infty$.

Если же

$$ca_1 - ca_1 = 0,$$

то второе уравненіе системы (3) будетъ неопредѣленнымъ и, слѣдовательно, оно можетъ удовлетворяться при произвольномъ значеніи неизвѣстнаго y; обозначимъ это значеніе черезъ y_0, тогда можно будетъ подставить это значеніе въ первое уравненіе системы (3) и мы получимъ

$$ax + by_0 = c,$$

откуда, рѣшая относительно x, получимъ

$$x = \frac{c - by_0}{a}.$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ мы получаемъ рѣшеніе системы въ такомъ видѣ

$$x = \frac{c - by_0}{a},$$

$$y = y_0.$$

Этотъ случай можно назвать случаемъ **простой неопредѣ-**

ленности, ибо рѣшеніе зависитъ **только отъ одной неопредѣленной величины.**

Если оба коэффиціента a и a_1 равны нулю, тогда уравненія системы (1) обращаются въ слѣдующія

$$by = c,\ b_1 y = c_1. \tag{4}$$

Если b не равно нулю, то рѣшая первое уравненіе относительно y, получимъ $y = \frac{c}{b}$, и, подставляя во второе, получаемъ

$$b_1 \frac{c}{b} = c_1$$

или иначе

$$b_1 c - c_1 b = 0; \tag{5}$$

послѣднее равенство есть условіе возможности рѣшенія системы (4) относительно одного неизвѣстнаго y. Такъ какъ въ этомъ случаѣ x въ систему не входитъ, то его величина совершенно произвольна, которую мы обозначимъ черезъ x_0. Итакъ, получаемъ

$$y = \frac{c}{b},\ x = x_0.$$

Получается простая неопредѣленность. Нетрудно видѣть, что послѣдній нашъ случай $a = 0,\ a_1 = 0,\ b \neq 0$ есть не что иное, какъ уже разобранный случай $a \neq 0$, если только измѣнимъ названія перемѣнныхъ: x назовемъ y-омъ и, обратно, y назовемъ x-омъ.

§ 19. Обратимся теперь къ случаю

$$a = 0,\ a_1 = 0,\ b = 0,\ b_1 = 0.$$

Если по крайней мѣрѣ отличенъ отъ нуля одинъ изъ коэффиціентовъ c и c_1, то система невозможна.

Если же $c = 0$ и $c_1 = 0$, тогда два уравненія

$$0 . x + 0 . y = 0,$$
$$0 . x + 0 . y = 0$$

не опредѣляютъ величинъ x и y, и мы получаемъ рѣшеніе

$$x = x_0,\ y = y_0,$$

гдѣ x_0 и y_0 произвольныя числа.

Это случай д в о й н о й неопредѣленности.

§ 20. Результаты приведеннаго нами изслѣдованія можно представить при помощи слѣдующей таблицы

Система $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

Допущенія		Результаты	Формулы
$ab_1 - ba_1 \neq 0$		Единственное рѣшеніе	$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1}$ $y = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$
Одинъ изъ четырехъ коэффиціентовъ a, a_1, b, b_1, отличенъ отъ нуля, напримѣръ, $a \neq 0$			
$ab_1 - ba_1 = 0$	$ac_1 - ca_1 \neq 0$	Невозможная система	$y = \infty$
	$ac_1 - ca_1 = 0$	Простая неопредѣленность	$x = \frac{c - by_0}{a}$ $y = y_0$
$a = 0$ $a_1 = 0$	c и c_1 не равны оба вмѣстѣ нулю	Невозможная система	
$b = 0$ $b_1 = 0$	$c = 0$ $c_1 = 0$	Двойная неопредѣленность	$x = x_0$ $y = y_0$

Случай многихъ уравненій со многими неизвѣстными.

§ 21. Разсматривая n уравненій первой степени съ m неизвѣстными, мы можемъ высказать такой общій признакъ: если число неизвѣстныхъ болѣе числа уравненій, то уравненія будутъ неопредѣленными; если число уравненій болѣе числа неизвѣстныхъ, то обыкновенно существуетъ въ системѣ противо-

рѣчіе. Опредѣленное рѣшеніе получается обыкновенно при числѣ уравненій равномъ числу неизвѣстныхъ.

Рѣшеніе n уравненій первой степени съ n неизвѣстными можно достигнуть при помощи такъ называемаго исключенія всѣхъ неизвѣстныхъ кромѣ одного. Пояснимъ указанный способъ исключенія на численномъ примѣрѣ.

Требуется рѣшить систему 4-хъ уравненій

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad x - 3y + z = 5,\\
&(2) \quad 2x - 2y + 3u = 6,\\
&(3) \quad 3x + 5y - 2z + u = 7,\\
&(4) \quad x + y - z - 2u = 1
\end{aligned}
$$

относительно четырехъ неизвѣстныхъ x, y, z, u.

Будемъ исключать послѣдовательно буквы x, y, z такимъ образомъ, чтобы осталась одна буква u и одно уравненіе, которому она должна удовлетворять.

Рѣшимъ уравненіе (1) относительно одной изъ буквъ, напримѣръ, z, предполагая буквы x и y извѣстными.

$$(5) \quad z = 5 - x + 3y.$$

Подставимъ полученное для z выраженіе $5 - x + 3y$ въ уравненія (3) и (4), тогда три уравненія (2), (3) и (4) будутъ имѣть видъ

$$
\begin{aligned}
&2x - 2y + 3u = 6\\
&3x + 5y - 2(5 - x + 3y) + u = 7\\
&x + y - (5 - x + 3y) - 2u = 1,
\end{aligned}
$$

или окончательно

$$
\begin{aligned}
&(6) \quad 2x - 2y + 3u = 6,\\
&(7) \quad 5x - y + u = 17,\\
&(8) \quad x - y - u = 3.
\end{aligned}
$$

Итакъ, вмѣсто четырехъ уравненій (1), (2), (3), (4) съ четырьмя неизвѣстными x, y, z, u, мы получили систему трехъ уравненій (6), (7), (8) только съ тремя неизвѣстными x, y, u. Мы достигли, такъ называемаго исключенія буквы z. Для того, чтобы рѣшить первоначальную систему уравненій (1), (2), (3), (4) относительно четырехъ неизвѣстныхъ x, y, z, u, придется рѣшить систему (6), (7), (8) относительно трехъ неизвѣстныхъ x, y, u. Когда величины неизвѣстныхъ x, y, u найдены, мы получимъ четвертую неизвѣстную z по формулѣ (5). Исключимъ изъ урав-

неній (6), (7), (8), напримѣръ, неизвѣстную u. Рѣшимъ для этой цѣли относительно u уравненіе (7)

$$u = 17 - 5x + y \tag{9}$$

и подставимъ это выраженіе въ (6) и (8). Получаемъ,

$$2x - 2y + 3(17 - 5x + y) = 6,$$
$$x - y - (17 - 5x + y) = 3,$$

или окончательно

$$-13x + y = -45, \tag{10}$$
$$3x - y = 10. \tag{11}$$

Для исключенія y рѣшаемъ (11) относительно y

$$y = -10 + 3x; \tag{12}$$

получаемъ послѣ подстановки въ (10)

$$-13x - 10 + 3x = -45$$
$$10x = 35,$$

или

$$x = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}.$$

По формулѣ (12) получаемъ

$$y = -10 + \frac{21}{2} = \frac{1}{2}.$$

По формулѣ (9) получаемъ

$$u = 17 - 5x + y = 17 - \frac{35}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

По формулѣ (5) получаемъ

$$z = 5 - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

Итакъ, полное рѣшеніе заданныхъ уравненій (1), (2), (3), (4) дается числами

$$x = \frac{7}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = 3,\ u = 0.$$

§ 22. Пріемы рѣшенія нѣсколькихъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными можно разнообразить въ зависимости отъ вида заданныхъ уравненій.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

I. Требуется рѣшить относительно x, y, z, t систему уравненій

$$\begin{aligned} y+z+t&=a,\\ x+z+t&=b,\\ x+y+t&=c,\\ x+y+z&=d. \end{aligned}$$

Складывая эти уравненія, мы получимъ

$$3x+3y+3z+3t=a+b+c+d,$$

или иначе,

$$x+y+z+t=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Вычитывая изъ послѣдняго уравненія каждое по порядку изъ числа заданныхъ уравненій, получимъ окончательное рѣшеніе въ видѣ

$$x=\frac{a+b+c+d}{3}-a,\ y=\frac{a+b+c+d}{3}-b,$$
$$z=\frac{a+b+c+d}{3}-c,\ t=\frac{a+b+c+d}{3}-d.$$

II. Требуется рѣшить систему

$$\begin{aligned} zu+uy+yz&=yzu,\\ ux+xz+zu&=zux,\\ xy+yu+ux&=uxy,\\ yz+zx+yx&=xyz. \end{aligned}$$

Раздѣляя всѣ эти уравненія на то, что стоитъ во вторыхъ частяхъ, получимъ (надо будетъ особенно разобрать случай, когда равны нулю эти вторыя части)

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}&=1,\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{x}&=1,\\ \frac{1}{u}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=1,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=1. \end{aligned}$$

Можно будетъ ввести новыя неизвѣстныя x', y', z', u' при помощи зависимостей

(2) $$x' = \frac{1}{x},\ y' = \frac{1}{y},\ z' = \frac{1}{z},\ u' = \frac{1}{u},$$

тогда для нахожденія x', y', z', u' получимъ уравненія примѣра I, въ которыхъ $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$.

Получаемъ

$$x' = y' = z' = u' = \frac{1}{3},$$

и на основаніи (2) получимъ окончательное рѣшеніе системы

$$x = y = z = u = 3.$$

Остается разобрать случай, когда по крайней мѣрѣ одна неизвѣстная x, y, z, u обращается въ нуль. Тогда вышеприведенный способъ рѣшенія непримѣнимъ. Пусть $u = 0$, то система (1) обращается въ такую

$$yz = 0,$$
$$xz = 0,$$
$$xy = 0,$$
$$yz + zx + xy = xyz.$$

Рѣшеніемъ послѣдней системы являются слѣдующія предположенія

или $x = 0$, $y = 0$, z . . . . . произвольное число,
или $x = 0$, $z = 0$, y . . . . . произвольное число,
или $y = 0$, $z = 0$, x . . . . . произвольное число.

Задачи, рѣшаемыя уравненіями первой степени.

§ 23. Чтобы рѣшить задачу при помощи алгебры, нужно поступить слѣдующимъ образомъ:

1°., выбрать неизвѣстныя,

2°., составить уравненія, связывающія эти неизвѣстныя съ извѣстными величинами,

3°., рѣшить уравненія и изслѣдовать эти рѣшенія,

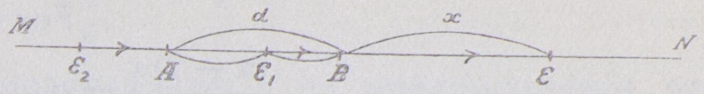
4°., изслѣдовать задачу.

Лучше всего пояснить сказанное на примѣрахъ.

Задача о курьерахъ.

§ 24. Задача. **Пусть два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ** M **къ** N. **Первый проѣзжаетъ въ каждый часъ** α **верстъ, а вто-**

рой β верстъ. Перваго видѣли на станціи A въ моментъ времени K, а второго видѣли на станціи B въ моментъ времени L. Найти мѣсто встрѣчи двухъ курьеровъ, если извѣстно, что станція B лежитъ на разстояніи d отъ A и съ той стороны, въ которую ѣдутъ курьеры.



Черт. 1.

Будемъ отсчитывать время отъ нѣкотораго начальнаго момента и измѣрять его часами. Пусть моментъ времени K соотвѣтствуетъ a часамъ, протекшимъ отъ начала счета времени, а моментъ L соотвѣствуетъ b часамъ.

Соотвѣтственно чертежу направленіе движенія курьеровъ можетъ быть названо направленіемъ слѣва направо.

Предположимъ, что точка встрѣчи E лежитъ направо отъ точки B, и пусть ея искомое разстояніе отъ B будетъ x.

Такъ какъ первый курьеръ въ часъ проходитъ α верстъ, то разстояніе $AE = d + x$ онъ пройдетъ въ

$$\frac{d+x}{\alpha}$$

часовъ, значитъ, встрѣча наступитъ черезъ

$$a + \frac{d+x}{\alpha}$$

часовъ послѣ начала счета времени. Подобнымъ же образомъ разсуждая относительно другого курьера, замѣтимъ, что встрѣча произойдетъ также черезъ

$$b + \frac{x}{\beta}$$

часовъ послѣ начала счета времени.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ уравненію

$$a + \frac{d+x}{\alpha} = b + \frac{x}{\beta}. \tag{1}$$

Рѣшаемъ это уравненіе, обозначивъ для сокращенія

$$a + \frac{d}{\alpha} = a_1;$$

число часовъ a_1 соотвѣтствуетъ моменту времени, когда первый курьеръ попадетъ на станцію B.

Итакъ, уравненіе (1) можно переписать такъ

$$a_1 + \frac{x}{\alpha} = b + \frac{x}{\beta},$$

$$a_1 - b = \frac{x}{\beta} - \frac{x}{\alpha},$$

$$\frac{(\alpha - \beta)x}{\alpha\beta} = a_1 - b,$$

или окончательно

$$x = \frac{(a_1 - b)\alpha\beta}{\alpha - \beta}. \tag{2}$$

1°., **Положительное рѣшеніе** будетъ тогда, когда $\alpha > \beta$ и $a_1 > b$, или тогда, когда $\alpha < \beta$ и $a_1 < b$.

Оно обозначаетъ, что задача возможна въ томъ предположеніи, что курьеры встрѣчаются направо отъ B. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ сначала случай $\alpha > \beta$ и $a_1 > b$, т. е., что курьеръ, ѣдущій съ бо́льшею скоростью α, попадаетъ на станцію B послѣ другого курьера, который тѣмъ временемъ уже выѣхалъ направо отъ B; ясно, что первый курьеръ нагонитъ второго съ той же стороны относительно B. Для второго случая $\alpha < \beta$ разсужденія будутъ аналогичныя, а именно, неравенство $a_1 < b$ показываетъ, что курьеръ, ѣдущій съ бо́льшею скоростью β, будетъ на станціи B позже другого.

2°., **Отрицательное рѣшеніе** будетъ тогда, когда $\alpha > \beta$ и $a_1 < b$, или же тогда, когда $\alpha < \beta$, $a_1 > b$.

Это рѣшеніе обнаруживаетъ невозможность предположенія, что курьеры встрѣтились направо. Дѣйствительно, перемѣнимъ x на $-x$ въ уравненіи (1), мы получимъ уравненіе

$$a + \frac{d - x}{\alpha} = b - \frac{x}{\beta}. \tag{3}$$

Это уравненіе мы могли бы получить, предположивъ, что курьеры встрѣчаются налѣво отъ B въ разстояніи x отъ этой станціи. Можно сдѣлать два предположенія: или, что встрѣча курьеровъ произошла въ точкѣ E_1 между точками A и B, или же въ точкѣ E_2 налѣво отъ точки A. Въ обоихъ случаяхъ получается одно и тоже уравненіе (3). Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ случай точки E_1 ($x = E_1B$). Ясно, что встрѣча произойдетъ между двумя моментами времени, опредѣляемыми числами a и b. Къ времени a, для полученія времени встрѣчи надо прибавить время прохожденія первымъ курьеромъ разстоянія AE_1, то есть надо

прибавить число $\frac{d-x}{\alpha}$. Изъ времени же b надо вычесть время, которое второй курьеръ употребляетъ для прохожденія пространства E_1B, то есть число $\frac{x}{\beta}$.

Мы получимъ также уравненіе (3) и въ предположеніи, что встрѣча произошла налѣво отъ точки A ($x = E_2B$). Въ этомъ случаѣ изъ времени a, соотвѣтствующаго моменту нахожденія перваго курьера въ точкѣ A, надо вычесть время прохожденія имъ промежутка E_2A, то есть $\frac{x-d}{\alpha}$; уравненіе, полученное такимъ образомъ

$$a - \frac{x-d}{\alpha} = b - \frac{x}{\beta}$$

совпадаетъ съ уравненіемъ (3).

Итакъ, отрицательное рѣшеніе показываетъ, что встрѣча произошла налѣво отъ станціи B (между A и B, если $|x| < d$ и налѣво отъ A, если $|x| > d$).

Покажемъ теперь, что тѣ же самыя заключенія мы могли бы сдѣлать и по формулѣ (2).

Разсмотримъ случай $\alpha > \beta$, $a_1 < b$. Въ этомъ случаѣ курьеръ, ѣдущій быстрѣе, будетъ впереди уже въ моментъ нахожденія на станціи B, до которой другой еще не доѣхалъ. Ясное дѣло, что, если встрѣча двухъ курьеровъ была возможна, то она имѣла мѣсто до момента времени, опредѣляемаго числомъ a_1, когда первый курьеръ попалъ въ точку B, значитъ, встрѣча была налѣво отъ точки B. Аналогичныя разсужденія будутъ имѣть мѣсто и въ случаѣ $\alpha < \beta$, $a_1 > b$.

3°., **Нулевое рѣшеніе** получится, когда $a_1 = b$.

Въ этомъ случаѣ встрѣча произойдетъ на станціи B.

4°., **Безконечное рѣшеніе** будетъ имѣть мѣсто, когда a_1 не равно b, а $\alpha = \beta$.

Въ этомъ случаѣ встрѣчи не можетъ быть, ибо оба курьера ѣдутъ съ одинаковою скоростью, а когда одинъ изъ нихъ пріѣзжаетъ на станцію B, то другой или еще не доѣхалъ до этой станціи, или уже проѣхалъ ее.

5°., **Неопредѣленное рѣшеніе** получится при $\alpha = \beta$ и $a_1 = b$. Въ этомъ случаѣ можно считать каждую точку пути за точку встрѣчи, ибо курьеры ѣдутъ все время вмѣстѣ.

Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.

§ 26. Если по условію задачи не видно сразу, какъ найти зависимость между данными и искомыми величинами, то можно иногда ввести вспомогательныя неизвѣстныя. Хорошимъ примѣромъ, поясняющимъ это обстоятельство, является слѣдующая задача Ньютона.

На лугу, площадь котораго есть a, пасутся въ продолженіи t дней n быковъ и за это время съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, которая подростала во все это время равномѣрно. На другомъ лугу, площадь котораго a', пасутся въ продолженіи t' дней n' быковъ и также съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все время равномѣрно. Спрашивается, сколько нужно пустить быковъ на третій лугъ, площадь котораго есть α, чтобы чтобы они въ теченіи θ дней съѣли какъ ту траву, что на немъ есть, такъ и ту, которая будетъ подрастать во все время равномѣрно.

Предполагается, что высота травы на всѣхъ трехъ лугахъ одинакова до выгона на нихъ быковъ; обозначимъ ее черезъ y. Предполагается также, что подростаніе травы на всѣхъ трехъ лугахъ за одинъ день одно и то же; обозначимъ это подрастаніе черезъ z. Величины y и z суть вспомогательныя неизвѣстныя. Обозначимъ искомое число быковъ черезъ x.

Подростаніе травы на первомъ лугу за t дней будетъ tz и высота травы къ концу этого времени $y+tz$. Количество травы, съѣдаемое n быками въ теченіи t дней, можно опредѣлить, какъ объемъ этой травы, то есть $a(y+tz)$. Слѣдовательно, одинъ быкъ съѣстъ въ теченіе дня травы

$$\frac{a(y+tz)}{nt}$$

Подобныя же числа получимъ относительно двухъ другихъ луговъ.

$$\frac{a'(y+t'z)}{n't'}, \quad \frac{\alpha(y+\theta z)}{x\theta}.$$

Приходимъ къ двумъ уравненіямъ

$$\frac{a(y+tz)}{nt} = \frac{a'(y+t'z)}{n't'} = \frac{\alpha(y+\theta z)}{x\theta} \tag{1}$$

съ тремя неизвѣстными y, z, x. Такъ какъ уравненія однородны относительно y и z, то число неизвѣстныхъ можно уменьшить, полагая $y=\xi z$. Тогда z исчезаетъ, и уравненія (1) перепишутся такъ

$$\frac{a(\xi+t)}{nt} = \frac{a'(\xi+t')}{n't'} = \frac{\alpha(\xi+\theta)}{x\theta}.$$

Изъ лѣваго уравненія получаемъ

$$\xi = \frac{an'-a'n}{a'nt-an't'}\,tt'.$$

Подставляемъ это выраженіе въ уравненіе

$$\frac{a(\xi+t)}{nt} = \frac{\alpha(\xi+\theta)}{x\theta};$$

получаемъ окончательно

$$x = \alpha \frac{an't'(\theta - t) + a'nt(t' - \theta)}{aa'\theta(t' - t)}$$

Ньютонъ прилагаетъ эту задачу къ слѣдующимъ числамъ

$a = 3^1/_3$	акра,	$t = 4$	недѣли,	$n = 12$	быковъ,
$a' = 10$	„	$t' = 9$	„	$n' = 21$	быкъ,
$\alpha = 24$	„	$\theta = 18$	„	$x = 36$	„

О неравенствахъ.

§ 27. Вопросъ о неравенствѣ двухъ чиселъ раціональныхъ рѣшается вполнѣ на основаніи опредѣленій III § 6 главы II и III § 10 главы III (стр. 9 и 17). Несмотря на это полезно въ практическомъ отношеніи обратить вниманіе на то обстоятельство, что неравенства имѣютъ по свойствамъ большую аналогію съ уравненіями, а потому возможно съ ними оперировать подобно тому, какъ съ уравненіями.

§ 28. Прежде всего замѣтимъ, что, **если число a больше b, то разность $a - b$ будетъ положительнымъ числомъ. Это слѣдуетъ непосредственно изъ того, что сказано въ главахъ II и III.**

§ 29. Относительно неравенствъ

$$A > B,$$

можетъ быть установлено раздѣленіе на два класса, какъ это было при уравненіяхъ.

1°., **Неравенства тождественныя**, справедливыя при всевозможныхъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ, напр., $4 > 3$, $a^2 > 0$.

2°., **Неравенства, соотвѣтствующія уравненіямъ**, вѣрныя только при нѣкоторыхъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ, напр.,

$$x^2 < x - 1.$$

Неравенства второго рода раздѣляются подобно уравненіямъ по числу неизвѣстныхъ и по степени ихъ. Два неравенства называются равносильными, если они удовлетворяются одними и тѣми же значеніями буквъ.

§ 30. Относительно неравенствъ могутъ быть поставлены слѣдующихъ два вопроса:

1°., доказать справедливость тождественнаго неравенства,

2°., рѣшить неравенство въ томъ случаѣ, если оно заключаетъ неизвѣстныя величины.

Что касается первой задачи, то тутъ трудно указать какія-либо общія замѣчанія. Вторая же задача рѣшается въ общемъ аналогично съ рѣшеніемъ уравненій.

§ 31. **Если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ (или отъ нихъ вычтемъ) одно и то же число или алгебраическое выраженіе, то получится неравенство равносильное первому.**

Очевидно, что неравенства

$$A > B \text{ и } A \pm C > B \pm C$$

равносильны, ибо первое есть условіе положительности числа $A - B$, а второе утверждаетъ положительность числа

$$(A \pm C) - (B \pm C),$$

но

$$(A \pm C) - (B \pm C) = A - B,$$

и теорема доказана.

§ 32. На основаніи теоремы предыдущаго §-а получается **возможность переносить члены неравенства изъ одной части въ другую съ перемѣной знака**

Напримѣръ, неравенство $x^2 > x - 1$ можно переписать такъ

$$x^2 - x + 1 > 0.$$

§ 33. **Если обѣ части неравенства умножимъ (или раздѣлимъ) на одно и то же положительное число, не равное 0, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.**

Разсмотримъ неравенство

$$A > B.$$

Умножимъ положительное число $A - B$ на положительное число C, получимъ по правилу знаковъ (§ 16 главы III, стр. 21) новое положительное число $(A - B)\ C = AC - BC$, что даетъ неравенство

$$AC > BC,$$

и теорема доказана.

Если обѣ части неравенства содержатъ общаго положительнаго множителя, то на него можно неравенство сократить. Напр., неравенство

$$(x - 3)^2 (x + 5) > (x - 3)^2 (x + 2)$$

по сокращеніи на положительнаго множителя $(x - 3)^2$ даетъ

$$x + 5 > x + 2.$$

Всѣ значенія x, удовлетворяющія этому неравенству, за исключеніемъ $x=3$, удовлетворяютъ также и заданному.

§ 34. **Если обѣ части неравенства умножить (или раздѣлить) на одно и то же отрицательное число, то новое неравенство не будетъ имѣть мѣста; причемъ получится неравенство равносильное съ заданнымъ, если измѣнить знакъ неравенства на обратный (знакъ $>$ на $<$, или обратно).**

Пусть задано неравенство $A>B$ и отрицательное число C. Если мы умножимъ положительное число $A-B$ на отрицательное число C, то получимъ по правилу знаковъ (§ 16 главы III, стр. 21) отрицательное число $(A-B)\,C=AC-BC$, что даетъ

$$AC<BC,$$

и теорема доказана.

§ 35. Неравенство съ дробными членами можно привести къ неравенствамъ безъ дробей.

Напримѣръ, пусть требуется разсмотрѣть неравенство

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D}.$$

Перенеся всѣ члены въ первую часть, получимъ

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}>0,$$

откуда

$$\frac{AD-CB}{BD}>0.$$

Это же неравенство равносильно двумъ слѣдующимъ

$$AD-CB>0 \qquad AD-CB<0,$$

или

$$BD>0, \qquad BD<0.$$

§ 36. **Если сложимъ почленно два неравенства одинаковаго смысла, то получимъ новое неравенство, удовлетворяющееся всѣми значеніями буквъ, способными удовлетворить двумъ первымъ неравенствамъ одновременно.**

Пусть заданы неравенства

$$A>B,\ A_1>B_1.$$

Если сложить два положительныхъ числа $A-B$ и A_1-B_1, то получимъ новое положительное число

$$(A-B)+(A_1-B_1)=(A+A_1)-(B+B_1),$$

которое показываетъ, что имѣетъ мѣсто неравенство

$$A+A_1>B+B_1,$$

и теорема доказана.

§ 37. **Если вычтемъ почленно два неравенства, противоположнаго смысла, поставивъ знакъ того неравенства, части котораго были уменьшаемыми, то получится новое неравенство, удовлетворяющееся такими значеніями буквъ, при которыхъ удовлетворяются два первыхъ неравенства.**

Пусть заданы два неравенства

$$A>B,\ A_1<B_1;$$

складывая два положительныхъ числа $A-B$ и B_1-A_1 получимъ положительное число

$$(A-B)+(B_1-A_1)=(A-A_1)-(B-B_1),$$

откуда выходитъ

$$A-A_1>B-B_1.$$

§ 38. Укажемъ нѣсколько свойствъ неравенствъ, части которыхъ положительны.

I. Если $A>B$ и $C\geqslant D$, то $AC>BD$.

Въ самомъ дѣлѣ, умножая первое неравенство на C, а второе на B получимъ

$$AC>BC,\ BC\geqslant BD,$$

откуда

$$AC>BD.$$

II. Если $A>B$, то $A^2>B^2$, $A^3>B^3$, ...

III. Если $A>B$, $C<D$, то

$$\frac{A}{C}>\frac{B}{D}.$$

Доказательство неравенствъ.

§ 39. Требуется доказать неравенство

$$1.2.3.\ \ldots\ .(n-1)n<2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Мы имѣемъ

$$\{1.2.3\ldots(n-1)n\}^2=n^2[1.(n-1)][2.(n-2)]\ldots\ldots$$
$$[\kappa(n-\kappa)]\ldots[(n-1).1];$$

но, очевидно, что каждое изъ произведеній, стоящихъ въ скобкахъ, меньше чѣмъ $\left(\frac{n}{2}\right)^2$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\left(\frac{n-2\kappa}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} - \kappa n + \kappa^2 > 0,$$

откуда

$$\kappa\,(n-\kappa) < \frac{n^2}{4}.$$

Мы получаемъ

$$(1.2.3\ldots n)^2 < \left(\frac{n}{2}\right)^{2(n-1)} n^2,$$

откуда получаемъ справедливость заданнаго неравенства.

§ 40. **Докажемъ теперь такія, важныя для всего дальнѣйшаго, неравенства.**

Если $A > B$, а n натуральное число, то

$$(1) \qquad n\,(A-B)\,B^{n-1} < A^n - B^n < n\,(A-B)\,A^{n-1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тождество

$$A^n - B^n = (A-B)\,(A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2 A^{n-3} + \ldots + B^{n-1}),$$

но

$$A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2 A^{n-3} + \ldots < A^{n-1} + AA^{n-2} + A^2 A^{n-3} + \ldots < n.A^{n-1};$$

подобнымъ же образомъ

$$A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2 A^{n-3} + \ldots > B^{n-1} + B.B^{n-2} + B^2 B^{n-3} + \ldots > n\,B^{n-1}$$

и неравенства (1) дѣйствительно удовлетворяются.

§ 41. Требуется доказать, что величина дроби

$$(1) \qquad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n},$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ положительныя числа, заключается между большею и меньшею изъ дробей:

$$(2) \qquad \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}.$$

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ будетъ наименьшая изъ дробей (2), или, лучше сказать, не бо́льшая, чѣмъ остальныя дроби, ибо можетъ существовать нѣсколько одинаковыхъ по величинѣ наименьшихъ, т. е. обозначая $\frac{a_1}{b_1} = \delta$, получимъ

(3) $$\frac{a_2}{b_2} \geqslant \delta, \quad \frac{a_3}{b_3} \geqslant \delta, \quad \ldots \ldots \quad \frac{a_n}{b_n} \geqslant \delta,$$

или иначе

$$a_1 = b_1\delta, \quad a_2 \geqslant b_2\delta, \quad a_3 \geqslant b_3\delta, \quad \ldots \ldots \quad a_n \geqslant b_n\delta.$$

Складывая эти неравенства получимъ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \delta\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

откуда

(4) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \geqslant \delta.$$

Если не всѣ неравенства (3) обращаются въ равенства, то равенство невозможно въ формулѣ (4).

Подобнымъ же образомъ обозначая черезъ $\Delta = \frac{a_1}{b_1}$, если дробь $\frac{a_1}{b_1}$ наибольшая изъ дробей (2), получимъ

(5) $$\frac{a_2}{b_2} \leqslant \Delta, \quad \frac{a_3}{b_3} \leqslant \Delta, \quad \ldots \ldots \quad \frac{a_n}{b_n} \leqslant \Delta,$$

откуда получаемъ

$$a_2 \leqslant \Delta\, b_2, \quad \ldots \ldots \quad a_n \leqslant \Delta\, b_n.$$

Складывая эти неравенства и дѣля результатъ на $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, получимъ

(6) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant \Delta,$$

причемъ равенство будетъ въ томъ случаѣ, когда всѣ неравенства (5) обращаются въ равенства.

Рѣшеніе неравенствъ первой степени.

§ 42. Требуется, напримѣръ, рѣшить неравенство

$$5x - 3 < 3x - 8.$$

Перенося всѣ члены въ лѣвую часть, получимъ

$$5x - 3 - 3x + 8 < 0,$$

откуда

$$2x + 5 < 0;$$

переносимъ число 5 во вторую часть

$$2x < -5,$$

раздѣляя на число 2, получимъ

$$x < -\frac{5}{2},$$

и неравенство можно считать рѣшеннымъ.

Неравенство первой степени даетъ одну границу для неизвѣстнаго x. Въ данномъ случаѣ граница верхняя, ибо она больше всякаго числа, которое удовлетворяетъ неравенству.

Неравенство

$$-3x+7<0$$

даетъ

$$-3x<-7.$$

Раздѣляя на -3 съ измѣненіемъ знака $<$ на $>$, получимъ

$$x>\frac{7}{3}.$$

Получается нижняя граница $\frac{7}{3}$ для числа x.

Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ.

§ 43. Неопредѣленныя уравненія, т. е. такія, у которыхъ число неизвѣстныхъ больше числа уравненій, допускаютъ, какъ мы уже видѣли, безчисленное множество рѣшеній. Уже давно былъ поставленъ вопросъ о нахожденіи, если это возможно, рѣшеній, выражающихся въ цѣлыхъ числахъ.

Этотъ вопросъ представляетъ не только теоретическій интересъ, но имѣетъ и практическое значеніе. Такъ, напримѣръ, уже въ древнемъ Египтѣ было извѣстно рѣшеніе

$$3^2+4^2=5^2$$

въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія

(1) $$x^2+y^2=z^2$$

въ цѣлыхъ числахъ. Другими словами, былъ извѣстенъ прямоугольный треугольникъ, длины сторонъ котораго выражаются цѣлыми числами 3, 4 и 5. Этотъ треугольникъ служилъ для построенія прямого угла.

Можно указать безчисленное множество рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ уравненія (1), напримѣръ,

$$12^2+5^2=13^2,\ 15^2+8^2=17^2,\ \text{и т. д.}$$

Иногда неопредѣленныя уравненія, имѣя безчисленное множество дробныхъ рѣшеній, не имѣютъ цѣлыхъ рѣшеній. Напримѣръ,

$$x^2+1=3y.$$

Такъ какъ мы желаемъ, чтобы x и y были цѣлыя числа, то необходимо, чтобы число x^2+1 дѣлилось на 3. Нетрудно убѣдиться, что этого никогда не будетъ. Цѣлое число x при дѣленіи на 3 должно имѣть одинъ изъ трехъ остатковъ 0, 1, 2; соотвѣтственно съ этимъ число x можетъ быть написано въ одномъ изъ видовъ

$$3n,\ 3n+1,\ 3n+2,$$

гдѣ n произвольное цѣлое число.

Выраженіе x^2+1 приметъ одинъ изъ видовъ

$$9n^2+1,$$
$$9n^2+6n+2,$$
$$9n^2+12n+3+2,$$

оно не дѣлится на 3, потому что въ остаткахъ отъ дѣленія на 3 даетъ

$$1,\ 2,\ 2.$$

§ 44. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ носитъ названіе Діофантова Анализа по имени извѣстнаго александрійскаго математика Діофанта (конца IV столѣтія по Р. Хр.).

Одна изъ задачъ этого анализа получила громадную извѣстность въ широкихъ слояхъ публики. Это знаменитая теорема Ферматa.

Ферматъ высказалъ безъ доказательства такую теорему:

Неопредѣленное уравненіе

$$x^n+y^n=z^n$$

при $n>2$ не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Усилія самыхъ большихъ математиковъ въ продолженіи болѣе 200 лѣтъ не привели къ доказательству теоремы при произвольномъ n.

Эйлеръ доказалъ теорему при $n=3$. Для случая $n=4$ было извѣстно доказательство самого Ферматa. Въ началѣ 19-го столѣтія были доказаны случаи $n=5$ и $n=7$. Знаменитый математикъ Куммеръ доказалъ теорему для всѣхъ простыхъ значеній n до 100. Число простыхъ значеній n, при которыхъ теорема вѣрна, въ настоящее время увеличено, но доказательство теоремы для всякаго n ускользаетъ отъ усилій математиковъ.

Задача Ферматa получила извѣстность потому, что одинъ нѣмецкій математикъ послѣ смерти завѣщалъ капиталъ 100000 марокъ для награды тому, кто рѣшитъ вполнѣ задачу Ферматa. Жюри, которое должно выдать премію, находится въ Геттингенскомъ Университетѣ. Установленіе же преміи принесло болѣе несчастья, чѣмъ пользы. Появились люди—самоучки, которыхъ въ насмѣшку называютъ „ферматистами“. Эти люди выступаютъ постоянно съ доморощенными рѣшеніями, которыя оказываются, конечно, ошибочными. Серіозный человѣкъ, желающій, какъ слѣдуетъ, заняться задачей Ферматa, долженъ изучить высшую математику, главнымъ образомъ, основную ея часть, называемую теоріей чиселъ.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

§ 45. Неопредѣленное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ видъ

(1) $$ax+by=c.$$

Мы будемъ искать цѣлыя значенія неизвѣстныхъ x и y, предполагая цѣлыми коэффиціенты a, b, c.

§ 46. **Случай невозможности. Если въ уравненіи (1) § 45 коэффиціенты a и b при неизвѣстныхъ имѣютъ дѣлителя, на котораго коэффиціентъ c не дѣлится, то уравненіе не рѣшается въ цѣлыхъ числахъ.**

Пусть общій дѣлитель чиселъ a и b будетъ d, то, очевидно, что $a=da_1$, $b=db_1$, гдѣ a_1 и b_1 цѣлыя числа, значитъ, первая часть уравненія (1) § 45

$$ax+by=d\,(a_1x+b_1y)$$

должна дѣлиться на d, если подъ x и y разумѣть цѣлыя числа, ибо выраженіе a_1x+b_1y будетъ цѣлымъ числомъ. Если c не дѣлится на d, то несомнѣнно приходимъ къ противорѣчію, и задача невозможна.

Напримѣръ, уравненіе

$$18x-15y=7$$

не можетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній, ибо первая часть всегда дѣлится на 3, а вторая часть 7 на три не дѣлится.

§ 47. **Для возможности рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія**

(1) $$ax+by=c$$

необходимо, чтобы общій наибольшій дѣлитель d чиселъ a и b дѣлилъ также и число c.

Въ этомъ случаѣ

$$a=da_1,\quad b=db_1,\quad c=dc_1,$$

и уравненіе (1) по сокращеніи на d принимаетъ видъ

(2) $$a_1x+b_1y=c_1,$$

гдѣ коэффиціенты a_1 и b_1 суть числа взаимно простыя, ибо d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b.

§ 48. Покажемъ, что уравненіе

(1) $$ax+by=c$$

въ томъ случаѣ, когда a и b числа взаимно простыя, имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ рѣшеній.

Предположимъ, что намъ извѣстно одно рѣшеніе (x_0, y_0), т. е. цѣлыя числа x_0 и y_0 даютъ тождество

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{2}$$

Покажемъ, какъ найти другія рѣшенія уравненія (1); пусть другое рѣшеніе получается по формуламъ

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi, \\ y &= y_0 + \eta, \end{aligned} \tag{3}$$

гдѣ ξ и η суть новыя неизвѣстныя, которымъ надо дать такія цѣлыя значенія, при которыхъ удовлетворится заданное уравненіе (1). Подставляя выраженія (3) въ уравненіе (1), получимъ

$$a\,(x_0 + \xi) + b\,(y_0 + \eta) = c.$$

Вычитая отсюда тождество (2), получимъ

$$a\xi + b\eta = 0,$$

откуда

$$\xi = -\frac{b\eta}{a}. \tag{4}$$

Такъ какъ ξ должно быть цѣлымъ числомъ, то произведеніе $b\eta$ должно дѣлиться на a; но b число взаимно простое съ a, то по извѣстной теоремѣ ариѳметики число η должно дѣлиться на a, и мы получаемъ

$$\eta = at, \tag{5}$$

гдѣ t пока произвольное число. Подставляя выраженіе (5) въ (4), получимъ

$$\xi = -bt. \tag{6}$$

Итакъ, выраженія (5) и (6) даютъ самыя общія цѣлыя численныя значенія для неизвѣстныхъ ξ и η, причемъ цѣлое число t остается произвольнымъ. Подставляя (5) и (6) въ (3), получимъ общія выраженія цѣлыхъ рѣшеній уравненія (1)

$$\begin{aligned} x &= x_0 - bt, \\ y &= y_0 + at. \end{aligned} \tag{7}$$

Напримѣръ, уравненіе

$$5x + 3y = 160 \tag{8}$$

имѣетъ одно цѣлое рѣшеніе

$$x = 20, y = 20.$$

По формуламъ (7) получимъ всѣ такія рѣшенія

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} x &= 20 - 3t, \\ y &= 20 + 5t, \end{aligned}$$

Если бы мы захотѣли найти всѣ цѣлыя и положительныя рѣшенія, то должны бы подобрать произвольное цѣлое число t такъ, чтобы имѣли мѣсто неравенства

$$20 - 3t \geqslant 0, \; 20 + 5t \geqslant 0.$$

Рѣшая эти неравенства, получимъ

$$t < \frac{20}{3}, \quad t \geqslant -\frac{20}{5}.$$

Итакъ, для t возможны только значенія

$$t = -4, \; t = -3, \; t = -2, \; t = -1, \; t = 0, \; t = 1, t = 2, \; t = 3, \; t = 4, \; t = 5, \; t = 6,$$

при которыхъ получаются положительныя рѣшенія по формуламъ (9)

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2
y	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

При всѣхъ остальныхъ t получаются отрицательныя рѣшенія. Напримѣръ, при $t = 7$ получается $x = -1$, $y = 55$.

§ 49. Остается показать, какъ найти одну пару цѣлыхъ рѣшеній (x_0, y_0).

Мы дадимъ два способа нахожденія одной пары рѣшеній: одинъ способъ, основанный на приложеніи теоріи непрерывныхъ дробей, будетъ указанъ дальше въ главѣ XV, другой способъ основанъ на соображеніяхъ совершенно элементарныхъ, не требующихъ никакой теоріи. Съ этого второго способа мы и начнемъ.

Если одинъ изъ коэффиціентовъ a и b дѣлитъ нацѣло

свободный членъ c, то сразу находится одна пара рѣшеній, полагая одно изъ неизвѣстныхъ равнымъ нулю.

Напримѣръ, если задано уравненіе

$$3x - 7y = 15,$$

то, полагая $y = 0$, получаемъ $3x = 15$, откуда, сокращая на 3, получимъ $x = 5$, и получаемъ рѣшенія

$$x_0 = 5, \; y_0 = 0.$$

Подобный же случай непосредственнаго рѣшенія задачи получается, если одинъ изъ коэффиціентовъ a, b равенъ единицѣ.

Напримѣръ,

$$3x - y = 5.$$

Рѣшая относительно y, получаемъ сразу общее рѣшеніе задачи

$$y = -5 + 3x,$$

причемъ x совершенно произвольное цѣлое число. Въ этомъ случаѣ x играетъ роль числа t въ формулѣ (7) § 48. Общее рѣшеніе можно написать такъ

$$x = 0 + 1 \cdot t,$$
$$y = -5 + 3t.$$

§ 50. Способъ, который проще всего ведетъ къ полному рѣшенію вопроса, основанъ на операціяхъ, состоящихъ въ послѣдовательномъ уменьшеніи коэффиціентовъ a и b. Проще всего пояснить этотъ способъ на примѣрѣ.

Требуется найти цѣлыя рѣшенія уравненія

(1) $$172x - 103y = 503.$$

Рѣшаемъ уравненіе относительно того неизвѣстнаго, у котораго стоитъ коэффиціентъ съ наименьшей абсолютной величиной.

Въ данномъ случаѣ надо рѣшить относительно y, ибо $103 < 172$.

$$y = -\frac{503}{103} + \frac{172}{103}x.$$

Выдѣляемъ изъ дробей правой части цѣлыя части

$$y = -4 + x + \frac{-91 + 69x}{103}.$$

Дробь

$$\frac{-91+69x}{103}$$

должна быть цѣлымъ числомъ; обозначая его черезъ t, получимъ

(2) $$y=-4+x+t;$$

причемъ

$$\frac{-91+69x}{103}=t,$$

или

$$69x=103t+91.$$

Такъ какъ $69<103$, то рѣшаемъ относительно x послѣднее уравненіе

$$x=\frac{91}{69}+\frac{103}{69}t.$$

Выдѣляемъ цѣлыя части

(3) $$x=1+t+\frac{22+34t}{69}=1+t+u,$$

причемъ

$$22+34t=69u.$$

Такъ какъ $34<69$, то рѣшаемъ относительно t

(4) $$t=-\frac{22}{34}+\frac{69}{34}u=2u+\frac{-22+u}{34}=2u+v,$$

причемъ

$$-22+u=34v.$$

Коэффиціентъ при u равенъ единицѣ, слѣдовательно, рѣшеніе задачи оканчивается. Получаемъ

(5) $$u=22+34v,$$

причемъ цѣлое число v остается произвольнымъ.

Принимая въ соображеніе уравненія (2), (3), (4), (5), получимъ

$$t=2u+v=2(22+34v)+v=44+69v,$$
$$x=1+t+u=1+44+69v+22+34v=67+103v,$$
$$y=x-4+t=-4+67+103v+44+69v=107+172v.$$

Итакъ, получаемъ окончательное рѣшеніе

$$x=67+103v,$$
$$y=107+172v;$$

частное рѣшеніе получается при $v=0$

$$x_0=67,\ y_0=107.$$

Рѣшеніе задачъ въ цѣлыхъ числахъ.

§ 51. Рѣшеніе уравненій въ цѣлыхъ числахъ имѣетъ важное теоретическое значеніе, ибо цѣлыя числа являются простѣйшими. Дальнѣйшею ступенью представляется разсмотрѣніе случаевъ, когда уравненія высшихъ степеней рѣшаются въ числахъ раціональныхъ.

Помимо теоретической важности, рѣшеніе уравненій въ цѣлыхъ числахъ не лишено и практическаго значенія, ибо часто неизвѣстныя не могутъ принимать дробныхъ значеній: напр., если дѣло идетъ о числѣ людей, о числѣ монетъ, о цифрахъ, входящихъ въ составъ многозначнаго цѣлаго числа.

§ 52. Задача. **Отецъ послалъ трехъ сыновей продавать яблоки, причемъ далъ одному 10 штукъ, другому 30, а третьему 50. Дѣти продавали сначала яблоки по одной цѣнѣ, но, желая скорѣе продать, они уменьшили цѣну. Продавъ яблоки, они принесли домой каждый одну и ту же сумму денегъ. Каковы были первая и вторая цѣны, и поскольку яблокъ каждый изъ нихъ продалъ по каждой цѣнѣ. Извѣстно кромѣ того, что цѣна яблока выражалась цѣлымъ числомъ копѣекъ.**

Обозначимъ первую цѣну одного яблока черезъ u, а вторую его цѣну черезъ v. Пусть тотъ, который имѣлъ 10 яблокъ, успѣлъ продать по первой цѣнѣ x яблокъ, тотъ, который имѣлъ 30 яблокъ, успѣлъ продать по первой цѣнѣ y яблокъ, и, наконецъ, тотъ, который имѣлъ 50 яблокъ, продалъ по первой цѣнѣ z штукъ.

По второй цѣнѣ дѣти продали

$$10-x,\ 30-y,\ 50-z.$$

Отсюда вытекаетъ, что дѣти выручили:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &ux+v(10-x),\\ &uy+v(30-y),\\ &uz+v(50-z). \end{aligned}$$

На основаніи условія задачи получаемъ два уравненія

$$(2)\qquad ux+v(10-x)=uy+v(30-y)=uz+v(50-z).$$

Эти два уравненія можно переписать такъ

$$(u-v)(x-y)=20v,$$
$$(u-v)(y-z)=20v, \tag{3}$$

откуда

$$x-y=y-z=t, \tag{4}$$

гдѣ t цѣлое число.

Изъ уравненій (4) получаемъ

$$y=z+t,$$
$$x=z+2t. \tag{5}$$

Уравненія (3) даютъ одно

$$ut=v(20+t). \tag{6}$$

Мы не будемъ называть различными два рѣшенія, получающіяся одно изъ другого отъ умноженія цѣнъ u и v на одно и то же число d

$$u,\ v \quad \text{и} \quad ud,\ vd.$$

Ограничимся разсмотрѣніемъ числа рѣшеній задачи, когда числа u и v взаимно простыя.

Такъ какъ $x\leqslant 10$, то мы получаемъ

$$z+2t\leqslant 10. \tag{7}$$

Отсюда мы видимъ, что единственно возможныя значенія для t будутъ: 1, 2, 3, 4, 5.

Для нахожденія u и v перепишемъ уравненіе (6) такъ

$$\frac{u}{v}=\frac{20+t}{t},$$

причемъ дробь въ правой части подлежитъ сокращенію. Мы получаемъ таблицу

(8)

t	1	2	3	4	5
u	21	11	23	6	5
v	1	1	3	1	1

Положительныя цѣлыя числа z и t произвольны, но должны удовлетворять неравенству (7). Когда они указаны, то таблица (8) даетъ u и v; наконецъ, формулы (4) даютъ x и y.

Сосчитаемъ теперь, сколько возможно рѣшеній

$z=0,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$	5 рѣшеній
$z=1,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4$	4 „ „
$z=2,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4$	4 „
$z=3,\ t=1,\ 2,\ 3$	3 „ „
$z=4,\ t=1,\ 2,\ 3$	3 „
$z=5,\ t=1,\ 2$	2 „ „
$z=6,\ t=1,\ 2$	2 „
$z=7,\ t=1$	1 „ „
$z=8,\ t=1$	1 „

всего 25 рѣшеній.

Уравненія, заключающія дробныя выраженія.

§ 53. Пусть задано уравненіе $A=0$, гдѣ A сумма раціональныхъ дробей, заключающихъ въ знаменателѣ x.

Произведя выкладки алгебраическаго сложенія этихъ дробей, получимъ въ первой части дробь, числитель и знаменатель которой суть многочлены относительно неизвѣстной x, коэффиціенты которыхъ предполагаются заданными.

Уравненіе имѣетъ видъ

$$\frac{f(x)}{F(x)}=0, \tag{1}$$

гдѣ $f(x)$ и $F(x)$ многочлены.

Если мы знаемъ, что нѣкоторое число α есть корень числителя $f(x)$, то есть $f(\alpha)=0$, то мы можемъ сказать, что α **есть также корень уравненія (1) только лишь въ томъ случаѣ, если знаменатель** $F(x)$ **при** $x=\alpha$, **т. е. величина** $F(\alpha)$ **отлична отъ нуля.**

Ибо въ этомъ случаѣ изъ уравненія $f(x)=0$ слѣдуетъ заданное (1).

Если $F(\alpha)=0$, то нельзя сказать, какое значеніе получаетъ лѣвая часть, ибо отъ дѣленія нуля на нуль не получается опредѣленнаго значенія.

Напримѣръ, требуется рѣшить уравненіе

$$\frac{x^2-9x+20}{x-4}=0.$$

Числитель обращается въ нуль только въ двухъ случаяхъ

$x = 5$, $x = 4$; при $x = 5$ знаменатель отличенъ отъ нуля и равенъ $5 - 4 = 1$, слѣдовательно, 5 есть корень заданнаго уравненія. При $x = 4$ знаменатель равенъ нулю, слѣдовательно, 4 не есть рѣшеніе заданнаго уравненія.

Приходимъ къ теоремѣ:

Если уравненіе можетъ быть приведено къ такому виду, который выражаетъ, что частное двухъ многочленовъ должно быть равно нулю, то рѣшенія его получаются такимъ образомъ, что находятъ корни числителя, не обращающіе въ нуль знаменатель.

ГЛАВА VI.

Числа ирраціональныя.

§ 1. Прежде чѣмъ мы пойдемъ далѣе въ изложеніи законовъ формальной алгебры, необходимо сдѣлать новое обобщеніе понятія о числѣ, ввести въ разсмотрѣніе, такъ называемыя, ирраціональныя числа.

Эти новыя числа присоединенныя къ полю R раціональныхъ чиселъ, даютъ новое болѣе широкое поле чиселъ W, которое мы будемъ называть полемъ **вещественныхъ или дѣйствительныхъ чиселъ.** Это названіе оправдывается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ дальнѣйшемъ изложеніи мы сдѣлаемъ новое и послѣднее обобщеніе понятія о числѣ, мы введемъ новыя, такъ называемыя, мнимыя числа.

§ 2. Мы придемъ самымъ простымъ и естественнымъ путемъ къ числамъ ирраціональнымъ, если мы будемъ разсматривать безконечныя десятичныя дроби. Примѣромъ такихъ дробей могутъ служить періодическія десятичныя дроби, разсматривавшіяся въ ариѳметикѣ.

Изъ всего, что извѣстно намъ изъ ариѳметики, мы приходимъ къ заключенію, что положительныя раціональныя числа раскладываются **или въ конечныя или въ періодическія десятичныя дроби:**

$$\frac{3}{4} = 0{,}75; \quad \frac{9}{25} = 0{,}36;$$

$$\frac{5}{7} = 0{,}(714285) = 0{,}714285714285 \ldots\ldots$$

§ 3. Можно себѣ представить заданную безконечную непериодическую десятичную дробь. Задать подобную дробь, это значитъ: указать правила, по которымъ можно было бы узнать, какая цифра стоитъ на любомъ указанномъ мѣстѣ.

Напримѣръ, дробь

(1) 0,1010010001000010000010 . . . . .

можно считать заданною. Единицы стоятъ на первомъ мѣстѣ послѣ запятой, на третьемъ, на шестомъ, на 10-омъ, на 15-омъ и т. д. вообще говоря, на мѣстѣ $1+2+3+\ldots+n$. Остальныя цифры нули.

Дробь (1) непериодическая, слѣдовательно, она не можетъ быть разложеніемъ раціональнаго числа, она представляетъ число новой природы.

Опредѣленіе ирраціональнаго числа.

§ 4. **Всякая безконечная непериодическая десятичная дробь представляетъ положительное ирраціональное число. Та же дробь, взятая со знакомъ минусъ впереди, представляетъ отрицательное ирраціональное число.**

I. Опредѣленіе равенства ирраціональныхъ чиселъ.

§ 5. **Два ирраціональныхъ числа мы будемъ считать равными тогда и только тогда, когда оба имѣютъ одинаковое представленіе въ видѣ безконечной дроби и одинаковые знаки.**

Въ разъясненіе къ этому опредѣленію необходимо добавить, что подъ одинаковымъ представленіемъ разумѣется, конечно, фактъ равенства всѣхъ цифръ одинаковыхъ разрядовъ въ двухъ числахъ.

Напримѣръ,

$$3{,}1415926\ldots = 3{,}1415926\ldots\ldots$$

§ 6. Поле W, о которомъ мы упомянули въ § 1 (стр. 99), будетъ состоять изъ чиселъ, опредѣленныхъ десятичными дробями **конечными, періодическими и безконечными непериодическими,** а также всѣхъ этихъ дробей, взятыхъ **со знакомъ минусъ.** Если бы мы захотѣли опредѣленіе равенства чиселъ ирраціональ-

ныхъ, данное въ § 5, распространить и на числа раціональныя, опредѣляемыя десятичными дробями, то тутъ встрѣтилось бы одно исключеніе, а именно, дроби съ періодомъ 9 равны конечнымъ дробямъ, напримѣръ,

$$0{,}567 = 0{,}566999 \ldots\ldots$$

Если мы согласимся не писать дробей съ періодомъ 9, то можно будетъ установить опредѣленіе равенства чиселъ какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ, при помощи тождественности ихъ представленій десятичными дробями.

§ 6. Установимъ теперь слѣдующее опредѣленіе неравенства положительныхъ чиселъ, опредѣляемыхъ безконечными десятичными дробями, причемъ намъ безразлично, какія это числа: раціональныя или ирраціональныя.

II. Опредѣленіе неравенства.

Два числа не равны, если ихъ разложенія въ десятичную дробь не одинаковы.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что ирраціональное число не можетъ быть равно раціональному.

III. Продолженіе опредѣленія неравенства.

То изъ двухъ неравныхъ чиселъ больше, у котораго первая слѣва неодинаковая цифра одного и того же разряда больше.

Пояснимъ это опредѣленіе примѣрами. Если

$$a = 142{,}56789412 \ldots\ldots$$
$$b = 142{,}56789583 \ldots\ldots$$

то будетъ $a < b$, ибо девятая слѣва цифра 5 числа b больше девятой цифры 4 числа a.

Возьмемъ еще такой примѣръ

$$a = 23{,}45789 \ldots\ldots$$
$$b = 3{,}45789 \ldots\ldots$$

Очевидно, что для сравненія цифръ одинаковыхъ разрядовъ придется число b переписать такъ

$$b = 03{,}45789 \ldots\ldots$$

и тогда $a > b$, ибо уже первая цифра 2 числа a больше соотвѣтственной цифры 0 числа b.

§ 7. Обратимся теперь къ установленію дѣйствій надъ десятичными дробями, которыя одинаково относились бы какъ къ числамъ раціональнымъ, такъ и ирраціональнымъ.

Мы не встрѣтимъ никакого затрудненія въ установленіи этихъ дѣйствій, если сохранимъ для чиселъ ирраціональныхъ тѣ же самыя правила, которыя относятся къ дѣйствіямъ надъ періодическими десятичными дробями.

Чтобы проще изложить дѣйствія надъ ирраціональными числами, вернемся къ самымъ началамъ ариѳметики и скажемъ нѣсколько словъ о производствѣ дѣйствій сложенія и вычитанія надъ многозначными цѣлыми числами.

Въ ариѳметикѣ даются правила для сложенія цѣлыхъ чиселъ, причемъ дѣйствіе совершается справа налѣво: начиная складывать единицы, мы переходимъ къ сложенію десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д., причемъ получающіяся единицы высшаго разряда прибавляются къ суммѣ слѣдующихъ налѣво цифръ. Точно также производится и вычитаніе.

Лица, которымъ приходится производить много вычисленій, находятъ болѣе практичнымъ складывать числа по два, причемъ это сложеніе при нѣкоторомъ навыкѣ можно производить съ удобствомъ слѣва направо. То же самое относится и къ вычитанію.

Вслѣдствіе привычки европейскихъ народовъ писать слова слѣва направо является удобнымъ сразу писать цифры суммы или разности въ привычномъ направленіи.

Небольшого упражненія достаточно, чтобы привыкнуть складывать и вычитать числа слѣва направо. Будемъ называть такое сложеніе и вычитаніе дѣйствіемъ, произведеннымъ въ обратномъ направленіи.

§ 8. Установимъ дѣйствіе сложенія такъ.

IV. Опредѣленіе сложенія.

Для того, чтобы сложить два числа, раціональныя или ирраціональныя, представленныя десятичными дробями, необходимо произвести надъ ихъ цифрами сложеніе въ обратномъ направленіи.

Напримѣръ, складывая два числа

$$\begin{array}{r} 135{,}67089267541\ldots. \\ +\ 72{,}36609883145\ldots. \end{array}$$

получаемъ

$$208{,}0369915\ldots$$

Для разъясненія способа производства сложенія въ обратномъ порядкѣ, мы должны замѣтить, что при сложеніи цифръ нѣкотораго разряда надо, прежде чѣмъ написать соотвѣтственную цифру суммы посмотрѣть на цифры слѣдующаго направо разряда обоихъ слагаемыхъ. Если цифры этого разряда даютъ въ суммѣ болѣе чѣмъ 10, то придется написать въ суммѣ цифру на единицу большую. Такъ въ послѣднемъ примѣрѣ цифры шестого разряда послѣ запятой суть 2 и 8. Послѣ сложенія онѣ даютъ цифру 0 суммы, но настоящая шестая послѣ запятой цифра суммы будетъ 1, ибо слѣдующій разрядъ имѣетъ цифры 6 и 8.

Такъ какъ нельзя выписать всѣхъ цифръ ирраціональнаго числа, ибо ихъ безчисленное множество, то при сложеніи придется въ обоихъ слагаемыхъ написать только нѣкоторое опредѣленное число цифръ послѣ запятой. Ясно, что нельзя сложеніе слѣва направо доводить до послѣднихъ направо цифръ, ибо тогда можетъ появиться ошибка въ послѣдней на право цифрѣ суммы, происходящая отъ того, что не приняты въ разсмотрѣніе дальнѣйшіе направо разряды слагаемыхъ.

§ 9. Изъ опредѣленія сложенія, даннаго въ предыдущемъ §-ѣ, слѣдуетъ, какъ теорема, то обстоятельство, что вычитаніе ирраціональныхъ чиселъ, должно производиться, какъ обычное вычитаніе цѣлыхъ чиселъ въ обратномъ направленіи.

Напримѣръ,

$$\begin{array}{r} 135{,}67089267541\ldots. \\ -\ 72{,}36609883145\ldots. \\ \hline 63{,}30479384\ldots\ldots \end{array}$$

§ 10. Пусть положительное ирраціональное число разложено въ десятичную дробь

(1) $$A = a_0,\ a_1\ a_2\ a_3\ldots.,$$

гдѣ a_0 цѣлая часть числа A, а буквы a_1, a_2, $a_3\ldots.$ представляютъ изъ себя цифры дробной части числа A.

Число a_0 есть или нуль, или натуральное число, которое можетъ быть и многозначнымъ. Цифры же a_1, a_2, $a_3\ldots.$ суть натуральныя числа меньшія числа 10 или нули.

Пусть A_k обозначаетъ конечную десятичную дробь, которую мы получимъ изъ ирраціональнаго числа A, если безконечную дробь оборвемъ на k-ой цифрѣ послѣ запятой.

$$A_k = a_0, a_1 a_2 \ldots . a_k .$$

Пусть кромѣ того будетъ

$$A'_k = A_k + \frac{1}{10^k} .$$

Числа A_k и A'_k суть числа раціональныя.

На основаніи опредѣленія сложенія можемъ написать

$$A_k = a_0 + 0, a_1 + 0, 0a_2 + \ldots . + 0, 0 \ldots 0a_k$$

или иначе

$$A_k = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} ,$$

а

$$A'_k = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k + 1}{10^k} .$$

§ 11. Сравнивая числа A_k, A, A'_k, мы видимъ

$$A_k = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \; 0 \; 0 \; 0 \ldots .$$
$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \; a_{k+1} \; a_{k+2} \ldots$$
$$A'_k = a_0, a_1 a_2 \ldots (a_k + 1) \; 0 \; 0 \; 0 \ldots$$

Отсюда, примѣняя опредѣленіе неравенства III, получаемъ

(1) $$A_k < A < A'_k$$

или иначе

$$0 < A - A_k < A'_k - A_k$$

(2) $$0 < A - A_k < \frac{1}{10^k} .$$

На основаніи неравенствъ (1) и (2) мы замѣчаемъ, что число A_k отличается отъ ирраціональнаго числа меньше, чѣмъ на дробь $\frac{1}{10^k}$, а потому число A_k называется **приближеннымъ значеніемъ числа** A **съ точностью** $\frac{1}{10^k}$.

Такъ какъ $A_k < A$, то число A_k носитъ названіе **приближенія по недостатку.**

Производя вычитаніе числа A изъ числа A'_k, получимъ

$$0 < A'_k - A = 0, \underbrace{0\,0\,0\,\ldots\ldots 0}_{k \text{ нулей}}\, b_{k+1}\, b_{k+2} \ldots$$

или

$$0 < A'_k - A < \frac{1}{10^k}.$$

Раціональное число A'_k называется приближеніемъ числа A по избытку съ точностью $\frac{1}{10^k}$.

Нетрудно видѣть, что раціональное число

$$A_k$$

не убываетъ съ возрастаніемъ значка k, то есть

$$A_{k+1} \geqslant A_k.$$

Равенство будетъ имѣть мѣсто тогда, когда $(k+1)$-ая цифра a_{k+1} равна нулю.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что величина

$$A'_k$$

не возрастаетъ, т. е.

$$A'_{k+1} \leqslant A'_k,$$

ибо

$$A'_k = a_0, a_1 a_2 \ldots (a_k + 1)\,000 \ldots.$$
$$A'_{k+1} = a_0, a_1 a_2 \ldots. a_k (a_{k+1} + 1)\,00 \ldots.$$

Если $a_{k+1} + 1 < 10$, то k-ая цифра послѣ занятой у числа A'_{k+1}, равная a_k меньше соотвѣтственной цифры $a_k + 1$ числа A'_k, значитъ,

$$A'_{k+1} < A'_k.$$

Если $a_k + 1 = 10$, то увеличивается на единицу предыдущая цифра. Если $a_{k+1} + 1 = 10$, то

$$A'_{k+1} = A'_k.$$

§ 12. Пусть разсматриваются двѣ безконечныя дроби

$$A = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$
$$B = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots.$$

и ихъ приближенія

$$A_k \text{ и } B_k.$$

Покажемъ, что число общихъ цифръ, которыя имѣетъ произведеніе

$$A_k B_k$$

со всѣми слѣдующими произведеніями

$$A_{k+1} B_{k+1}, A_{k+2} B_{k+2}, \ldots .$$

возрастаетъ съ возрастаніемъ значка k.

Напримѣръ, разсмотримъ два числа

$$A = 2{,}3409050137 \ldots .$$
$$B = 3{,}4500867042 \ldots .$$

получаемъ

$$\begin{aligned}
A_0B_0 &= 2 \,.\, 3 && = 6\\
A_1B_1 &= (2{,}4)\,(3{,}4) && = 7{,}82\\
A_2B_2 &= (2{,}34)\,(3{,}45) && = 8{,}0730\\
A_3B_3 &= (2{,}340)\,(3{,}450) && = 8{,}073000\\
A_4B_4 &= (2{,}3409)\,(3{,}4500) && = 8{,}07610500\\
A_5B_5 &= && = 8{,}076292720\\
A_6B_6 &= && = 8{,}076323567\\
A_7B_7 &= && = 8{,}076325206\\
A_8B_8 &= && = 8{,}076325240
\end{aligned}$$

Здѣсь жирнымъ шрифтомъ указаны цифры, которыя сохраняются при увеличеніи значка k.

Докажемъ справедливость указаннаго свойства въ общемъ случаѣ.

При всякомъ числѣ l большемъ k имѣютъ мѣсто неравенства

$$A_k \leqq A_l < A'_k$$
$$B_k \leqq B_l < B'_k$$

Отсюда на основаніи соображеній § 38 главы V (стр. 86) получаемъ

$$A_k B_k \leqq A_l B_l < A'_k B'_k \,. \tag{1}$$

Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что всѣ общія цифры произведеній

$$A_k B_k \text{ и } A'_k B'_k$$

входятъ въ составъ $A_l B_l$ при всякомъ l.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, а именно, что общія цифры $A_k B_k$ и $A'_k B'_k$ не заключаются $A_l B_l$, и пусть первая слѣва отличная отъ этихъ цифръ у $A_l B_l$ будетъ больше, чѣмъ у $A_k B_k$ и $A'_k B'_k$, тогда будемъ имѣть

$$A_l B_l > A_k B_k ,$$
$$A_l B_l > A'_k B'_k ,$$

что противорѣчитъ неравенствамъ (1).

Подобнымъ же образомъ мы приходимъ къ невозможнымъ неравенствамъ

$$A_l B_l < A_k B_k , \quad A_l B_l < A'_k \; B'_k ,$$

если допустимъ, что первая изъ отличныхъ цифръ числа $A_l B_l$ меньше соотвѣтственной цифры въ произведеніяхъ $A_k B_k$ и $A'_k B'_k$.

Остается теперь убѣдиться, что число общихъ цифръ $A_k B_k$ и $A'_k B'_k$ безпредѣльно возрастаетъ съ возрастаніемъ значка k. Для этой цѣли достаточно показать, что можно подобрать k такъ, чтобы у чиселъ

$$A_k B_k \text{ и } A'_k B'_k$$

существовало любое число m одинаковыхъ цифръ. Другими словами, надо показать, что можно подобрать значекъ k такимъ образомъ, чтобы было

$$A'_k B'_k - A_k B_k < \frac{1}{10^m},$$

гдѣ m произвольное цѣлое число.

$$A'_k \; B'_k - A_k B_k = \left(A_k + \frac{1}{10^k}\right)\left(B_k + \frac{1}{10^k}\right) - A_k B_k =$$

$$= \frac{A_k + B_k + \frac{1}{10^k}}{10^k} < \frac{(a_0+1)+(b_0+1)+1}{10^k} .$$

Остается цѣлое число k подобрать такъ, чтобы было

$$\frac{a_0+b_0+3}{10^k} < \frac{1}{10^m},$$

или иначе,

$$10^{k-m} > a_0 + b_0 + 3.$$

Достаточно, число k выбрать такъ, чтобы $k-m$ было не меньше числа цифръ въ цѣломъ числѣ a_0+b_0+3.

Если мы такъ выберемъ число k, то въ числѣ $A_k B_k$ будетъ по крайней мѣрѣ m цифръ послѣ запятой, которыя будутъ сохраняться во всѣхъ остальныхъ произведеніяхъ $A_{k+1} B_{k+1}$, $A_{k+2} B_{k+2}$, ...

§ 13. На основаніи соображеній предыдущаго параграфа мы дадимъ такое опредѣленіе дѣйствія умноженія.

V. Опредѣленіе умноженія.

Подъ произведеніемъ AB двухъ чиселъ A и B, опредѣляемыхъ двумя безконечными десятичными дробями, разумѣется число, составленное изъ безконечно продолженнаго ряда сохраняющихся при возрастаніи значка k цифръ произведенія $A_k B_k$.

Въ примѣрѣ предыдущаго §-а получимъ

$$AB = 8{,}0763252 \ldots .$$

Итакъ, мы видимъ, что данное нами опредѣленіе V не отличается по существу отъ опредѣленія обыкновеннаго умноженія цѣлыхъ чиселъ и конечныхъ десятичныхъ дробей.

Такъ, напримѣръ, въ примѣрѣ § 12 мы имѣемъ $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, значитъ, $a_0 + b_0 + 3 = 8$. Если мы желаемъ имѣть 7 вѣрныхъ цифръ послѣ запятой, то можно положить $m = 7$ и тогда получаемъ $k - m > 1$, откуда $k \geqslant 8$, и можно взять $k = 8$, что дѣйствительно провѣряется на самомъ дѣлѣ.

§ 14. Что касается дѣйствія дѣленія, то намъ остается немного прибавить къ тому, что сказано относительно умноженія.

Дѣйствіе дѣленія безконечныхъ десятичныхъ дробей не отличается по существу отъ дѣйствія дѣленія цѣлыхъ чиселъ.

Напримѣръ,

3,14159262	5,20315426 . . . .
3,12189255	0,6037 . . . . .
197000 . .	
156094 . .	
4090 . . .	
3642 . . .	

и т. д.

§ 15. Покажемъ теперь, что умноженіе числа, опредѣляемаго безконечною десятичною дробью, на число 10 равносильно перестановкѣ запятой на одну цифру направо.

Если дробь конечная, напримѣръ, 23,567, то ее можно разсматривать, какъ сумму чиселъ

$$20 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}.$$

Умноженіе на 10 сопровождается увеличеніемъ разрядовъ цифръ: десятки переходятъ въ сотни, единицы въ десятки, десятыя доли въ единицы, сотыя доли въ десятыя, и т. д. На основаніи этихъ соображеній доказывалось въ ариѳметикѣ правило умноженія конечной дроби на число 10, состоящее въ перенесеніи запятой на одну цифру направо. Будетъ ли это правило сохраняться для безконечныхъ дробей, сразу не очевидно, ибо не ясно, можно-ли безконечную дробь разсматривать, какъ сумму безконечнаго числа слагаемыхъ. Въ главѣ XIII мы увидимъ, что такое толкованіе возможно. Справедливость указаннаго правила для умноженія чиселъ, опредѣляемыхъ безконечными

дробями, на число 10 вытекаетъ непосредственно изъ даннаго нами опредѣленія V.

Пусть требуется умножить на 10 число

$$A = a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

Получаемъ

$$\begin{aligned}
A_0\ B_0 &= a_0 \,.\, 10 && = (10\, a_0),\ 0000 \ldots \\
A_1\ B_1 &= (a_0, a_1)\ (10{,}0) && = (a_0\, 10 + a_1),\ 000 \ldots \\
A_2\ B_2 &= (a_0, a_1\, a_2)\ (10{,}00) && = (a_0\, 10 + a_1),\ a_2\ 00 \ldots \\
A_3\ B_3 &= (a_0, a_1\, a_2\, a_3)\ (10{,}000) && = (10\, a_0 + a_1),\ a_2\, a_3\ 0 \ldots
\end{aligned}$$

. . . . . .

Отсюда на основаніи опредѣленія V получимъ

$$10A = (10\, a_0 + a_1),\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \ldots,$$

что и требовалось доказать.

Установленіе понятія объ отрицательномъ ирраціональномъ числѣ.

§ 16. Для установленія понятія объ отрицательномъ ирраціональномъ числѣ, придется повторить всѣ соображенія главы III, причемъ разсматривать ариѳметическія отношенія

$$a - b$$

такія, когда a и b могутъ быть числами ирраціональными.

Приведя отрицательное число къ простѣйшему виду $0 - b$, мы можемъ сказать, что отрицательное ирраціональное число оказывается взятымъ со знакомъ минусъ положительнымъ ирраціональнымъ числомъ, о чемъ уже упомянуто въ опредѣленіяхъ §§ 4 и 5 (стр. 100). Въ отрицательномъ ирраціональномъ числѣ $-b$ мы будемъ число b по прежнему называть абсолютной величиной числа $-b$ и обозначать знакомъ $|-b|$.

Изъ двухъ чиселъ $-a$ и $-b$, абсолютныя величины которыхъ выражаются безконечными десятичными дробями, то *больше*, у котораго абсолютная величина *меньше*.

Правило знаковъ при сложеніи и умноженіи остается то же, что и при соизмѣримыхъ значеніяхъ абсолютной величины чиселъ.

Сохраненіе формальныхъ законовъ раціональныхъ дѣйствій.

§ 17. Въ слѣдующей главѣ мы покажемъ, что ирраціональныя числа подвержены тѣмъ же формальнымъ законамъ первыхъ четырехъ дѣйствій, какъ и числа раціональныя.

Отсюда вытекаетъ, **что всѣ соображенія главъ IV и V сохраняются безъ всякаго исключенія, если подъ буквами понимать не только числа раціональныя, какъ это мы дѣлали, но также и числа ирраціональныя.**

ГЛАВА VII.

Понятіе о предѣлѣ перемѣнной.

§ 1. Разсмотримъ нѣкоторую совокупность S чиселъ вещественныхъ, каждое изъ которыхъ мы назовемъ элементомъ этой совокупности. Для насъ безразлично, будетъ ли въ этой совокупности S конечное число элементовъ или безконечное.

Мы будемъ говорить, что совокупность S задана, если существуютъ правила, по которымъ относительно каждаго, взятаго на удачу числа можно сказать, будетъ ли оно принадлежать къ совокупности S или нѣтъ.

§ 2. Примѣрами различныхъ совокупностей могутъ служить: совокупность чиселъ цѣлыхъ, совокупность чиселъ дробныхъ, совокупность чиселъ ирраціональныхъ, совокупность чиселъ отрицательныхъ и т. д.

§ 3. Если мы обозначимъ одной буквой

$$x$$

который нибудь изъ элементовъ совокупности S, не указывая, который именно, то буква x представитъ изъ себя такъ называемую перемѣнную величину. Каждое изъ чиселъ совокупности S носитъ названіе частнаго значенія перемѣнной.

§ 4. Если мы напишемъ равенство

$$x = a,$$

гдѣ a какое-нибудь опредѣленное изъ частныхъ значеній перемѣнной x, то мы будемъ говорить также, что **мы перемѣнной величинѣ придали частное значеніе** a.

§ 5. Можно установить **процессъ измѣненія перемѣнной величины.** Подъ процессомъ измѣненія перемѣнной величины разумѣется установленіе порядка, въ которомъ перемѣнная принимаетъ ея частныя значенія, т. е., иначе сказать, установленіе обстоятельства, какія значенія перемѣнная принимаетъ раньше и какія позже.

Такимъ процессомъ измѣненія можетъ быть, напримѣръ, возрастаніе или убываніе перемѣнной. При возрастаніи перемѣнная принимаетъ бо́льшія значенія послѣ меньшихъ, при убываніи, обратно, она принимаетъ меньшія значенія послѣ бо́льшихъ.

§ 6. Если совокупность частныхъ значеній перемѣнной состоитъ изъ одного числа, или, что одно и то же, процессъ ея измѣненія состоитъ въ томъ, что ея частное значеніе остается постоянно одинаковымъ, то такую перемѣнную называютъ величиной постоянной.

Каждое опредѣленное число въ отдѣльности можетъ быть названо **величиною постоянною.**

I. Опредѣленіе.

§ 7. **Перемѣнная называется безконечно малою, если при извѣстномъ процессѣ ея измѣненія она принимаетъ, начиная съ нѣкотораго момента, значенія меньшія по абсолютной величинѣ всякаго произвольно взятаго положительнаго числа ε и абсолютныя величины ея значеній меньше этого числа при дальнѣйшемъ процессѣ измѣненія.**

Величина x будетъ безконечно малою, если, начиная съ нѣкотораго момента измѣненія, будетъ

$$|x| < \varepsilon,$$

гдѣ ε произвольно выбранное положительное число, которое, будучи произвольнымъ, можетъ быть взято сколь угодно малымъ.

§ 8. Какъ примѣръ безконечно малой величины, можно привести дробь

$$x = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}000\ldots01}_{n \text{ нулей}}$$

при процессѣ безпредѣльнаго увеличенія натуральнаго числа n.

Какъ бы мало ни было взято положительное число ε, всѣ его цифры не могутъ равняться нулю. Пусть

$$\varepsilon = \underbrace{0{,}000\ldots0}_{m \text{ нулей}}\, e_m\, e_{m+1}\, e_{m+2} \ldots,$$

причемъ первая, отличная отъ нуля цифра e_m стоитъ послѣ m нулей. На основаніи опредѣленія III неравенства (глава VI, § 6) мы замѣчаемъ, что перемѣнная величина

$$x = \frac{1}{10^n}$$

сдѣлается и останется меньше ε, когда n превзойдетъ число m; съ другой стороны положительное число ε взято совершенно произвольно, слѣдовательно, по опредѣленію I предыдущаго §-а, величина $x = 1:10^n$ есть при возрастаніи показателя величина безконечно малая.

§ 9. Подобнымъ же образомъ мы покажемъ, что будетъ безконечно малою и величина

$$x = \frac{1}{n}$$

при возрастаніи натуральнаго числа n.

Ибо для удовлетворенія неравенству

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

достаточно взять

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

т. е. взять цѣлое число n больше цѣлой части числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

II. Опредѣленіе.

§ 10. **Перемѣнная величина называется безконечно большою, если при установленномъ процессѣ измѣненія абсолютная ея величина дѣлается и остается больше всякаго произвольно выбраннаго положительнаго числа.**

Величина x будетъ безконечно большою, если, начиная съ нѣкотораго момента измѣненія, будетъ

$$|x| > A,$$

гдѣ A произвольно выбранное положительное число.

Примѣромъ величины безконечно большой можетъ служить возрастающее натуральное число.

Такъ какъ извѣстно изъ ариѳметики, что рядъ простыхъ чиселъ

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\ldots$$

заключаетъ безчисленное множество простыхъ чиселъ, то перемѣнная

$$p,$$

представляющая возрастающее простое число, есть также перемѣнная безконечно большая.

§ 12. Теперь мы переходимъ къ опредѣленію одного изъ самыхъ важныхъ понятій всей математики, а именно понятія о предѣлѣ.

III. Опредѣленіе.

Постоянная величина a есть предѣлъ перемѣнной величины x, если разность

$$a - x$$

есть величина безконечно малая.

Это обстоятельство записывается такъ

$$a = lim\ x, \text{ или } a = \text{пред. } x.$$

Знакъ lim состоитъ изъ трехъ первыхъ буквъ латинскаго слова „limes“, что по-русски обозначаетъ „предѣлъ“.

§ 13. Если перемѣнная величина есть безконечно малая, то ея предѣлъ равенъ нулю, ибо

$$0 - x$$

есть величина безконечно малая, и мы можемъ написать

$$lim\ x = 0.$$

§ 14. Принято формулою

$$lim\ x = \infty$$

обозначать то обстоятельство, что x величина безконечно большая.

§ 15. Если

(1) $$lim\, x = a,$$

то

(2) $$x = a + \alpha,$$

гдѣ α безконечно малая величина; подобнымъ же образомъ, если

(3) $$lim\, y = b,$$

то

(4) $$y = b + \beta,$$

гдѣ β безконечно малая величина.

Когда двѣ безконечно малыя величины α и β убываютъ до нуля, тогда число нулей, предшествующихъ значущимъ цифрамъ въ обѣихъ безконечно растетъ; а, значитъ, растетъ число нулей и въ величинахъ

(5) $$\alpha + \beta \text{ и } \alpha - \beta.$$

Итакъ, обѣ величины (5) будутъ безконечно малыми.

Складывая и вычитая равенства (2) и (4), получимъ

$$x \pm y = a \pm b + (\alpha \pm \beta),$$

Такъ какъ $\alpha \pm \beta$ будетъ величиной безконечно малой, то мы получаемъ формулу

$$lim\, (x \pm y) = a \pm b,$$

которая въ связи съ формулами (1) и (3) даетъ

$$lim\, (x \pm y) = lim\, x \pm lim\, y,$$

и мы приходимъ къ теоремѣ:

Предѣлъ суммы (разности) двухъ величинъ равенъ суммѣ (разности) предѣловъ этихъ величинъ.

§ 16. Перемножая равенства (2) и (4) предыдущаго параграфа, получимъ

$$xy = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

При возрастаніи числа нулей въ величинахъ α и β будетъ безпредѣльно возрастать число нулей въ выраженіи

$$a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

а потому это послѣднее выраженіе будетъ также величиною безконечно малою, и, слѣдовательно,

$$lim\, xy = ab,$$

или иначе

$$lim\ (xy) = lim\ x.\ lim\ y,$$

то есть:

Предѣлъ произведенія двухъ величинъ равенъ произведенію предѣловъ множителей.

Ирраціональное число, какъ предѣлъ раціональной перемѣнной.

§ 17. Разсматривая разность

$$A - A_k = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{k\text{ нулей}}\, a_{k+1}\, a_{k+2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

которая, какъ мы уже видѣли, будучи положительною, меньше

$$\frac{1}{10^k},$$

мы замѣчаемъ, что эта разность есть безконечно малая величина, а, значитъ, мы получаемъ

$$A = lim\ A_k,$$

т. е. **ирраціональное число A есть предѣлъ своего приближенія по недостатку A_k при увеличеніи числа k:**

$$A = \lim_{k=\infty} A_k$$

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что

(1) $$A = \lim_{k=\infty} A'_k,$$

ибо

$$A - A'_k = A - A_k - (A'_k - A_k) =$$

$$= A - A_k - \frac{1}{10^k},$$

но $A - A_k$, по доказанному, есть безконечно малая величина, слѣдовательно, будетъ безконечно малою также и разность $A - A'_k$, и такимъ образомъ подтверждается справедливость формулы (1).

Періодическія десятичныя дроби.

§ 18. Въ главѣ VI мы видѣли уже, что умноженіе на 10 сводится къ перемѣщенію запятой на одно мѣсто направо безъ измѣненія послѣдовательности ряда цифръ.

Теперь у насъ есть данныя для того, чтобы строго доказать теорему, которую въ ариѳметикѣ принимали отчасти на вѣру, а именно, что періодическая дробь равна раціональному дробному числу ей соотвѣтствующему.

Наше доказательство не будетъ отличаться отъ того, что дѣлалось въ ариѳметикѣ. Строгость разсужденія будетъ зависѣть отъ того, что наши соображенія будутъ основаны на установленныхъ уже правилахъ дѣйствій надъ безконечными десятичными дробями.

Для ясности я поведу доказательство на частномъ примѣрѣ

$$x = 53,42736736736\ldots.$$

У насъ задана смѣшанная періодическая дробь съ періодомъ 736, а черезъ x обозначено число, опредѣляемое этой дробью.

Перемѣстимъ запятую къ концу перваго періода, что соотвѣтствуетъ умноженію на 100000

(1) $$x.\ 100000 = 5342736,\ 736\ 736\ldots.$$

Перемѣстимъ теперь запятую къ началу перваго періода

(2) $$x.\ 100 = 5342,\ 736\ 736\ldots.$$

Вычитая (2) изъ (1), получимъ

$$x\ 100000 - x\ 100 = 5342736 - 5342,$$

ибо на основаніи правила вычитанія чиселъ, опредѣляемыхъ десятичными дробями, всѣ цифры дробной части должны равняться нулю, и мы получаемъ

$$x = \frac{5342736 - 5342}{100000 - 100} = \frac{5337394}{99900}.$$

Предѣльныя значенія выраженій неопредѣленнаго вида.

§ 19 Разсмотримъ раціональную формулу

(1) $$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)\ (x + a)}{x - a}$$

и будемъ вычислять ея различныя значенія при различныхъ значеніяхъ x. Мы замѣчаемъ, что, если x отлично отъ a, то формула (1) даетъ для y опредѣленное численное значеніе. Если же $x = a$, то получаемъ неопредѣленность

$$y = \frac{0}{0}.$$

Эта неопредѣленность происходитъ оттого, что въ числителѣ и знаменателѣ находится множитель $x-a$, обращающійся въ нуль.

Если мы до подстановки $x=a$ сократимъ множитель $x-a$, то получимъ

(2) $$y=x+a,$$

т. е. формулу, не представляющую уже неопредѣленности при $x=a$, ибо получаемъ

(3) $$y=a+a=2a.$$

Старые авторы называли число $2a$ „истиннымъ“ значеніемъ выраженія (1) неопредѣленнаго вида. Указанное сокращеніе на $x-a$ называлось раскрытіемъ неопредѣленности или, иначе, нахожденіемъ истиннаго значенія неопредѣленности.

§ 20. Въ настоящее время вопросъ трактуется иначе.

Если нѣкоторая формула

$$f(x),$$

заключающая x, при $x=a$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, то спрашивается, не приближается ли она къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу при приближеніи x къ a.

Для рѣшенія этого вопроса полагаемъ $x=a+h$, гдѣ h отличная отъ нуля безконечно малая величина, и спрашиваемъ, къ какому предѣлу стремится

$$f(a+h)$$

при приближеніи h къ нулю.

Въ примѣрѣ предыдущаго §-а разсматриваемъ предѣлъ

(1) $$y=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}$$

при приближеніи h къ нулю. Такъ какъ h имѣетъ нуль только, какъ предѣлъ, а всѣ значенія, которыя пробѣгаетъ h отличны отъ нуля, то можно сократить формулу (1) на h, и получимъ

$$y=2a+h.$$

Подводя h къ нулю, получимъ $y=2a$.

Итакъ, значенія, называвшіяся по прежней терминологіи истинными, въ настоящее время называются предѣльными значеніями выраженій неопредѣленнаго вида.

Основная теорема о предѣлахъ.

§ 21. Разсмотримъ положительное ирраціональное число A и двѣ раціональныя перемѣнныя величины.

$$A_k, A'_k,$$

представляющія при различныхъ k приближенія числа A по недостатку и по избытку.

Три величины A, A_k, A'_k обладаютъ слѣдующими свойствами:

1^0., A_k съ возрастаніемъ k не убываетъ,

2^0., A'_k съ возрастаніемъ k не возрастаетъ,

3^0., существуютъ неравенства

$$A_k < A < A'_k.$$

Этотъ примѣръ представляетъ изъ себя частный случай весьма важной и общей теоремы.

§ 22. Теорема. **Даны двѣ положительныя перемѣнныя x и y, обладающія при нѣкоторомъ совмѣстномъ процессѣ измѣненія слѣдующими свойствами:**

1^0., **x не убываетъ (возрастаетъ или не измѣняется),**

2^0., **y не возрастаетъ (убываетъ или не мѣняется),**

3^0., **при всемъ процессѣ измѣненія имѣетъ мѣсто неравенство**

$$y > x,$$

4^0., **разность**

$$y - x$$

имѣетъ предѣломъ нуль.

Можно доказать, что существуетъ всегда положительное постоянное число a, которое будетъ общимъ предѣломъ обѣихъ перемѣнныхъ

$$lim\ x = a,\ lim\ y = a,$$

причемъ

$$x \leqslant a < y, \text{ или } x < a \leqslant y.$$

Пусть перемѣнная x и y при разсматриваемомъ процессѣ измѣненія получили въ нѣкоторый моментъ времени частныя значенія x_0, y_0, причемъ

$$y_0 > x_0.$$

Пусть значенія перемѣнныхъ, соотвѣтствующія болѣе позднему моменту времени, будутъ x_1, y_1, причемъ

$$y_1 > x_1.$$

На основаніи условій теоремы имѣемъ

$$y_1 \leqslant y_0,$$

отсюда $x_1 < y_0$, и мы имѣемъ

(1) $$x_0 \leqslant x_1 < y_0.$$

Совершенно подобнымъ образомъ можемъ получить неравенства

$$x_0 < y_1 \leqslant y_0.$$

Такъ какъ разность $x_0 - y_0$, соотвѣтствующая произвольно выбранному моменту времени, можетъ быть сколько угодно малой, то число общихъ цифръ послѣ запятой у двухъ чиселъ x_0 и y_0 растетъ по мѣрѣ развитія разсматриваемаго процесса измѣненія.

На основаніи неравенствъ (1) мы замѣчаемъ, что общія цифры чиселъ x_0, y_0 остаются во всякомъ позднѣйшемъ значеніи x_1.

Итакъ, составимъ число a изъ указанныхъ общихъ цифръ x и y, продолженныхъ до безконечности. Нетрудно убѣдиться, что число a будетъ общимъ предѣломъ двухъ перемѣнныхъ x и y. Мы замѣчаемъ, что въ разности

(2) $$a - x$$

будетъ столько нулей слѣва, сколько общихъ цифръ будетъ въ числахъ x и y. Такъ какъ число общихъ цифръ растетъ, то, слѣдовательно, растетъ число нулей въ разности (2). Эта разность оказывается величиной безконечно малой, и, слѣдовательно,

$$lim\ x = a;$$

кромѣ того

$$y - a = y - x - (a - x).$$

Обѣ величины $y - x$ и $a - x$ безконечно малы: одна по условію теоремы, другая по доказанному, слѣдовательно, безконечно мала и разность $y - a$, т. е.

$$lim\ y = a.$$

Не можетъ случиться, чтобы было

$$x > a,$$

ибо тогда при дальнѣйшемъ приближеніи къ предѣлу a перемѣнная x должна была бы убывать, что противорѣчитъ условію теоремы, и мы получаемъ

(3) $$x \leqslant a.$$

Подобнымъ же образомъ покажемъ, что

(4) $$a \leqslant y.$$

Знаки равенства въ двухъ формулахъ (3) и (4) не могутъ имѣть мѣсто въ одно и то же время, ибо тогда было бы $y = x$, что противорѣчитъ условію теоремы $y > x$.

Итакъ, мы получаемъ одно изъ двухъ

$$x \leqslant a < y, \qquad x < a \leqslant y.$$

§ 23. Теорема имѣетъ мѣсто также въ случаѣ отрицательныхъ перемѣнныхъ x и y. Въ этомъ случаѣ предѣлъ a будетъ тоже числомъ отрицательнымъ.

Для доказательства теоремы разсмотримъ двѣ положительныя перемѣнныя

$$\xi = -x, \quad \eta = -y.$$

Относительно перемѣнныхъ ξ и η можно замѣтить, что, если x не убываетъ, то ξ будетъ не возрастать; подобнымъ же образомъ, если y не возрастаетъ, то η будетъ не убывать. Ибо, если абсолютная величина отрицательнаго числа возрастаетъ, то само это отрицательное число убываетъ.

Положительныя перемѣнныя ξ и η будутъ имѣть общій положительный предѣлъ α. Останется положить $a = -\alpha$, и мы получаемъ

$$lim\ x = a, \qquad lim\ y = a.$$

§ 24. Если $a = o$, то теорема получаетъ видъ:

Если перемѣнная x не положительна, перемѣнная y не отрицательна, и кромѣ того разность $y - x$ безконечно мала, то обѣ перемѣнныя x и y имѣютъ предѣломъ нуль.

Это слѣдуетъ изъ неравенствъ

$$|y - x| \geq |x|, \qquad |y - x| \geq |y|,$$

такъ что будутъ сколь угодно малы величины $|x|$ и $|y|$.

§ 25. Классическій примѣръ на доказанную теорему представляетъ вопросъ объ окружности круга. Окружность круга оказывается общимъ предѣломъ двухъ перемѣнныхъ x и y, гдѣ x есть периметръ вписаннаго правильнаго многоугольника съ возрастающимъ числомъ сторонъ, а y периметръ правильнаго описаннаго многоугольника.

Числа вещественныя образуютъ поле.

§ 26. Покажемъ теперь, что совокупность W всѣхъ вещественныхъ чиселъ какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ, образуетъ поле. Для этой цѣли надо показать, что дѣйствія надъ числами ирраціональными удовлетворяютъ тѣмъ же формальнымъ законамъ, что и надъ числами раціональными.

§ 27. Изъ данныхъ нами въ §§ 8—13 главы VI (стр. 102—108) опредѣленій дѣйствій надъ числами ирраціональными непосредственно слѣдуетъ перестановочный законъ какъ сложенія, такъ и умноженія.

Чтобы проще доказать существованіе характерныхъ для

поля законовъ дѣйствій надъ ирраціональными числами, разсмотримъ сначала положительныя числа.

Пусть для двухъ чиселъ A и B ихъ приближенія будутъ A_k и B_k. Такъ какъ числа A_k и B_k раціональныя, то справедливы формулы

$$A_k + B_k = B_k + A_k,$$
$$A_k B_k = B_k A_k;$$

переходя къ предѣлу, получимъ

$$A + B = B + A,$$
$$AB = BA,$$

т.-е. получаемъ справедливость перестановочнаго закона сложенія и умноженія для чиселъ ирраціональныхъ.

§ 28. Подобнымъ же образомъ докажемъ справедливость сочетательнаго и распредѣлительнаго законовъ, ибо изъ формулъ

$$(A_k + B_k) + C_k = A_k + (B_k + C_k),$$
$$(A_k B_k) C_k = A_k (B_k C_k),$$
$$(A_k + B_k) C_k = A_k C_k + B_k C_k,$$

справедливость которыхъ уже доказана для чиселъ раціональныхъ, получаются при $k = \infty$ формулы

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$(AB) C = A (BC),$$
$$(A + B) C = AC + BC,$$

справедливыя для всякихъ чиселъ, опредѣляемыхъ безконечными десятичными дробями, представляющими безразлично какъ числа ирраціональныя, такъ и числа раціональныя.

§ 29. Обобщеніе законовъ на отрицательныя ирраціональныя числа не представляетъ затрудненія.

Напримѣръ, перестановочный законъ сложенія двухъ ирраціональныхъ чиселъ въ случаѣ, когда одно число положительное, а другое отрицательное, выражается формулою

$$A + (-B) = (-B) + A.$$

Справедливость этой формулы видна изъ того соображенія, что она будетъ предѣльною для формулы

$$A_k + (-B_k) = (-B_k) + A_k,$$

которая вѣрна, ибо A_k и B_k числа раціональныя.

§ 30. Итакъ, мы видимъ, что совокупность W всѣхъ чиселъ вещественныхъ образуетъ поле. Такъ какъ среди чиселъ W находятся всѣ числа раціональныя, то можно сказать, что поле W заключаетъ въ себѣ, какъ составную часть, поле R чиселъ раціональныхъ.

Нетрудно показать, что всякое числовое поле Ω должно заключать, какъ составную часть, поле R.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ произвольно выбранный отличный отъ нуля элементъ a. Такъ какъ въ полѣ должно совершаться дѣленіе на всякій элементъ a, отличный отъ нуля, то въ полѣ должно существовать число $\frac{a}{a}$, т. е. въ полѣ Ω заключается 1. Складывая эту единицу самое съ собой нѣсколько разъ, получимъ, что въ полѣ находится всякое цѣлое число m. Дѣля одно цѣлое число m на другое n, получимъ дробное число $\frac{m}{n}$. Вычитая изъ нуля число $\frac{m}{n}$, получимъ $-\frac{m}{n}$. Итакъ всѣ числа раціональныя должны заключаться въ полѣ Ω или, что одно и то же, поле Ω заключаетъ, какъ составную часть поле R.

Непрерывность поля вещественныхъ чиселъ.

§ 31. Если мы сравнимъ поле W вещественныхъ чиселъ съ полемъ R чиселъ раціональныхъ, то мы замѣтимъ существенную разницу въ свойствахъ обоихъ полей. Въ полѣ R перестаетъ существовать теорема § 22 (стр. 118). Въ самомъ дѣлѣ, если мы разсмотримъ ирраціональное число A, то оно не заключается среди чиселъ R. Можно сказать, что число A не существуетъ въ полѣ R.

Относительно приближеній A_k и A'_k, которыя суть элементы поля R, можно сказать, что

1^0., A_k не убываетъ съ возрастаніемъ k,

2^0., A'_k не возрастаетъ съ возрастаніемъ k,

3^0., всегда $A'_k > A_k$,

4^0., разность $A'_k - A_k$ безконечно мала.

Общій предѣлъ A обѣихъ перемѣнныхъ A_k и A'_k не существуетъ въ полѣ R, и, слѣдовательно, теорема § 22 падаетъ, если мы не будемъ выходить изъ поля R.

Итакъ, неимѣющая иногда мѣста въ полѣ R теорема § 22 о существованіи общаго предѣла двухъ перемѣнныхъ, всегда справедлива въ полѣ W и выражаетъ нѣкоторое весьма важное свойство поля W, которое называютъ свойствомъ непрерывности.

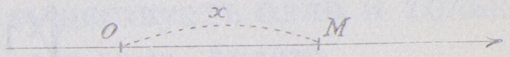
§ 32. Свойство непрерывности поля W можетъ быть очень ясно формулировано геометрически.

Поле R чиселъ раціональныхъ обладаетъ свойствомъ плотности.

Точки, соотвѣтствующія числамъ раціональнымъ, заполняютъ плотно прямую. Однако между этими раціональными точками существуютъ какіе то разрѣзы (промежутки нулевой длины), въ которыхъ находятся точки, соотвѣтствующія числамъ ирраціональнымъ.

Точки, соотвѣтствующія числамъ вещественнымъ какъ раціональнымъ, такъ и ирраціональнымъ заполняютъ прямую непрерывно безъ всякихъ разрѣзовъ. Всякому вещественному числу соотвѣтствуетъ точка и всякой точкѣ соотвѣтствуетъ вещественное число.

На этомъ основанъ принципъ аналитической геометріи, опредѣлять положеніе всякой точки M вещественнымъ числомъ x, абсолютная величина котораго равна разстоянію точки M отъ нѣкоторой постоянной точки O. Знакъ числа x показываетъ, съ которой стороны относительно точки O находится точка M. Точка O соотвѣтствуетъ числу нуль.



Черт. 2.

Число x, опредѣляющее положеніе точки M, носитъ названіе координаты точки M. Точка O носитъ названіе начала координатъ.

ГЛАВА VIII.

Дѣйствія надъ радикалами.

§ 1. Первый поводъ для введенія чиселъ ирраціональныхъ въ алгебру даетъ задача объ извлеченіи корней изъ положительныхъ чиселъ.

Опредѣленіе.

Корнемъ (или радикаломъ) n-ой степени изъ положительнаго числа a называется такое число, n-ая степень котораго равна a.

Здѣсь число n считается **обязательно натуральнымъ.**

Напримѣръ, корень второй степени изъ числа $a=81$ есть число 9, ибо $9^2=81$; корень пятой степени изъ $a=32$ есть 2, ибо $2^5=32$.

§ 2. Дѣйствіе, при помощи котораго отыскивается корень изъ даннаго числа, называется **извлеченіемъ корня.**

Это дѣйствіе обратно дѣйствію возвышенія въ степень. Число n обозначающее, какой степени корень извлекается изъ a, называется показателемъ корня.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ

$$\sqrt{\cdots}$$

этотъ знакъ представляетъ видоизмѣненное начертаніе буквы r, первой буквы латинскаго слово „radix“, что значитъ „корень“.

Подъ горизонтальной чертой этого знака пишется число, изъ котораго извлекаютъ корень, а надъ отверстіемъ угла знака ставятъ показатель корня.

Такъ, напримѣръ, выраженіе $\sqrt[3]{1000}$ обозначаетъ, что изъ числа 1000 надо извлечъ корень третьей степени; мы получаемъ

$$\sqrt[3]{1000} = 10.$$

Показателя корня второй степени принято не писать, т. е. вмѣсто $\sqrt[2]{25}$ пишутъ $\sqrt{25}$. Корень второй степени называютъ также **корнемъ квадратнымъ**, а корень третьей степени— **корнемъ кубическимъ**.

Изъ опредѣленія корня слѣдуютъ два равенства

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

§ 3. Нетрудно убѣдиться, что выраженіе

$$\sqrt[n]{A},$$

въ которомъ A есть натуральное число, не представляющее точной n-ой степени, не можетъ представлять раціональнаго числа

$$\frac{p}{q}.$$

Такъ какъ A не есть n-ая степень натуральнаго числа, то число $\sqrt[n]{A}$, если бы оно было раціональнымъ, могло бы быть только дробью $\frac{p}{q}$. Предполагая дробь $\frac{p}{q}$ несократимою, имѣемъ право считать ея знаменатель q отличнымъ отъ единицы. Но, если бы это было такъ, то должно было бы имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$\frac{p^n}{q^n} = \frac{pp \cdot \ldots \cdot p}{qq \cdot \ldots \cdot q} = A,$$

это же равенство невозможно, ибо оно указываетъ, что цѣлое число A равно несократимой дроби.

Итакъ радикалъ $\sqrt[n]{A}$, если только онъ существуетъ, не можетъ равняться раціональному числу.

Существованіе радикала.

§ 4. Докажемъ теперь, что корень всякой степени n изъ любого положительнаго числа B всегда существуетъ. Это мы докажемъ, доказавъ такую теорему.

Какое бы ни было задано положительное число B (раціональное или ирраціональное), всегда существуетъ одно и только одно положительное число A, при которомъ будетъ

$$A^n = B \text{ или } A = \sqrt[n]{B}.$$

Для доказательства разсмотримъ число

$$10^{kn} B, \tag{1}$$

въ которомъ будемъ измѣнять, безпредѣльно увеличивая, цѣлое положительное число k.

При достаточно большомъ значеніи k число (1) будетъ больше единицы.

Разсмотримъ рядъ n-ыхъ степеней послѣдовательныхъ чиселъ

$$0^n, 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots . \tag{2}$$

Очевидно, что можетъ произойти одно изъ двухъ: или число (1) окажется равнымъ одному изъ чиселъ ряда (2), или же оно будетъ заключаться между двумя рядомъ стоящими числами ряда (2).

Разсмотримъ сначала первый случай

$$10^{kn} B = C^n,$$

гдѣ C натуральное число; тогда

$$\sqrt[n]{B} = \frac{C}{10^k}$$

и, слѣдовательно, корень $\sqrt[n]{B}$ существуетъ, ибо онъ равенъ раціональному числу

$$\frac{C}{10^k}.$$

Пусть теперь ни при какомъ цѣломъ значеніи k число $10^{kn} B$ не равно ни одному изъ чиселъ ряда (2). Такъ какъ первое число $0^n = 0$ ряда (2) меньше числа (1), числа же ряда (2) безпредѣльно возрастаютъ, то, слѣдовательно, эти числа превзойдутъ число (1) и оно окажется лежащимъ между двумя послѣдовательными числами ряда (1)

$$\mathfrak{A}_k^n < 10^{kn} B < (\mathfrak{A}_k + 1)^n, \tag{3}$$

$\mathfrak{A}_k$ нѣкоторое натуральное число, соотвѣтствующее числу k. Различнымъ числамъ k соотвѣтствуютъ различныя натуральныя числа $\mathfrak{A}_k$.

Положимъ

$$\mathfrak{A}_{k+1} = 10\,\mathfrak{A}_k + a_{k+1}, \tag{4}$$

покажемъ, что цѣлое число a_{k+1} есть цифра, т. е., другими словами, число a_{k+1} есть одно изъ десяти чиселъ

(5) $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Примѣнимъ неравенство (3) къ числу k на 1 большему

(6) $$\mathfrak{A}_{k+1}^n < 10^{(k+1)n} B < (\mathfrak{A}_{k+1} + 1)^n.$$

Мы предполагаемъ, какъ это было уже сказано, что ни одно изъ неравенствъ (3) при любомъ k не можетъ обратиться въ равенство.

Раздѣляя всѣ члены неравенства (6) на 10^n, получимъ

(7) $$\left(\frac{\mathfrak{A}_{k+1}}{10}\right)^n < 10^{kn} B < \left(\frac{\mathfrak{A}_{k+1} + 1}{10}\right)^n.$$

Сравнивая неравенства (3) и (7) получимъ

$$\mathfrak{A}_k^n < \left(\frac{\mathfrak{A}_{k+1} + 1}{10}\right)^n, \quad \left(\frac{\mathfrak{A}_{k+1}}{10}\right)^n < (\mathfrak{A}_k + 1)^n,$$

или, что одно и то же,

$$10\,\mathfrak{A}_k < \mathfrak{A}_{k+1} + 1,$$
$$\mathfrak{A}_{k+1} < 10\mathfrak{A}_k + 10.$$

Подставляя сюда вмѣсто $\mathfrak{A}_{k+1}$ выраженіе (4), получимъ

$$10\,\mathfrak{A}_k < 10\,\mathfrak{A}_k + a_{k+1} + 1,$$
$$10\,\mathfrak{A}_k + a_{k+1} < 10\,\mathfrak{A}_k + 10,$$

откуда

$$a_{k+1} + 1 > 0, \; a_{k+1} < 10,$$

и окончательно

$$-1 < a_{k+1} < 10.$$

Эти неравенства даютъ возможность считать число a_{k+1} за одно изъ чиселъ (5), т. е., другими словами, считать число a_{k+1} за цифру десятичной системы.

Такъ какъ число B задано, то можно считать извѣстными числа $\mathfrak{A}_{k+1}$ и $\mathfrak{A}_k$, а, слѣдовательно, и числа a_k при всякихъ значеніяхъ k.

Равенство (4) можно переписать такъ

(8) $$\frac{\mathfrak{A}_{k+1}}{10^{k+1}} = \frac{\mathfrak{A}_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}}.$$

Обозначая $\mathfrak{A}_0 = a_0$ и примѣняя равенство (8) къ значеніямъ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и обозначая

$$\frac{\mathfrak{A}_k}{10^k} = A_k,$$

получимъ

$$A_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},$$
$$A_2 = A_1 + \frac{a_2}{10^2},$$
$$A_3 = A_2 + \frac{a_3}{10^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

откуда, складывая, получимъ

$$A_k = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}.$$

Обозначая черезъ A безконечно продолженную дробь

$$a_0, a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_k \ldots,$$

можемъ убѣдиться, что положительное число A есть не что иное, какъ искомый корень.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$A = lim\ A_k,$$

слѣдовательно,

$$B - A^n = lim \left\{ B - A_k^n \right\}.$$

Покажемъ, что величина $B - A_k^n$ при возрастаніи k есть величина безконечно малая, т. е. что

$$lim \left\{ B - A_k^n \right\} = 0;$$

тогда мы получимъ

$$B - A^n = 0,$$

и наше утвержденіе доказано.

Неравенства (3) могутъ быть черезъ раздѣленіе на 10^{kn} переписаны такъ

$$A_k^n < B < A'^n_k,$$

отсюда на основаніи теоремы § 40 главы V (стр. 87) получимъ

$$0 < B - A_k^n < A'^n_k - A_k^n < (A'_k - A_k)\ n\ A'^{n-1}_k,$$

или, усиливая неравенство, получаемъ

$$0 < B - A_k^n < \frac{1}{10^k}\ n\ (a_0 + 1)^{n-1};$$

но величина

$$\frac{1}{10^k}\ n\ (a_0 + 1)^{n-1}$$

есть величина безконечно малая при возрастаніи k, слѣдовательно, все, что требовалось, доказано.

§ 5. Положительное число A, удовлетворяющее равенству $A^n = B$, единственное, ибо, если мы предположимъ существованіе другого положительнаго числа $\mathfrak{A}$, удовлетворяющаго равенству $\mathfrak{A}^n = B$, то получимъ

$$\mathfrak{A}^n - A^n = 0,$$

или иначе

$$(\mathfrak{A} - A)\ C = 0, \tag{1}$$

гдѣ

$$C = A^{n-1} + A^{n-2}\ \mathfrak{A} + A^{n-3}\ \mathfrak{A}^2 + \ldots.$$

Число C, какъ сумма отличныхъ отъ нуля положительныхъ чиселъ, есть число положительное, отличное отъ нуля; а тогда на основаніи свойства вещественныхъ чиселъ образовать поле, равенство (1) не иначе возможно, какъ должно

равняться нулю число $\mathfrak{A} - A$, слѣдовательно, $\mathfrak{A} = A$, и мы видимъ, что положительное число, представляющее корень $\sqrt[n]{B}$, существованіе котораго мы доказали, есть единственное.

Это единственное положительное число A, удовлетворяющее равенству $A = \sqrt[n]{B}$, мы будемъ называть ариѳметическимъ значеніемъ корня изъ B или просто ариѳметическимъ корнемъ изъ B.

§ 6. Если число n четное, напр., $n = 2m$, то кромѣ ариѳметическаго корня A существуетъ еще другое значеніе радикала $\sqrt[2m]{B}$, равное значенію A, взятому со знакомъ минусъ, ибо

$$(-A)^{2m} = A^{2m} = B.$$

Итакъ, получаемъ два значенія радикала четной степени изъ положительнаго числа:

$$A \text{ и } -A.$$

§ 7. Очевидно, что нельзя извлечь радикала четной степени изъ отрицательнаго числа, ибо всякое вещественное число, возвышенное въ четную степень, даетъ число положительное.

Итакъ, среди вещественныхъ чиселъ нѣтъ ни одного, которое равнялось бы радикаламъ

$$\sqrt{-2}, \sqrt[4]{-6}, \sqrt[8]{-5}.$$

Для того, чтобы сдѣлать возможною задачу извлеченія корня четной степени изъ отрицательнаго числа, мы введемъ въ дальнѣйшемъ изложеніи еще новый сортъ чиселъ, такъ называемыя, мнимыя числа.

§ 8. Что касается извлеченія корней нечетной степени $2m+1$ изъ чиселъ

$$\sqrt[2m+1]{B},$$

то приходимъ къ такому заключенію.

Если B число положительное, то единственнымъ вещественнымъ значеніемъ радикала является указанное нами выше ариѳметическое.

Если надо извлечь корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа

$$\sqrt[2m+1]{-B}, \tag{1}$$

то извлекаемъ ариѳметическій корень A той же степени изъ абсолютной величины B подкоренного выраженія

$$A = \sqrt[2m+1]{B};$$

тогда, очевидно, искомый корень (1) будетъ имѣть единственное значеніе:

$$-A.$$

Приходимъ къ такому заключенію:

1°., **При извлеченіи корня нечетной степени изъ вещественнаго числа получается только одно вещественное значеніе корня. Это значеніе положительное, если корень извлекается изъ положительнаго числа, и отрицательное при извлеченіи корня изъ отрицательнаго числа.**

2°., **При извлеченіи корня четной степени изъ положительнаго числа получаются только два вещественныхъ значенія, одинаковыхъ по абсолютной величинѣ и разныхъ по знаку.**

3°., **Среди вещественныхъ чиселъ не существуетъ ни одного равнаго корню четной степени изъ отрицательнаго числа.**

Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи этой главы, когда мы будемъ разсматривать дѣйствія надъ радикалами, мы будемъ подкоренную величину считать числомъ положительнымъ, а самъ корень будемъ считать ариѳметическимъ.

Дѣйствія надъ радикалами.

§ 9. При возвышеніи въ степень n произведенія

$$abc \ldots d$$

нѣсколькихъ вещественныхъ множителей необходимо возвысить въ степень n всѣхъ множителей, каждаго отдѣльно, т. е.

$$(abc \ldots d)^n = a^n . b^n . c^n \ldots d^n .$$

Справедливость этого заключенія происходитъ отъ существованія перестановочнаго закона умноженія вещественныхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ,

$$(abc \ldots d)^n = (abc \ldots d)\,(abc \ldots d)\,(abc \ldots d) \ldots =$$
$$= \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ разъ}}\ \underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ разъ}} \ldots = a^n b^n c^n \ldots d^n .$$

§ 10. Покажемъ теперь, какъ производить различныя дѣйствія надъ радикалами $\sqrt[n]{a}$, въ которыхъ n число натуральное, а подкоренное число положительное.

§ 11. Теорема. **При n натуральномъ имѣетъ мѣсто равенство**

(1) $$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

При доказательствѣ этой теоремы и теоремъ подобныхъ мы будемъ возвышать обѣ части равенства, подлежащаго доказательству, въ одну и ту же степень; если въ результатѣ получится въ обѣихъ частяхъ одно и то же положительное число, то равенство, очевидно, вѣрно, ибо существуетъ, какъ мы видѣли въ § 5, только одинъ ариѳметическій корень изъ всякаго числа.

Возвысимъ обѣ части $a\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a^n b}$ въ степень n

$$\left\{a\sqrt[n]{b}\right\}^n = a^n\left\{\sqrt[n]{b}\right\}^n = a^n b,$$

$$\left\{\sqrt[n]{a^n b}\right\}^n = a^n b.$$

Итакъ, два положительныхъ числа $a\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a^n b}$, будучи возвышены въ степень n, даютъ положительное число $a^n b$; значитъ, оба эти числа должны быть одинаковы, что и требовалось доказать.

§ 12. Теорема. **Если n и p числа натуральныя, то**

(1) $$\sqrt[np]{a^{pk}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Возвышая обѣ части равенства (1) въ степень np, приходимъ къ тождеству. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\left\{\sqrt[np]{a^{pk}}\right\}^{np} = \left\{\sqrt[n]{a^k}\right\}^{np}$$

$$a^{pk} = \left\{\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n\right\}^p$$

$$a^{pk} = a^{pk},$$

и теорема доказана.

§ 13. Теорема. **Если n и p числа натуральныя, то**

(1) $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}.$$

Мы докажемъ это равенство, возвысивъ обѣ части въ степень n:

$$\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p\right\}^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{pn} = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^p = a^p,$$

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n = a^p,$$

получается одно и то же.

§ 14. Теорема. **Если n и m числа натуральныя, то**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, возвышая обѣ части этого равенства въ степень mn, получимъ

$$\left\{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right\}^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}^n = a,$$

$$\left\{\sqrt[mn]{a}\right\}^{mn} = a,$$

и теорема доказана.

§ 15. Изъ предыдущей теоремы получается, какъ слѣдствіе, теорема, относящаяся къ послѣдовательному извлеченію ряда радикаловъ, а именно

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\ldots\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}}} = \sqrt[mn\ldots rs]{a}.$$

§ 16. Теорема. **При n натуральномъ имѣетъ мѣсто равенство**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \ldots \sqrt[n]{g} \cdot \sqrt[n]{h} = \sqrt[n]{abc \ldots gh}.$$

Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ того соображенія, что отъ возвышенія обѣихъ частей равенства въ степень n получается въ обѣихъ частяхъ одно и то же положительное число

$$abc \ldots gh.$$

§ 17. Теорема. **Если n натуральное число, то**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{1}$$

Принимая во вниманіе, что отъ возвышенія дроби $\frac{a}{b}$ въ степень n получается дробь

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n},$$

у которой числитель и знаменатель суть n-ыя степени числителя и знаменателя первоначальной дроби, мы замѣчаемъ, что отъ возвышенія въ степень n получается въ обѣихъ частяхъ равенства (1) то же самое число $\frac{a}{b}$.

§ 18. Теорема. **Если $a > b > 0$ и n положительное число, то**

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Мы имѣемъ равенство

$$a - b = \left\{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right\}\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2}\sqrt{b} + \ldots\right\}.$$

Такъ какъ по предположенію ариѳметическіе корни $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ суть положительныя числа, то выраженіе

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2}\sqrt{b} + \ldots\ldots;$$

въ фигурныхъ скобкахъ будетъ положительнымъ, а, слѣдовательно, обѣ разности

$$a - b \text{ и } \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

должны имѣть одинъ и тотъ же знакъ.

§ 19. Теорема. **Если $a > 1$, а изъ натуральныхъ чиселъ m, n число m больше числа n, то**

(1) $$\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}.$$

Пусть α и β суть два положительныхъ числа. Нетрудно убѣдиться, что, если мы возвысимъ эти числа въ одну и ту же степень p

$$\alpha^p, \beta^p,$$

то неравенство $\alpha^p < \beta^p$ влечетъ за собой неравенство $\alpha < \beta$. Въ самомъ дѣлѣ

$$\beta^p - \alpha^p = (\beta - \alpha)\left[\beta^{p-1} + \beta^{p-2}\alpha + \ldots\ldots\right],$$

значитъ разность $\beta^p - \alpha^p$ и $\beta - \alpha$ должны быть одинаковы по знаку.

Для доказательства справедливости неравенства (1) достаточно возвыситъ обѣ части въ одну и ту же степень mn и показать, что отъ возвышенія той части, которая должна быть больше, получимъ дѣйствительно больше.

Въ самомъ дѣлѣ, возвышая, получимъ

$$\left\{\sqrt[m]{a}\right\}^{mn} = a^n, \left\{\sqrt[n]{a}\right\}^{mn} = a^m.$$

Но мы, очевидно, имѣемъ $a^m > a^n$, такъ какъ при $a > 1$ получаемъ $a < a^2 < a^3 < a^4 < \ldots$

Выраженія съ дробными показателями.

§ 20. Нетрудно убѣдиться въ справедливости теоремы.

Если въ выраженіи $\sqrt[n]{a^m}$ показатель m дѣлится нацѣло на показателя корня, то

(1) $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $m = np$, гдѣ p натуральное число. Извлекая корень степени n изъ обѣихъ частей тождества

$$a^m = (a^p)^n,$$

получимъ подлежащее доказательству равенство (1).

§ 21. Распространимъ теперь формулу (1) на тотъ случай, когда число m не дѣлится нацѣло на n, и дадимъ такое опредѣленіе.

Опредѣленіе.

Выраженіе, представляющее букву a съ дробнымъ показателемъ $\frac{m}{n}$, есть другое обозначеніе радикала, показатель котораго равенъ знаменателю n, а числитель m есть показатель подкоренного выраженія, то есть

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Въ разъясненіе къ этому опредѣленію мы замѣтимъ только, что извлеченіе корня можетъ сопровождаться дѣленіемъ показателей подкоренныхъ множителей на показателя корня во всѣхъ случаяхъ, совершается ли нацѣло такое дѣленіе или нѣтъ.

Если дѣленіе совершается нацѣло, напр.

$$\sqrt[5]{2^{20}} = 2^4 = 16,$$

то въ этомъ случаѣ черезъ дѣленіе показателей производится извлеченіе корня на самомъ дѣлѣ.

Если же дѣленіе не совершается нацѣло, напр.

$$\sqrt[5]{2^{19}} = 2^{\frac{19}{5}}, \tag{1}$$

то ни о какомъ извлеченіи корня, въ смыслѣ дѣйствительнаго алгоріѳма этого дѣйствія, не можетъ быть и рѣчи. Равенство (1) имѣетъ мѣсто только на основаніи вышеприведеннаго опредѣленія.

Обобщеніе дѣйствій надъ показателями.

§ 22. Правило показателей при умноженіи обобщается на случай дробныхъ показателей. Это правило резюмируется въ формулѣ

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Мы доказали справедливость этой формулы для случая, когда m и n числа цѣлыя, безразлично, положительныя или отрицательныя. Покажемъ теперь, что формула остается справедливой и для дробныхъ показателей.

1°., Если m число натуральное, а n дробное, причемъ $n = \frac{p}{q}$, то

$$a^m . a^n = a^m . a^{\frac{p}{q}} = a^m \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq}} . \sqrt[q]{a^p} =$$
$$= \sqrt[q]{a^{mq} . a^p} = \sqrt[q]{a^{mq+p}} = a^{\frac{mq+p}{q}} =$$
$$= a^{m+\frac{p}{q}} = a^{m+n},$$

что и требовалось доказать.

2°., Оба числа m и n дробныя: $m = \frac{r}{s}$, $n = \frac{p}{q}$, тогда

$$a^m . a^n = a^{\frac{r}{s}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[s]{a^r} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[sq]{a^{rq}} . \sqrt[qs]{a^{ps}} =$$
$$= \sqrt[sq]{a^{rq} . a^{ps}} = \sqrt[sq]{a^{rq+ps}} = a^{\frac{rq+ps}{sq}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{p}{q}} =$$
$$= a^{m+n},$$

что и требовалось доказать.

§ 23. Такъ же провѣряется правило показателей для дѣленія, выражаемое формулой

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Ограничимся для краткости провѣркой только того случая, когда оба числа m и n дробныя:

$$m = \frac{r}{s}, n = \frac{p}{q},$$

тогда

$$a^m : a^n = a^{\frac{r}{s}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[s]{a^r} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[sq]{a^{rq}} : \sqrt[qs]{a^{ps}} =$$
$$= \sqrt[sq]{a^{rq} : a^{ps}} = \sqrt[sq]{a^{rq-ps}} = a^{\frac{rq-ps}{sq}} =$$
$$= a^{\frac{r}{s}-\frac{p}{q}} = a^{m-n},$$

что и требовалось доказать.

§ 24. Обобщимъ теперь на дробные показатели правило возвышенія степени въ новую степень, т. е. докажемъ для дробныхъ показателей формулу

(1) $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

1°., Случай: m число натуральное, а $n = \frac{p}{q}$; имѣемъ

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} =$$
$$= a^{m \cdot \frac{p}{q}} = a^{mn}.$$

2°., Случай $m = \frac{p}{q}$, а n число натуральное;

$$(a^m)^n = (a^{\frac{p}{q}})^n = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^n = \sqrt[q]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{q}} =$$
$$= a^{\frac{p}{q} \cdot n} = a^{mn}.$$

3°., Случай: $m = \frac{p}{q}, n = \frac{r}{s}$;

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} =$$

$$= \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}} = a^{m \cdot n}$$

Итакъ, формула (1) доказана во всѣхъ случаяхъ.

§ 25. Провѣримъ теперь справедливость формулы

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

при m дробномъ

$$m = \frac{p}{q}.$$

Имѣемъ

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^p} = a^{\frac{p}{nq}} =$$

$$a^{\frac{\frac{p}{q}}{n}} = a^{\frac{m}{n}},$$

что и требовалось доказать.

§ 26. Формулы

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

(1)
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

обобщаются также на случай дробныхъ отрицательныхъ показателей.

Опредѣленіе.

Подъ знакомъ

$$a^{-\frac{p}{q}}$$

понимается выраженіе

$$\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

На основаніи соображеній §§ 54—57 главы IV (стр. 58—60) и соображеній §§ 12—25 настоящей главы (стр. 130—136) обобщеніе формулъ (1) совершается безъ затрудненій. Чтобы не утомлять

читателя педантичной провѣркой формулъ (1) во всѣхъ случаяхъ, разсмотримъ лишь одинъ на удачу выбранный случай.

Напримѣръ, провѣримъ формулу $(a^m)^n = a^{mn}$ въ случаѣ

$$m = \frac{p}{q}\ ,\ n = -\frac{r}{s}\ .$$

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}} = \frac{1}{a^{\frac{pr}{qs}}} = a^{-\frac{pr}{qs}} =$$

$$= a^{\left(+\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{r}{s}\right)} = a^{mn}\ .$$

Можно посовѣтовать учащимся самостоятельно доказать формулы (1) во всѣхъ случаяхъ.

§ 27. Нѣкоторыми авторами вводятся въ разсмотрѣніе радикалы съ дробными и отрицательными показателями при помощи формулъ

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}}\ ,\ \sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}\ .$$

Мы этими формулами пользоваться не будемъ и во всемъ дальнѣйшемъ будемъ употреблять знаки радикала только съ натуральными показателями.

§ 28. Изложивъ дѣйствія надъ радикалами, я долженъ обратить вниманіе читателя на одно весьма важное замѣчаніе.

Вездѣ мы доказывали равенство между радикальными выраженіями возвышеніемъ обѣихъ частей равенства въ степень. Другими словами, изъ равенства

$$a^n = b^n = c$$

одинаковыхъ степеней мы заключали о равенствѣ

(1) $$a = b$$

первыхъ степеней.

Это заключеніе было правильнымъ только потому, что мы оговорили то обстоятельство, что при извлеченіи корней изъ положительныхъ чиселъ мы будемъ разсматривать только положительный ариѳметическій корень. Такъ какъ этотъ корень единственный, то два ариѳметическихъ корня a и b степени n изъ положительнаго числа c должны равняться между собой, и мы приходимъ къ равенству (1).

При извлеченіи корней четной степени изъ положительныхъ чиселъ могутъ получаться два значенія корня: положительное и отрицательное, а потому, если нѣтъ оговорки объ обязательномъ разсмотрѣніи ариѳметическихъ корней, то изъ равенства

$$a^n = b^n$$

не слѣдуетъ еще необходимость существованія $a = b$. Заключать изъ равенства

$a^n = b^n$ безъ всякой оговорки о равенствѣ $a = b$ было бы ошибкой. На такой ошибкѣ основанъ извѣстный софизмъ, изъ котораго выходитъ невозможное равенство $2 = 3$.

Я приведу этотъ софизмъ. Начнемъ съ вѣрнаго равенства

$$4 - 10 = 9 - 15,$$

которое мы подвергнемъ ряду правильныхъ преобразованій

$$4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$$

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2; \quad (1)$$

перейдемъ отъ равенства вторыхъ степеней къ равенству первыхъ

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}, \quad (2)$$

и окончательно

$$2 = 3.$$

Ошибка состоитъ въ переходѣ отъ равенства (1) къ равенству (2). Если мы согласимся разсматривать только ариѳметическіе корни, то замѣчая, что

$$2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}, \quad 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2},$$

мы придемъ къ вѣрному равенству

$$\frac{5}{2} - 2 = 3 - \frac{5}{2},$$

и софизмъ пропадаетъ.

§ 29. Теперь посмотримъ, какія возможны значенія для корня квадратнаго изъ положительнаго числа:

$$\sqrt{A};$$

обозначая величину этого корня черезъ x, мы получимъ

$$x^2 = A,$$

или переписывая такъ

$$x^2 - A = (x + \sqrt{A})\ (x - \sqrt{A}) = 0,$$

заключаемъ, что для равенства нулю произведенія двухъ множителей необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей равнялся нулю; мы приходимъ къ одному изъ уравненій

$$x + \sqrt{A} = 0, \quad x - \sqrt{A} = 0,$$

гдѣ знакъ $\sqrt{A}$ обозначаетъ ариѳметическій радикалъ.

Итакъ, мы видимъ, что искомый x, корень квадратный изъ положительнаго числа A, имѣетъ только одно изъ двухъ слѣдующихъ значеній

$$+\sqrt{A}, -\sqrt{A},$$

что иногда записывается такъ

$$\pm\sqrt{A}.$$

Удаленіе ирраціональности ихъ знаменателя.

§ 30. Такъ какъ дѣленіе на ирраціональное число является операціей практически неудобной, то является желательнымъ преобразовывать дробныя выраженія въ такой видъ, въ которомъ знаменатели не заключаютъ радикаловъ. Оставляя въ сторонѣ общій вопросъ, пояснимъ задачу на рядѣ примѣровъ.

§ 31. Удалить радикалы изъ знаменателя выраженія

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

Напримѣръ, если надо вычислить выраженіе

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}},$$

то, удаляя радикалы изъ знаменателя, получимъ

$$\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

§ 32. Удалить радикалы изъ знаменателя выраженія

$$\frac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

Удаляемъ сначала радикалъ $\sqrt{a}$, умножая числителя и знаменателя на $-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$; получимъ

$$\frac{d(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-a} = \frac{d(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b+c-a+2\sqrt{bc}};$$

для удаленія оставшагося радикала $\sqrt{bc}$ умножаемъ числителя и знаменателя на $b+c-a-2\sqrt{bc}$, получимъ окончательно

$$\frac{d(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(b+c-a-\sqrt{bc}.2)}{(b+c-a)^2-4bc}.$$

§ 33. Удалить радикалы изъ знаменателя выраженія

(1) $$\frac{c}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}.$$

Имѣя тождество

$$a-b=\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)$$

преобразуемъ выраженіе (1) къ виду

$$\frac{c}{a-b}\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right).$$

§ 34. Удалить радикалы изъ знаменателя выраженія

(1) $$\frac{c}{\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b}}.$$

Принимая во вниманіе тождество

$$a+b=\left(\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b}\right)\left(\sqrt[2n+1]{a^{2n}}-\sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b}+\ldots\right),$$

выраженіе (1) преобразуемъ къ виду

$$\frac{c}{a+b}\left\{\sqrt[2n+1]{a^{2n}}-\sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b}+\sqrt[2n+1]{a^{2n-2}b^2}-\ldots\right\}.$$

Алгориѳмъ извлеченія квадратнаго корня изъ положительнаго числа.

§ 35. Пусть требуется извлечь корень квадратный изъ числа A. Положимъ

$$\sqrt{A}=a_0,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots$$

Можно умноженіемъ $\sqrt{A}$ на 10^k, гдѣ k число цѣлое, положительное или отрицательное, достигнуть того, что цѣлая часть корня будетъ числомъ однозначнымъ. Подъ корнемъ придется умножать на 10^{2k}. Умножая подкоренное число на 10^2, 10^4, 10^6, ... , а также на 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6} . . . будемъ передвигать запятую направо и налѣво каждый разъ черезъ двѣ цифры. Будемъ говорить, что мы разбиваемъ десятичную дробь на грани по двѣ цифры въ каждой, причемъ въ первой грани слѣва можетъ оказаться и одна лишь цифра.

Напримѣръ,

(1) 2· 73· 50· 64·, 32· 00· 00· 00· . . . . . .

(2) 0·, 00· 00· 00· 27· 35· 06· 43· 20· 00· 00· . . . . .

Если мы хотимъ, чтобы цѣлая часть корня была однознач-

нымъ числомъ, то цѣлая часть подкоренного числа должна быть меньше 100, т. е. должна быть числомъ цѣлымъ или однозначнымъ, или двузначнымъ.

Итакъ, въ случаѣ числа (1) мы умножаемъ корень на 10^{-3} и извлекаемъ корень изъ $A.\ 10^{-6}$, т. е. изъ числа

(3) $$2,\ 73\cdot\ 50\cdot\ 64\cdot\ 32\cdot\ 00\cdot\ 00\cdot\ \ldots\ldots$$

а въ случаѣ числа (2) умножаемъ корень на 10^4, такъ что придется извлекать корень изъ $A.\ 10^8$, т. е. изъ числа

(4) $$27,\ 35\cdot\ 06\cdot\ 43\cdot\ 20\cdot\ 00\cdot\ 00\cdot\ \ldots\ldots$$

Нетрудно написать цѣлую часть $\sqrt{A}$. Эта цѣлая часть должна быть наибольшимъ цѣлымъ числомъ, квадратъ котораго не превосходитъ цѣлой части подкоренного числа.

Напримѣръ, въ случаѣ (3) и (4) получаемъ

$$\sqrt{2,73506\ldots\ldots} = 1,\ \ldots.$$
$$\sqrt{27,3506\ldots\ldots} = 5,\ \ldots.$$

ибо

$$1^2 < 2,735\ldots. < 2^2,$$
$$5^2 < 27,\ 35\ldots. < 6^2.$$

§ 36. Поведемъ наши разсужденія для ясности на частномъ примѣрѣ:

$$\sqrt{A} = \sqrt{27,35\cdot\ 06\cdot\ 43\cdot\ 20\cdot\ 00\cdot\ \ldots\ldots} = a_0, a_1\, a_2\, a_3\ldots.$$

Мы показали въ § 35, какъ найти первую цифру a_0 искомаго корня; въ данномъ случаѣ должно быть $a_0 = 5$; переходимъ теперь къ нахожденію второй цифры a_1. Цифру a_1 надо найти изъ неравенствъ

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^2 \leqq A < \left(a_0 + \frac{a_1+1}{10}\right)^2.$$

Перепишемъ эти неравенства такъ

$$2a_0\,\frac{a_1}{10} + \frac{a_1^{\,2}}{100} \leqq A - a_0^{\,2} < 2a_0\,\frac{a_1+1}{10} + \frac{(a_1+1)^2}{100},$$

или

(1) $$2.\ 10\ a_0 a_1 + a_1^{\,2} \leqq 100\ (A - a_0^{\,2}) < 2.\ 10\ a_0\ (a_1+1) + (a_1+1)^2$$

$$A - a_0^{\,2} = 27,\ 35\cdot\ 06\cdot\ 43\cdot\ 20\cdot\ \ldots. - 25 = 2,\ 35\cdot\ 06\cdot\ 43\cdot\ 20\cdot\ \ldots.$$

$$100\ (A - a_0^{\,2}) = 235,\ 06\cdot 43\cdot 20\cdot\ \ldots.$$

Число 100 $(A - a_0^2)$ можно характеризовать такъ: **его цѣлая часть получается, если изъ первой грани 27 вычесть $a_0^2 = 25$, къ полученному остатку 2 приписать справа слѣдующую грань 35, т. е. получимъ 235.** Слѣдующія грани 06· 43· 20· 00. . . . будутъ представлять дробную часть числа 100 $(A - a_0^2)$.

Для нахожденія цифры a_1 примемъ во вниманіе лѣвое неравенство (1); получимъ

$$2.\ 10a_0 a_1 < 100\ (A - a_0^2)$$

или

$$a_1 < \frac{10\,(A - a_0^2)}{2a_0}.$$

Итакъ, **для нахожденія a_1 надо раздѣлить на удвоенную цѣлую часть корня, т. е. на число $2a_0$, цѣлую часть числа** $10\,(A - a_0^2)$. Эта цѣлая часть получается, если мы въ цѣлой части числа 100 $(A - a_0^2)$ отнимемъ послѣднюю правую цифру. Въ данномъ случаѣ получается 23, ибо

$$100\ (A - a_0^2) = 23\cdot\ 5{,}06\cdot\ 43\cdot\ 20\cdot\ 00\cdot \ldots\ldots$$

Итакъ,

$$\frac{10\,(A - a_0^2)}{2a_0} = \frac{23,\ldots\ldots}{10} = 2,3\ldots$$

Для цифры a_1 возможны значенія 0, 1, 2, ибо $a_1 < 2{,}3\ldots$

Начнемъ пробовать съ большей цифры 2. Если при ней неравенства (1) имѣютъ уже мѣсто, то она будетъ настоящая.

Итакъ, мы имѣемъ

$$2.\ 10a_0 a_1 + a_1^2 = 2.\ 10.\ 5.\ 2 + 2^2 = 204.$$
$$2.\ 10\ a_0(a_1 + 1) + (a_1 + 1)^2 = 2.\ 10.\ 5.\ 3 + 3^2 = 309.$$

Такъ какъ неравенства (1) удовлетворяются

$$204 < 235{,}06\ldots < 309,$$

то, слѣдовательно, цифра 2 **правильная.**

Вычисленіе чиселъ 204 и 309, необходимыхъ для пробы, можетъ быть произведено такъ

$$2.\ 10\ a_0\ a_1 + a_1^2 = a_1\ (10.\ 2a_0 + a).$$

Для полученія числа $10.\ 2a_0 + a_1 = 102$ **надо взять удвоенную первую цифру корня, т. е. 2.5=10 и къ этому числу приписать справа вторую цифру 2.**

Итакъ, вычисленіе чиселъ 204 и 309 можно расположить такъ

(2)

$10.\ 2a_0 + a_1$	102	103
a_1	2	3
$a_1\,(10.2a_0 + a_1)$	204	309

Если бы при выбранной цифрѣ $a_1 = 2$ оказалось $a_1\,(10.2a_0 + a_1) > 100\,(A - a_0^2)$, то надо пробовать меньшія цифры $a_1 = 1$, $a_1 = 0$ до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ неравенствамъ (1).

Итакъ, у насъ получились двѣ вѣрныя цифры

$$5,\ 2\ \ldots\ldots$$

корня $\sqrt{27,\ 35\cdot\ 06\cdot\ \ldots}$.

Передвигая подъ корнемъ запятую на 2 разряда направо, получимъ

(3) $$\sqrt{27\ 35,\ 06:\ \ldots\ldots} = 52,\ \ldots\ldots$$

Приступая къ операціи нахожденія третьей цифры, повторимъ предыдущія разсужденія, считая, что корень (3) вычисляется по формулѣ

$$\sqrt{2735,\ 06:\ \ldots} = a_0',\ a_1'\ a_2'\ \ldots\ldots$$

гдѣ $a_0' = 52$.

Вычитая по прежнему изъ цѣлой части 2735 подкоренного числа A' число $(52)^2 = 2704$: получимъ $2735 - 2704 = 31$.

Число $A' - a_0'^2$ будетъ

$$31,\ 06\cdot\ 43\cdot\ 20\cdot\ 00\cdot\ \ldots\ldots$$

Опять беремъ число $100\ (A' - a_0'^2)$, т. е. сносимъ новую грань, получаемъ

$$310\cdot\ 6,\ \ldots\ldots$$

Для полученія слѣдующей цифры a_1' надо дѣлить $10\,(A' - a_0'^2)$ на $2a_0'$, то есть число $310,\ldots$ на $2\,.\,52 = 104$; получаемъ

$$a_1' \leqslant \frac{310,\ldots}{104},\quad a_1' \leqslant 2.$$

Пробуемъ число $a_1' = 2$, при которомъ корень (3) будетъ $52,2\ldots$ Составляемъ число $a_1'\,(10\,.\,2a_0' + a_1')$ и смотримъ будетъ ли оно меньше $100\ (A' - a_0'^2)$

$10 \cdot 2a_0' + a_1'$	$10 \cdot 104 + 2 = 1042$
a_1'	2
$a_1(10.2a_0' + a_1')$	2084

$$2084 < 3106,$$

слѣдовательно, третья цифра $a_1' = 2$ уже найдена.

Приступая къ нахожденію четвертой цифры корня, перенесемъ опять запятую подъ корнемъ на двѣ единицы направо, получаемъ

$$\sqrt{273506,43 \cdot 20 \cdot 00 \cdot \ldots} = 522, \ldots$$
$$= a_0'', a_1'' a_2'' \ldots,$$

гдѣ $a_0'' = 522$. Найдя цифру a_1'', получимъ четвертую цифру корня. Дробь, при помощи которой выражается корень квадратный, будетъ конечной, если послѣ нѣсколькихъ операцій нахожденія новой цифры a_1, мы придемъ къ равенству

$$100\ (A - a_0^2) = (2 \cdot 10a_0 + a_1)\ a_1.$$

Упрощеніе выкладки при извлеченіи корня квадратнаго.

§ 41. Во второй операціи за a_0' принимаемъ уже двузначное число (въ примѣрѣ § 39 число 52), которое въ предыдущей операціи было $10a_0 + a_0 = 10.5 + 2$. Во второй операціи послѣ присоединенія къ остатку новой грани надо число десятковъ этого числа раздѣлить на $2a_0' = 2\ (10a_0 + a_1)$. Нетрудно видѣть, что число $2a_0' = 2\ (10a_0 + a_1) = 2 \cdot 52 = 104$ получается, какъ сумма вычисленныхъ раньше чиселъ 102 и 2, ибо

$$2a_0' = (2 \cdot 10a_0 + a_1) + a_1 = 102 + 2. \text{ (см. (2) § 40).}$$

Для вычитанія $a_0'^2 = 100a_0^2 + 2.10a_0a_1 + a_1^2$ во второй операціи изъ первыхъ двухъ граней (въ примѣрѣ 2735) нѣтъ надобности возвышать число 52 снова въ квадратъ, ибо число $100a_0^2 = 2500$ уже раньше вычислено и вычтено; достаточно вычесть $2.10a_0a_1 + a_1^2$, или что одно и то же $a_1\ (2.10a_0 + a_1) = 2 \cdot 102 = 204$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ такой схемѣ вычисленія, гдѣ нѣтъ лишней вычислительной работы

$\sqrt{27,35\cdot06\cdot32\cdot00\cdot00\cdot00\cdot\ldots} = 5,22978\ldots$

$27-5^2\ldots$	2 35	10 2
$(102).2 =$	2 04	2
	31 06	10 42
$(1042).2 =$	20 84	2
	10 22 32	10 449
$(10449).9 =$	9 40 41	9
	81 91 00	10 4587
$(107587).7 =$	73 21 09	7
	8 69 91 00	10 45948

Пояснимъ алгориѳмъ на нѣсколькихъ примѣрахъ

$\sqrt{15\cdot26\cdot46\cdot49\cdot} = 3907,$

6 26	69
6 21	9
5 46	780
0 00	0
5 46 49	7807
5 46 49	7
0	

$\sqrt{2} = \sqrt{2,00\cdot00\cdot00\cdot00\cdot\ldots} = 1,4142\ldots$

1 00	24
96	4
4 00	281
2 81	1
1 19 00	2824
1 12 96	4
6 04 00	28282
5 65 64	2

и т. д.

$\sqrt{20000} = \sqrt{2\cdot00\cdot00\cdot,00\cdot\ldots} = 141,2\ldots$

$\sqrt{0,0002} = \sqrt{0,00\cdot02\cdot00\cdot00\cdot\ldots} = 0,01412\ldots$

$\sqrt{0,2} = \sqrt{0,20\cdot00\cdot00\ldots} = 0,4\ldots$

Алгориѳмъ извлеченія корней высшихъ степеней.

§ 42. Извлеченіе корня квадратнаго, показанное въ предыдущихъ параграфахъ, обобщается на случай корня какой угодно степени n.

Я буду теорію излагать для случая произвольнаго n и параллельно буду разсматривать примѣръ $n = 5$.

Придется разбить подкоренное число A въ обѣ стороны отъ запятой на грани по n цифръ въ каждой.

Надо составить таблицу чиселъ

$$2^n, 3^n, 4^n, 5^n, 6^n, 7^n, 8^n, 9^n,$$

чтобы найти наибольшую n-ую степень, заключающуюся въ числѣ первой грани.

Если переставить запятую къ концу первой грани, то цѣлая часть a_0 корня будетъ имѣть одну цифру, которая будетъ извѣстна. Напр.,

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2,00000 \cdot 00000 \cdot \ldots} = 1,$$

такъ что $a_0 = 1$.

Далѣе мы должны искать вторую цифру a_1 по неравенствамъ

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^n \leqslant A < \left(a_0 + \frac{a_1+1}{10}\right)^n.$$

Лѣвое неравенство даетъ

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^n - a_0^n \leqslant A - a_0^n \quad . \tag{1}$$

Но на основаніи неравенства (1) § 40 главы V (стр. 87), имѣемъ

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^n - a_0^n \geqslant n \cdot \frac{a_1}{10} a_0^{n-1} \tag{2}$$

(равенство имѣетъ мѣсто при $a_1 = 0$); изъ неравенствъ (1) и (2) получимъ

$$n\, a_0^{n-1} \cdot 10^{n-1} a_1 < \left(A - a_0^n\right) \cdot 10^n \quad .$$

Въ данномъ примѣрѣ число $\left(A - a_0^n\right) \cdot 10^n$ есть

$$10 \cdot 0000\,,\,00000 \cdot \ldots\ldots \tag{3}$$

причемъ запятая продвинута до конца второй грани.

Число $n\, a_0^{n-1} \cdot 10^{n-1} \cdot a_1$ есть цѣлое съ $n-1$ нулями на концѣ, слѣдовательно, число $n\, a_0^{n-1} a_1$ должно заключаться въ числѣ 10, которое получается, если откинуть $n-1$ послѣднихъ цифръ цѣлой части числа (3). Другими словами, число $n\, a_0^{n-1} a_1$ надо искать заключеннымъ въ томъ числѣ, которое получается, если къ остатку отъ вычитанія a_0^n изъ первой (слѣва) грани приписать крайнюю лѣвую цифру второй грани. Въ данномъ случаѣ надо искать число $5 \cdot 1^4 \cdot a_1 = 5\, a_1$ заключенное въ числѣ 10, то есть $5\, a_1 \leqslant 10$, откуда $a_1 \leqslant 2$. Неравенство

$$\left(11\right)^5 < 200000 < \left(12\right)^5$$

показываетъ, что предположеніе $a_1 = 2$ даетъ слишкомъ большое значеніе для второй цифры a_1. Правильное значеніе будетъ $a_1 = 1$, и мы получимъ

$$\sqrt[5]{2,00000 \cdot 00000 \cdot \ldots} = 1,1\ldots.$$

Передвигая запятую къ концу второй грани, получимъ

$$\sqrt[5]{200000,00000 \cdot \ldots} = 11,\ldots.$$

и повторимъ операцію, полагая $a_0 = 11$.

Такъ какъ $11^5 = 161051$, то $A - a_0^5 = 38949$; надо приписать вторую грань

$$389490 \cdot 0000$$

и отдѣлить $n-1$ цифръ справа. Надо дѣлить число 389490 на na_0^{n-1}, и получимъ

$$a_1 \leqslant \frac{389490}{5\ (11)^4} \quad \text{или} \quad a_1 \leqslant 5.$$

Оказывается, что предположеніе $a_1 = 5$ даетъ слишкомъ большую цифру. Правильная цифра будетъ 4, слѣдовательно,

$$\sqrt[5]{2} = 1{,}14\ldots$$

§ 43. Къ сожалѣнію для $n > 2$ нельзя получить упрощенія алгориѳма, похожаго на то упрощеніе, которое было указано въ § 41 для случая квадратнаго радикала. Это дѣлаетъ изложенный алгориѳмъ въ случаѣ $n > 2$ мало практичнымъ.

Для приближеннаго вычисленія радикала $\sqrt[n]{A}$ при $n > 2$ практичнѣе посовѣтовать послѣдовательныя вычисленія паръ чиселъ

$$a_0,\ (a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots\ (a_k,\ b_k),\ (a_{k+1},\ b_{k+1})$$

при помощи формулъ, дающихъ числа всякой пары $(a_{k+1},\ b_{k+1})$ черезъ числа предыдущія

$$a_{k+1} = a_k + \frac{A - a_k^n}{nA - A + a_k^n}\, a_k,$$

$$b_{k+1} = a_k + \frac{A - a_k^n}{na_k^n}\, a_k.$$

Можно предположить $A > 1$ и начать съ числа $a_0 = 1$, такъ что

$$a_1 = 1 + \frac{A-1}{(n-1)\ A+1},$$

$$b_1 = 1 + \frac{A-1}{n}.$$

Числа a_k и b_k приближаются къ корню $\sqrt[n]{A}$, причемъ

$$a_k < \sqrt[n]{A} < b_k.$$

Этотъ способъ предложенъ академикомъ Н. Сонинымъ [1]).

---

[1]) Н. Ниносъ: Этюды по элементарной алгебрѣ (Вѣст. Оп. Ф. и Эл. Мат. № 581, 582, 583,—4,—6, и 592.

§ 44. При вычисленіи корня кубическаго придется прилагать формулу

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^3 - a_0^3 = 3a_0^2 \frac{a_1}{10} + 3a_0 \frac{a_1^2}{10^2} + \frac{a_1^3}{10^3}.$$

Покажемъ производство извлеченія кубическаго корня на примѣрѣ

$$\sqrt[3]{20 \cdot 661 \cdot 046 \cdot 784} = 2744$$

	8	
$3 \cdot 2^2$	$= 12$	126 . 61
$3 \cdot 2^2 \cdot 7 =$	. . . . .	84 ·
$3 \cdot 2 \cdot 7^2 =$	. . . . .	29 · 4
$7^3 =$	. . . . .	3 · 43
		116 · 83

	116 . 83	
$3 \cdot (27)^2$	$= 2187$	9 780 · 46
$3 \cdot (27)^2 \cdot 4 =$	. . . . .	8748 ·
$3 \cdot (27) \cdot 4^2 =$	. . . . .	129 · 6
$4^3 =$	. . . . .	· 64
		8878 · 24

	8 878 · 24	
$3 \cdot (274)^2$	$= 225228$	902 227 · 84
$3 \cdot (274)^2 \cdot 4 =$	. . . . .	900912 .
$3 \cdot (274) \cdot 4^2 =$	. . . . .	1315 . 2
$4^3 =$	. . . . .	. 64
		902227 . 84

902 227 84

0

Извлеченіе корней квадратныхъ изъ полиномовъ.

§ 45. Иногда заданный полиномъ бываетъ полнымъ квадратомъ другого. Если заданный полиномъ расположенъ по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ одной буквы, то можно указать алгориѳмъ подобный тому, который мы разсматривали при извлеченіи корня квадратнаго изъ чиселъ. Причемъ этотъ алгориѳмъ или сопровождается полнымъ извлеченіемъ корня, или же приводитъ къ убѣжденію, что заданный полиномъ не есть квадратъ другого.

Припоминая то, что мы знаемъ объ извлеченіи корня квадратнаго изъ чиселъ, мы можемъ сказать, что разсужденія основываются на формулѣ

$$(a+b+c+d)^2 = \\ = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

которую можно формулировать такъ: **квадратъ многочлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго, плюсъ удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на третій, плюсъ квадратъ третьяго, плюсъ удвоенное произведеніе суммы трехъ первыхъ на четвертый, плюсъ квадратъ четвертаго и т. д.**

Если въ полиномѣ $a+b+c+d$ старшій членъ a, члены же a, b, c, d идутъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то членъ a^2 даетъ старшій членъ квадрата. Итакъ, для полученія старшаго члена корня, надо изъ старшаго члена подкоренного выраженія извлечь корень квадратный. Послѣ вычитанія изъ подкоренного выраженія члена a^2 старшимъ членомъ остатка будетъ, очевидно, $2ab$, а потому для полученія второго члена b корня надо раздѣлить старшій членъ остатка на $2a$. По полученіи члена b вычтемъ изъ перваго остатка члены $2ab+b^2$; получаемъ второй остатокъ. Старшій членъ этого остатка будетъ, очевидно, $2ac$, а потому по раздѣленіи его на $2a$ получимъ третій членъ c корня. По полученіи члена c вычитаемъ изъ второго остатка выраженіе $2(a+b)c+c^2$; получаемъ третій остатокъ, старшій членъ котораго будетъ $2ad$ и дастъ по раздѣленіи на $2a$ четвертый членъ d корня и т. д.

Для удобства выкладки надо воспользоваться замѣчаніемъ § 41.

Послѣ вычитанія a^2 составляемъ сумму удвоеннаго перваго члена и второго $2a+b$; эту сумму умножимъ сначала на b, а потомъ складываемъ съ b, получаемъ

$$2ab+b^2, \quad 2(a+b);$$

вычитая первое выраженіе $2ab+b^2$, получаемъ второй остатокъ. Чтобы получить третій остатокъ, надо вычесть изъ второго выраженіе $2(a+b)c+c^2$

$$\begin{array}{r|l} 2(a+b)+c & \\ \hline & c \\ \hline 2(a+b)c+c^2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2(a+b)+c & \\ \hline & c \\ \hline 2(a+b+c) & \end{array}$$

Подобнымъ же образомъ продолжаемъ выкладку дальше. Покажемъ способъ вычисленія на примѣрѣ:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} = & x^2-3x+2 \\ \underline{\mp 6x^3 \pm 9x^2} & 2x^2-3x \\ 4x^2-12x+4 & -3x \\ \underline{\mp 4x^2 \pm 12x \mp 4} & \underline{2x^2-6x+2} \\ 0 & 2 \end{array}$$

§ 46. Посмотримъ, когда извлеченіе корня квадратнаго изъ многочлена невозможно въ раціональномъ видѣ, т. е. не получается въ результатѣ многочленъ.

1°., Если заданный многочленъ есть двучленъ, ибо квадратъ многочлена не можетъ имѣть менѣе трехъ членовъ.

Такъ, напримѣръ, $\sqrt{a^2+b^2}$ есть алгебраическая ирраціональность, хотя численно это выраженіе и можетъ давать раціональное число, напримѣръ, $\sqrt{3^2+4^2} = \pm 5$.

2°., Извлекая изъ старшаго и младшаго члена корни квадратные, мы получимъ старшій и младшій члены результата, если только дѣйствительно корень извлекается алгебраически. Если же нѣтъ, то, вычисляя по указанному алгориѳму члены, мы придемъ къ младшему члену, отличному отъ того, который полученъ черезъ извлеченіе корня квадратнаго изъ младшаго члена подкоренной величины.

Напримѣръ, надо извлечь корень квадратный

$$\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{x^2}}.$$

Если корень выражается въ видѣ многочлена, заключающаго положительныя и отрицательныя цѣлыя степени x, то крайніе члены въ результатѣ извлеченія должны быть x и $\frac{1}{x}$.

Начинаемъ извлекать корень по нашему алгориѳму.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x^2-3x+\frac{1}{x^2}} = & x-\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x} \\ \underline{\mp 3x \mp \frac{9}{4}} & 2x-\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{4}+\frac{1}{x^2} & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Мы пришли къ члену $-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x}$, отличающемуся отъ $\frac{1}{x}$, слѣдовательно, извлеченіе корня невозможно.

Изслѣдованіе измѣненія выраженій x^a, a^x при измѣненіи x.

§ 47. Показатели выраженій x^μ, a^x мы всегда будемъ предполагать числами раціональными, ибо лишь въ главѣ XIV мы обобщимъ понятіе степени на случай ирраціональнаго показателя. Числа же, возвышаемыя въ степень, мы будемъ предполагать всегда положительными, хотя какими угодно: раціональными или ирраціональными.

§ 48. Разсмотримъ сначала выраженіе x^μ, въ которомъ перемѣнное число возвышается въ постоянную степень, и будемъ называть это выраженіе степеннымъ.

Докажемъ двѣ теоремы:

I. **При положительномъ показателѣ μ выраженіе x^μ возрастаетъ съ возрастаніемъ x.**

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ два положительныхъ числа x и a и пусть $\mu=\frac{m}{n}$, гдѣ m и n числа натуральныя.

$$(1)\qquad \begin{aligned} x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}} &= \left(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)\left\{x^{\frac{m-1}{n}}+x^{\frac{m-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+\ldots+a^{\frac{m-1}{n}}\right\},\\ x-a &= \left(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+\ldots+a^{\frac{n-1}{n}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда видимъ, что три разности

$$x-a,\ x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}},\ x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}}$$

должны имѣть одинъ и тотъ же знакъ, такъ что, если $x>a$, то $x^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{m}{n}}$, и теорема доказана.

Пусть x будетъ перемѣннымъ числомъ, а число a постоянное, и пусть оба числа x и a заключаются въ промежуткѣ между двумя положительными числами A и B, гдѣ $A>B$

$$B<x<A,\quad B<a<A.$$

Равенства (1) можно замѣнить такими неравенствами

$$\left|x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}}\right|<\left|x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right|mA^{\frac{m-1}{n}},$$

$$\left|x-a\right|>\left|x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right|nB^{\frac{n-1}{n}},$$

Раздѣляя первое неравенство на второе, получимъ

$$\frac{\left|x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}\right|}{|x-a|} < \frac{m}{n} \frac{A^{\frac{m-1}{n}}}{B^{\frac{n-1}{n}}},$$

или окончательно

$$\left|x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}\right| < \frac{m}{n} \frac{A^{\frac{m-1}{n}}}{B^{\frac{n-1}{n}}} |x-a|$$

Если $x-a$ есть величина безконечно малая, то и величина $x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}$ безконечно мала. Мы приходимъ къ теоремѣ:

II. **Если положительная перемѣнная x стремится къ предѣлу a, то степенное выраженіе x^μ стремится къ предѣлу a^μ.**

Эта теорема остается справедливой и при μ отрицательномъ. Для доказательства можно будетъ отрицательный показатель свести на положительный замѣной x на $\frac{1}{x}$ и a на $\frac{1}{a}$.

Случай цѣлаго показателя μ получается при $n=1$.

§ 49. Разсмотримъ теперь выраженіе a^x, въ которомъ постоянное положительное число a возвышается въ перемѣнную степень, и назовемъ это выраженіе показательнымъ.

Относительно показательнаго выраженія докажемъ рядъ весьма важныхъ теоремъ.

Разсмотримъ раціональное положительное число μ.

Тогда на основаніи возрастанія степенного выраженія x^μ получимъ

(1) или $a>1$, $a^\mu>1$,

(2) или $a<1$, $a^\mu<1$,

ибо $1^\mu=1$. Получается теорема:

I. **Показательное выраженіе a^x возрастаетъ съ возрастаніемъ x при $a>1$ и убываетъ въ обратномъ случаѣ, когда $a<1$.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ два раціональныя значенія μ и ν числа x, причемъ какія угодно положительныя или отрицательныя и пусть кромѣ того $\mu>\nu$, тогда получаемъ

(3) $$a^\mu - a^\nu = a^\nu (a^{\mu-\nu} - 1).$$

Такъ какъ разность $\mu - \nu$ число положительное, то изъ неравенствъ (1) и (2) вытекаетъ справедливость теоремы.

II. Если положительное раціональное число δ имѣетъ предѣломъ нуль, то предѣлъ a^{δ} есть 1.

Если $lim\ \delta = 0$, то число δ сдѣлается меньше и останется меньше $\frac{1}{n}$, гдѣ n сколь угодно большое натуральное число.

Мы получаемъ

$$1 < a^{\delta} < a^{\frac{1}{n}} \quad \text{при } a > 1,$$

$$1 > a^{\delta} > a^{\frac{1}{n}} \quad \text{при } a < 1.$$

Ограничимся разсмотрѣніемъ случая $a > 1$.

Если мы докажемъ, что $a^{\frac{1}{n}}$ имѣетъ предѣлъ единицу, то теорема будетъ доказана, ибо тогда и a^{δ} будетъ имѣть предѣломъ единицу.

Возьмемъ тождество

$$a - 1 = \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left(a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \ldots a^{\frac{1}{n}} + 1\right),$$

$$a - 1 > \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)n,$$

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}$$

Но $\lim\limits_{n=\infty} \left\{\frac{a-1}{n}\right\} = 0$, слѣдовательно, и $lim\ a^{\frac{1}{n}} = 1$, что и требовалось доказать.

§ 50. Покажемъ, наконецъ, **что съ возрастаніемъ положительнаго x выраженіе a^x возрастаетъ безпредѣльно при $a > 1$ и приближается къ нулю при $a < 1$.**

Въ самомъ дѣлѣ, для всякаго цѣлаго числа n получаемъ при $a > 1$ на основаніи неравенствъ (1) § 40 главы V (стр. 87)

(1)
$$a^n - 1 > n(a-1),$$

или

$$a^n > n(a-1) + 1.$$

Если съ возрастаніемъ число x сдѣлается больше n, то будетъ $a^x > a^n$, или

$$a^x > 1 + n(a-1).$$

Но вторая часть безконечно велика при безконечно большомъ значеніи n; и мы получаемъ

$$a^{\infty} = \infty \text{ (при } a > 1).$$

Обращаясь къ случаю $a < 1$, можемъ положить $a = \frac{1}{b}$, гдѣ $b > 1$, отсюда

$$a^{x} = \frac{1}{b^{x}},$$

мы имѣемъ

$$a^{\infty} = \frac{1}{b^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ (при } a < 1),$$

и теорема доказана.

ГЛАВА IX.

О числахъ комплексныхъ.

§ 1. Послѣднее обобщеніе понятія о числѣ необходимо сдѣлать для того, чтобы возможно было извлекать корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ. Напримѣръ,

$$\sqrt{-4}.$$

Среди чиселъ, изученныхъ нами раньше, не существовало такого числа, чтобы квадратъ его былъ равенъ отрицательному числу —4, ибо квадратъ всякаго вещественнаго числа есть число положительное. Будемъ считать $\sqrt{-4}$ за число новой природы, которое назовемъ мнимымъ.

Предполагая ввести новыя, такъ называемыя, комплексныя числа, среди которыхъ будутъ находиться также мнимыя, мы установимъ эти числа такими опредѣленіями, чтобы дѣйствія надъ ними были тѣ же, что и надъ вещественными, напримѣръ, между прочимъ, сдѣлать такъ, чтобы было

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1).4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}.$$

Мы введемъ одно только число новой природы

$$i = \sqrt{-1},$$

которое назовемъ мнимымъ; остальныя числа будутъ происходить отъ комбинированія этого числа съ числами вещественными.

Опредѣленіе комплекснаго числа.

§ 2. Знакъ

$$a+ib,$$

въ которомъ a и b заданныя вещественныя числа, будемъ называть комплекснымъ числомъ, причемъ $+$ пока не будемъ считать знакомъ сложенія. Подобнымъ же образомъ ib не будемъ считать за произведеніе числа i на число b. Мы будемъ i считать за знакъ, который пока не соотвѣтствуетъ какому-нибудь числу. Будемъ этотъ знакъ называть мнимымъ знакомъ. Число a будемъ называть вещественною частью комплекснаго числа, выраженіе ib будемъ называть мнимою частью комплекснаго числа. Вещественное число b будемъ называть коэффиціентъ мнимаго знака.

Вмѣсто знака $a+i.0$ будемъ писать просто a, такъ что будемъ считать всякое вещественное число частнымъ случаемъ комплекснаго при равномъ нулю коэффиціентѣ мнимаго знака.

Вмѣсто знака $0+ib$ будемъ писать просто ib и называть число въ этомъ случаѣ чисто мнимымъ.

Наконецъ, будемъ вмѣсто знака $0+i0$ писать просто 0.

I. Опредѣленіе равенства.

§ 3. **Два комплексныхъ числа равны только тогда, когда отдѣльно равны ихъ вещественныя части и коэффиціенты при мнимомъ знакѣ, т. е. равенство**

$$a+ib=c+id$$

равносильно съ двумя слѣдующими

$$a=c,\ b=d.$$

Напримѣръ, два комплексныхъ числа

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+i \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}+i$$

равны между собой.

II. Опредѣленіе неравенства.

§ 4. **Комплексныя числа, у которыхъ не равны сразу и вещественныя части и коэффиціенты при мнимомъ знакѣ, не будутъ равными.**

Числа $a+ib$ и $c+id$ не будутъ равными, если не будутъ имѣть мѣсто сразу два равенства

$$a=c,\ b=d.$$

Напримѣръ, числа $2+3i$ и $3+2i$ не равны между собой.

III. Продолженіе опредѣленія неравенства.

§ 5. **Понятія больше и меньше для комплексныхъ чиселъ не употребляются.**

IV. Опредѣленіе сложенія.

§ 6. **Подъ суммой двухъ комплексныхъ чиселъ** $a+ib$ **и** $c+id$ **мы будемъ разумѣть комплексное число** $a+c+i(b+d)$, **вещественная часть котораго есть сумма вещественныхъ частей слагаемыхъ, а коэффиціентъ мнимаго знака есть сумма коэффиціентовъ слагаемыхъ.**

Напримѣръ,

$$(3+i4)+(-7+i(-5))=(3-7)+i(4-5)=(-4)+i(-1).$$

§ 7. Что касается вычитанія, то вычесть изъ числа $a+ib$ число $c+id$, это значитъ найти такое число $x+iy$, которое, сложенное съ числомъ $c+id$, будетъ въ суммѣ $a+ib$, то есть

$$(c+id)+(x+iy)=a+ib.$$

На основаніи опредѣленія сложенія это равенство можно переписать такъ

$$c+x+i(d+y)=a+ib,$$

откуда на основаніи опредѣленія равенства двухъ комплексныхъ чиселъ, получаемъ

$$c+x=a,\ d+y=b,$$

или

$$x=a-c,\ y=b-d,$$

и искомая разность $x+iy$ получена.

§ 8. Опредѣленіе умноженія чиселъ комплексныхъ мы сдѣлаемъ такое, чтобы во-первыхъ получалось $i=\sqrt{-1}$, или $i^2=-1$, во-вторыхъ, чтобы всѣ законы раціональныхъ дѣйствій надъ вещественными числами сохранялись и для комплексныхъ.

Допустимъ на минуту, что $a+ib$ есть двучленъ, а i есть число, тогда по правилу умноженія многочленовъ получимъ

$$(a+ib)\ (c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd.$$

Если положимъ $i^2=-1$ и возьмемъ за скобку i, то получимъ

$$ac-bd+i\ (bc+ad).$$

V. Опредѣленіе умноженія.

§ 9. **Подъ произведеніемъ двухъ комплексныхъ чиселъ** $a+ib$ **и** $c+id$ **будемъ разумѣть число**

$$(ac-bd)+i\ (ad+bc).$$

Напримѣръ,

$$(2+i\ 3)\ (5+i\ 2)=(2.5-3.2)+i\ (2.2+3.5)=$$
$$=4+i.19.$$

§ 10. Разсмотримъ теперь правило дѣленія комплексныхъ чиселъ. Требуется раздѣлить комплексное число $a+ib$ на другое комплексное число $c+id$; обозначимъ искомое частное черезъ $x+iy$. Тогда на основаніи того, что дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію,

$$a+ib=(c+id)\ (x+iy)=cx-dy+i\ (cy+dx),$$

откуда, на основаніи опредѣленія равенства двухъ комплексныхъ чиселъ, получаемъ два уравненія

$$\begin{aligned} cx-dy&=a,\\ dx+cy&=b \end{aligned} \qquad (1)$$

съ двумя неизвѣстными x и y. Рѣшая уравненія, получимъ

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad (2)$$

и искомое число $x+iy$ найдено.

Если поставимъ себѣ задачей найти комплексное число $c+id$, на которое нельзя дѣлить, то для рѣшенія этой задачи

мы должны убѣдиться, когда система (1) не имѣетъ опредѣленнаго рѣшенія относительно x и y. Мы видѣли въ § 18 главы V (стр. 72), что система (1) не допускаетъ опредѣленнаго рѣшенія лишь въ томъ случаѣ, когда общій знаменатель выраженій (2) равенъ нулю, т. е.

$$c^2 + d^2 = 0.$$

Такъ какъ числа c и d вещественныя, то ихъ квадраты отрицательными быть не могутъ, и, слѣдовательно, ихъ сумма тогда и только тогда равна нулю, когда въ одѣльности $c = 0$ и $d = 0$, такъ что **единственное комплексное число, на которое дѣлить нельзя, есть нуль.**

§ 11. Послѣ того, какъ установлены опредѣленія дѣйствій сложенія и умноженія, можно показать, что въ знакѣ

$$a + ib$$

комплекснаго числа **знакъ $+$ есть дѣйствительно знакъ сложенія, а ib есть произведеніе мнимаго числа i на вещественное число b.**

Въ самомъ дѣлѣ, если мы желаемъ сложить два числа: вещественное a и комплексное ib, т. е. вычислить сумму

$$(a) + (ib),$$

то надо слагаемыя представить въ видѣ комплексныхъ чиселъ и примѣнить правило сложенія; получаемъ

$$a = a + i0, ib = 0 + ib,$$

откуда

$$(a) + (ib) = (a + i0) + (0 + ib) = (a + 0) + i(0 + b) = a + ib,$$

т. е. дѣйствительно число $a + ib$ есть сумма его дѣйствительной и мнимой частей.

Подобнымъ же образомъ мнимый знакъ i можно считать за комплексное число $0 + i1$ и тогда произведеніе i на вещественное число b будетъ вычисляться такъ

$$(i)(b) = (0 + i1)(b + i0) = (0.b - 1.0) + i(1.b + 0.0) = ib.$$

Послѣднее выраженіе показываетъ, что, дѣйствительно, чисто мнимое число ib есть произведеніе числа i на b.

§ 12. Остается убѣдиться, что **мнимый знакъ есть не что иное, какъ такое число, квадратъ котораго есть -1.**

Предполагая въ формулѣ умноженія

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ac+bd)$$

оба множителя одинаковыми, т. е. $a=c, b=d$, получимъ

$$(a+ib)^2=a^2-b^2+i2ab$$

и, полагая $a=0$, $b=1$, получимъ

$$i^2=-1.$$

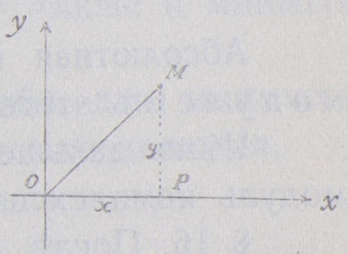
§ 13. Нетрудно убѣдиться, что дѣйствія надъ комплексными числами удовлетворяютъ всѣмъ основнымъ законамъ, входящимъ въ опредѣленіе поля. Другими словами, комплексныя числа образуютъ поле, которое мы обозначимъ черезъ J. Поле J заключаетъ, какъ часть, поле W чиселъ вещественныхъ, а также и поле R чиселъ раціональныхъ.

Вслѣдствіе существованія закона перестановочнаго одно и то же комплексное число можно писать въ разныхъ формахъ.

$$a+ib=a+bi=ib+a=bi+a.$$

§ 14. Мы видѣли, что вещественныя числа какъ раціональныя, такъ и ирраціональныя, могутъ быть изображены различными точками прямой линіи. Для представленія полной системы комплексныхъ чиселъ уже не хватаетъ точекъ прямой линіи, такъ что приходится для геометрическаго изображенія комплексныхъ чиселъ разсматривать всѣ точки цѣлой плоскости.

Наиболѣе удобный и распространенный способъ геометрическаго представленія чиселъ комплексныхъ состоитъ въ примѣненіи основъ аналитической геометріи, указанныхъ Декартомъ. Этотъ способъ состоитъ въ опредѣленіи положенія на плоскости произвольной точки M при помощи двухъ чиселъ x и y, называемыхъ координатами. Берутся на плоскости двѣ прямыя OX и OY, пересѣкающіяся въ точкѣ O подъ прямымъ угломъ. Эти прямыя называются осями координатъ, точка O называется началомъ координатъ. На оси OX, называемой обыкновенно осью абсциссъ, выберемъ въ ту или другую сторону положительное направленіе. Пусть, напримѣръ, это направленіе идетъ отъ начала координатъ направо. На другой оси OY, называемой обыкновенно осью ординатъ, выберемъ также опредѣленное направленіе. Координата x, называемая абсциссой точки M, указывается, какъ координата на прямой



Черт. 3.

линіи (см. § 32 главы VII, стр. 123) точкой P, которая есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ разсматриваемой точки M на ось OX. Подобнымъ же образомъ, если мы опустимъ перпендикуляръ изъ точки M на ось OY, то основаніе Q этого перпендикуляра дастъ на этой оси OY координату y, которую называютъ о р д и н а т о ю точки M. Очевидно, что положеніе точки M на плоскости опредѣляется вполнѣ заданіемъ двухъ ея координатъ, абсциссы x и ординаты y.

Всякое комплексное число

$$x+iy$$

можно геометрически представить точкой, имѣющей координаты x и y.

Вещественнымъ числамъ x будутъ соотвѣтствовать точки P, лежащія на оси абсциссъ, а чисто мнимымъ числамъ iy будутъ соотвѣтствовать точки оси ординатъ.

§ 15. Абсолютная величина $|x|$ каждой вещественной координаты x точки P на оси OX представляетъ разстояніе OP этой точки P отъ начала координатъ.

Хотя понятіе больше и меньше для чиселъ комплексныхъ не употребляется, но понятіе абсолютной величины съ вещественныхъ чиселъ переносится также и на мнимыя. Подъ **абсолютной величиной мнимаго числа** разумѣется **положительное число**, выражающее длину OM разстоянія точки M до начала координатъ, т.-е.

$$OM=+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Для обозначенія этой абсолютной величины употребляется тотъ же знакъ, что и для чиселъ вещественныхъ

$$|x+iy|.$$

Мы получаемъ

$$|x+iy|=+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Абсолютная величина комплекснаго числа чаще называется м о д у л е м ъ этого числа.

Чѣмъ дальше точка M отъ начала координатъ, тѣмъ больше модуль комплекснаго числа.

§ 16. Послѣ введенія мнимыхъ чиселъ можно сказать, что значитъ извлечь корень квадратный изъ отрицательнаго числа

$$-A,$$

гдѣ A положительное число.

Обозначимъ черезъ $\sqrt{A}$ ариѳметическій корень изъ A, мы замѣтимъ, что корень квадратный

(1) $$\sqrt{-A}$$

будетъ равенъ одному изъ слѣдующихъ мнимыхъ чиселъ

(2) $$+i\sqrt{A}, -i\sqrt{A}.$$

Нетрудно видѣть, что другихъ значеній радикалъ (1) имѣть не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x есть величина радикала (1), тогда должно быть

$$x^2 = -A.$$

Это уравненіе можно переписать такъ

$$x^2 + A = \left(x + i\sqrt{A}\right)\left(x - i\sqrt{A}\right).$$

Произведеніе двухъ множителей равно нулю тогда и только тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю; мы приходимъ къ одному изъ уравненій

$$x + i\sqrt{A} = 0, x - i\sqrt{A} = 0,$$

что даетъ одно изъ значеній (2). Никакихъ другихъ значеній не получается.

Очевидно, что, если одно изъ значеній (2) мы обозначимъ $\sqrt{-A}$, то другое значеніе будетъ $-\sqrt{-A}$. Этимъ оправдывается знакъ

$$\pm\sqrt{-A}.$$

Сохраненіе формальныхъ законовъ раціональныхъ дѣйствій.

§ 17. Такъ какъ числа комплексныя образуютъ поле, то **соображенія главъ IV и V сохраняются, если подъ буквами понимать не только числа вещественныя, но также и мнимыя комплексныя.**

Падаетъ только теорія неравенствъ, ибо для мнимыхъ чиселъ понятія „больше“ и „меньше“ не разсматриваются.

ГЛАВА X.

О квадратныхъ уравненіяхъ.

§ 1. Уравненія второй степени (см. § 9, глава V, стр. 65)

(1) $$ax^2+bx+c=0$$

носятъ также названіе квадратныхъ.

Коэффиціенты a, b, c будемъ считать произвольными числами или же алгебраическими выраженіями, составленными изъ буквъ, обозначающихъ данныя числа.

Въ началѣ мы не будемъ предполагать коэффиціенты числами мнимыми.

Членъ c, не заключающій неизвѣстнаго, носитъ названіе свободнаго члена.

Болѣе простой видъ квадратнаго уравненія.

§ 2. Раздѣляя все уравненіе (1) на коэффиціентъ a при старшемъ членѣ, получимъ, обозначая $\frac{b}{a}$ черезъ p, а $\frac{c}{a}$ черезъ q, новое уравненіе

(1) $$x^2+px+q=0.$$

Такъ, напримѣръ, уравненіе $2x^2+3x+4=0$ по раздѣленіи на 2 принимаетъ видъ

$$x^2+\frac{3}{2}x+2=0,$$

гдѣ $p=\frac{3}{2}$, $q=2$.

Неполное квадратное уравненіе.

§ 3. Квадратное уравненіе носитъ названіе неполнаго, если въ немъ коэффиціенты b или c, или оба сразу равны нулю. Неполныя квадратныя уравненія могутъ быть только одного изъ слѣдующихъ видовъ

$$ax^2=0, \qquad (b=c=0)$$
$$ax^2+bx=0, \qquad (c=0)$$
$$ax^2+c=0. \qquad (b=0)$$

Покажемъ, какъ рѣшаются эти уравненія.

I. Квадратное уравненіе $ax^2=0$ имѣетъ, очевидно, только одно рѣшеніе $x=0$.

II. Уравненіе $ax^2+bx=0$ можетъ быть переписано такъ

$$x(ax+b)=0.$$

Произведеніе двухъ чиселъ можетъ равняться нулю только въ томъ случаѣ, когда по крайной мѣрѣ одинъ изъ множителей равенъ нулю. Итакъ, разсматриваемое уравненіе удовлетворяется, когда удовлетворяется одно изъ уравненій

(1) $$x=0, \quad ax+b=0$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ квадратное уравненіе привелось къ двумъ уравненіямъ первой степени (1). Второе изъ уравненій (1) даетъ

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Окончательно можно высказать такое положеніе, что уравненіе $ax^2+bx=0$ имѣетъ два корня

$$x_1=0 \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

III. Разсмотримъ теперь неполное уравненіе $ax^2+c=0$.

Отъ заданнаго уравненія переходимъ къ ему равносильнымъ

$$ax^2=-c, \quad x^2=-\frac{c}{a}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Обозначая черезъ x_1 и x_2 два корня нашего уравненія, мы получимъ

$$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Эти корни будутъ вещественными, если подкоренная величина $-\frac{c}{a}$ положительна; если же эта величина $-\frac{c}{a}$ отрицательна, то корни мнимые.

Случай I можно разсматривать, какъ предѣльный, для слу-

чая II при $b=0$, а потому можно сказать, что уравненіе $ax^2=0$ имѣетъ два корня равныхъ нулю:

$$x_1=0, \quad x_2=0.$$

Полное квадратное уравненіе.

§ 4. Для рѣшенія полнаго уравненія $x^2+px+q=0$ поступаемъ такъ. Перенесемъ свободный членъ q во вторую часть равенства:

(1) $$x^2+px=-q.$$

Двучленъ x^2+px, переписанный въ видѣ

$$x^2+2x\cdot\frac{p}{2},$$

представляетъ изъ себя выраженіе, заключающее квадратъ x и удвоенное произведеніе x на $\frac{p}{2}$. Не достаетъ квадрата $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, чтобы получить квадратъ выраженія $x+\frac{p}{2}$. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ уравненія (1) величину $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

(2) $$x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Итакъ, квадратъ выраженія $x+\frac{p}{2}$ равняется $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, слѣдовательно, само выраженіе $x+\frac{p}{2}$ равняется корню квадратному изъ $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, причемъ, согласно § 29 главы VIII (стр. 138) и § 16 главы IX (стр. 160) этотъ корень имѣетъ два значенія, отличающіяся знаками. Мы получаемъ

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

и окончательно

(3) $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

или подробнѣе

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Замѣтивъ, что выраженіе $-\frac{p}{2}$ представляетъ половину коэффиціента передъ неизвѣстнымъ въ первой степени, взятую съ обратнымъ знакомъ, можемъ формулу (3) высказать словами такъ:

Неизвѣстное квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равняется половинѣ коэффиціента передъ неизвѣстнымъ въ первой степени съ обратнымъ знакомъ, плюсъ-минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ свободнаго члена.

§ 5. Можно было бы при рѣшеніи уравненія

(1) $$x^2+px+q=0$$

разсуждать другимъ способомъ. Представимъ первую часть уравненія (1) въ видѣ разности двухъ квадратовъ:

$$x^2+px+q=x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+q=x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left\{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right\}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2.$$

Раскладывая разность квадратовъ на сумму и разность первыхъ степеней, получимъ уравненіе равносильное съ (1)

(2) $$\left\{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right\}=0.$$

Итакъ, уравненіе (2) распадается на два первой степени относительно x

$$x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0,$$

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Уравненіе (2) можетъ быть переписано такъ

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Другими словами квадратный трехчленъ $x^2 + px + q$ раскладывается на два множителя первой степени

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta),$$

гдѣ $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$.

Рѣшить квадратное уравненіе $x^2 + px + q = 0$ и разложить квадратный трехчленъ $x^2 + px + q$ на множители первой степени относительно x, суть двѣ равносильныя задачи: умѣя рѣшить одну, мы тѣмъ самымъ рѣшаемъ и другую.

§ 6. Рѣшимъ теперь квадратное уравненіе, написанное въ самомъ общемъ видѣ

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Переписавъ это уравненіе въ видѣ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

примѣнимъ къ нему правило § 4 (стр. 165); получимъ

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Приходимъ къ окончательной формулѣ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

которую можно высказать словами:

Неизвѣстное квадратнаго уравненія равняется дроби, у которой числитель есть коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ первой степени съ обратнымъ знакомъ, плюсъ-минусъ корень квадратный изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетвереннаго произведенія коэффиціента при квадратѣ неизвѣстнаго на свободный членъ, а знаменатель есть удвоенный коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй степени.

§ 7. Разложеніе на множители трехчлена

$$ax^2 + bx + c.$$

Для этой цѣли найдемъ корни α и β уравненія $ax^2 + bx + c = 0$,

или, что одно и то же корни уравненія $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. На основаніи сказаннаго въ § 5 (стр. 166) мы получаемъ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta),$$

откуда окончательно

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Сумма и произведеніе корней квадратнаго уравненія.

§ 8. Изъ тождества

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) = \\ = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

мы получаемъ

(1) $$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q,$$

т. е. **сумма корней квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго равенъ 1, равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе равно свободному члену.**

§ 9. Теорему предыдущаго §-а можно было бы получить непосредственно изъ формулъ для корней.

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\alpha + \beta = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} + \left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} = -p,$$

$$\alpha\beta = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}\left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{p}{2}\right\}^2 - \left\{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q.$$

§ 10. Для случая уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0$$

формулы (1) принимаютъ видъ

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

§ 11. Нетрудно убѣдиться, что обратно изъ формулъ

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -p, \\ \alpha\beta &= q \end{aligned} \tag{1}$$

получается, что α и β суть корни уравненія $x^2+px+q=0$.

Формулы (1) можно разсматривать, какъ два уравненія съ двумя неизвѣстными α и β; исключая изъ нихъ β, получимъ по первому уравненію $\beta=-p-\alpha$ и, подставляя во второе, будемъ имѣть $\alpha(-p-\alpha)=q$, или окончательно

$$\alpha^2+p\alpha+q=0.$$

Подобнымъ же образомъ, исключая α, получимъ

$$\beta^2+p\beta+q=0,$$

то есть, дѣйствительно, α и β оказываются корнями уравненія

$$x^2+px+q=0.$$

Изслѣдованіе квадратнаго уравненія.

§ 12. Разсмотримъ теперь, ограничиваясь толька вещественными коэффиціентами уравненія $ax^2+bx+c=0$, когда корни его бываютъ вещественные, неравные и равные, и когда они бываютъ мнимые.

Корни, какъ мы видѣли, выражаются формулами

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Коэффиціентъ a можно предполагать числомъ положительнымъ, ибо въ обратномъ случаѣ можно измѣнить знаки у всѣхъ коэффиціентовъ уравненія.

1.°, **Если c число отрицательное, то оба корня вещественные,** ибо при этомъ условіи число $-4ac$ будетъ положительное, а число b^2 всегда число положительное, какъ квадратъ вещественнаго числа; значитъ, подъ корнемъ квадратнымъ выраженіе $b^2+(-4ac)$, будучи суммою двухъ положительныхъ чиселъ, будетъ само числомъ положительнымъ.

2.°, **Если c число положительное,** то выраженіе b^2-4ac,

будучи разностью двухъ положительныхъ чиселъ, можетъ быть числомъ положительнымъ, или отрицательнымъ, или нулемъ.

Если $b^2 - 4ac > 0$, то оба корня x_1 и x_2 вещественные.

Если $b^2 - 4ac < 0$, то оба корня x_1 и x_2 мнимые.

Если $b^2 - 4ac = 0$, то оба корня x_1 и x_2 равные и вещественные, ихъ общая величина есть $-\frac{b}{2a}$.

§ 13. Будемъ, разсматривая корни квадратные изъ вещественныхъ чиселъ, понимать подъ знакомъ $\sqrt{A}$ при $A > 0$ ариѳметическій корень, который есть, очевидно, число положительное, а при $A < 0$ мнимое число $i\lambda$, гдѣ $\lambda > 0$.

Посмотримъ, что происходитъ съ формулами

$$(1) \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

при приближеніи числа a къ нулю.

Во первыхъ при достаточно маломъ значеніи a членъ $4ac$ малъ по сравненію съ членомъ b^2 и, значитъ, $b^2 - 4ac$ будетъ числомъ положительнымъ и останется таковымъ при дальнѣйшемъ приближеніи a къ нулю. Отсюда вытекаетъ, что при приближеніи a къ нулю, корни дѣлаются вещественными и остаются таковыми при дальнѣйшемъ приближеніи a къ нулю. Если бы мы подставили въ формулы (1) $a = 0$, то получили бы

$$(2) \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0}.$$

Если число b положительное, то $\sqrt{b^2} = b$, если же b отрицательное, то $\sqrt{b^2} = -b$; напр., если $b = -4$, то $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = -(-4)$.

Поэтому приходится разсматривать два случая. Формулы (2) даютъ:

I., при $b > 0$

$$x_1 = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}, \quad x_2 = \frac{-b - b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty.$$

II., при $b < 0$

$$x_1 = \frac{-b - b}{0} = \infty, \quad x_2 = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}.$$

Итакъ, мы видимъ, что одинъ корень дѣлается безконечно

большимъ по абсолютной величинѣ; этотъ корень есть x_2 при $b>0$ и x_1 при $b<0$.

Оказывается, что другой корень не будетъ неопредѣленнымъ, а приближается къ опредѣленному предѣлу при уменьшеніи абсолютной величины a.

Разсмотримъ, напримѣръ, случай $b>0$; тогда умножимъ числителя и знаменателя дроби, дающей величину корня x_1, на выраженіе $-b-\sqrt{b^2-4ac}$; получимъ

$$x_1=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\ (-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a\ (-b-\sqrt{b^2-4ac})}=$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Сократимъ эту дробь на $2a$.

$$x_1=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}};$$

полагая теперь $a=0$, мы получимъ предѣльное значеніе корня x_1

$$x_1=\frac{2c}{-2b}=-\frac{c}{b}.$$

То же самое получается для $b<0$, если умножимъ числитель и знаменатель выраженія для x_2 на $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ и сократимъ на $2a$

$$x_2=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

при $a=0$ получаемъ

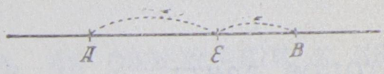
$$x_2=\frac{2c}{-b-b}=-\frac{c}{b}.$$

Если мы замѣтимъ, что $-\frac{c}{b}$ есть корень уравненія первой степени $bx+c=0$, въ которое обращается квадратное $ax^2+bx+c=0$ при $a=0$, то можемъ формулировать окончательно теорему:

При приближеніи a къ нулю одинъ корень уравненія $ax^2+bx+c=0$ приближается къ корню уравненія $bx+c=0$, другой же корень дѣлается безконечно большимъ.

Задача о двухъ источникахъ свѣта.

§ 14. Задача. **На прямой въ точкахъ A и B находятся два источника свѣта. Источникъ свѣта, находящійся въ точкѣ A, имѣетъ на разстояніи одного метра силу свѣта, равную a свѣчамъ, а источникъ точки B имѣетъ силу равную b свѣчамъ. Зная, что разстояніе между точками A и B равно d, найти точку E на прямой, въ которой освѣщеніе отъ обоихъ источниковъ свѣта одинаково.**



Черт. 4.

Изъ физики извѣстно, что степень освѣщенія обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ источника свѣта, т. е., если разстояніе возрастаетъ въ 2, 3, 4....раза, то освѣщеніе уменьшается въ 4, 9, 16,...разъ.

Пусть искомая точка E отстоитъ на разстояніи x отъ точки A и, слѣдовательно, на разстояніи $d-x$ отъ точки B, предполагая, что точка эта находится между точками A и B.

Если бы точка E отстояла только на одинъ метръ отъ источника A, то сила ея освѣщенія была бы такая, какъ будто на нее падаетъ свѣтъ a свѣчей; но такъ какъ она находится на разстояніи x отъ A, то, слѣдовательно, степень освѣщенія будетъ $\frac{a}{x^2}$. Подобнымъ же образомъ степень освѣщенія точки E источникомъ B будетъ

$$\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Получаемъ для рѣшенія задачи уравненіе

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}. \tag{1}$$

Это уравненіе можно переписать такъ

$$a(d-x)^2=bx^2,$$

откуда окончательно

$$(a-b)x^2-2adx+ad^2=0. \tag{2}$$

Для рѣшенія квадратнаго уравненія (2) проще исходить изъ уравненія (1). Извлекая корень квадратный изъ обѣихъ частей уравненія (1), получимъ

$$\pm\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Получаются два уравненія первой степени

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{b}}{d-x};\quad \frac{\sqrt{a}}{x}=-\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Первое даетъ

$$d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=x\sqrt{b},$$

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

второе даетъ

$$d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=-x\sqrt{b},$$

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Итакъ, корни квадратнаго уравненія (2) суть

$$x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\quad x_2=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Нетрудно видѣть, что то же получается по общимъ формуламъ рѣшенія квадратнаго уравненія (2)

$$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-(a-b)ad^2}}{a-b}=\frac{ad\pm d\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{d\sqrt{a}\,(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

§ 15. Если $a>b$, то оба корня положительные.

Такъ какъ

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a}<\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

то

$$x_1>d,\quad x_2<d.$$

Корень x_2 соотвѣтствуетъ нашему предположенію, что точка E лежитъ между точками A и B.

Посмотримъ, соотвѣтствуетъ ли нашей физической задачѣ второй корень x_1. Въ этомъ случаѣ точка E лежитъ налѣво отъ точки B на разстояніи $x-d$, гдѣ x обозначаетъ число x_1. Уравненіе, выражающее равенство освѣщеній, получаетъ видъ

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2},$$

но такъ какъ $(x-d)^2=(d-x)^2$, то получается наше уравненіе (1),

и, слѣдовательно, точка, опредѣляемая корнемъ $x_1 > d$ и лежащая направо отъ B, даетъ второе рѣшеніе задачи.

Если $a < b$, то x_1 число отрицательное, а x_2 положительное число, причемъ $x_2 < d$. Въ этомъ случаѣ рѣшеніе x_2 даетъ точку, соотвѣтствующую предположенію. Нетрудно убѣдиться, что отрицательный корень соотвѣтствуетъ точкѣ, лежащей налѣво отъ A и дающей также рѣшеніе задачи.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка E лежитъ на разстояніи x налѣво отъ A, то ея разстояніе отъ B будетъ $d+x$, и уравненіе, выражающее равенство освѣщеній, будетъ

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2}.$$

Нетрудно видѣть, что это уравненіе получается изъ уравненія (1) § 14 отъ замѣны x на $-x$. Слѣдовательно, отрицательный корень x_1 означаетъ, что абсолютную величину, выражаемую формулой

$$x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},$$

надо откладывать налѣво отъ точки A.

Если $a = b$, то $x_1 = \infty$, а $x_2 = \frac{d}{2}$.

Первая точка, соотвѣтствующая корню x_1, удаляется на безконечность по мѣрѣ приближенія числа a къ числу b. Второе рѣшеніе показываетъ, что при равенствѣ силъ источниковъ свѣта искомая точка, одинаково освѣщенная обоими источниками, должна лежать посрединѣ между ними.

Если $d = 0$, но $a \neq b$, то $x_1 = x_2 = 0$.

Если $d = 0$, $a = b$, то $x_1 = \frac{0}{0}$, $x_2 = 0$. Задача совершенно неопредѣленная, ибо, если оба источника одинаковой силы и находятся въ одной точкѣ, то они освѣщаютъ одинаково всякую точку.

Такъ какъ предположеніе $x = \infty$ обращаетъ уравненіе (1) въ тождество $0 = 0$, то можно считать, что безконечно далекая точка представляетъ третье рѣшеніе задачи. Эта точка имѣетъ освѣщеніе равное нулю отъ обоихъ источниковъ.

Извлеченіе корней квадратныхъ изъ комплексныхъ чиселъ.

§ 16. Посмотримъ, не будетъ ли существовать среди комплексныхъ чиселъ такое число $x+iy$, которое удовлетворяетъ уравненію

(1) $$z^2=a+ib,$$

гдѣ a и b заданныя вещественныя числа.

Для этой цѣли надо найти неизвѣстныя числа x и y такъ, чтобы было

$$(x+iy)^2=a+ib,$$

или иначе

$$x^2-y^2+2iyx=a+ib,$$

откуда

(2) $$x^2-y^2=a,\ 2xy=b.$$

Итакъ, надо найти два вещественныхъ числа x и y, удовлетворяющихъ двумъ уравненіямъ (2). Возвышая оба уравненія въ квадратъ и складывая, получимъ

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2,$$
$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Здѣсь радикалъ $\sqrt{a^2+b^2}$ есть ариѳметическій радикалъ, взятый изъ положительнаго числа a^2+b^2; знакъ минусъ при радикалѣ не можетъ имѣть мѣста, ибо x^2+y^2 число положительное, такъ какъ мы ищемъ вещественныя значенія x и y.

Возьмемъ послѣднее уравненіе совмѣстно съ (2), то, складывая и вычитая, мы получимъ

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Итакъ, изъ уравненія (1) получаемъ

$$x+iy=\sqrt{a+ib}.$$

Знаки у x и y должны быть одинаковы, если $b>0$, и разные, если $b<0$, что видно изъ уравненія $2xy=b$; итакъ мы получаемъ

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\} \text{ при } b>0,$$

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\} \text{ при } b<0.$$

Напримѣръ,

1.°, $\sqrt{3+4i}=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{9+16}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{9+16}-3}{2}}\right\}$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}}+i\sqrt{\frac{2}{2}}\right)=\pm(2+i).$$

2.°, $\sqrt{i}=\sqrt{0+i\,.\,1}=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+\right.$

$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right\}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій съ комплексными коэффиціентами.

§ 17. Такъ какъ способъ рѣшенія уравненія $x^2+px+q=0$, данный въ § 4, остается въ силѣ и при комплексныхъ числахъ p и q, то мы получаемъ ту же формулу

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \tag{1}$$

для случая комплексныхъ коэффиціентовъ.

Мы сможемъ провести по этой формулѣ рѣшеніе до конца, ибо изъ предыдущаго §-а мы знаемъ, какъ извлекать корни квадратные изъ комплексныхъ чиселъ.

Покажемъ рѣшеніе задачи на примѣрѣ.

Требуется рѣшить уравненіе

$$x^2-(5+2i)x+5(1+i)=0;$$

по формулѣ (1) получаемъ

$$x=\frac{5+2i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5+2i}{2}\right)^2-5(1+i)}=\frac{5+2i}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{5+2i\pm1}{2},$$

откуда

$$x_1=3+i,\quad x_2=2+i.$$

ГЛАВА XI.

Уравненія, приводящіяся къ уравненіямъ первой и второй степени.

§ 1. Въ элементарной алгебрѣ разсматриваются только уравненія, рѣшеніе которыхъ сводится къ рѣшенію уравненій первой и второй степени. Рѣшеніе уравненій высшихъ степеней представляетъ предметъ особенной науки, которая называется высшей алгеброй.

Биквадратныя уравненія.

§ 2. Биквадратнымъ называется уравненіе вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Легко свести рѣшеніе биквадратнаго уравненія на рѣшеніе квадратнаго, стоитъ только положить $x^2 = y$; получаемъ

$$ay^2 + by + c = 0;$$

отсюда

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Принимая во вниманіе уравненіе $x^2 = y$, получимъ четыре корня биквадратнаго уравненія

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

§ 3. Корни биквадратнаго уравненія имѣютъ видъ сложнаго радикала

$$\sqrt{A + \sqrt{B}}. \tag{1}$$

Ограничиваясь тѣмъ случаемъ, когда числа A и B раціональныя и B положительное число и въ то же время не полный квадратъ раціональнаго числа, поставимъ себѣ задачей найти тѣ случаи, когда можно выразить радикалъ (1) въ видѣ суммы двухъ простыхъ квадратныхъ радикаловъ

(2) $$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y};$$

числа x и y мы, конечно, предполагаемъ положительными и раціональными.

Возвышаемъ обѣ части равенства (2) въ квадратъ, получимъ

(3) $$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

Радикалъ $\sqrt{xy}$ не долженъ быть числомъ раціональнымъ, ибо иначе получалось бы раціональное значеніе для $\sqrt{B}$.

Перепишемъ уравненіе (3) такъ

$$A-x-y+\sqrt{B}=2\sqrt{xy}$$

и возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ; мы получимъ

(4) $$(A-x-y)^2+B+2(A-x-y)\sqrt{B}=4xy;$$

очевидно, что должно равняться нулю выраженіе $A-x-y$, ибо иначе изъ уравненія (4) выходило бы раціональное значеніе для $\sqrt{B}$. Итакъ, $A-x-y=0$, а тогда по уравненію (4) выходитъ $B=4xy$:

$$x+y=A,\quad xy=\frac{B}{4};$$

x и y оказываются корнями квадратнаго уравненія

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0;$$

находимъ

$$x=z_1=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2},$$

$$y=z_2=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Итакъ, задача наша будетъ возможна, если

$A>0$ и $A^2-B=$ полному квадрату раціональнаго числа.

Получаемъ

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}};$$

подобнымъ же образомъ получимъ

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Напримѣръ,

$$\sqrt{10+\sqrt{51}}=\sqrt{\frac{10+7}{2}}+\sqrt{\frac{10-7}{2}}=\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{2}.$$

§ 4. Подобнаго рода примѣръ представляетъ формула удвоенія числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника:

$$a_{2n}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-a_n^2r^2}}.$$

Здѣсь

$$A=2r^2,\ B=4r^4-a_n^2r^2,\ \sqrt{A^2-B}=a_nr,$$

слѣдовательно,

$$a_{2n}=\sqrt{\frac{2r^2+a_nr}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-a_nr}{2}}.$$

§ 5. Сдѣлаемъ кстати по поводу сказаннаго въ §§ 3 и 4, слѣдующее общее замѣчаніе.

Равенство двухъ квадратныхъ ирраціональностей

$$a+\sqrt{b}=a_1+\sqrt{b_1},$$

въ которыхъ числа a, b, a_1, b_1 раціональныя, причемъ b и b_1 не полные квадраты, должно влечь за собою равенства

$$a=a_1 \text{ и } b=b_1;$$

доказательство то же самое, что и въ § 3.

Пониженіе степени уравненія при помощи уже извѣстныхъ корней.

§ 6. Пусть задано уравненіе

$$f(x)=0, \tag{1}$$

гдѣ $f(x)$ есть полиномъ степени n относительно x съ извѣстными коэффиціентами. Если мы знаемъ одинъ изъ корней a уравненія (1), то будетъ $f(a)=0$, слѣдовательно на основаніи соображеній § 37 главы IV (стр. 45) замѣтимъ, что полиномъ $f(x)$ дѣлится на $x-a$

$$f(x)=(x-a).f_1(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ новый полиномъ степени $n-1$. Уравненіе (1) принимаетъ видъ

(2) $$(x-a)f_1(x)=0$$

и распадается на два

$$x-a=0,\quad f_1(x)=0;$$

первое изъ этихъ уравненій даетъ извѣстный уже корень a, остальные корни заданнаго уравненія (1) надо искать среди корней уравненія $f_1(x)=0$, степень котораго на единицу ниже.

Если извѣстны два корня a и b заданнаго уравненія, то степень уравненія можно понизить на 2 единицы. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи корня a представляемъ уравненіе (1) въ видѣ (2). Такъ какъ второй корень b отличенъ отъ a, то послѣ подстановки въ уравненіе (2) получимъ

$$(b-a)f_1(b)=0,$$

или $f_1(b)=0$. Значитъ, полиномъ $f_1(x)$ дѣлится на $x-b$, и мы имѣемъ

$$f_1(x)=(x-b)f_2(x),$$

гдѣ $f_2(x)$ полиномъ степени $n-2$. Уравненіе (1) сводится такимъ образомъ къ уравненію

$$f_2(x)=0,$$

т. е. происходитъ пониженіе степени на двѣ единицы.

§ 7. Рѣшеніе уравненія третьей степени, у котораго извѣстенъ одинъ корень, сводится къ рѣшенію квадратнаго.

Напримѣръ, пусть требуется рѣшить уравненіе

(1) $$\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=x.$$

Послѣ умноженія уравненія на $(x-b)(x-a)$ и перенесенія всѣхъ членовъ уравненія въ одну сторону, получаемъ уравненіе третьей степени (кубическое)

$$x^3-(a+b)x^2-(a^2-ab+b^2)x+a^3+b^3=0.$$

По уравненію, написанному въ видѣ (1), сразу бросается въ глаза, что оно имѣетъ корень $x=a+b$; отсюда въ первой части уравненія (2) выдѣляется множитель $x-a-b$ и оно принимаетъ видъ

$$(x-a-b)(x^2-a^2+ab-b^2)=0,$$

т. е. оно сводится къ квадратному

$$x^2-a^2+ab-b^2=0,$$

и мы получаемъ всѣ три корня заданнаго кубическаго уравненія

$$x_1 = a + b,$$
$$x_2 = + \sqrt{a^2 - ab + b^2},$$
$$x_3 = - \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Рѣшеніе уравненій при помощи разложенія первой части на множители.

§ 8. Если первая часть уравненія

$$f(x) = 0$$

раскладывается на множители

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x),$$

то уравненіе приводится къ ряду уравненій низшихъ степеней

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots\ f_k(x) = 0.$$

§ 9. Пусть требуется рѣшить уравненіе 4-ой степени:

(1) $$x^4 + 1 = 0.$$

Разложимъ на множители первую часть уравненія

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,.\,x)^2 =$$
$$= (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1).$$

Значитъ уравненіе раскладывается на два квадратныхъ

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0,$$
$$x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0;$$

каждое изъ нихъ имѣетъ по два корня, и мы получаемъ всѣ четыре корня уравненія (1).

Возвратныя уравненія.

§ 10. Возвратными называются такія уравненія

(1) $$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

у которыхъ одинаковы коэффиціенты, равноотстоящіе отъ начала и конца, т. е.

$$A_0 = A_n,\ A_1 = A_{n-1},\ A_2 = A_{n-2},\ \ldots\ .$$

вообще

$$A_k = A_{n-k}.$$

Возвратныя уравненія допускаютъ пониженіе степени.

§ 11. Покажемъ, что **всякое возвратное уравненіе нечетной степени имѣетъ корень —1.**

Предполагая въ уравненіи (1) § 10 n числомъ нечетнымъ, можемъ положить $n = 2m+1$.

Уравненіе можетъ быть написано такъ

$$A_0(x^{2m+1}+1)+A_1(x^{2m}+x)+A_2(x^{2m-1}+x^2)+\ldots\ldots=0,$$

или иначе

$$(1)\quad A_0(x^{2m+1}+1)+A_1x(x^{2m-1}+1)+A_2x^2(x^{2m-3}+1)+\ldots.=0.$$

Такъ какъ всякая нечетная степень числа —1 равняется —1, то, слѣдовательно, уравненіе (1) имѣетъ корень —1. Итакъ, лѣвая часть возвратнаго уравненія нечетной степени дѣлится всегда на $x+1$. Послѣ раздѣленія получается также **возвратное уравненіе четной степени** $2m$.

§ 12. Разсмотримъ возвратное уравненіе 3-ьей степени

$$(1)\qquad ax^3+bx^2+bx+a=0;$$

преобразовывая, получимъ

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0,$$

или иначе

$$(x+1)\{a(x^2-x+1)+bx\}=0.$$

Три корня кубическаго уравненія (1) суть : —1 и два корня уравненія возвратнаго квадратнаго

$$ax^2+(b-a)x+a=0.$$

§ 13. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію возвратныхъ уравненій четной степени:

$$A_0x^{2m}+A_1x^{2m-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0=0.$$

Раздѣляемъ уравненіе на x^m

$$(1)\qquad Ao\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+A_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+A_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+$$
$$+\ldots\ldots=0.$$

Введемъ новую неизвѣстную

$$x+\frac{1}{x}=z. \tag{2}$$

Покажемъ, что выраженіе $x^m+\frac{1}{x^m}$ представляется въ видѣ **полинома степени** m **относительно** z:

$$x^m+\frac{1}{x^m}=\varphi_m(z).$$

Въ самомъ дѣлѣ, при $m=0$ $\varphi_0(z)=2$; при $m=1$ $\varphi_1(z)=z$. Далѣе

$$\varphi_2(z)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2x\,.\,\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=$$
$$=z^2-2.$$

Имѣемъ тождество

$$z\,.\,\varphi_{n-1}(z)=\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+$$
$$+\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right),$$

то есть

$$\varphi_{n-1}(z)\,.\,z=\varphi_n(z)+\varphi_{n-2}(z),$$

или окончательно

$$\varphi_n(z)=z\,.\,\varphi_{n-1}(z)-\varphi_{n-2}(z). \tag{3}$$

Примѣняя формулу (3) къ случаю $n=3$, получимъ

$$\varphi_3(z)=z\varphi_2(z)-\varphi_1(z)=z(z^2-2)-z=z^3-3z,$$

далѣе къ случаю $n=4$, получимъ

$$\varphi_4(z)=z\varphi_3(z)-\varphi_2(z)=z(z^3-3z)-(z^2-2)=z^4-4z^2+2,$$

и т. д. можемъ вычислить всякій полиномъ $\varphi_n(z)$ при всякомъ значкѣ n.

Заданное уравненіе степени $2m$ сводится на уравненіе степени m:

$$A_0\varphi_m(z)+A_1\varphi_{m-1}(z)+A_2\varphi_{m-3}(z)+\ldots\ldots=0. \tag{4}$$

Итакъ, возвратное уравненіе 4-ой степени сводится къ квадратному, уравненіе 6-ой степени къ кубическому и т. д.

Если найдемъ корень z_0 уравненія (4), то корень x заданнаго уравненія найдемъ изъ уравненія

$$x + \frac{1}{x} = z_0,$$

которое будетъ, очевидно, квадратнымъ

$$x^2 - z_0 x + 1 = 0$$

и будетъ давать для каждаго корня z_0 уравненія (4) два корня заданнаго уравненія (1).

§ 14. Поясним̀ъ теорію предыдущаго §-а на примѣрѣ возвратнаго уравненія 4-ой степени:

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$$

Раздѣляемъ уравненіе на x^2

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Подставляя новую перемѣнную z по формулѣ (2) § 13, получимъ

$$6(z^2 - 2) - 35z + 62 = 0,$$

или окончательно

$$6z^2 - 35z + 50 = 0.$$

Рѣшая это уравненіе, получимъ

$$z_0 = \frac{10}{3}, \quad z_1 = \frac{5}{2};$$

придется рѣшать два квадратныхъ уравненія

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

откуда получаемъ всѣ четыре корня

$$3, \frac{1}{3}; \quad 2, \frac{1}{2},$$

заданнаго уравненія четвертой степени.

§ 15. Характерное свойство возвратнаго уравненія состоитъ въ томъ, что, если найдемъ одинъ его корень a, то тѣмъ самымъ извѣстенъ и другой его корень $\frac{1}{a}$.

Двучленныя уравненія.

§ 16. Такъ называются уравненія вида

(1) $$ax^n + b = 0.$$

Будемъ предполагать числа a и b вещественными. Раздѣливъ обѣ части уравненія на a, получимъ уравненіе вида

(2) $$x^n = A,$$

гдѣ A вещественное число.

Ограничимся случаемъ, когда $A > 0$. Мы знаемъ на основаніи соображеній главы VIII, что уравненіе (2) всегда имѣетъ одинъ положительный корень, который мы обозначимъ

$$\sqrt[n]{A}$$

и называли ариѳметическимъ значеніемъ радикала степени n изъ положительнаго числа A.

Посмотримъ, не можетъ ли уравненіе (2) имѣть другіе корни. Введемъ для этой цѣли новую неизвѣстную z и положимъ

(3) $$x = z\sqrt[n]{A};$$

подставляя въ уравненіе (2), получимъ

$$z^n A = A,$$

или

(4) $$z^n = 1.$$

Задача свелась къ нахожденію всѣхъ корней уравненія (4).

§ 17. **Случай** $n = 2$:

$$z^2 = 1,\ z_1 = +1,\ z_2 = -1;$$

получаемъ два корня квадратнаго уравненія $x^2 = A$:

$$+\sqrt{A},\ -\sqrt{A}.$$

Случай $n = 3$: Уравненіе $z^3 = 1$ можно переписать такъ $z^3 - 1 = 0$, или

$$(z-1)(z^2+z+1) = 0.$$

Получается три значенія для z: значеніе 1, и два корня уравненія

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

то есть

$$z_1 = 1,\ z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Получаемъ три корня кубическаго двучленнаго уравненія $x^3 = A$:

$$+\sqrt[3]{A},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{A}.$$

Случай $n=4$. Уравненіе $z^4=1$ можно переписать такъ $z^4-1=0$, или

$$(z^2-1)(z^2+1)=0,$$
$$(z-1)(z+1)(z+i)(z-i)=0.$$

Получаемъ четыре корня уравненія $x^4=A$,

$$+\sqrt[4]{A},\ -\sqrt[4]{A},\ +i\sqrt[4]{A},\ -i\sqrt[4]{A}.$$

Случай $n=5$. Уравненіе $z^5=1$ можно переписать такъ

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0.$$

Возвратное уравненіе

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

рѣшается по правиламъ уже изложеннымъ; получается четыре мнимыхъ корня α_1, α_2, α_3, α_4.

Получаемъ пять корней уравненія $x^5=A$:

$$+\sqrt[5]{A},\ \alpha_1\sqrt[5]{A},\ \alpha_2\sqrt[5]{A},\ \alpha_3\sqrt[5]{A},\ \alpha_4\sqrt[5]{A}.$$

Случай $n=6$. Уравненіе $z^6=1$ можно переписать такъ

$$(z^3-1)(z^3+1)=0,$$
$$(z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1)=0.$$

Получаемъ шесть корней уравненія $x^6=A$:

$$+\sqrt[6]{A},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[6]{A},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[6]{A},\ -\sqrt[6]{A},$$
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[6]{A},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[6]{A}.^{1})$$

Замкнутость поля комплексныхъ чиселъ.

§ 18. Разобранныя нами уравненія заставляютъ насъ сдѣлать догадку, что число корней уравненія должно равняться его степени.

Дѣйствительно, эта теорема справедлива для алгебраическихъ уравненій любой степени

(1) $$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0.$$

---

[1]) Уравненіе вида $ax^m+bx^n=0$, гдѣ $m>n$, не представляетъ большей общности, ибо $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ и уравненіе раскладывается на два $x^n=0$ и $ax^{m-n}+b=0$.

Знаменитый математикъ Гауссъ доказалъ такую теорему.

Каковы бы ни были вещественные или комплексные коэффиціенты $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$, уравненіе всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный или мнимый корень.

Эта теорема выражаетъ свойство замкнутости поля J комплексныхъ чиселъ. Оказывается, что поле J представляетъ запасъ чиселъ, достаточный для рѣшенія всякаго алгебраическаго уравненія (1) съ коэффиціентами изъ этого поля.

Итакъ, пусть корень, существованіе котораго устанавливается теоремой Гаусса, будетъ a, тогда въ первой части уравненія (1) можно выдѣлить множитель $x - a$

$$(2) \qquad (x-a)(p_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots) = 0.$$

Приходимъ къ новому уравненію

$$(3) \qquad p_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Уравненіе (3) снова должно имѣть на основаніи теоремы Гаусса корень b. Выдѣляя множитель $x - b$, представимъ это уравненіе въ видѣ

$$(x-b)(p_0x^{n-2} + r_1x^{n-3} + r_2x^{n-4} + \ldots) = 0.$$

Уравненіе (1) будетъ

$$(x-a)(x-b)(p_0x^{n-2} + r_1x^{n-3} + r_2x^{n-4} + \ldots) = 0.$$

Продолжая разсужденіе далѣе, выдѣлимъ въ первой части уравненія (1) какъ разъ n множителей

$$x-a, x-b, x-c, \ldots x-f,$$

такъ, что уравненіе (1) приметъ видъ

$$(4) \qquad p_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-f) = 0.$$

Мы получаемъ корни $a, b, c, \ldots f$. Если эти корни различны между собой, то уравненіе имѣетъ число корней равное какъ разъ степени n уравненія. Если нѣкоторыя числа $a, b, c, \ldots f$ одинаковы, то получаются, такъ называемые, кратные корни. Напримѣръ, если $a = b$, то $x - b = x - a$ и разложеніе (4) принимаетъ видъ

$$p_0(x-a)^2(x-c)\ldots(x-f) = 0,$$

корень a называется двойнымъ или двукратнымъ. Если разложеніе будетъ имѣть видъ

$$p_0(x-a)^3(x-d)\ldots(x-f)=0,$$

то корень a будетъ трехкратнымъ и т. д.

Рѣшеніе уравненій въ радикалахъ.

§ 19. Всѣ разобранные нами случаи рѣшенія уравненій высшихъ степеней, начиная со второй, даютъ рѣшеніе, представляющее изъ себя формулу, въ которой заключаются знаки радикаловъ. Въ такихъ случаяхъ говорятъ, что уравненіе рѣшается въ радикалахъ.

Оказывается, что, если мы разсмотримъ алгебраическія уравненія

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n=0.$$

общаго вида или, какъ говорятъ, буквенныя, то есть такія, у которыхъ коэффиціенты суть буквы, которымъ не указано никакихъ опредѣленныхъ численныхъ значеній, то будутъ рѣшаться въ радикалахъ только уравненія первыхъ четырехъ степеней $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$. Случаи $n=1$ и $n=2$ нами уже разобраны.

Знаменитый математикъ Абель доказалъ, что **невозможно рѣшить въ радикалахъ буквенныя уравненія выше четвертой степени.**

Чтобы уравненіе выше четвертой степени рѣшалось въ радикалахъ, оно должно быть численное, то есть должна быть нарушена произвольность коэффиціентовъ. Такъ напримѣръ, двучленное уравненіе

$$p_0x^n+p_n=0,$$

полученное изъ общаго при

$$p_1=0, p_2=0, \ldots p_{n-1}=0,$$

рѣшается въ радикалахъ

$$x=\alpha\sqrt[n]{-\frac{p_n}{p_0}},$$

гдѣ α есть корень уравненія

$$\alpha^n-1=0,$$

которое тоже рѣшается въ радикалахъ при всякомъ значеніи n.

Примѣры рѣшенія системъ уравненій высшихъ степеней.

§ 20. Разсмотримъ систему двухъ уравненій: уравненія общаго вида второй степени между двумя неизвѣстными x и y и общаго уравненія первой степени

$$\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F&=0,\\ ax+by+c&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для рѣшенія этихъ двухъ уравненій относительно двухъ неизвѣстныхъ x и y исключимъ сначала y.

Изъ второго уравненія получилось

$$y=-\frac{ax+c}{b},$$

и подставляя въ первое, придемъ къ квадратному уравненію

$$Ax^2-(Bx+E)\frac{ax+c}{b}+C\left\{\frac{ax+c}{b}\right\}^2+Dx+F=0.$$

Находимъ оба корня x_1 и x_2 этого уравненія. Подставляя эти значенія вмѣсто x во второе изъ уравненій (1) получимъ соотвѣтственныя значенія для y

$$y_1=-\frac{ax_1+c}{b},\quad y_2=-\frac{ax_2+c}{b}.$$

Итакъ, получаемъ двѣ системы значеній

$$(x_1,y_1)\text{ и }(x_2,y_2),$$

т. е. другими словами, два рѣшенія системы (1).

§ 21. Рѣшимъ теперь систему двухъ уравненій, изъ которыхъ каждое второй степени

$$\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F&=0,\\ A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Умножая первое уравненіе на C_1, а второе на $-C$ и складывая, получимъ

$$Mx^2+Nxy+Px+Qy+R=0,$$

откуда

$$y=\frac{Mx^2+Px+R}{Nx+Q}; \tag{2}$$

подставляя это значеніе въ одно изъ уравненій (1) и освобождаясь отъ знаменателей, приходимъ къ уравненію четвертой степени

относительно x. Рѣшая это уравненіе четвертой степени, получимъ четыре значенія x_1, x_2, x_3, x_4, подставляя которыя одно за другимъ въ (2), получимъ соотвѣтственныя значенія y_1, y_2, y_3, y_4 для неизвѣстнаго y.

Въ § 16 рѣшенъ частный случай системы двухъ уравненій второй степени

$$x^2 - y^2 = a,\ 2xy = b.$$

§ 22. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= a, \\ y(x+y+z) &= b, \\ z(x+y+z) &= c. \end{aligned}$$

Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= a+b+c, \\ x+y+z &= \pm\sqrt{a+b+c}, \end{aligned}$$

откуда окончательно получаемъ

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}},\ y = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}},\ z = \pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Знаки въ этихъ формулахъ надо брать или одновременно верхніе, или одновременно нижніе.

§ 23. Рѣшить систему

$$yz = a,\ xz = b,\ xy = c.$$

Перемноживъ всѣ уравненія, получимъ $x^2y^2z^2 = abc$, откуда

$$xyz = \pm\sqrt{abc}.$$

Раздѣливъ послѣднее уравненіе на каждое изъ заданныхъ, получимъ

$$x = \pm\frac{\sqrt{abc}}{a},\ y = \pm\frac{\sqrt{abc}}{b},\ z = \pm\frac{\sqrt{abc}}{c}.$$

Знаки должны находиться въ соотвѣтствіи.

§ 24. Рѣшить систему

$$xy + xz + yz = a^2 - x^2 = b^2 - y^2 = c^2 - z^2.$$

Эту систему можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$(x+y)\ (x+z)=a^2,$$
$$(y+x)\ (y+z)=b^2,$$
$$(z+x)\ (z+y)=c^2;$$

получилась система подобная системѣ § 23, если за неизвѣстныя считать $x+y$, $x+z$, $y+z$. Получаемъ

$$(1)\qquad y+z=\pm\frac{bc}{a},\ x+z=\pm\frac{ac}{b},\ x+y=\pm\frac{ab}{c}.$$

Складывая уравненія (1), получимъ

$$x+y+z=\pm\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{2abc};$$

вычитая уравненія (1), получимъ

$$x=\pm\frac{a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{2abc},\ y=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2}{2abc},$$
$$z=\pm\frac{b^2c^2+a^2c^2-a^2b^2}{2abc}.$$

Введеніе новыхъ неизвѣстныхъ.

§ 25. Требуется рѣшить уравненіе

$$(1)\qquad (x^2-6x+10)^2-3(x^2-6x+10)+2=0.$$

Возьмемъ за новую неизвѣстную трехчленъ $x^2-6x+10$

$$(2)\qquad y=x^2-6x+10,$$

тогда уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$y^2-3y+2=0;$$

рѣшая, получимъ

$$y_1=1,\ y_2=2.$$

Подставляемъ эти значенія въ (2), получаемъ два уравненія

$$x^2-6x+9=0,\ x^2-6x+8=0,$$

рѣшая которыя, получимъ окончательно всѣ четыре корня:

$$x_1=3,\ x_2=3,\ x_3=2,\ x_4=4,$$

заданнаго уравненія (1).

§ 26. Требуется рѣшить уравненіе

$$(1)\qquad \frac{x^{(m-n)^2}-x^{-4mn}}{x^{(m-n)^2}+x^{-4mn}}=a.$$

Умножая числителя и знаменателя дроби на x^{4mn}, получимъ, вводя новую неизвѣстную

(2) $$x^{(m+n)^2} = y,$$

уравненіе

$$\frac{y-1}{y+1} = a,$$

которое послѣ освобожденія отъ дробныхъ выраженій будетъ первой степени относительно y

$$y - 1 = a(y+1),$$
$$y = \frac{a+1}{1-a};$$

подставляя въ (2), получимъ окончательно

$$x = \sqrt[(m+n)^2]{\frac{1+a}{1-a}}.$$

§ 27. Требуется рѣшить систему уравненій

(1) $$\begin{aligned} x^5 - y^5 &= a(x^4 - y^4), \\ x^3 - y^3 &= b(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Имѣемъ во-первыхъ сразу очевидное, такъ сказать, тривіальное рѣшеніе $x = 0$, $y = 0$.

Предполагая x отличнымъ отъ нуля, введемъ новую перемѣнную t, полагая

(2) $$y = xt.$$

Тогда система (1) по сокращеніи на x^4 и на x^2 приметъ видъ

$$\begin{aligned} x(1 - t^5) &= a(1 - t^4), \\ x(1 - t^3) &= b(1 - t^2); \end{aligned}$$

умножая первое уравненіе на $1 - t^3$, а второе на $1 - t^5$ и вычитая, получимъ

(3) $$0 = a(1-t^4)(1-t^3) - b(1-t^2)(1-t^5).$$

Это уравненіе принимаетъ видъ

$$(1-t^2)(1-t)[a(1+t^2)(1+t+t^2) - b(1+t+t^2+t^3+t^4)] = 0;$$

первые два множителя, приравненные нулю, даютъ или $t = 1$, или $t = -1$.

Случай $t=1$ также тривіаленъ, ибо тогда на основаніи (2)

$$y=x,$$

причемъ заданная система удовлетворяется при всякомъ x.

Случай $t=-1$ даетъ $x=y=0$.

Итакъ, остается разсмотрѣть уравненіе

$$a(1+t^2)\ (1+t+t^2)-b(1+t+t^2+t^3+t^4)=0;$$

это уравненіе возвратное 4-ой степени и рѣшается, какъ было показано въ § 14 (стр. 183).

Каждому корню этого уравненія будетъ соотвѣтствовать рѣшеніе заданной системы (1) въ такомъ видѣ

$$x=a\frac{1-t^4}{1-t^5}, \qquad y=at\frac{1-t^4}{1-t^5}.$$

Освобожденіе уравненія отъ радикальныхъ выраженій.

§ 28. Мы видѣли уже, что отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія $A=B$ въ нѣкоторую степень n получается уравненіе $A^n=B^n$, **которое кромѣ корней перваго можетъ имѣть посторонніе корни.**

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе

$$A^n-B^n=0$$

можетъ быть переписано такъ

$$(A-B)\ (A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\ .\ .\ .+B^{n-1})=0;$$

корни этого уравненія будутъ корнями двухъ такихъ

$$A-B=0,\ A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\ .\ .\ .+B^{n-1}=0.$$

Первое есть заданное уравненіе; второе же можетъ кромѣ корней перваго давать еще новые, которые будутъ посторонними для перваго уравненія.

§ 29. Итакъ, если намъ пришлось возвысить обѣ части заданнаго уравненія $A=B$ въ одну и ту-же степень, то новое уравненіе не равносильно съ первоначальнымъ. Для рѣшенія первоначальнаго уравненія надо найти всѣ корни новаго и каждый изъ нихъ пробовать подставлять въ первоначальное для того, чтобы откинуть тѣ корни, которые ему не удовлетворяютъ.

§ 30. Разсмотримъ уравненіе, въ которомъ неизвѣстное нахо-

дится подъ знакомъ радикала. Пусть въ уравненіе входитъ только одинъ квадратный радикалъ, напр.,

$$(1) \qquad \sqrt{x+a+\frac{c^2-1}{4}}+x+a=0,$$

гдѣ a и c произвольныя вещественныя числа, причемъ можно считать, что $c>0$.

Радикалъ есть знакъ, **слабая сторона котораго состоитъ въ томъ, что неизвѣстно, какое изъ нѣсколькихъ его значеній имѣется въ виду. Это такой знакъ, что, если онъ написанъ, то надо словами добавить, которое изъ значеній радикала разсматривается.**

Если въ уравненіи (1) указано, которое изъ значеній радикала разсматривается, то при другомъ значеніи этого радикала получается новое уравненіе

$$(2) \qquad -\sqrt{x+a+\frac{c^2-1}{4}}+x+a=0.$$

Для освобожденія отъ радикала уравненія (1) можно поступить такъ: уединить радикалъ въ первой части

$$\sqrt{x+a+\frac{c^2-1}{4}}=-(x+a)$$

и возвысить въ квадратъ обѣ его части

$$(3) \qquad x+a+\frac{c^2-1}{4}=(x+a)^2.$$

Получилось квадратное уравненіе для x, его два корня будутъ

$$x+a=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{c^2-1}{4}},$$

или иначе

$$x_1=-a+\frac{1+c}{2}, \quad x_2=-a+\frac{1-c}{2}.$$

При обоихъ значеніяхъ x_1 и x_2 подкоренная величина есть число положительное, ибо

$$x_1+a+\frac{c^2-1}{4}=\left\{\frac{c+1}{2}\right\}^2,$$

$$x_2+a+\frac{c^2-1}{4}=\left\{\frac{c-1}{2}\right\}^2.$$

Будемъ разумѣть подъ знакомъ $\sqrt{\quad}$ $x+a+\frac{c^2-1}{4}$ ариѳметическій корень, тогда ни одно изъ значеній x_1 и x_2 не будетъ корнемъ уравненія (1), если $c<1$. Ибо подставляя эти значенія въ уравненіе (1), получимъ невозможное равенство

$$\frac{1+c}{2}+\frac{1+c}{2}=0, \quad \frac{1-c}{2}+\frac{1-c}{2}=0.$$

При $c<1$ оба корня x_1 и x_2 удовлетворяютъ, очевидно, другому уравненію (2).

Если $c>1$, то, подставляя оба корня x_1 и x_2 въ уравненіе (1), получимъ

$$\frac{1+c}{2}+\frac{1+c}{2}=0, \quad \left|\frac{1-c}{2}\right|+\frac{1-c}{2}=0.$$

Первое уравненіе невозможно, а второе даетъ дѣйствительно тождество

$$\frac{c-1}{2}+\frac{1-c}{2}=0.$$

Итакъ, при $c>1$ уравненіе имѣетъ корень x_2, а корень x_1 принадлежитъ уравненію (2).

Если мы перемножимъ уравненія (1) и (2), то получимъ

$$\left(\sqrt{\quad}\ x+a+\frac{c^2-1}{4}+x+a\right)\left(-\sqrt{\quad}\ x+a+\frac{c^2-1}{4}+x+a\right)=0,$$

или

$$(x+a)^2-\left(x+a+\frac{c^2-1}{4}\right)=0. \tag{4}$$

Итакъ, мы видимъ, что квадратное уравненіе (3), или, что одно и то же, уравненіе (4) есть совокупность обоихъ уравненій (1) и (2). Корни уравненія (3) распредѣляются по уравненіямъ (2) и (1) въ зависимости отъ того, что разумѣется подъ радикаломъ.

§ 31. Наиболѣе часто радикалъ $\sqrt{A}$, если онъ встрѣчается въ уравненіяхъ, понимается въ ариѳметическомъ смыслѣ (т.-е. считается положительнымъ), если онъ вещественный. Если же радикалъ мнимый, то онъ берется съ тѣмъ знакомъ, при которомъ коэффиціентъ при i положителенъ.

§ 32. Въ русскихъ руководствахъ для средней школы почти всегда $\sqrt{A}$ понимается вещественнымъ и положительнымъ, хотя

такое предположеніе никакой обязательности заключать не можетъ.

Въ различныхъ задачахъ приходится отступать отъ указаннаго обычая русскихъ руководствъ. Напримѣръ, требуется рѣшить систему уравненій

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x\sqrt{xy} - y^2 &= a, \\ y\sqrt{xy} - x^2 &= b, \end{aligned}$$

гдѣ a и b заданныя положительныя числа.

Какъ мы немедленно увидимъ, получаются для x и y только мнимыя значенія, а потому предположеніе о томъ, что $\sqrt{xy}$ могъ бы разсматриваться въ ариѳметическомъ смыслѣ, отпадаетъ.

Прежде чѣмъ рѣшать систему, мы должны точно сказать, что мы будемъ подразумѣвать подъ радикаломъ $\sqrt{xy}$. Примемъ пониманіе радикала въ духѣ § 31 и, кромѣ того, пусть радикалъ въ обоихъ уравненіяхъ обозначаетъ одно и то же.

Положимъ

$$\text{(2)} \qquad y = t^2 x,$$

тогда наша система обращается въ такую

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} x^2(t - t^4) &= a, \\ x^2(t^3 - 1) &= b. \end{aligned}$$

Раздѣляя первое изъ этихъ уравненій на второе, получимъ

$$t = -\frac{a}{b};$$

тогда по второму изъ уравненій (3) получимъ

$$x^2 = -\frac{b^4}{a^3 + b^3}.$$

Получается для x число мнимое

$$\text{(4)} \qquad x = \frac{ib^2}{\pm\sqrt{a^3 + b^3}}.$$

На основаніи равенства (2) получимъ

$$\text{(5)} \qquad y = \frac{ia^2}{\pm\sqrt{a^3 + b^3}}.$$

Изъ равенствъ (4) и (5) получимъ:

$$xy = \frac{-a^2 b^2}{a^3 + b^3}.$$

На основаніи условія для пониманія знака радикала получимъ

$$\sqrt{xy} = \frac{iab}{+\sqrt{a^3+b^3}}.$$

Мы видимъ, что рѣшеніемъ системы является

$$x = \frac{ib^2}{-\sqrt{a^3+b^3}}, \quad y = \frac{ia^2}{-\sqrt{a^3+b^3}}.$$

§ 33. Если въ уравненіе входятъ нѣсколько радикаловъ, то можно ихъ удалить послѣдовательно.

Напримѣръ, требуется рѣшить уравненіе

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = 0. \tag{1}$$

Для удобства выкладки обозначимъ однѣми буквами три подкоренныя величины

$$A = x+a,\ B = x+b,\ C = x+c. \tag{2}$$

Тогда придется освобождать отъ радикаловъ уравненіе

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0.$$

Уединимъ радикалъ $\sqrt{A}$

$$\sqrt{A} = -\sqrt{B} - \sqrt{C}.$$

Возвышаемъ обѣ части въ квадратъ

$$A = B + C + 2\sqrt{BC}.$$

Остается только одинъ радикалъ $\sqrt{BC}$. Уединяемъ его

$$2\sqrt{BC} = A - B - C$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадратъ

$$4BC = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC;$$

окончательное уравненіе принимаетъ видъ

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = 0;$$

оно оказывается второй степени относительно x.

§ 34. Въ дальнѣйшемъ изложеніи будетъ показанъ общій способъ удаленія изъ уравненія радикаловъ какой угодно степени.

Здѣсь мы ограничимся разсмотрѣніемъ лишь нѣкоторыхъ отдѣльныхъ задачъ на уравненія съ радикалами высшихъ степеней.

Рѣшимъ уравненіе

$$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}=\sqrt[3]{c}. \tag{1}$$

Возвышая обѣ части уравненія въ кубъ, получимъ

$$a-b+3\sqrt[3]{a+x}\cdot\sqrt[3]{b+x}\left(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}\right)=c;$$

принимая во вниманіе (1), получимъ

$$3\sqrt[3]{(a+x)(b+x)}\cdot\sqrt[3]{c}=c-a+b,$$

откуда возвышеніемъ въ кубъ освобождаемся отъ радикаловъ

$$(a+x)(b+x)=\frac{(c-a+b)^3}{27c}. \tag{2}$$

Приходится рѣшить это квадратное уравненіе и затѣмъ изслѣдовать, при какихъ значеніяхъ радикала въ уравненіи (1) это уравненіе удовлетворяется корнями уравненія (2).

§ 35. Рѣшить уравненіе

$$a^2b^2\sqrt[n]{x}-4ab\sqrt{ab}\sqrt[2nm]{x^{m+n}}=(a-b)^2\sqrt[m]{x}.$$

Мы предполагаемъ a и b числами положительными, a m и n числами натуральными, причемъ $m>n$.

Переходя отъ радикаловъ къ дробнымъ показателемъ, получимъ

$$a^2b^2x^{\frac{1}{n}}-4ab\sqrt{ab}\,x^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}=(a-b)^2x^{\frac{1}{m}}.$$

Раздѣлимъ уравненіе на $x^{\frac{1}{m}}$

$$a^2b^2x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}-4ab\sqrt{ab}\,x^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}-(a-b)^2=0.$$

Вводя новую перемѣнную

$$x^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}=z, \tag{1}$$

приходимъ къ квадратному уравненію

$$a^2b^2z^2-4ab\sqrt{ab}\,z-(a-b)^2=0.$$

Рѣшая это квадратное уравненіе, получимъ:

$$z^2 - \frac{4}{\sqrt{ab}}\,z - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0,$$

или иначе,

$$\left(z - \frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2,$$

и мы получаемъ два значенія для z

$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2, \; z_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

По уравненію (1) получаемъ по заданному z соотвѣтствующую величину x.

$$x = z^{\frac{2mn}{m-n}} = \sqrt[m-n]{z^{2mn}},$$

$$x_1 = \sqrt[m-n]{z_1^{2mn}}, \; x_2 = \sqrt[m-n]{z_2^{2mn}}.$$

§ 36. Рѣшить уравненіе

$$(1) \qquad \frac{\sqrt[5]{211+x}}{211} + \frac{\sqrt[5]{211+x}}{x} = \frac{729\sqrt[5]{x}}{13504}.$$

Разсмотримъ уравненіе общаго вида

$$(2) \qquad \frac{\sqrt[n]{a+x}}{a} + \frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

Преобразовывая, получимъ

$$(a+x)\sqrt[n]{a+x} = \frac{a}{b}\,x\sqrt[n]{x},$$

или иначе

$$(a+x)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{a}{b}\,x^{\frac{n+1}{n}};$$

возвышая обѣ части въ степень $\frac{n}{n+1}$, получимъ уравненіе первой степени

$$a + x = x\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

откуда

$$x = \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}.$$

Въ данномъ численномъ примѣрѣ $n=5$, $a=211$, $b = \frac{13504}{729} = \frac{2^6}{3^6}.211$, $\frac{a}{b} = \frac{3^6}{2^6}$, значитъ,

$$x = \frac{211}{\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1} = \frac{211.2^5}{3^5 - 2^5} = \frac{211.2^5}{211} = 2^5.$$

О неравенствахъ съ радикальными выраженіями.

§ 37. Вездѣ при неравенствахъ, относящихся къ радикальнымъ выраженіямъ, мы будемъ имѣть въ виду ариѳметическіе радикалы.

Какъ первую задачу, разсмотримъ **выводъ неравенства**

$$(1+\alpha)^{\mu} < 1 + \mu\alpha, \tag{1}$$

если раціональный показатель $\mu = \frac{m}{n}$ **меньше единицы, т. е.** $m < n$.

Разсмотримъ сначала случай $\alpha > 0$.

Лемма. **При** $\beta > 1$ **и** $n > m$ **имѣетъ мѣсто неравенство**

$$m(\beta^{n-1} + \beta^{n-2} + \ldots + \beta + 1) - n(\beta^{m-1} + \beta^{m-2} + \ldots + \beta + 1) > 0$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\begin{aligned} m\{\beta^{n-1} + \beta^{n-2} + \ldots + \beta + 1\} - n\{\beta^{m-1} + \beta^{m-2} + \ldots + \beta + 1\} &= \\ = m\{\beta^{n-1} + \ldots \beta^m\} - (n-m)\{\beta^{m-1} + \beta^{m-2} + \ldots + \beta + 1\} &> \\ > m\{\beta^m + \beta^m + \ldots + \beta^m\} - (n-m)\{\beta^{m-1} + \beta^{m-1} + \ldots + \beta^{m-1}\} &> \\ > m(n-m)(\beta^m - \beta^{m-1}) > 0. & \end{aligned}$$

Обращаемся теперь къ доказательству неравенства (1).

Имѣемъ два равенства

$$\left(1+\alpha\right)^{\frac{m}{n}} - 1 = \left\{\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\left\{\left(1+\alpha\right)^{\frac{m-1}{n}} + \left(1+\alpha\right)^{\frac{m-2}{n}} + \ldots + 1\right\},$$

$$\left(1+\alpha\right) - 1 = \left\{\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\}\left\{\left(1+\alpha\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(1+\alpha\right)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + 1\right\}.$$

откуда

$$\left(1+\alpha\right)^{\frac{m}{n}}-1=\alpha\,\frac{\left(1+\alpha\right)^{\frac{m-1}{n}}+\ldots\ldots+1}{\left(1+\alpha\right)^{\frac{n-1}{n}}+\ldots\ldots+1}.$$

Но на основаніи только что доказанной леммы замѣчаемъ, что правая часть меньше $\frac{m}{n}\alpha$, и неравенство (1) доказано.

Неравенство справедливо и въ случаѣ $-1<\alpha<0$. Полагая $\alpha=-\beta$, гдѣ β положительная правильная дробь, получимъ на основаніи доказаннаго неравенства (1)

$$\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\mu}<1+\mu\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Умножая обѣ части неравенства на $1-\beta$, получимъ

$$(1-\beta)^{1-\mu}<1-(1-\mu)\beta,$$

и то, что требовалось доказать, справедливо, ибо $1-\mu$ число положительное меньшее единицы.

§ 38. **Если $\mu>1$, то имѣетъ мѣсто неравенство**

(1) $$(1+\alpha)^{\mu}>1+\mu\alpha.$$

Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя формулу (1) предыдущаго §-*а* къ случаю $\nu=\frac{1}{\mu}<1$, получимъ

(2) $$(1+\beta)^{\nu}<1+\nu\beta.$$

На основаніи теоремы § 48 главы VIII (стр. 151) получимъ, возвышая въ степень μ обѣ части неравенства (1) и принимая во вниманіе что $\nu\mu=1$:

$$1+\beta<(1+\nu\beta)^{\mu};$$

но обозначая $\nu\beta=\alpha$, получимъ $\beta=\mu\alpha$ и, слѣдовательно, получаемъ неравенство (1), которое требовалось доказать.

Средняя ариѳметическая больше средней геометрической.

§ 39. Разсмотримъ два положительныхъ числа a и b, причемъ $a>b$.

Средняя ариѳметическая x этихъ двухъ чиселъ получается изъ пропорціи

$$a - x = x - b,$$

то есть

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Средняя геометрическая будетъ получаться изъ пропорціи

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{b},$$

то есть

$$y = \sqrt{ab}.$$

Покажемъ, что имѣетъ мѣсто неравенство

(1) $$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если мы перенесемъ $\sqrt{ab}$ въ первую часть неравенства, то

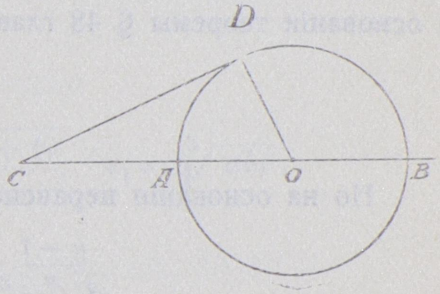
$$\frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} > 0,$$

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} > 0,$$

что вѣрно; слѣдовательно, вѣрно и (1).

§ 40. Геометрически способъ доказательства еще проще.

Пусть $a = CB$, $b = CA$. Построимъ на AB, какъ на діаметрѣ кругъ, центръ котораго пусть будетъ O. Проведемъ къ этому кругу касательную CD. Получаемъ



Черт. 5.

$$CO = \frac{a+b}{2}, \quad CD = \sqrt{ab}.$$

Средняя ариѳметическая CO, какъ гипотенуза, больше средней ариѳметрической CD, какъ катета.

Среднія геометрическія и ариѳметическія въ случаѣ большаго числа величинъ.

§ 41. Заданы n положительныхъ чиселъ

$$A, B, C, \ldots, E,$$

которыя мы можемъ предполагать неравными. Требуется доказать существованіе неравенства

(1) $$\frac{A+B+C+\ldots+E}{n} - \sqrt[n]{ABC\ldots E} > 0.$$

Мы видѣли уже, что въ случаѣ $n = 2$ неравенство (1) справедливо. Примѣнимъ способъ индукціи, а именно предположимъ, что теорема справедлива при $n - 1$ чиселъ, и покажемъ, что она будетъ справедлива тогда для n чиселъ.

Обозначимъ наши числа

$$a_1,\ a_1\,a_2,\ a_1\,a_2\,a_3,\ \ldots\ .\qquad\qquad a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n,$$

гдѣ $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$ числа положительныя.

Обозначимъ

$$\frac{a_2 + a_2\,a_3 + \ldots + a_2\,a_3\ldots a_n}{n-1} = A_{n-1},$$

$$\sqrt[n-1]{a_2^{\,n-1}a_3^{\,n-2}\ldots a_n} = C_{n-1},$$

$$\frac{a_1 + a_1\,a_2 + a_1\,a_2\,a_3 + \ldots + a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n}{n} = A_n,$$

$$\sqrt[n]{a_1^{\,n}\,a_2^{\,n-1}\ldots a_n} = C_n.$$

Предположивъ существованіе неравенства $A_{n-1} > C_{n-1}$, покажемъ, что слѣдствіемъ этого неравенства будетъ $A_n > C_n$.

Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $A_n > C_n$ можно будетъ написать послѣ сокращенія на a_1

$$\frac{1 + (n-1)\,A_{n-1}}{n} > \sqrt[n]{C_{n-1}^{\,n-1}}. \tag{2}$$

Это же неравенство дѣйствительно вѣрно, если вѣрно $A_{n-1} > C_{n-1}$, ибо на основаніи теоремы § 48 главы VIII (стр. 151) получимъ

$$\sqrt[n]{A_{n-1}^{\,n-1}} > \sqrt[n]{C_{n-1}^{\,n-1}}.$$

Но на основаніи неравенства (1) § 37 получимъ

$$\sqrt[n]{A_{n-1}^{\,n-1}} < 1 + \frac{n-1}{n}\left\{A_{n-1} - 1\right\},$$

что совпадаетъ съ неравенствомъ (2), подлежащимъ доказательству.

Задача Гаусса.

§ 42. Беремъ два положительныхъ числа a и b

$$a > b;$$

составимъ два новыхъ числа

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab},$$

далѣе два новыхъ

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Получаемъ рядъ возрастающихъ чиселъ

(1) $$b,\quad b_1,\quad b_2,\ \ldots\ .$$

и рядъ убывающихъ чиселъ

(2) $$a,\quad a_1,\quad a_2,\ \ldots\ .$$

причемъ всегда $a_k > b_k$.

Нетрудно убѣдиться, что разность $a_k - b_k$ безконечно мала при большомъ k, ибо

$$a_k - b_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} - \sqrt{a_{k-1}\ b_{k-1}} < \frac{a_{k-1} - b_{k-1}}{2},$$

ибо, очевидно,

$$b_{k-1} < \sqrt{a_{k-1}\ b_{k-1}}\ .$$

Отсюда

$$a_k - b_k < \frac{a-b}{2^k},$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, дѣйствительно, ряды чиселъ (1) и (2) имѣютъ общій предѣлъ.

§ 43. Задача Гаусса можетъ быть обобщена на случай большаго числа величинъ.

Напримѣръ, если мы возьмемъ три числа

$$a > b > c$$

и составимъ три новыхъ

$$a_1 = \frac{a+b+c}{3},\quad b_1 = \sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}},\quad c_1 = \sqrt[3]{abc},$$

то, очевидно, $a_1 < a$ и $c_1 > c$.

Покажемъ теперь, что

$$a_1 > b_1 > c_1\ .$$

Для доказательства неравенства $a_1 > b_1$ возвышаемъ его въ квадратъ

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{ab+ac+bc}{3},$$

или окончательно

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc > 0.$$

Но это неравенство, очевидно, справедливо, ибо его лѣвая часть можетъ быть написана въ видѣ

$$(a-c)\ (a-b) + (b-c)^2\ .$$

Для доказательства неравенства $b_1 > c_1$ возвысимъ его въ квадратъ, получимъ

$$\frac{ab+ac+bc}{3} - \sqrt[3]{(ab)\ (ac)\ (bc)} > 0\ ,$$

а это неравенство есть частный случай доказаннаго въ § 41 общаго неравенства.

Нетрудно показать, что, если мы по числамъ a_1, b_1, c_1 составимъ новыя числа a_2, b_2, c_2 и т. д., то три перемѣнныхъ числа a_k, b_k, c_k будутъ съ возрастаніемъ k стремиться къ общему предѣлу. Для этой цѣли придется доказать неравенство

(1) $$a_1 - c_1 < \frac{2}{3}(a - c) .$$

Докажемъ самое общее неравенство, изъ котораго неравенство (1) будетъ слѣдовать, какъ частный случай, а именно неравенство

(2) $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} < \frac{n-1}{n}(a_1 - a_n) ,$$

если предположить, что

(3) $$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n ,$$

причемъ не имѣетъ мѣсто равенство сразу во всѣхъ случаяхъ.

Разсмотримъ выраженіе

$$\frac{-(n-2)a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}{n} + a_n - \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} ;$$

но изъ чиселъ

$$\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} - (n-2)\, a_1}{n} \quad \text{и} \quad a_n - \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n}$$

первое не положительное, а второе отрицательное, слѣдовательно, неравенство (2) доказано.

ГЛАВА XII.

Прогрессіи и ряды.

Опредѣленіе ариѳметической прогрессіи.

§ 1. **Ариѳметической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же, постояннымъ для этого ряда, числомъ.**

Такъ, напримѣръ, два ряда

$\div$ 1, 2, 3, 4, 5, ...

$\div$ 25, 20, 15, 10, 5, 0, —5, —10, ...

суть ариѳметическія прогрессіи, причемъ постоянное прибавляемое число для первой прогрессіи есть 1, а для второй — 5.

Числа, образующія прогрессію, называются ея *членами*.

Постоянное прибавляемое число называется разностью прогрессіи.

Если члены прогрессіи всѣ вещественные, то прогрессія называется возрастающей, если разность положительная, и убывающей, если разность отрицательная.

Мы будемъ называть прогрессію конечною, если она заключаетъ конечное число членовъ.

Мы будемъ для конечной ариѳметической прогрессіи употреблять обозначенія: первый членъ a, послѣдній l, разность d, число всѣхъ членовъ n и сумма s.

§ 2. Нетрудно составить формулу для какого нибудь члена ариѳметической прогрессіи, стоящаго на мѣстѣ m.

Первый членъ есть a, второй членъ будетъ $a+d$, третій членъ $a+2d$, четвертый $a+3d$, пятый $a+4d$, и т. д. Вообще m-ый членъ будетъ

$$a+d\,(m-1).$$

Послѣдній членъ выражается по формулѣ

(1) $$l=a+d\,(n-1).$$

§ 3. Если мы члены ариѳметической прогрессіи напишемъ въ обратномъ порядкѣ, то получимъ новую прогрессію, у которой разность будетъ $-d$.

Итакъ, если разсматривается прогрессія

$$\div\ a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ a+(n-3)\,d,\ a+(n-2)\,d,\ a+(n-1)\,d,$$

то прогрессія, написанная въ обратномъ порядкѣ, будетъ

$$\div\ l,\ l-d,\ l-2d,\ l-3d,\ \ldots\ l-(n-3)\,d,\ l-(n-2)\,d,\ l-(n-1)\,d.$$

§ 4. Найдемъ теперь сумму прогрессіи. Напишемъ прямую и обратную прогрессіи

$$s=a+[a+d]+[a+2d]+\ldots+[a+(n-2)\,d]+[a+(n-1)\,d],$$
$$s=l+[l-d]+[l-2d]+\ldots+[l-(n-2)\,d]+[l-(n-1)\,d],$$

и сложимъ эти два равенства

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots+(a+l)+(a+l),$$

значитъ

$$s=\frac{(a+l)\,n}{2}.$$

Приходимъ къ теоремѣ

Сумма всѣхъ членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ ея крайнихъ членовъ, умноженной на число всѣхъ членовъ.

§ 5. Найдемъ сумму натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n включительно. Примѣняя формулу (1) § 4, получимъ

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)n}{2}.$$

§ 6. Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.

Примѣняя формулу (1) § 4, получимъ

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{\{1+(2n-1)\}n}{2}=n^2;$$

напримѣръ,

$$1+3+5+7+9+11=6^2.$$

Геометрическая прогрессія.

§ 7. **Геометрической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предыдущему, умноженному на одно и то же постоянное число.**

Напримѣръ, ряды:

(1)
$$\div\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots\ldots$$
$$\div\ 1,—3,\ 9,—27,\ \ldots\ldots$$
$$\div\ \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ \ldots\ldots$$

представляютъ геометрическія прогрессіи, ибо въ первомъ ряду числа умножаются на 2, во второмъ на —3, въ третьемъ на $\frac{1}{2}$.

Числа, составляющія геометрическую прогрессію, называются ея членами. Число, на которое умножаются члены прогрессіи, носитъ названіе знаменателя прогрессіи.

Геометрическая прогрессія съ вещественными членами называется возрастающей, если знаменатель по абсолютной величинѣ больше единицы, и убывающей, если знаменатель по абсолютной величинѣ меньше единицы. Двѣ первыя изъ прогрессій (1) возрастающія, а третья убывающая.

Мы будемъ обозначать первый членъ a, послѣдній членъ l, знаменатель q, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

§ 8. Нетрудно составить выраженіе для любого члена геометрической прогрессіи.

Первый членъ есть a, второй членъ будетъ aq, третій aq^2, четвертый aq^3, и т. д. Вообще m-ый членъ будетъ aq^{m-1}.

Послѣдній членъ выразится по формулѣ

(1) $$l = aq^{n-1}.$$

§ 9. Найдемъ теперь сумму геометрической прогрессіи

$$\therefore a, b, c, \ldots i, k, l.$$

По опредѣленію прогрессіи имѣемъ.

$$b = aq,$$
$$c = bq,$$
$$\ldots\ldots$$
$$l = kq.$$

Сложимъ эти равенства; тогда въ лѣвой части будетъ сумма всѣхъ членовъ безъ перваго, а въ правой число q, умноженное на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣдняго, т. е.

$$s - a = (s - l)\,q,$$

откуда

$$s = \frac{a - lq}{1 - q} \text{ или } s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Подставляя въ послѣднюю формулу $l = aq^{n-1}$, получимъ

$$s = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Эту формулу можно было бы получить иначе.

Имѣемъ непосредственно

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} =$$
$$= a\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1});$$

но по теоремѣ Безу

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1},$$

слѣдовательно, получается формула.

§ 10. Найдемъ теперь произведеніе p всѣхъ членовъ геометрической прогрессіи

$$p = a\,(aq)(aq^2)\,.\,.\,.\,.\,(aq^{n-1}) = a^n\,q^{1+2+3+\,.\,.\,.\,+n-1} =$$
$$= a^n\,q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sqrt{a^n\,\{aq^{n-1}\}^n} = \sqrt{a^n\,l^n}\,.$$

О безконечныхъ рядахъ.

§ 11. Безконечно продолженныя прогрессіи представляютъ изъ себя частный случай такъ называемыхъ безконечныхъ рядовъ.

Безконечнымъ рядомъ называется безконечная послѣдовательность чиселъ

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ a_n,\ a_{n+1},\ .\ .\ .\ .$$

эти числа называются членами ряда.

Разсмотримъ сумму n первыхъ членовъ ряда (1) и обозначимъ эту сумму черезъ s_n

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \,.\,.\,.\,.\,+ a_n\,.$$

При измѣненіи цѣлаго числа n величина s_n будетъ величиной перемѣнной.

Если при возрастаніи n до безконечности перемѣнная s_n имѣетъ предѣломъ опредѣленное число s

$$lim\,\{s_n\}_{n=\infty} = s,$$

то рядъ (1) называется сходящимся.

Число s называется суммой ряда, и пишутъ

(2) $$a_1 + a_2 + a_3 + \,.\,.\,.\,+ a_n + \,.\,.\,.\,.\,= s.$$

Если s_n при возрастаніи n не стремится ни къ какому предѣлу, то рядъ называется расходящимся.

Для расходящихся рядовъ понятіе о суммѣ ряда отсутствуетъ.

§ 12. Разсмотримъ безконечную геометрическую прогрессію

$$a,\ aq,\ aq^2,\ .\ .\ .\ aq^{n-1}\ ,\ aq^n\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Сумма ея n первыхъ членовъ будетъ

(1) $$s_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

При $q>1$ число q^n растетъ безпредѣльно, слѣдовательно имѣемъ $lim(s_n)=\infty$. Предѣла у числа s_n нѣтъ, слѣдовательно, безконечная возрастающая прогрессія есть рядъ расходящійся.

Можно доказать проще, что $lim(s_n)=\infty$, ибо изъ равенства (1) и неравенства $q>1$ получимъ

$$s_n > an.$$

§ 13. Если $q<1$, то

$$lim\{q^n\}_{n=\infty}=0.$$

По формулѣ (1) § 12 мы получимъ

$$lim\{s_n\}_{n=\infty}=lim\left\{a\frac{1-q^n}{1-q}\right\}_{n=\infty}=\frac{a}{1-q}.$$

Итакъ, безконечно убывающая геометрическая прогрессія есть рядъ сходящійся.

Ея сумма будетъ

$$s=\frac{a}{1-q},$$

и можно будетъ написать

$$a+aq+aq^2+\ldots\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

Напримѣръ,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

§ 14. Въ видѣ второго примѣра разсмотримъ, такъ называемый, гармоническій рядъ:

(1) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Нетрудно убѣдиться, что этотъ рядъ расходящійся, ибо

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \text{ т. е. } \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \text{ то есть}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},$$

итакъ

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)>1+\frac{k}{2}$$

Число же $1+\frac{k}{2}$ при возрастаніи k растетъ безгранично, слѣдовательно, сумма 2^k первыхъ членовъ ряда растетъ безпредѣльно, и рядъ, дѣйствительно, расходится.

§ 15. Въ видѣ послѣдняго примѣра на ряды разсмотримъ опредѣленіе чиселъ безконечными дробями.

Разсмотримъ безконечную дробь

$$A = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n \ldots . \tag{1}$$

и параллельно съ нею рядъ чиселъ

$$a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}, \frac{a_n}{10^n}, \ldots \tag{2}$$

Сумма n первыхъ членовъ ряда (2) выразится по формулѣ

$$s_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots . + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} =$$
$$= a_0, a_1 a_2 \ldots . a_{n-1} = A_{n-1}.$$

Отсюда

$$lim s_n = lim A_{n-1} = A.$$

Итакъ, безконечную дробь (1) можно разсматривать, какъ сумму ряда

$$A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots .$$

Въ такомъ смыслѣ можно считать дробь (1) суммой дробей (2).

ГЛАВА XIII.

Логариѳмы.

Понятіе о степени съ ирраціональнымъ показателемъ.

§ 1. Возьмемъ произвольное вещественное число a больше единицы. Поставимъ себѣ задачей выяснить, что надо понимать подъ возвышеніемъ числа a въ степень съ ирраціональнымъ положительнымъ показателемъ A, т. е., что подразумѣвать подъ знакомъ

$$a^A.$$

Такъ какъ, съ одной стороны, число A есть предѣлъ, къ которому стремится приближеніе по недостатку A_k при увеличеніи

значка k, а, съ другой стороны, намъ уже извѣстно изъ главы VIII, что такое представляетъ знакъ

$$a^{A_k},$$

ибо число A_k дробное раціональное, то естественно понимать подъ знакомъ a^A предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное положительное число a^{A_k} съ возрастаніемъ k:

$$a^A = lim\, a^{A_k}.$$

§ 2. Остается убѣдиться, что предѣлъ для перемѣнной величины a^{A_k} существуетъ.

Мы видѣли уже въ § 49 главы VIII (стр. 152), что, если $a > 1$, то a^{A_k} будетъ возрастать, если раціональный показатель A_k возрастаетъ. Подобнымъ же образомъ a^{A_k} будетъ убывать, когда A_k убываетъ.

Мы знаемъ, что перемѣнная A_k не убываетъ, а перемѣнная A'_k не возрастаетъ, слѣдовательно, перемѣнная a^{A_k} не убываетъ, а перемѣнная $a^{A'k}$ не возрастаетъ. Покажемъ, что разность

$$a^{A'k} - a^{A_k},$$

будучи положительной, ибо $A'_k > A_k$, безконечно мала при безконечно большомъ значеніи k.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$a^{A'k} - a^{A_k} = a^{A_k}\left\{a^{A'k - A_k} - 1\right\},$$

причемъ разность въ скобкахъ безконечно мала, ибо $A_k' - A_k$ близко къ нулю [см. § 49 главы VIII (стр. 153)].

Итакъ, обѣ перемѣнныя $a^{A'k}$ и a^{A_k} имѣютъ общій предѣлъ, который мы и принимаемъ за значеніе степени

$$a^A.$$

Кромѣ того, получаемъ на основаніи теоремы § 22 главы VII (стр. 118).

$$a^{A_k} < a^A < a^{A'k}. \tag{1}$$

§ 3. Если $a < 1$, то $a = \frac{1}{b}$, гдѣ $b > 1$.

Слѣдовательно, мы опредѣлимъ степень a^A при помощи выраженія

$$a^A = \frac{1}{b^A}.$$

Въ этомъ случаѣ, очевидно, будемъ имѣть

$$a^{A_k} > a^A > a^{A'k}.$$

Если $a = 1$, то, очевидно, будетъ всегда $1^x = 1$, т. е.

$$1^A = 1^{A_k} = 1^{A'k} = 1.$$

§ 4. Не представляетъ затрудненія сказать, что надо разумѣть подъ степенью съ **отрицательнымъ несоизмѣримымъ показателемъ** — A. Очевидно, что такую степень надо опредѣлять равенствомъ

$$a^{-A} = \frac{1}{a^A}.$$

Показательное выраженіе a^x при несоизмѣримомъ показателѣ x.

§ 5. Нетрудно видѣть, что обѣ теоремы § 49 главы VIII (стр. 152) остаются справедливыми также и при ирраціональныхъ значеніяхъ x.

Обобщимъ сначала первую теорему.

I. Выраженіе a^x возрастаетъ при возрастаніи x, если $a > 1$, и убываетъ, если $a < 1$.

Сравнимъ сначала показательное выраженіе a^x при раціональномъ значеніи μ и ирраціональномъ A показателя x.

I случай: $\mu < A$. Раскладывая оба числа μ и A въ десятичную дробь, замѣтимъ, что по опредѣленію неравенства будетъ существовать цифра нѣкотораго изъ разрядовъ въ A, которая больше соотвѣтственной цифры числа μ, причемъ всѣ цифры, налѣво стоящія одинаковы. Останавливаясь на этой цифрѣ, мы получимъ приближеніе A_k, причемъ будетъ

$$\mu < A_k < A.$$

Получаемъ неравенство

$$a^{\mu} < a^{A_k} < a^A,$$

причемъ лѣвое неравенство слѣдуетъ изъ соображеній главы VIII, ибо числа μ и A_k раціональныя. Правое же неравенство есть неравенство (1) § 2. Итакъ, теорема въ разсматриваемомъ случаѣ доказана.

II случай: $\mu > A$. Возьмемъ приближеніе A'_k съ большимъ числомъ цифръ, чѣмъ то, на которомъ обнаруживается разница въ цифрахъ чиселъ A и μ. Мы получаемъ

$$A < A'_k < \mu,$$

откуда

$$a^A < a^{A'_k} < a^{\mu},$$

и теорема опять справедлива.

III случай. Возьмемъ два ирраціональныхъ значенія A и B показателя x, причемъ $A > B$.

Нетрудно показать, что, начиная съ нѣкотораго k_0 при всѣхъ k бо́льшихъ будетъ

(1) $$A_k > B'_k.$$

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣнная $A_k - B'_k$ стремится къ положительному предѣлу, значитъ, начиная съ нѣкотораго k, она должна сдѣлаться и оставаться поло-

жительною, ибо она не убываетъ. Итакъ, дѣйствительно, начиная съ нѣкотораго k, имѣетъ мѣсто неравенство (1).

Далѣе

$$A > A_k > B'_k > B,$$

откуда

$$a^A > a^{A_k} > a^{B'_k} > a^B,$$

и мы получаемъ $a^A > a^B$, что и требовалось доказать.

Подобнымъ же образомъ покажемъ, что при $a < 1$ выраженіе a^x убываетъ съ возрастаніемъ x.

Обобщимъ теперь вторую теорему.

II. Если положительная перемѣнная δ имѣетъ предѣломъ нуль, причемъ она можетъ принимать и ирраціональныя значенія, то предѣлъ a^δ есть единица.

Такъ какъ δ, уменьшаясь, можетъ сдѣлаться меньше $\frac{1}{n}$, то доказательство § 49 главы VIII (стр. 153) сохраняется.

Такъ какъ

$$a^{-\delta} = \left(\frac{1}{a}\right)^\delta,$$

то приходимъ къ заключенію, что получается $\lim a^\delta = 1$ при $\lim \delta = 0$, какія бы значенія перемѣнная δ ни пробѣгала: положительныя или отрицательныя.

§ 6. Покажемъ теперь, что, если x стремится къ предѣлу A, то a^x стремится къ предѣлу a^A, какія бы ни были значенія x и A: раціональныя или ирраціональныя.

Предѣлъ A можетъ быть числомъ ирраціональнымъ или раціональнымъ. Ограничимся случаемъ $A > 0$. Обозначимъ въ случаѣ ирраціональнаго A черезъ A_k и A_k' по обыкновенію приближенія съ точностью $\frac{1}{10^k}$. Въ случаѣ же A раціональнаго, пусть будетъ

$$A_k = A - \frac{1}{k}, \quad A'_k = A + \frac{1}{k}.$$

Перемѣнная x, приближаясь къ предѣлу A, будетъ, начиная съ нѣкотораго момента процесса измѣненія, удовлетворять неравенствамъ

$$A_k < x < A'_k;$$

отсюда получимъ при $a > 1$

$$a^{A_k} < a^x < a^{A'_k}, \quad a^{A_k} < a^A < a^{A'_k};$$

такимъ образомъ разность

$$a^x - a^A$$

по абсолютной величинѣ меньше $a^{A'_k} - a^{A_k}$, т. е. она безконечно мала, и теорема доказана.

§ 7. Покажемъ, что формулы

$$a^A \cdot a^B = a^{A+B}, \quad a^A : a^B = a^{A-B}$$

справедливы для ирраціональныхъ показателей.

Докажемъ, напримѣръ первую формулу при положительныхъ значеніяхъ A и B. Имѣемъ

$$A = lim\ A_k\ ,\ B = lim\ B_k\ ,$$

но для раціональныхъ чиселъ A_k и B_k имѣютъ мѣсто формулы

$$a^{A_k} .\ a^{B_k} = a^{A_k + B_k},$$

Подводя къ предѣлу, получимъ

$$a^A . a^B = a^{A+B}.$$

Подобнымъ же образомъ докажутся всѣ остальные случаи.

§ 8. Докажемъ справедливость формулы.

(1) $$(a^A)^B = a^{AB}$$

при числахъ A и B ирраціональныхъ.

Разсмотримъ случай ирраціональныхъ положительныхъ чиселъ A и B.

Разсмотримъ выраженіе

$$(a^{A_k})^{B_l};$$

имѣемъ по доказанному въ главѣ VIII равенство

$$(a^{A_k})^{B_l} = a^{A_k B_l}\ .$$

Увеличивая до безконечности значекъ k, получимъ по опредѣленію § 1 (стр. 123) и по теоремѣ § 48 (стр. 152) главы VIII

$$(a^A)^{B_l} = a^{AB_l}\ .$$

Увеличивая значекъ l до безконечности, получимъ требуемую формулу (1).

Понятіе о логариѳмѣ.

§ 9. Разсмотримъ показательное уравненіе

(1) $$a^x = b,$$

гдѣ a положительное число отличное отъ единицы, а b произвольное также положительное число или нуль.

Если мы нашли корень x уравненія (1), то будемъ называть число x **логариѳмомъ числа** b **при основаніи** a и обозначать

$$x = log_a\ b.$$

Напримѣръ,

$$5 = log_2 32,\ \text{ибо}\ 2^5 = 32,$$

$$-3 = log_{10} 0{,}001,\ \text{ибо}\ 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001.$$

Доказательство существованія логариѳма.

§ 10. Приступимъ теперь къ доказательству существованія только одного вещественнаго показателя x, удовлетворяющаго равенству

$$a^x = b,$$

гдѣ a и b два произвольно взятыхъ положительныхъ числа.

Покажемъ, какъ разложить искомый показатель въ безконечную десятичную дробь, взятую съ тѣмъ или другимъ знакомъ.

Разсмотримъ случай $a > 1$, $b > 1$.

Разсмотримъ число

$$b^{10^k}, \tag{1}$$

гдѣ k произвольное натуральное число, и рядъ возрастающихъ чиселъ

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^{\mathfrak{A}_k},\ a^{\mathfrak{A}_k+1},\ \ldots\ldots \tag{2}$$

Случится одно изъ двухъ, или при нѣкоторомъ k число (1) совпадаетъ съ однимъ изъ чиселъ (2), или же такого совпаденія не произойдетъ ни при какомъ k.

Въ первомъ случаѣ

$$a^{\mathfrak{A}_l} = b^{10^k},$$

откуда

$$a^{\frac{\mathfrak{A}_l}{10^k}} = b,$$

то есть

$$x = \frac{\mathfrak{A}_l}{10^k};$$

искомый x оказывается раціональнымъ числомъ.

Если же ни при какомъ k не случится совпаденіе числа (1) съ однимъ изъ чиселъ (2), то при всякомъ k будутъ существовать неравенства

$$a^{\frac{\mathfrak{A}_k}{10^k}} < b < a^{\frac{\mathfrak{A}_k+1}{10^k}}, \tag{3}$$

ибо первое число $a^0 = 1$ меньше b^{10^k}, числа же ряда (2) на основаніи § 50 главы VIII (стр. 153) безпредѣльно возрастаютъ.

Всякому натуральному числу k будетъ соотвѣтствовать опредѣленное натуральное число $\mathfrak{A}_k$.

Примѣняя неравенства (3) къ случаю $k+1$, получимъ

$$a^{\frac{\mathfrak{A}_{k+1}}{10^{k+1}}} < b < a^{\frac{\mathfrak{A}_{k+1}+1}{10^{k+1}}}.$$

Извлекая изъ всѣхъ трехъ частей корень 10-ой степени, получимъ

$$a^{\frac{\mathfrak{A}_{k+1}}{10}\cdot\frac{1}{10^k}} < b < a^{\frac{\mathfrak{A}_{k+1}+1}{10}\cdot\frac{1}{10^k}}. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4) и повторяя буквально тѣ же разсужденія, что и въ § 4 главы VIII (стр. 126), получимъ

$$\mathfrak{A}_{k+1} = 10\,\mathfrak{A}_k + a_{k+1};$$

гдѣ a_{k+1} есть цифра.

Извлекая изъ всѣхъ частей неравенства корень степени 10^k, получимъ

(5) $$a^{A_k} < b < a^{A'_k},$$

гдѣ

$$A_k = \frac{\mathfrak{A}_k}{10^k} = a_0, a_1 a_2 \ldots . a_k .$$

При возрастаніи k перемѣнное число A_k стремится къ нѣкоторому предѣлу A.

Нетрудно убѣдиться, что

(6) $$b = a^A .$$

Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ неравенствъ (5) существуетъ по опредѣленію a^A еще такія

$$a^{A_k} < a^A < a^{A'_k} .$$

Общій же предѣлъ двухъ перемѣнныхъ a^{A_k} и $a^{A'_k}$ можетъ быть только одинъ. Значитъ, b и a^A представляютъ изъ себя одно и то же число.

Итакъ, мы видимъ, что при $a > 1$ у всякаго числа b, бо́льшаго единицы, существуетъ единственный логариѳмъ, который оказывается положительнымъ числомъ.

Основныя свойства логариѳмовъ.

§ 11. **Если основаніе a больше единицы, то логариѳмъ числа бо́льшаго единицы положительный.**

Это слѣдуетъ изъ даннаго въ § 10 доказательства существованія логариѳма, а также изъ факта возрастанія a^x при возрастаніи x, ибо $a > 1$.

§ 12. **Если основаніе a больше единицы, то логариѳмъ числа меньшаго единицы отрицателенъ.**

Въ этомъ мы убѣдимся такъ. Пусть задано для рѣшенія уравненіе $a^x = b$, гдѣ $b < 1$; положимъ $b = \frac{1}{c}$, гдѣ $c > 1$ и $x = -y$, тогда уравненіе обращается въ такое $a^y = c$, и существуетъ положительное число y (§ 10), ему удовлетворяющее, значитъ, существуетъ отрицательное число $x = -y$, удовлетворяющее заданному $a^x = b$. Теорема слѣдуетъ изъ возрастанія a^x.

§ 13. **Логариѳмъ единицы при всякомъ основаніи есть нуль.**

Ибо $a^0 = 1$ и $\lim a^{\delta} = 1$, если $\lim \delta = 0$.

§ 14. **Если основаніе меньше единицы, то обратно логариѳмы чиселъ бо́льшихъ единицы отрицательные, а для чиселъ меньшихъ единицы положительные.**

Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ того факта, что отъ измѣненія основанія a на $\frac{1}{a}$ мѣняется знакъ логариѳма.

§ 15. **Логариѳмъ основанія равенъ единицѣ.**

Ибо $a^1 = a$.

Почему нельзя разсматривать логариѳмовъ при отрицательномъ основаніи.

§ 16. Показательное выраженіе a^x не разсматривается при отрицательномъ a по той причинѣ, что при отрицательномъ a можно указать два безконечно близкихъ раціональныхъ значенія μ и ν такихъ, что a^{μ} будетъ числомъ вещественнымъ, а a^{ν} мнимымъ; такъ что при двухъ безконечно близкихъ значеніяхъ x получаются два совершенно разнородныхъ значенія.

Напримѣръ, возьмемъ

$$\mu = \frac{2m}{2n-1}, \quad \nu = \frac{2m-1}{2n},$$

гдѣ m заданное натуральное число, а n безпредѣльно возрастающее число. Разность

$$\mu - \nu = \frac{2m+2n-1}{(2n-1)2n} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{2m-1}{n^2}}{2\left(2 - \frac{1}{n}\right)}$$

безконечно мала при $n = \infty$.

Разсмотримъ, напримѣръ, $(-2)^x$.

Число

$$(-2)^{\mu} = (-2)^{\frac{2m}{2n-1}} = \sqrt[2n-1]{(-2)^{2m}},$$

какъ корень нечетной степени изъ положительнаго числа $(-2)^{2m}$ среди своихъ значенія имѣетъ одно вещественное и положительное. Число же

$$(-2)^{\frac{2m-1}{2n}} = (-2)^{\frac{2m-1}{2n}} = \sqrt[2n]{(-2)^{2m-1}},$$

какъ корень четной степени изъ отрицательнаго числа всегда мнимое.

Почему не существуетъ логариѳмовъ для чиселъ отрицательныхъ.

§ 17. Не существуетъ логариѳмовъ чиселъ отрицательныхъ по той причинѣ, что для достиженія непрерывности измѣненія выраженія a^x при непрерывномъ измѣненіи x приходится считать a^x числомъ положительнымъ.

Положительность выраженія a^x при цѣломъ значеніи x очевидна, ибо a число положительное. При x дробномъ раціональномъ мы понимали подъ знакомъ

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

ариѳметическое значеніе радикала.

При x ирраціональномъ получается тоже положительное число, ибо a^x въ этомъ случаѣ приходится разсматривать, какъ предѣлъ положительной перемѣнной $a^{\frac{m}{n}}$.

Нельзя ли считать логариѳмы чиселъ отрицательныхъ числами мнимыми?

§ 18. Отвѣтъ на этотъ вопросъ дается въ высшей математикѣ. Я считаю однако необходимымъ сказать два слова безъ доказательства.

Оказывается, что можно дать утвердительный отвѣтъ, т. е. сказать, что при положительномъ основаніи логариѳмы чиселъ отрицательныхъ мнимые, только при одномъ особенномъ основаніи, которое обозначается обыкновенно буквой e. Число e есть основаніе такъ называемыхъ Неперовыхъ [1]) или натуральныхъ логариѳмовъ. Число e ирраціональное и опредѣляется, какъ предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

[1]) По имени изобрѣтателя логариѳмовъ, англійскаго математика Naper'a, написавшаго сочиненіе „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“, 1614.

при $n = \infty$. Получаемъ

$$e = lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459: \ldots\ldots$$

Оказывается, что для числа e можно установить опредѣленное понятіе о томъ, что значитъ возвысить e въ мнимую степень $x + iy$. Эйлеръ далъ знаменитую формулу для такой степени

$$e^{x+iy} = e^x (cosy + isiny).$$

Если мы пожелали бы аналогично опредѣлить знакъ a^{x+iy}, гдѣ положительное число a отлично отъ e, то мы встрѣтились съ громаднымъ неудобствомъ, состоящимъ въ томъ, что выраженіе a^{x+iy} имѣетъ безчисленное число значеній; такъ что разсмотрѣніе мнимыхъ логариѳмовъ при a отличномъ отъ e падаетъ.

Читатель спроситъ, что, быть можетъ, можно изъ безчисленнаго множества значеній a^{x+iy} выбрать одно подобно тому, какъ при вещественныхъ показателяхъ мы выбираемъ для знака $a^{\frac{m}{n}}$ ариѳметическое значеніе. Конечно, такой выборъ былъ бы желателенъ, но для него нѣтъ достаточныхъ основаній.

Измѣненіе логариѳма при приближеніи числа къ нулю и безконечности.

§ 19. Если $a > 1$, то, взявъ произвольно большое натуральное число n, получимъ при $x > n$

$$a^x > a^n > 1 + n\ (a - 1).$$

При n безконечно большомъ правая часть безконечно велика, и мы получимъ

$$a^{+\infty} = +\infty;\ log\ (+\infty) = +\infty.$$

Наоборотъ, при отрицательномъ цѣломъ числѣ $-n$ и $x < -n$ получимъ

$$a^x < a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{1 + n\ (a - 1)}.$$

Получимъ, что при n безконечно большомъ

$$lim\ a^{-n} = 0,$$

и значитъ

$$a^{-\infty} = 0;\ log\ (0) = -\infty.$$

Очевидно, что при $a < 1$, получается явленіе обратное, а именно

$$a^{+\infty} = 0;\ log\ (0) = +\infty,$$

$$a^{-\infty} = +\infty;\ log\ (+\infty) = -\infty.$$

Логариѳмъ произведенія, частнаго, степени и корня.

§ 20. **Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ множителей.**

Пусть b_1, b_2, ... b_n заданныя числа, имѣющія логариѳмы x_1, x_2, ... x_n. По опредѣленію логариѳма имѣемъ

(1) $$b_1 = a^{x_1},\ b_2 = a^{x_2},\ \ldots .\ b_n = a^{x_n}\ .$$

Перемножая эти равенства, получимъ

$$b_1\ b_2\ \ldots .\ b_n = a^{x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n},$$

значитъ,

$$log(b_1\ b_2\ \ldots\ b_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\ .$$

Но

$$x_1 = logb_1,\ x_2 = logb_2,\ \ldots\ldots\ x_n = logb_n\ ,$$

поэтому

$$log\,(b_1\ b_2\ \ldots b_n) = logb_1 + logb_2 + \ldots + logb_n\ ,$$

что и требовалось доказать.

§ 21. **Логариѳмъ дроби равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя.**

Раздѣлимъ почленно два равенства

$$b = a^x,\ c = a^y,$$

получимъ

$$\frac{b}{c} = a^{x-y}\ ,$$

откуда

$$log\left(\frac{b}{c}\right) = x - y = logb - logc,$$

что и требовалось доказать.

Въ частности

$$log\ \frac{1}{c} = log\ 1 - logc = 0 - logc = -\ logc.$$

§ 22. **Логариѳмъ степени равенъ логариѳму возвышаемаго числа, умноженному на показателя степени.**

Возвысимъ обѣ части равенства $b = a^x$ въ степень показателя n, причемъ этотъ показатель можетъ быть произвольнымъ вещественнымъ числомъ:

$$b^n = a^{nx},$$

откуда

$$\log(b^n) = nx = n\log b,$$

что и требовалось доказать.

§ 23. **Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкоренного числа, дѣленному на показателя корня.**

Дѣйствительно, эта теорема есть частный случай предыдущей

$$\log\sqrt[n]{b} = \log\left(b^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log b = \frac{\log b}{n}.$$

О логариѳмированіи формулъ.

§ 24. Подъ логариѳмированіемъ формулъ разумѣется представленіе логариѳма ихъ черезъ логариѳмы отдѣльныхъ чиселъ, входящихъ въ формулу.

Напримѣръ, требуется логариѳмировать выраженіе.

$$A = \frac{5c^3x\sqrt[5]{ab\sqrt{y}}}{8n^2\sqrt[3]{m}}.$$

По теоремамъ §§ 20—23 получимъ

$$\log A = \log\left(5c^3x\sqrt[5]{ab\sqrt{y}}\right) - \log\left(8n^2\sqrt[3]{m}\right) =$$

$$= \log 5 + \log(c^3) + \log x + \log\sqrt[5]{ab\sqrt{y}} - \log 8 - \log(n^2) - \log\sqrt[3]{m} =$$

$$= \log 5 + 3\log c + \log x + \frac{1}{5}\left(\log a + \log b + \frac{1}{2}\log y\right) - \log 8 - 2\log n -$$

$$- \frac{1}{3}\log m = \log 5 + 3\log c + \log x + \frac{1}{5}\log a + \frac{1}{5}\log b + \frac{1}{10}\log y -$$

$$- \log 8 - 2\log n - \frac{1}{3}\log m.$$

§ 25. Удобны для логариѳмированія формулы, представленныя въ видѣ одночленовъ. Если требуется логариѳмировать сумму или разность, или, вообще говоря, многочленъ, то надо этотъ многочленъ разложить на множители, или, какъ говорятъ, привести формулу къ виду, удобному для логариѳмированія.

Напримѣръ,

$$\log(a^2 - b^2) = \log\{(a+b)(a-b)\} = \log(a+b) + \log(a-b).$$

§ 26. Если задано выраженіе линейное относительно лога-

ріѳмовъ нѣкоторыхъ чиселъ, то его можно считать за логаріѳмъ нѣкоторой формулы, и легко возстановить эту формулу. Напримѣръ, выраженіе

$$3+\frac{1}{5}\log x-\frac{1}{3}\log y$$

есть логаріѳмъ выраженія

$$\frac{a^3\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{y}},$$

гдѣ a есть основаніе логаріѳмовъ.

Системы логаріѳмовъ.

§ 27. Совокупность логаріѳмовъ чиселъ, вычисленныхъ при одномъ и томъ же основаніи, представляетъ, такъ называемую, систему логаріѳмовъ. Получили извѣстность и распространеніе главнымъ образомъ двѣ системы: **система натуральныхъ логаріѳмовъ и система десятичныхъ логаріѳмовъ.**

Натуральными логаріѳмы называются при основаніи равномъ ирраціональному числу

$$e=2{,}718281828\ldots.$$

о чемъ уже упоминалось въ § 18 (стр. 218).

Десятичными или обыкновенными называются логаріѳмы при основаніи, равномъ числу 10.

§ 28. Сдѣлаемъ нѣсколько историческихъ замѣчаній, относящихся ко времени изобрѣтенія логаріѳмовъ. Натуральные логаріѳмы называются часто Непировыми по имени шотландскаго математика Непера (1550—1617), хотя то, что называлъ Неперъ въ своемъ сочиненіи „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“, не совпадаетъ съ тѣмъ, что мы теперь называемъ логаріѳмомъ. Десятичные логаріѳмы называются иначе Бригговскими по имени профессора Бригга, современника Непера, впервые составившаго таблицы этихъ логаріѳмовъ.

§ 29. Переходъ отъ логаріѳмовъ одной системы къ логаріѳмамъ другой совершается слѣдующимъ образомъ.

Пусть x будетъ логаріѳмъ числа A при основаніи a, а y будетъ логаріѳмомъ того же числа A при основаніи b:

$$a^x = A = b^y.$$

Прологаріѳмируемъ это равенство, взявъ логаріѳмы обѣихъ частей при основаніи b

$$x\log_b a = y.$$

Итакъ, мы видимъ, что всѣ логариѳмы системы y съ основаніемъ b получаются изъ логариѳмовъ системы x съ основаніемъ a черезъ умноженіе на постоянный множитель $M = log_b a$.

$$y = xM,\ log_b A = log_a A \,.\, M.$$

Постоянный множитель M носитъ названіе модуля перехода отъ логариѳмовъ x къ логариѳмамъ y.

Для перехода отъ десятичныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ необходимъ модуль

$$M = log_e 10 = 2{,}3025851 \ldots$$

Для обратнаго перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ десятичнымъ необходимъ модуль

$$M = log_{10} e = 0{,}4342945 \ldots$$

Въ концѣ книги приложена таблица, облегчающая переходъ отъ десятичныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ и обратно.

Значеніе логариѳмическихъ таблицъ для упрощенія вычисленій.

§ 30. Въ прикладномъ знаніи приходится примѣнять пріемы приближеннаго вычисленія, причемъ общеупотребительнымъ способомъ вычисленія является представленіе всѣхъ чиселъ десятичными дробями. Ограничиваются извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ послѣ запятой.

Обыкновенно ошибка, которую дѣлаютъ, сохраняя четыре знака послѣ запятой и откидывая всѣ остальные, настолько мала, что такая точность достаточна въ большинствѣ практическихъ приложеній математики.

При приближенномъ вычисленіи, когда откидываютъ всѣ цифры дробной части числа, начиная съ нѣкотораго разряда, перестаетъ играть роль разница между числами раціональными и ирраціональными.

§ 31. Приступая къ приближеннымъ вычисленіямъ, необходимо установить, съ какою точностью желаютъ вести вычисленія.

На основаніи свойствъ десятичныхъ логариѳмовъ, которыя будутъ изложены въ слѣдующихъ параграфахъ, возможно по-

строить такія таблицы, что по приближенному значенію числа можно по таблицѣ сразу найти приближенное значеніе логариѳма числа и обратно.

Въ концѣ книги приложена таблица четырехзначныхъ логариѳмовъ. Таблица эта состоитъ изъ четырехзначныхъ логариѳмовъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 1000. Эта таблица помѣщается на двухъ страницахъ. Для удобства для полученія числа по заданному логариѳму дана другая таблица, состоящая также изъ двухъ страницъ. Эта таблица называется таблицей антилогариѳмовъ.

§ 31. Пятизначныя таблицы логариѳмовъ представляютъ уже большіе размѣры. Это происходитъ во первыхъ оттого, что пять цифръ каждаго логариѳма занимаютъ больше мѣста, чѣмъ четыре цифры, во вторыхъ приходится въ таблицѣ дать логариѳмы всѣхъ чиселъ отъ 1 до 10000. Пятизначныя таблицы представляютъ уже небольшую книгу, ибо къ нимъ присоединяютъ таблицу логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ, а также рядъ другихъ полезныхъ при вычисленіи таблицъ. Изъ русскихъ таблицъ можно рекомендовать таблицы:

С. Глазенапъ. Таблицы логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками съ приложеніемъ другихъ таблицъ, упрощающихъ вычисленіе, (ц. 85 коп.) 1911 года.

Пржевалскій. Пятизначныя таблицы логариѳмовъ и тригонометрическихъ величинъ (ц. 75 коп.).

Семизначныя таблицы со всѣми необходимыми добавленіями представляютъ уже объемистую книгу болѣе 500 страницъ in 8^0.

Наиболѣе извѣстное изданіе

Д-ръ К. Бремикеръ. Логариѳмически-тригонометрическое руководство барона Георга Вега; изданіе Вейдемана.

Въ добавленіе къ таблицамъ Бремикера надо посовѣтовать воспользоваться особенными таблицами, такъ называемыхъ Гауссовыхъ логариѳмовъ. По этимъ таблицамъ можно найти $log(a+b)$ и $log(a-b)$, если извѣстны логариѳмы $loga$ и $logb$.

J. Zech: Tafeln der Additions- und Substractionslogarithmen für sieben Stellen, 1863.

Восьмизначныя логариѳмическія таблицы представляютъ уже очень большой томъ in 4^0. Онѣ изданы геодезическимъ отдѣломъ французскаго генеральнаго штаба.

Service géographique de l'armée. Tables des logarithmes à

huit décimales des nombres entiers de 1 à 120000 et des sinus et tangentes de dix secondes en dix secondes d'arc dans le système de la division centésimale du quadrant publiées par ordre du ministère de la guerre, Paris, 1891.

Для желающихъ имѣть логариѳмическія таблицы съ большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ можно рекомендовать:

Callet: Tables portatives de logarithmes 1795,

гдѣ даны для чиселъ отъ 2 до 1200 логариѳмы какъ обыкновенные, такъ и натуральные съ 20 десятичными знаками.

§ 33. Упрощеніе вычисленій состоитъ въ томъ, что умноженіе чиселъ сводится на сложеніе ихъ логариѳмовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если необходимо вычислить произведеніе ab двухъ чиселъ a и b, то находятъ по таблицамъ логариѳмы этихъ чиселъ $\log a$ и $\log b$.

Далѣе складываютъ эти логариѳмы, получаютъ тогда

$$\log a + \log b = \log (ab);$$

логариѳмъ искомаго произведенія, а по логариѳму и само произведеніе.

Дѣленіе чиселъ сводится на вычитаніе ихъ логариѳмовъ. Возвышеніе въ степень сводится на умноженіе логариѳма на показателя степени. Извлеченіе корня сводится на дѣленіе логариѳма на натуральное число.

§ 34. Существуетъ приборъ, называемый логариѳмической линейкой, который замѣняетъ логариѳмическую таблицу, если не нужно большой точности. Линейка даетъ вѣрныхъ два знака.

Свойства обыкновенныхъ логариѳмовъ.

§ 35. **Логариѳмъ цѣлаго числа, изображеннаго единицей съ нулями, есть цѣлое число, заключающее столько единицъ, сколько нулей въ числѣ.**

Ибо

$$A = 10^k = \underbrace{10000000\ldots0}_{k \text{ нулей}},$$

то

$$\log A = k.$$

Напримѣръ,

$$\log 10 = 1,\ \log 100 = 2,\ \log 1000 = 3,\ \ldots\ldots$$

§ 36. **Логариѳмъ цѣлаго числа, не изображаемаго единицей съ нулями, есть число ирраціональное.**

Допустимъ, что логариѳмъ нѣкотораго цѣлаго числа A есть число раціональное $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n числа натуральныя; получаемъ

(1) $$A = 10^{\frac{m}{n}},$$

или

(2) $$A^n = 10^m.$$

Предположимъ, что A разлагается на простые множители такимъ образомъ

$$A = a^\alpha\ b^\beta c^\gamma\ \ , \ldots . l^\lambda,$$

гдѣ $a, b, c, \ldots l$ простыя числа, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ суть положительные показатели.

Подставляя въ равенство (2), получимъ

(3) $$a^{\alpha n}\ b^{\beta n}\ c^{\gamma n}\ \ \ldots\ l^{\lambda n} = 2^m\ 5^m.$$

Такъ какъ число цѣлое раскладывается только однимъ способомъ на простые множители, то равенство (3) возможно только, если

$$a = 2, b = 5, c = 1, \ldots . l = 1$$

(4) $$\alpha n = m, \beta n = m$$

Равенства (4) показываютъ, что логариѳмъ цѣлаго числа A не можетъ равняться несократимой дроби, ибо на основаніи (4) выходитъ, что m дѣлится на n.

Если мы будемъ предполагать m и n взаимно простыми, то равенства (4) возможны только, если $n = 1$, и мы получаемъ

$$\alpha = \beta = m,$$

такъ что

$$A = 2^m . 5^m = 10^m,$$

и теорема доказана.

§ 37. Итакъ, мы доказали, что логариѳмъ всякаго числа A, непредставляющаго натуральной степени основанія, есть число ирраціональное

$$log A = b_0, b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$$

Цѣлая часть b_0 логариѳма носитъ названіе его характери-

стики. Дробная часть $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ въ смыслѣ послѣдовательности цифръ

$$b_1 b_2 b_3 \ldots$$

называется мантиссой.

Всякій логариѳмъ состоитъ изъ характеристики и мантиссы. Напримѣръ логариѳмъ 0,2375 . . . . имѣетъ характеристику 0 и мантиссу 2375 . . . .

§ 38. Разсмотримъ сначала положительные логариѳмы, то есть логариѳмы чиселъ большихъ единицы, т. е.

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots,$$

гдѣ цѣлая часть не равна нулю.

Существуетъ простое правило для нахожденія характеристики логариѳма числа бо́льшаго единицы.

Характеристика логариѳма числа A большаго единицы, содержитъ столько единицъ, сколько цифръ въ цѣлой части числа A безъ одной.

Напримѣръ, требуется найти характеристику логариѳма числа 4617,2.

Мы имѣемъ неравенства

$$1000 < 4617{,}2 < 10000,$$

отсюда

$$log\, 1000 < log\, 4617{,}2 < log\, 10000,$$

или

$$3 < log\, 4617{,}2 < 4.$$

Итакъ,

$$log\, 4617{,}2 = 3 + \text{полож. прав. дробь.}$$

И, дѣйствительно, вычисленіе показываетъ, что

$$log\, 4617{,}2 = 3{,}66437 \ldots .$$

Пусть вообще

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots$$

причемъ a_0 есть цѣлое число, имѣющее m цифръ, тогда

$$10^{m-1} < a_0 < 10^m;$$

далѣе, очевидно, будетъ

$$10^{m-1} < A < 10^m,$$

или

$$m-1 < \log A < m.$$

Если мы положимъ

$$\log A = b_0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$$

то $b_0 = m-1$, и теорема доказана.

Отрицательныя характеристики.

§ 39. Нетрудно замѣтить, что при умноженіи числа A на 10 въ логариѳмѣ $\log A$ характеристика увеличивается на единицу, ибо

$$\log 10A = \log 10 + \log A = 1 + b_0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots = \\ = (1 + b_0), b_1\, b_2\, b_3 \ldots$$

Напримѣръ,

$$\log 3 = 0{,}477 \ldots$$
$$\log 30 = \log 3 + \log 10 = 0{,}477 \ldots + 1 = 1{,}477 \ldots$$
$$\log 300 = \log 30 + \log 10 = 1{,}477 \ldots + 1 = 2{,}477 \ldots$$

Другими словами, **при умноженіи числа A на 10 мантисса его логариѳма не измѣняется.**

Такъ какъ умноженіе на 10 сопровождается переносомъ запятой на одинъ разрядъ направо, то мы для положительныхъ логариѳмовъ можемъ высказать такую теорему:

Мантисса логариѳма $\log A$ опредѣляется вполнѣ послѣдовательностью значущихъ цифръ числа A и не зависитъ отъ того, гдѣ находится въ этомъ числѣ A запятая.

Напримѣръ,

$$\log 4{,}6112 = 0{,}6638140$$
$$46{,}112 = 1{,}6638140$$
$$461{,}12 = 2{,}6638140$$
$$4611{,}2 = 3{,}6638140$$
$$46112 = 4{,}6638140$$
$$461120 = 5{,}6638140$$

и т. д.

Найдемъ теперь логариѳмъ числа 0,46112, которое меньше единицы. Очевидно, будетъ

$$\log 0{,}46112 = \log \frac{4{,}6112}{10} = \log 4{,}6112 - \log 10 =$$
$$= 0{,}6638140 - 1 = -0{,}336186,$$

логариѳмъ получился, конечно, отрицательный.

Практика показала желательность того, чтобы правило неизмѣняемости мантиссы логариѳма при перенесеніи запятой въ самомъ числѣ, отъ котораго берется логариѳмъ, сохранялось также и для отрицательныхъ логариѳмовъ. Для этой цѣли вводится понятіе объ отрицательной характеристикѣ при сохраненіи положительной мантиссы.

Такъ, напримѣръ, пишутъ

$$\log 0{,}46112 = \bar{1}{,}6638140.$$

Причемъ знакъ $\bar{1}{,}6638140$ обозначаетъ $-1+0{,}6638140$ и показываетъ, что характеристика логариѳма равна -1.

Подобнымъ же образомъ будетъ

$$\log 0{,}046112 = \bar{2}{,}6638140 = -2+0{,}6638140,$$
$$\log 0{,}0046112 = \bar{3}{,}6638140 = -3+0{,}6638140,$$
$$\log 0{,}00046112 = \bar{4}{,}6638140 = -4+0{,}6638140.$$

Отрицательная характеристика содержитъ столько отрицательныхъ единицъ (—1), сколько нулей находится передъ значущими цифрами, считая въ томъ числѣ и о цѣлыхъ (въ числѣ, отъ котораго берется логариѳмъ).

§ 40. Употребленіе отрицательныхъ характеристикъ съ положительной мантиссой потому удобно, что по мантиссѣ логариѳма таблицы даютъ рядъ первыхъ значущихъ цифръ числа, характеристика же показываетъ только, гдѣ надо ставить запятую.

Чтобы показать, какъ начальныя значущія цифры указываютъ мантиссу, приведемъ таблицу всѣхъ двузначныхъ чиселъ отъ 10 до 100 и для каждаго числа укажемъ двѣ цифры соотвѣтственной этому числу мантиссы. (Характеристика для всѣхъ этихъ двузначныхъ чиселъ будетъ, конечно, равна 1).

Число	Мант.	Число	Мант.	Число	Мант.	Число	Мант.	Число	Мант.	Число	Мант.
10	00	25	40	40	60	55	74	70	85.	85	93.
11	04	26	42.	41	61	56	75.	71	85	86	93
12	07	27	43	42	62	57	76.	72	86.	87	94.
13	11	28	45.	43	63	58	76	73	86	88	94
14	15.	29	46	44	64	59	77	74	87.	89	95.
15	18.	30	48.	45	65	60	78.	75	88.	90	95
16	20	31	49	46	66	61	79.	76	88	91	96.
17	23	32	51.	47	67	62	79	77	89.	92	96
18	26.	33	52.	48	68	63	80	78	89	93	97.
19	28.	34	53	49	69	64	81.	79	90.	94	97
20	30	35	54	50	70.	65	81	80	90	95	98.
21	32	36	56.	51	71.	66	82	81	91.	96	98
22	34	37	57.	52	72.	67	83.	82	91	97	99.
23	36	38	58.	53	72	68	83	83	92.	98	99
24	38	39	59	54	73	69	84.	84	92	99	99 (6)

Мы получили такимъ образомъ то, что называется таблицей двузначныхъ логариѳмовъ. Случалось, что нѣкоторые вычислители, которымъ приходилось очень много вычислять по логариѳмамъ, помнили наизусть приведенную таблицу.

Въ таблицѣ поставлены точки при нѣкоторыхъ мантиссахъ. Если при мантиссѣ не поставлена точка, то табличная мантисса даетъ двузначное приближеніе по недостатку, т. е. обѣ цифры, поставленныя въ таблицѣ, суть тѣ, которыя дѣйствительно находятся въ мантиссѣ. Отсутствіе точки показываетъ, что слѣдующая третья (не написанная уже) цифра мантиссы меньше 5. Напримѣръ, при числѣ 42 написана въ таблицѣ мантисса 62, ибо эта мантисса съ бо́льшимъ числомъ знаковъ есть 623249....

Если третья цифра не меньше 5, то въ таблицѣ поставлена мантисса, дающая двузначное приближеніе по избытку, т. е. послѣдняя цифра увеличена на единицу. Напримѣръ, при числѣ 79 написана мантисса 90, ибо эта мантисса съ бо́льшимъ числомъ знаковъ есть 897627....

Такое закругленіе послѣдней цифры имѣетъ цѣлью

сдѣлать табличное число отличающимся отъ истины менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{2}$ послѣдняго табличнаго разряда.

§ 41. Покажемъ напримѣръ, что можно пользоваться уже двузначной таблицей логариѳмовъ, если можно ограничиться малою степенью точности.

Задача. **Найти площадь треугольника по основанію 3,1 метр. и высотѣ 2,5 метр.**

Площадь будетъ выражена въ квадратныхъ метрахъ числомъ

$$x = \frac{1}{2}(3{,}1)\ (2{,}5) = 0{,}5\ .\ 3{,}1\ .\ 2{,}5.$$

Перемножая, мы получимъ точное число 3,875.

Если бы мы захотѣли вычислить по нашей таблицѣ логариѳмовъ, то пришлось бы поступить такъ

$$\begin{aligned} log\ 0{,}50 &= \overline{1}{,}70 \\ log\ 3{,}1\ &= 0{,}49 \\ log\ 2{,}5\ &= 0{,}40 \\ \hline log\ x &= 0{,}59, \end{aligned}$$

откуда по таблицѣ получаемъ

$$x = 3{,}9,$$

что отличается отъ искомаго результата меньше, чѣмъ на половину второй цифры, т.-е. ошибка менѣе пяти сотыхъ.

Если приходится для рѣшенія задачи производить много вычисленій по логариѳмамъ, то ошибка возрастаетъ и можетъ значительно видоизмѣнить послѣднюю цифру. Поэтому для полученія точныхъ нѣсколькихъ цифръ, надо взять логариѳмы съ бóльшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ, если при вычисленіяхъ придется производить много сложеній логариѳмовъ. То же самое можно сказать о возвышеніи чиселъ въ большую степень; ибо тогда логариѳмъ умножается на большое число.

Положимъ, что мы желаемъ по логариѳмамъ вычислить

$$2^{64} = 18446744073709551616.$$

Если бы захотѣли вычислить 2^{64} по нашимъ двузначнымъ логариѳмамъ, то мы не получили бы вѣрныхъ даже двухъ первыхъ цифръ 18 . . . Въ самомъ дѣлѣ,

$$x = 2^{64},$$
$$\log x = 64 \log 2 = 64 \,.\, (0{,}30) = 19{,}20.$$

Характеристика 19 показываетъ, что число x имѣетъ 20 цифръ, что совершенно вѣрно.

Мантисса 20 по таблицѣ соотвѣтствуетъ числу 16 . . . Итакъ, мы видимъ, что первая цифра послѣ запятой числа x получается правильная 1; вторая же 6 оказывается слишкомъ малой.

Если мы возьмемъ чатырехзначную таблицу, то получаемъ

$$\log 2 = \log 2{,}00 = 0{,}3010,$$

тогда по умноженіи на 64 получимъ 19,2640. По таблицѣ антилогариѳмовъ мантиссѣ 264 соотвѣтствуетъ число 1837 . . . Получаются двѣ цифры вѣрныя.

Если мы возьмемъ семизначные логариѳмы, то $\log 2 = 0{,}3010300$. Умножая на 64, получимъ

$$\log 2^{64} = 19{,}2659200,$$

что даетъ $2^{64} = 1844671$. Получаемъ шесть вѣрныхъ первыхъ цифръ.

Такая большая ошибка при вычисленіи первыхъ цифръ числа 2^{64} происходитъ отъ умноженія на большое число 64. Въ самомъ дѣлѣ, ошибка табличнаго логариѳма можетъ доходить въ ту или другую сторону до $^1/_2$ единицы послѣдней цифры. Послѣ умноженія на 64 ошибка можетъ доходить до $^1/_2 \,.\, 64 = 32$ единицы послѣдней цифры. Значитъ въ логариѳмѣ числа 2^{64} нельзя поручиться за двѣ послѣднія цифры.

Если не приходится умножать на большія числа или же не приходится складывать и вычитать большого числа логариѳмовъ, то результатъ вычисленія будетъ хорошимъ въ предѣлахъ точности таблицъ.

Основной принципъ вычисленія по логариѳмамъ состоитъ въ томъ, чтобы слѣдить за накопленіемъ ошибокъ, слѣдовательно, за тѣмъ, сколько цифръ полученнаго результата можно считать вѣрными.

Интерполированіе.

§ 42. Разсмотримъ таблицу четырехзначныхъ логариѳмовъ, приложенную въ концѣ книги. Въ этой таблицѣ мы видимъ, напримѣръ, для трехъ чиселъ

(1) 350, 351, 352

мантиссы

$$5441,\quad \underbrace{5453,\quad 5465}_{12\qquad 12}$$

Такъ какъ разности мантиссъ одинаковы, то можно считать, что мантиссы въ границахъ между числами (1) измѣняются пропорціонально.

Дадимъ числу 350 приращеніе α, равное правильной дроби; пусть мантисса 5441 получитъ приращеніе β, то можно написать пропорцію

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{1}, \tag{2}$$

откуда

$$\beta = \alpha \,.\, 12.$$

Пусть требуется найти мантиссу, соотвѣтствующую числу

(3) 350,47,

тогда $\alpha = 0{,}47$, и мы получаемъ

$$\beta = 12 \,.\, 0{,}47 = 5{,}64;$$

закругляя, получимъ $\beta = 6$. Мантисса числа (3) получается въ видѣ $5441 + \beta = 5447$.

Настоящій логариѳмъ числа (3) имѣетъ видъ

$$log\, 350{,}37 = 2{,}54465\ldots.$$

Итакъ, мы видимъ, что найденная нами мантисса 5447 можетъ считаться правильной.

§ 43. Задача, которую мы рѣшили въ предыдущемъ параграфѣ, состоитъ въ томъ, чтобы по двумъ рядомъ стоящимъ въ таблицѣ числамъ найти число n промежуточное, носитъ названіе задачи интерполированія. Это есть основная задача пользованія всякими таблицами величинъ непрерывно измѣняющихся.

Мы примѣняли способъ, такъ называемаго, пропорціональнаго интерполированія, ибо предполагали, что въ границахъ между двумя рядомъ стоящими табличными значеніями мантисса измѣняется пропорціонально измѣненію числа.

§ 44. Итакъ, если заданы таблицы съ нѣкоторымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, напримѣръ, четырехзначныя, то вычисленіе по нимъ вводитъ при интерполированіи слѣдующія погрѣшности:

1^0., сама мантисса чиселъ табличныхъ невѣрна, ибо откинуты всѣ цифры, слѣдующія за четвертой, 2^0., пропорціональное интерполированіе въ основѣ неправильно, ибо мантисса не измѣняется на самомъ дѣлѣ пропорціонально измѣненію числа и 3^0., при вычисленіи приращенія β мантиссы мы закругляли его, отбрасывая цифры.

Въ томъ отдѣлѣ высшей математики, который называется теоріей конечныхъ разностей, обсуждается подробно вопросъ о погрѣшности пропорціональнаго интерполированія не только для случая логариѳмическихъ таблицъ, но также и для всякихъ таблицъ.

Всѣ таблицы логариѳмовъ составлены такъ, чтобы пропорціональное интерполированіе давало бы правильные результаты въ предѣлахъ точности таблицъ.

Оказывается, что для надежности пропорціональнаго интерполированія необходимо достаточно густо составить таблицу. При переходѣ отъ четырехзначныхъ логариѳмовъ къ пятизначнымъ необходимо въ таблицу вставить промежуточныя мантиссы. Такъ, напримѣръ, какъ видно изъ прилагаемой таблицы, при четырехзначныхъ логариѳмахъ достаточно дать таблицу мантиссъ для всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 100 до 999.

Мы видимъ въ таблицѣ двѣ рядомъ стоящія мантиссы.

Число	Мантисса	Число	Мантисса
373	5717	374	5729

Въ пятизначныхъ таблицахъ между этими мантиссами вставлено 9 новыхъ мантиссъ

373,0	57171
373,1	57183
373,2	57194
373,3	57206
373,4	57217
373,5	57229
373,6	57241
373,7	57251
373,8	57264
373,9	57276
374,0	57287

Мы видимъ, слѣдовательно, что достиженіе большей густоты таблицы пятизначной состоитъ во вставкѣ между каждыми двумя числами четырехзначной

таблицы девяти новыхъ чиселъ. Другими словами, мы видимъ, что пятизначная таблица составляется изъ мантиссъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ четырехзначнымъ цѣлымъ числамъ отъ 1000 до 9999.

Семизначныя таблицы составляются изъ мантиссъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ цѣлымъ пятизначнымъ числамъ отъ 10000 до 99999.

§ 45. Въ § 42 показано, какъ при помощи пропорціональнаго интерполированія найти мантиссу для числа промежуточнаго.

Такъ какъ четырехзначные логариѳмы занимаютъ мало мѣста (всего двѣ страницы) то для нахожденія по заданной мантиссѣ числа практичнѣе построить особую таблицу, которая приведена въ концѣ книги подъ названіемъ „таблицы антилогариѳмовъ“, которую приходится употреблять тѣмъ же способомъ.

Напримѣръ, возьмемъ тотъ же примѣръ, что и въ § 42 (стр. 233). Требуется по данному логариѳму 2,5447 найти соотвѣтственное число. Смотримъ таблицу антилогариѳмовъ. Мы видимъ, что мантисса 5447 заключается между двумя табличными 544 и 545, которыя даютъ

Мантисса	Число	Мантисса	Число
544	3499	545	3508

Разность $3508-3499=9$. Дробь α, которая прибавляется къ мантиссѣ 544 для полученія заданной 5447, будетъ $\alpha=0{,}7$. Умножая, получаемъ $9.0{,}7=6{,}3$; закругляя, получимъ 6. Отсюда искомое число будетъ $3499+6=3505$. Но характеристика 2 показываетъ, что въ полученномъ числѣ надо запятою отдѣлить 3 цифры слѣва, и мы получимъ

$$2{,}5447=log\ 350{,}5,$$

что сходится съ вычисленіями § 42 (стр. 233).

§ 46. Такъ какъ при точности, соотвѣтствующей числу знаковъ большему, чѣмъ 4, таблицы логариѳмовъ принимаютъ уже значительные размѣры, то составленіе таблицъ антилогариѳмовъ перестаетъ быть практичнымъ, ибо та же самая таблица, которая даетъ по числу мантиссу, годится и для обратной задачи нахожденія по мантиссѣ числа.

Въ предыдущемъ §-ѣ мы нашли число по его логариѳму 2,5447, пользуясь таблицей антилогариѳмовъ. Можно было бы это число найти и по основной таблицѣ логариѳмовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, просмотрѣвъ эту таблицу, мы замѣчаемъ,

что заданная мантисса лежитъ между двумя табличными мантиссами 5441 и 5453:

Число	Мантисса	Число	Мантисса
350	5441	351	5453

Возвращаясь къ пропорціи (2) § 42

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{1},$$

мы замѣчаемъ, что намъ извѣстно число β, ибо

$$\beta = 5447 - 5441 = 6;$$

тогда изъ пропорціи получается $\alpha = 0{,}5$, и искомое число будетъ $350 + \alpha$, т. е. 350,5, что совпадаетъ съ результатомъ, полученнымъ по антилогариѳмамъ.

§ 47. Для умноженія разности между рядомъ стоящими мантиссами таблицы на α, существуютъ въ таблицахъ съ большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ особенныя вспомогательныя таблички, указанныя литерами P. P. (partes proportionales).

Напримѣръ, на страницѣ семизначныхъ логариѳмовъ Бремикера, гдѣ находятся числа между 64000—64509, можно видѣть такую вспомогательную табличку

	68
1	6,8
2	13,6
3	20,4
4	27,2
5	34,0
6	40,8
7	47,6
8	54,4
9	61,2

Если понадобится умножить табличную разность 68 на какую нибудь правильную дробь, напр., на $\alpha = 0{,}372$, то придется брать отъ таблички числа

0.3	20.4	
0.07	4.76	
0.002	.136 . . .	это число не имѣетъ значенія
	24.296,	

или, закругляя, получимъ 24.

Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательными характеристиками.

§ 48. Сложеніе и вычитаніе не представляетъ трудности

$\bar{3},5789$	$\bar{4},7832$	$2,1726$	$\bar{4},1375$
$+ 2,6075$	$+ \bar{2},3421$	$- \bar{3},2190$	$- \bar{2},8103$
$0,1864$	$\bar{5},9253$	$4,9536$	$\bar{3},3272.$

При умноженіи логариѳма съ отрицательной характеристикой на натуральное число, можно отдѣльно умножить характеристику и мантиссу

$$(\overline{3},4723).\ 16 = (-3).\ 16 + (0,4723).\ 16 =$$
$$= -48 + 7,5568 = \overline{41},5568.$$

При дѣленіи на натуральное число, надо различать два случая: 1°., когда характеристика дѣлится, и 2°., когда характеристика не дѣлится.

Въ первомъ случаѣ можно отдѣльно дѣлить характеристику и мантиссу

$$(\overline{8},7563) : 4 = (-8 + 0,7563) : 4 = -2 + 0,1891 =$$
$$= \overline{2},1891.$$

Если характеристика не дѣлится, то необходимо добавить къ ней нѣсколько единицъ до ближайшаго числа, дѣлящагося на дѣлителя:

$$(\overline{7},5624) : 5 = (-10 + 3,5624) : 5 = -2 + 0,7125 =$$
$$= \overline{2},7125.$$

При умноженіи логариѳма съ отрицательной характеристикой на ирраціональное число лучше перейти къ отрицательному логариѳму

$$(\overline{2},7561).\sqrt{2} = (-2 + 0,7561).\sqrt{2} = -(2 - 0,7561)\sqrt{2} =$$
$$= -1,2439.\sqrt{2};$$

абсолютную величину этого числа можно вычислить опять по логариѳмамъ.

§ 49. При вычисленіи сложнаго выраженія приходится нѣкоторые логариѳмы складывать, другіе вычитать. Напр., пусть требуется вычислить выраженіе

$$x = \frac{0,25.\sqrt[5]{3}}{17.\sqrt[7]{5137}}.$$

Логариѳмируя, получимъ

$$\log x = \log 0,25 + \frac{1}{5}\log 3 - \log 17 - \frac{1}{7}\log 5137.$$

Будемъ вычислять по четырехзначной таблицѣ

$$\log 0,25 = \bar{1},3979$$
$$\log 3 = 0,4771$$
$$\frac{1}{5}\log 3 = 0,0954$$
$$\log 17 = 1,2304$$
$$\log 5137 = 3,7107$$
$$\frac{1}{7}\log 5137 = 0,5301$$

$$\begin{array}{rr} & \log 0,25 = \bar{1},3979 \\ + & \frac{1}{5}\log 3 = 0,0954 \\ \hline & \bar{1},4933 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \log 17 = 1,2304 \\ + & \frac{1}{7}\log 5137 = 0,5301 \\ \hline & 1,7605 \end{array}$$

Далѣе вычитаемъ

$$\begin{array}{r} \bar{1},4933 \\ 1,7605 \\ \hline \bar{3},7328 = \log x. \end{array}$$

Отсюда по таблицѣ антилогариѳмовъ получимъ

$$x = 0{,}005405$$

§ 50. Требуется вычислить

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{1567} + \sqrt{3252}}.$$

Эта формула не удобна для логариѳмированія. Надо вычислить сначала сумму $\sqrt{1567} + \sqrt{3252}$; вычисляя отдѣльно $\sqrt{1567}$ и $\sqrt{3252}$, получимъ

$$\log 1567 = 3,1951,$$
$$\frac{1}{2}\log 1567 = 1,5976, \quad \text{отсюда } \sqrt{1567} = 39,59.$$
$$\log 3252 = 3,5122$$
$$\frac{1}{2}\log 3252 = 1,7561, \quad \text{отсюда } \sqrt{3252} = 57,03.$$

Складывая, получимъ

$$x = \sqrt[3]{39,59 + 57,03} = \sqrt[3]{96,62}.$$

Логариѳмируя, получимъ

$$\log x = \frac{1}{3}\log 96,62 = 0,6617,$$

откуда

$$x = 4,589.$$

Показательныя и логариѳмическія уравненія.

§ 51. **Показательными** уравненія называются въ томъ случаѣ, если неизвѣстная x входитъ въ показателяхъ.

Логариѳмическими уравненія называются въ томъ случаѣ, если неизвѣстная x входитъ подъ знакомъ логариѳма.

Если считать относящимися къ элементарной алгебрѣ тѣ уравненія, которыя приводятся къ первой и второй степени, то выборъ для задачъ на уравненія показательныя и логариѳмическія не можетъ быть великъ.

Приведемъ нѣсколько задачъ подобнаго рода, обыкновенно предлагаемыхъ.

§ 52. Рѣшить уравненіе

$$a^{2x} + pa^{x} + q = O,$$

предполагая, конечно, $a > O$.

Обозначая $a^x = y$, приходимъ къ квадратному уравненію

(1) $$y^2 + py + q = O.$$

Если это квадратное уравненіе не дастъ для y положительныхъ корней, то нельзя найти соотвѣтственныхъ значеній x. Всякому же положительному корню y уравненія (1) соотвѣтствуетъ x, опредѣляемое по формулѣ

$$x \log a = \log y$$

или

$$x = \frac{\log y}{\log a}.$$

Напримѣръ, пусть задано уравненіе

$$2^{2x+1} - 9.2^{x-1} + 1 = 0;$$

полагая $2^x = y$, получимъ квадратное уравненіе

$$2y^2 - \frac{9}{2}y + 1 = 0;$$

корни этого уравненія будутъ

$$y = 2 \text{ и } y = \frac{1}{4}.$$

Тогда изъ уравненій

$$2^x = 2; \quad 2^x = \frac{1}{4},$$

получимъ для x два значенія $x = 1, x = -2$.

§ 53. Какъ примѣръ логариѳмическихъ уравненій, можно указать уравненіе

$$log(a+x) + log(b+x) = log(c+x).$$

Это уравненіе можно переписать такъ

$$log\{(a+x)\ (b+x)\} = log(c+x).$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получимъ

$$(a+x)\ (b+x) = c+x;$$

это уравненіе есть обыкновенное квадратное.

§ 54. Иногда помогаетъ при рѣшеніи логариѳмированіе уравненія. Пусть задана для рѣшенія система

$$\begin{aligned} xy &= a, \\ log\,x\,log\,y &= b, \end{aligned} \tag{1}$$

Логариѳмируя первое уравненіе, получимъ

$$log\,x + log\,y = log a.$$

Если введемъ новыя неизвѣстныя

$$log\,x = u,\ log y = v,$$

то приходимъ къ системѣ

$$u + v = log a,\ u\,v = b,$$

которая рѣшается просто.

§ 55. Требуется рѣшить въ положительныхъ числахъ уравненіе

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x, \tag{1}$$

гдѣ $\sqrt{x}$ есть ариѳметическій корень.

Логариѳмируя уравненіе (1), получаемъ

$$\sqrt{x}\ log\ x = x\frac{1}{2}\ log\ x\,. \tag{2}$$

Намъ желательно сократить это уравненіе на $log\ x$, но это возможно сдѣлать только въ томъ случаѣ, если $log\ x$ не равенъ нулю. Поэтому мы прежде должны разсмотрѣть случай, когда $log\ x = 0$, и когда, слѣдовательно, раздѣлить уравненіе (2) на $log\ x$ нельзя. Но въ этомъ исключительномъ случаѣ получаемъ $x = 1$, что даетъ одинъ изъ корней уравненія. Оставивъ въ сторонѣ этотъ случай и не предполагая, слѣдовательно, $log\ x$ равнымъ нулю, получимъ

$$\sqrt{x} = x \cdot \frac{1}{2},$$

или возвышая въ квадратъ, получимъ

$$x = 4.$$

§ 56. Требуется рѣшить уравненіе

(1) $$3^{2^x} = 6561$$

Попробуемъ рѣшить при помощи логариѳмическихъ таблицъ. Логариѳмируемъ уравненіе (1)

$$2^x\ log\ 3 = log\ 6561.$$

Отсюда

$$2^x = \frac{log\ 6561}{log\ 3} = \frac{3,8170}{0,4771} = \frac{38170}{4771}.$$

Логариѳмируя еще разъ, получимъ

$$x\ log\ 2 = log\ 38170 - log\ 4771;$$

$$x = \frac{4,5816 - 3,6786}{0,3010} = \frac{0,9030}{0,3010} = 3.$$

Хотя нельзя еще заключать, что корень x равенъ цѣлому числу 3, ибо мы пользовались приближенными значеніями логариѳмовъ, но догадку такую сдѣлать можно. Дѣйствительно, заданное уравненіе (1) удовлетворяется при $x = 3$.

Сложные проценты и срочныя уплаты.

§ 57. Если имѣется пропорція

$$\frac{p}{100} = \frac{B}{A},$$

гдѣ p, A и B положительныя числа, то говорятъ, что число B представляетъ изъ себя p процентовъ числа A, что обозначается знакомъ $p\%$.

Получаемъ

$$B = A \cdot \frac{p}{100}.$$

§ 58. Особенно часто терминъ проценты примѣняется къ разсмотрѣнію нарашенія капитала съ теченіемъ времени. Пусть годовое нарашеніе единицы капитала, за которую возьмемъ, напримѣръ, рубль, будетъ составлять $p\%$ съ этой единицы. Очевидно, что это нарашеніе будетъ равно p коп., ибо это нарашеніе выразится въ рубляхъ числомъ

$$\frac{p}{100} \text{ руб.}$$

Одинъ рубль обращается, слѣдовательно, при p процентахъ въ

$$1 + \frac{p}{100}.$$

Будемъ обозначать годовое приращеніе рубля $\frac{p}{100}$ буквой i (interes). Значитъ, одинъ рубль обращается черезъ годъ въ $1+i$, а капиталъ въ A рублей обратится въ

$$A\,(1+i).$$

§ 59. Если мы перейдемъ теперь къ вопросу о томъ, какое нарашеніе долженъ имѣть капиталъ въ нѣсколько лѣтъ—въ n лѣтъ, то увидимъ, что практика выработала два способа отвѣта на вопросъ.

Одинъ отвѣтъ представляетъ, такъ называемые, простые проценты. По простымъ процентамъ считается, что нарашеніе рубля въ n лѣтъ должно быть пропорціонально числу n и должно равняться ni, такъ что одинъ рубль по простымъ процентамъ долженъ обратиться въ n лѣтъ въ

$$1 + ni, \tag{1}$$

а весь капиталъ A обращается въ

$$A\,(1+ni).$$

Формула (1) примѣняется какъ къ цѣлому, такъ и къ дробному числу n.

Отрицательныя значенія примѣняются въ вопросахъ объ учетѣ векселей.

§ 60. Другой отвѣтъ вопроса о наращеніи капитала представляютъ такъ называемые **сложные проценты или иначе проценты на проценты.** По этимъ процентамъ предполагается, что по истеченіи года капиталъ, подверженный наростанію, есть не первоначальный A, а наращенный за годъ $A(1+i)$. Значитъ, наращенный за второй годъ капиталъ будетъ

$$\{A(1+i)\}(1+i) = A(1+i)^2.$$

Если n число цѣлое, то капиталъ A обратится черезъ n лѣтъ по сложнымъ процентамъ въ

$$A(1+i)^n,$$

а одинъ рубль въ

$$(1) \qquad (1+i)^n.$$

Послѣднюю формулу можно было бы, конечно, примѣнять и къ дробному числу лѣтъ. Сравнивъ формулу (1) § 59 и формулу (1) настоящаго параграфа, мы замѣтимъ, что на основаніи неравенствъ, доказанныхъ въ §§ 37 и 38 главы XI (стр. 199), при числѣ n лѣтъ, бо́льшемъ одного года, наращеніе по сложнымъ процентамъ больше наращенія по простымъ

$$(1+i)^n > 1+ni.$$

При $n<1$ существуетъ формула обратная

$$(1+i)^n < 1+ni.$$

§ 61. При разсмотрѣніи дробнаго числа лѣтъ

$$n = m+k,$$

гдѣ m цѣлая часть числа n, а k положительная правильная дробь, можетъ быть примѣненъ смѣшанный способъ. Можно приращать капиталъ за цѣлую часть m лѣтъ по сложнымъ процентамъ, а за дробную часть k по простымъ; мы получаемъ

$$A(1+i)^m(1+ki).$$

На основаніи неравенства

$$1 + ki > (1 + i)^k$$

мы замѣчаемъ, что смѣшанный способъ наращенія даетъ бо́льшій результатъ, чѣмъ чистое примѣненіе сложныхъ процентовъ

$$A\ (1 + i)^{m+k},$$

для дробнаго числа лѣтъ.

§ 62. Разсмотримъ, во что обратится капиталъ въ 1000 рублей черезъ 20 лѣтъ по 4 сложнымъ процентамъ.

Надо будетъ вычислить число

$$x = 1000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{20} = 1000 \,.\, (1{,}04)^{20}.$$

Логариѳмируя, получимъ

$$\log x = \log 1000 + 20 \log 1{,}04.$$

Примѣняя четырехзначную таблицу логариѳмовъ, получимъ

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170,$$
$$20 \log 1{,}04 = 0{,}3400,$$

откуда, переходя къ числамъ, получимъ $(1{,}04)^{20} = 2{,}188$, и находимъ

$$x = 2188.$$

Такъ какъ логариѳмъ числа 1,04 умножается на 20, то табличная ошибка $\frac{1}{2}$ послѣдней цифры умножается на 20. Получаемъ ошибку, не превосходящую $20 \,.\, \frac{1}{2} = 10$, поэтому ручаться за двѣ послѣднія цифры нельзя.

Примѣняя восьмизначные логариѳмы, мы получаемъ

2191 руб. 12 коп.

Итакъ, мы видимъ, что въ финансовыхъ вычисленіяхъ потребны логариѳмы съ бо́льшимъ числомъ знаковъ. Полезна кромѣ того таблица логариѳмовъ процентнаго наращенія $1 + \frac{p}{100}$ для наиболѣе употребительной таксы процентовъ p. Мы даемъ здѣсь эти логариѳмы съ 10 знаками

p	$1+\frac{p}{100}$	$log\left(1+\frac{p}{100}\right)$
2	1,0200	0,008 600 171 8
2¼	1,0225	0,009 663 316 7
2½	1,0250	0,010 723 865 4
2¾	1,0275	0,011 781 830 5
3	1,0300	0,012 837 224 7
3¼	1,0325	0,013 890 060 3
3½	1,0350	0,014 940 349 8
3¾	1,0375	0,015 988 105 4
4	1,0400	0,017 033 339 3

Однако необходимо замѣтить, что непосредственное вычисленіе прироста капитала мало имѣетъ значенія на практикѣ, ибо существуютъ таблицы, дающія сразу этотъ приростъ.

Срочныя уплаты.

§ 63. Мы будемъ разсматривать уплаты одной и той же суммы денегъ A, производимыя въ извѣстные сроки. Мы ограничимся случаемъ, когда уплата эта производится каждый годъ, причемъ мы будемъ различать два случая, когда уплата производится въ началѣ каждаго года (praenumerando), и когда уплата производится въ концѣ года (postnumerando). Цѣль такихъ уплатъ можетъ быть двоякая:

1.°, **образованіе сбереженія**, напримѣръ, при помощи кредитныхъ или сберегательныхъ учрежденій; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло со срочными взносами или вкладами,

2.°, **погашеніе долга**; тогда мы имѣемъ дѣло со срочной уплатой этого долга.

§ 64. **Нѣкто вноситъ въ банкъ ежегодно praenumerando одну и ту же сумму A рублей. Спрашивается, какой капиталъ образуется черезъ n лѣтъ, если банкъ платитъ по p сложныхъ процентовъ.**

Обозначая черезъ i число $\frac{p}{100}$ и принимая во вниманіе, что вклады производятся въ началѣ года, разсмотримъ, какой обра-

зуется капиталъ, если ежегодно будетъ внесенъ вкладъ, равный одному рублю.

Къ концу перваго года мы получимъ $1+i$. Въ началѣ второго года присоединится второй взносъ рубля, и мы получимъ $(1+i)+1$; въ концѣ второго года произойдетъ измѣненіе капитала въ сумму

$$\{(1+i)+1\}(1+i)=(1+i)^2+(1+i).$$

Къ концу третьяго года получимъ

$$(1+i)^3+(1+i)^2+(1+i),$$

и т. д., наконецъ, къ концу n-го года будемъ имѣть

$$(1)\qquad (1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\ldots+(1+i)^2+(1+i).$$

На основаніи теоремы Безу (§ 39 главы IV, стр. 47) выраженіе (1) можно написать такъ

$$(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}=\frac{1+i}{i}\left\{(1+i)^n-1\right\}.$$

При ежегодномъ вкладѣ A образуется капиталъ

$$A\frac{1+i}{i}\left\{(1+i)^n-1\right\}.$$

§ 65. Задача. **Нѣкто занялъ B рублей по $p^0/_0$ съ условіемъ погасить долгъ вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами въ n лѣтъ, внося каждый годъ postnumerando одну и ту же сумму. Какова должна быть эта сумма?**

Обозначимъ черезъ x искомую срочную уплату. Къ концу перваго года долгъ B возрастаетъ и будетъ равенъ $B(1+i)$, но зато произойдетъ уплата x этого долга, и, слѣдовательно, долгъ будетъ выражаться числомъ

$$B(1+i)-x.$$

Въ концѣ второго года получимъ величину долга

$$\{B(1+i)-x\}(1+i)-x,$$

или иначе

$$B(1+i)^2-x(1+i)-x.$$

Въ концѣ n-го года долгъ будетъ выражаться по формулѣ

$$(1)\quad B(1+i)^n-x(1+i)^{n-1}-x(1+i)^{n-2}-\ldots.-x(1+i)-x.$$

Если долгъ погашается въ концѣ n-го года, то выраженіе (1) должно равняться нулю, и мы приходимъ къ уравненію первой степени относительно x:

$$B(1+i)^n - x\{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1\} = 0,$$

или иначе

$$B(1+i)^n = x\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1},$$

или окончательно

$$x = \frac{B(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1},$$

и задача рѣшена.

Практическіе совѣты относительно вычисленій по логаріѳмамъ.

§ 66. При большихъ и продолжительныхъ вычисленіяхъ по логаріѳмамъ, каковыми, напримѣръ, являются астрономическія вычисленія, выработались нѣкоторые навыки и пріемы, имѣющіе практическое значеніе.

Употребленіе отрицательныхъ характеристикъ очень удобно для изложенія теоріи логаріѳмовъ, но оказалось на практикѣ не столь хорошимъ. Практика выработала новый способъ писанія логаріѳмовъ, который называется способомъ дополнительныхъ характеристикъ. По этому способу прибавляется число 10 къ отрицательной характеристикѣ, если абсолютная ея величина меньше 10, мантисса же попрежнему оставляется положительной.

Такъ, напримѣръ, вмѣсто логаріѳма

$$\bar{2},3405$$

пишется

$$8,3405, \text{ ибо } 8 = (-2+10).$$

Можетъ подняться вопросъ о томъ, что логаріѳмъ съ дополнительной характеристикой можно смѣшать съ обыкновеннымъ логаріѳмомъ съ положительной характеристикой.

Такое смѣшеніе однако маловѣроятно; напримѣръ, если дѣло идетъ о числѣ рублей, то логаріѳмъ съ дополнительной характеристикой

(1) $9,3010$

равносиленъ съ логариѳмомъ числа 0,2, ибо онъ равносиленъ съ $\bar{1},3010$.

Если же подъ знакомъ разумѣется обыкновенный логариѳмъ, то тогда

$$9,3010 = log\ (2.000.000.000).$$

Ясное дѣло, что никакой вычислитель не смѣшаетъ 20 коп. съ двумя милліардами рублей.

Теперь является вопросъ о возможности характеристикъ больше десяти. Логариѳмы съ такими большими характеристиками опять таки имѣютъ мало практическаго значенія.

Напримѣръ, разсматривая четырехзначныя таблицы, мы получимъ по этимъ таблицамъ

$$0,1629 = log\ 1,455.$$

Если мы разсмотримъ рядъ логариѳмовъ съ такими же мантиссами, но различными характеристиками, положительными и дополнительными.

$5,1629 = log\ 145500,0\ .\ .\ .$
$4,1629 = log\ 14550,0\ .\ .\ .$
$3,1629 = log\ 1455,0\ .\ .\ .$
$2,1629 = log\ 145,5\ .\ .\ .$
$1,1629 = log\ 14,55\ .\ .\ .$
$0,1629 = log\ 1,455\ .\ .\ .$
$9,1629 = log\ 0,1455\ .\ .\ .$
$8,1629 = log\ 0,01455\ .\ .\ .$
$7,1629 = log\ 0,001455\ .\ .\ .$
$6,1629 = log\ 0,0001455\ .\ .\ .$

то мы замѣтимъ, что имѣютъ непосредственно практическое значеніе только характеристики

(1) 3, 2, 1, 0, $\underbrace{9, 8, 7, 6}$
дополнительныя

ибо при вычисленіяхъ по четырехзначнымъ логариѳмамъ за пятую цифру никогда поручиться нельзя, а часто и четвертая цифра перестаетъ быть заслуживающей довѣрія.

При положительныхъ характеристикахъ бóльшихъ, чѣмъ 3, числа слишкомъ велики, чтобы трактовать ихъ по четырехзнач-

нымъ логариѳмамъ, а при дополнительныхъ характеристикахъ меньшихъ 6 они слишкомъ малы.

Для семизначныхъ логариѳмовъ рядъ (1) удобныхъ для практики характеристикъ увеличивается на нѣсколько членовъ въ обѣ стороны.

§ 67. Практическое значеніе употребленія дополнительныхъ характеристикъ состоитъ въ томъ, что при дѣйствіяхъ можно съ этими характеристиками обращаться, какъ съ обыкновенными положительными, если **принять въ соображеніе нѣсколько дополнительныхъ простыхъ правилъ.**

Начнемъ со сложенія двухъ логариѳмовъ

(1)
2,7563 . . . съ обык. характ.
9,5970 . . . съ допол. характ.

Замѣняя дополнительную характеристику отрицательною, мы получимъ

$$\begin{array}{r} 2{,}7562 \\ \bar{1}{,}5970 \\ \hline 2{,}3533. \end{array}$$

Складывая логариѳмы (1), какъ обыкновенныя числа, получимъ

12,3533.

Для полученія настоящаго логариѳма, надо откинуть цифру десятковъ 1

2,3533 . . . съ обыкн. характ.

Разсмотримъ еще одинъ примѣръ

1,7625 . . . съ обыкн. характ.
7,6305 . . . съ допол. характ.

Складывая, какъ обыкновенныя числа, получимъ логариѳмъ

9,3930 . . . съ дополн. характ.

При вычитаніи приходится логариѳмы съ дополнительными характеристиками вычитать, какъ обыкновенныя числа, если это вычитаніе возможно. Если же вычитаемое, разсматриваемое, какъ обыкновенное число, больше уменьшаемаго, разсматриваемаго, какъ обыкновенное число, то надо прибавить единицу въ разрядѣ десятковъ характеристики уменьшаемаго.

Напримѣръ,

1°., $\begin{array}{r} 9{,}6541 \ldots \text{съ доп. характ.} \\ -\ 9{,}5026 \ldots \text{съ доп. характ.} \\ \hline \text{Результ. вычит. } 0{,}1515 \ldots \text{съ обык. характ.} \end{array}$

2°., $\begin{array}{r} 9{,}6730 \ldots \text{съ дополн. характ.} \\ -\ 2{,}6953 \ldots \text{съ обык. характ.} \\ \hline \text{Результ. выч. } 6{,}9777 \ldots \text{съ доп. характ.} \end{array}$

3°., $\begin{array}{r} 8{,}7635 \ldots \text{съ дополн. характ.} \\ -\ 9{,}5312 \ldots \text{съ дополн. характ.} \end{array}$

Прибавляемъ къ уменьшаемому 10, получимъ

$\begin{array}{r} 18{,}7635 \\ -\ 9{,}5312 \\ \hline \text{Результ. выч. } 9{,}2323 \ldots \text{съ доп. характ.} \end{array}$

4°., $\begin{array}{r} 2{,}0371 \ldots \text{съ обык. харак.} \\ -\ 3{,}3026 \ldots \text{съ обык. харак.} \end{array}$

Прибавляя къ уменьшаемому 10, получимъ

$\begin{array}{r} 12{,}0375 \\ -\ 3{,}3026 \\ \hline 8{,}7349 \ldots \text{съ доп. характ.} \end{array}$

§ 68. При умноженіи на цѣлое число надо умножать, какъ обыкновенныя числа и откидывать десятки.

Напримѣръ,

$\begin{array}{r} 9{,}7431 \ldots \text{съ доп. характ.} \\ \times\quad 3 \\ \hline 29{,}2293 = 9{,}2293 \ldots \text{съ доп. характ.} \end{array}$

§ 68. Чтобы раздѣлить логариѳмъ съ дополнительной характеристикой на натуральное число n, надо добавить $n-1$ десятковъ и производить дѣленіе по обыкновеннымъ правиламъ.

Напримѣръ,

$$\frac{9{,}7345}{1} = \frac{09{,}7345}{1} = 9{,}7345,$$

$$\frac{9{,}7345}{2} = \frac{19{,}7345}{2} = 9{,}8672,$$

$$\frac{9,7345}{3} = \frac{29,7345}{3} = 9,9115,$$

$$\frac{9,7345}{4} = \frac{39,7345}{4} = 9,9338, \text{ и т. д.}$$

Это правило основывается на томъ, что логариѳмъ 9,7345 есть въ сущности разность $-10+9,7345$. Чтобы дѣлить на 4, можно разсуждать такъ

$$\frac{-10+9,7345}{4} = \frac{-40+39,7345}{4} = -10+9,9338.$$

§ 69. При продолжительныхъ вычисленіяхъ является очень важнымъ вопросъ о неизбѣжныхъ ошибкахъ.

Для контроля вѣрности вычисленій принято продолжительныя вычисленія производить вдвоемъ.

Для уменьшенія поводовъ къ ошибкамъ вычислитель долженъ составить такую схему вычисленій, при которой было-бы извѣстное однообразіе въ дѣйствіяхъ.

Такъ, напримѣръ, если приходится складывать нѣсколько логариѳмовъ, то при длинныхъ вычисленіяхъ считается болѣе практичнымъ придавать, а также вычитать логариѳмы послѣдовательно по одному, ибо тогда вычислитель привыкаетъ къ операціи сложенія или вычитанія, относящимся къ двумъ логариѳмамъ; онъ эту операцію производитъ болѣе увѣренно и съ меньшимъ поводомъ для ошибокъ. Когда дѣло идетъ о короткомъ небольшомъ вычисленіи по логариѳмамъ, то безразлично, какъ вычислять, и, быть можетъ, представляетъ удобство сложить сразу нѣсколько логариѳмовъ и даже замѣнить вычитаемые логариѳмы ими обратными.

§ 70. Какъ показываетъ опытъ, играетъ большую роль аккуратное каллиграфическое писаніе цифръ, ибо при небрежности писанія появляются случаи возможности ошибокъ.

Даже выработался обычай складывать и вычитать слѣва направо, ибо писаніе въ этомъ порядкѣ цифръ соотвѣтствуетъ привычкѣ писать у европейскихъ народовъ; цифры ложатся одна за другой болѣе четко. Въ этомъ же смыслѣ полезно дѣлать логариѳмическія вычисленія на особо разграфленной бумагѣ.

ГЛАВА XIV.

Алгориѳмъ Эвклида и непрерывныя дроби.

Общій наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ чиселъ.

§ 1. Для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ существуетъ простой и замѣчательный способъ, указанный еще въ книгѣ „Начала“ (Στοίχεια) древнегреческаго математика Эвклида. Этотъ способъ можно назвать алгориѳмомъ, если подъ терминомъ „алгориѳмъ“ разумѣть всякую послѣдовательность дѣйствій, выполняя которыя, мы рѣшаемъ какую-нибудь задачу.

§ 2. Итакъ, поставимъ себѣ задачей, найти всѣ общіе дѣлители двухъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ a и b. Здѣсь мы возвращаемся къ ариѳметическому понятію о дѣлимости двухъ цѣлыхъ чиселъ. Мы говоримъ, что цѣлое число a дѣлится нацѣло на число d, если существуетъ равенство $a = dc$, гдѣ c также цѣлое число.

Пусть изъ двухъ заданныхъ чиселъ a и b, общіе дѣлители которыхъ надо найти, число a больше, чѣмъ b.

Пробуемъ дѣлить a на b; если a дѣлится на b, то, очевидно, что всякій дѣлитель числа b есть въ то же время и дѣлитель числа a, причемъ b будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ обоихъ чиселъ a и b.

Обращаемся къ случаю, когда a не дѣлится на b. Производя дѣленіе по правиламъ элементарной ариѳметики, приходимъ къ нѣкоторому частному q_1 и остатку r_1. Тогда получимъ равенство

$$a = bq_1 + r_1. \tag{1}$$

Меньшее изъ заданныхъ чиселъ b будемъ дѣлить на первый остатокъ r_1 и обозначимъ черезъ q_2 и r_2 частное и остатокъ этого дѣленія. Получаемъ

$$b = r_1q_2 + r_2. \tag{2}$$

Продолжая первый остатокъ r_1 дѣлить на второй остатокъ, приходимъ къ новому равенству

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \tag{3}$$

гдѣ r_3 новый остатокъ.

Остатки r_1, r_2, r_3, . . . при такомъ послѣдовательномъ дѣле-

ніи слѣдуютъ убывая. Такъ какъ **чиселъ цѣлыхъ положительныхъ и меньшихъ числа r_1 конечное число,** то послѣ конечнаго ряда послѣдовательныхъ дѣленій мы приходимъ къ остатку равному нулю. Пусть послѣдній отличный отъ нуля остатокъ будетъ r_n, такъ что $r_{n+1}=0$, и мы получаемъ равенства

$$(n) \qquad r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n,$$

$$(n+1) \qquad r_{n-1}=r_n q_{n+1},$$

На основаніи равенства (1) каждый общій дѣлитель α чиселъ a и b будетъ дѣлителемъ числа r_1. Въ самомъ дѣлѣ, дѣлитель числа b, будетъ дѣлителемъ числа bq, а кромѣ того число α будетъ общимъ дѣлителемъ чиселъ a и bq_1, будетъ дѣлителемъ числа $a-bq_1$, равнаго остатку r_1.

Итакъ, общій дѣлитель α двухъ чиселъ a и b будетъ общимъ дѣлителемъ чиселъ b и r_1, а, слѣдовательно, на основаніи (2) и общимъ дѣлителемъ слѣдующаго остатка r_2. Продолжая наше разсужденіе, мы замѣтимъ, что всякій общій дѣлитель α чиселъ a и b будетъ дѣлителемъ послѣдняго остатка r_n.

Очевидно, что справедливо также и обратное заключеніе: всякій дѣлитель α послѣдняго остатка r_n будетъ дѣлителемъ всѣхъ предыдущихъ остатковъ и общимъ дѣлителемъ чиселъ a и b.

Такимъ образомъ мы видимъ, что **задача нахожденія всѣхъ общихъ дѣлителей двухъ чиселъ a и b равносильна задачѣ нахожденія всѣхъ дѣлителей послѣдняго изъ остатковъ r_n въ алгориѳмѣ Эвклида.**

Среди дѣлителей числа r_n находится, очевидно, само число r_n, причемъ это число будетъ, очевидно, наибольшимъ изъ всѣхъ дѣлителей; поэтому послѣдній остатокъ r_n есть не что иное, какъ наибольшій общій дѣлитель двухъ заданныхъ чиселъ a и b. Если этотъ послѣдній остатокъ равенъ единицѣ, то очевидно, что въ этомъ случаѣ числа a и b не могутъ имѣть общихъ дѣлителей отличныхъ отъ единицы. Подобныя числа носятъ названіе взаимно простыхъ чиселъ.

Связь съ непрерывными дробями.

§ 3. Равенства (1), (2), (3), . . . (n), $(n+1)$ можно переписать такъ

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}, \quad \frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \quad \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

$$\ldots \quad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}, \quad \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1}$$

Послѣднія равенства даютъ возможность представить отношеніе $\frac{a}{b}$ въ видѣ такой многоэтажной дроби

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

Дроби такого вида носятъ названіе непрерывныхъ дробей. Цѣлыя числа $q_1, q_2, \ldots q_n, q_{n+1}$ носятъ названіе неполныхъ частныхъ непрерывной дроби.

Будемъ непрерывную дробь (1) обозначать для сокращенія знакомъ

$$\frac{a}{b} = (q_1, q_2, q_3, \ldots q_n, q_{n+1}). \tag{2}$$

Мы можемъ предположить, что ищется разложеніе въ непрерывную дробь для несократимой дроби, тогда $r_n = 1$ и $q_{n+1} = r_{n-1}$, слѣдовательно, $q_{n+1} > 1$. Поэтому существуетъ небольшая двойственность въ символѣ непрерывной дроби, состоящая въ томъ, что во всякой непрерывной дроби (2) число звеніевъ можно увеличить на единицу, ибо вмѣсто послѣдняго неполнаго частнаго q_{n+1} можно писать

$$\left\{ q_{n+1} - 1 \right\} + \frac{1}{1}.$$

Значитъ, ту же непрерывную дробь можно будетъ переписать такъ

$$\frac{a}{b} = (q_1, q_2, q_3, \ldots q_n, \{q_{n+1} - 1\}, 1).$$

Такъ какъ $q_{n+1} > 1$, то $q_{n+1} - 1$ будетъ цѣлое число отличное отъ нуля.

Мы видимъ, слѣдовательно, что **при разложеніи раціональнаго числа въ непрерывную дробь можно имѣть, по желанію, четное или нечетное число звеньевъ.**

§ 4. Будемъ теперь раскладывать въ непрерывную дробь нѣкоторое вещественное положительное ирраціональное число x. Обозначимъ черезъ a_1 цѣлую часть числа x. Тогда можно будетъ написать

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

гдѣ $x_1 > 1$.

Обозначимъ черезъ a_2 цѣлую часть новаго ирраціональнаго числа x_1, тогда получимъ

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, \text{ гдѣ } x_2 > 1.$$

Продолжая вычисленіе цѣлыхъ частей

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

ирраціональныхъ чиселъ

$$x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1},$$

получимъ рядъ новыхъ равенствъ

$$x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}, \ldots \quad x_{n-1} = a_n + \frac{1}{x_n}.$$

Получаемъ слѣдующее разложеніе ирраціональнаго числа въ непрерывную дробь

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_n}}}},$$

что можно записать символомъ

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, x_n). \tag{1}$$

Въ этомъ символѣ числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ цѣлыя и положительныя, изъ которыхъ нулемъ можетъ быть только первое a_1. Число x_n есть ирраціональное бо́льшее единицы.

Число x_n мы будемъ называть полнымъ частнымъ. Поэтому формула (1) не представляетъ настоящаго разложенія ирраціональнаго числа въ непрерывную дробь, и надо продолжить дальнѣйшее выдѣленіе цѣлыхъ частей x_n, такъ что **при разложеніи ирраціональнаго числа въ непрерывную дробь получимъ безконечную дробь.**

§ 5. Будемъ разсматривать выраженіе

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, x_n), \tag{1}$$

гдѣ x_n положительное число большее единицы.

Если x_n число раціональное, то и вся дробь x будетъ также числомъ раціональнымъ.

Если x_n цѣлое число, то получается полное разложеніе раціональнаго числа x въ непрерывную дробь.

Если x_n дробное раціональное число большее единицы, то, чтобы получить настоящее разложеніе въ непрерывную дробь, надо изъ положительнаго частнаго x_n выдѣлить цѣлую часть a_{n+1}, которая будетъ неполнымъ частнымъ

$$x_n = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}},$$

и продолжать процессъ разложенія относительно полныхъ частныхъ $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$

Если x_n число ирраціональное, то и вся дробь x будетъ числомъ ирраціональнымъ.

Мы напомнимъ, что неполныя частныя $a_1, a_2, \ldots a_n$ мы считаемъ числами натуральными, причемъ можетъ равняться нулю только a_1.

Докажемъ, что число x можно представить въ такомъ видѣ

$$x = \frac{P_n\ x_n + P_{n-1}}{Q_n\ x_n + Q_{n-1}}, \tag{2}$$

гдѣ

$$P_n,\ P_{n-1},\ Q_n,\ Q_{n-1}$$

суть цѣлыя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, теорема провѣряется непосредственно для значеній $n = 1, 2$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{a_1 x_1 + 1}{1 \cdot x_1 + 0},$$

такъ что

$$P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ P_1 = a_1,\ Q_1 = 1.$$

Подобнымъ же образомъ

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_2}} = a_1 + \frac{x_2}{a_2 x_2 + 1} = \frac{(a_1 a_2 + 1) x_2 + a_1}{a_2 x_2 + 1},$$

откуда получаемъ

$$P_2 = a_1 a_2 + 1,\ Q_2 = a_2.$$

Для доказательства общей теоремы покажемъ, что, если теорема справедлива для нѣкотораго цѣлаго числа n, то она будетъ справедлива и для значенія n на единицу большаго.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$x = (a_1, a_2, \ldots a_n, x_n) = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}\right),$$

значитъ, x не мѣняется, если мы подставимъ вмѣсто x_n величину $a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}$. Дѣлая эту подстановку въ формулѣ (2), получимъ

$$x = \frac{P_n\left(a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) + P_{n-1}}{Q_n\left(a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) + Q_{n-1}} = \frac{(P_n a_{n+1} + P_{n-1}) x_{n+1} + P_n}{(Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}) x_{n+1} + Q_n}.$$

Обозначимъ для сокращенія

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n a_{n+1} + P_{n-1}, \\ Q_{n+1} &= Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}; \end{aligned} \tag{3}$$

формулы (3) показываютъ, что, если P_n, P_{n-1}, Q_n, Q_{n-1} суть числа цѣлыя положительныя, то таковы же будутъ и числа P_{n+1} и Q_{n+1}.

Значитъ, высказанная теорема о возможности представленія числа x подъ видомъ (2) доказана, ибо такой же видъ имѣетъ это число при n на единицу большемъ.

§ 6. Формулы

$$\begin{aligned} P_0 = 1,\ Q_0 = 0,\ P_1 = a_1, Q_1 = 1, \\ P_{n+1} = P_n a_{n+1} + P_{n-1}, \\ Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

дают̀ъ два ряда натуральныхъ чиселъ

$$(2)\qquad \begin{matrix} P_0, & P_1, & P_2, & \ldots \\ Q_0, & Q_1, & Q_2, & \ldots \end{matrix}$$

При возрастаніи значка n числа P_n и Q_n возрастаютъ, причемъ это возрастаніе будетъ безпредѣльнымъ, если непрерывная дробь безконечная.

Напримѣръ, требуется составить числа (2) для непрерывной дроби

$$x = (3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7) = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}.$$

Вычисленіе удобнѣе всего расположить такъ

a_i		3	1	2	4	7
P_i	1	3	4	11	48	347
Q_i	0	1	1	3	13	94

Подходящія дроби.

§ 7. Нетрудно убѣдиться въ существованіи равенства

$$(1)\qquad \frac{P_n}{Q_n} = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n).$$

Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны имѣемъ, подставляя вмѣсто x_n безконечность,

$$(a_1,\ a_2\ \ldots\ a_n, \infty) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\infty}}} =$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}} = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n);$$

съ другой стороны

$$(a_1, a_2, \ldots . a_n , x_n) = \frac{P_n + \frac{P_{n-1}}{x_n}}{Q_n + \frac{Q_{n-1}}{x_n}} .$$

Полагая въ этомъ равенствѣ $x_n = \infty$, получимъ справедливость формулы (1).

Итакъ, дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ есть не что иное, какъ величина конечной дроби, которую мы получаемъ изъ разсматриваемой, обрывая ее неполнымъ частнымъ a_n. Дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ называются подходящими относительно всей непрерывной дроби.

§ 8. Умножая первое изъ равенствъ (1) § 6 на Q_n, а второе на $-P_n$ и складывая, получимъ

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = -(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$$

Примѣняя эту формулу къ значеніямъ n равнымъ

$$1, 2, 3, \ldots . n-1,$$

получимъ

$$P_2 Q_1 - Q_2 P_1 = -(a_1 . 0 - 1 . 1) = (-1)^2$$
$$P_3 Q_2 - Q_3 P_2 = -(P_2 Q_1 - Q_2 P_1)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2})$$

Перемножая послѣднія равенства и сокращая, получимъ

(1) $$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n$$

Выведемъ теперь рядъ важныхъ слѣдствій изъ этого равенства.

§ 9. Всѣ подходящія дроби суть дроби несократимыя, ибо на основаніи формулы (1) § 8 общій наибольшій дѣлитель чиселъ P_n и Q_n долженъ былъ бы дѣлить стоящую во второй части единицу, что невозможно, если этотъ дѣлитель отличенъ отъ единицы.

Подобнымъ же образомъ мы покажемъ, что взаимно простыя числа P_n и P_{n-1}, а также Q_n и Q_{n-1}.

§ 10. Переписавъ равенство (1) § 8 въ такомъ видѣ

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}},$$

замѣчаемъ, что, если n число четное, то вторая часть положительная, слѣдовательно, **всякая подходящая дробь четнаго порядка больше предыдущей подходящей дроби.**

§ 11. Теорема. **Величина всей непрерывной дроби находится между двумя рядомъ стоящими подходящими ближе къ слѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.**

Пусть задана непрерывная дробь

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots .),$$

Обозначая черезъ x_n непрерывную дробь $(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots .)$ начинающуюся со звена a_{n+1}, получимъ

$$x = (a_1, a_2 \ldots . a_n, x_n),$$

или, что одно и то же

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}.$$

Далѣе мы получаемъ

$$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{(-1)^n}{Q_n (Q_n x_n + Q_{n-1})},$$

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{x_n (-1)^n}{Q_{n-1} (Q_n x_n + Q_{n-1})},$$

откуда

$$(1) \qquad x_n Q_n \left(\frac{P_n}{Q_n} - x \right) = Q_{n-1} \left(x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right).$$

Такъ какъ числа x_n, Q_{n-1}, Q_n положительныя, то **обѣ разности**

$$\frac{P_n}{Q_n} - x, \quad x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; значитъ, положительное число x заключается между положительными числами

$$\frac{P_n}{Q_n} \text{ и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Изъ формулы (1) получаемъ

$$\frac{\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right|}{\left|x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|} = \frac{Q_{n-1}}{x_n Q_n};$$

но $x_n > 1$, а $Q_n > Q_{n-1}$, слѣдовательно $Q_{n-1} < x_n Q_n$, то есть

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| < \left|x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|,$$

то есть абсолютная величина разности $\frac{P_n}{Q_n} - x$ меньше абсолютной величины разности $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

Получаемъ, что величина всей дроби x ближе къ слѣдующей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$, чѣмъ къ предыдущей $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

§ 12. Такъ какъ существуетъ равенство

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{1}{x_1},$$

то

$$x > \frac{P_1}{Q_1} \text{ или } x - \frac{P_1}{Q_1} > 0.$$

На основаніи теоремы предыдущаго §-а замѣчаемъ, что должно быть

$$\frac{P_2}{Q_2} - x > 0, \text{ т. е. } x < \frac{P_2}{Q_2}.$$

Далѣе имѣемъ

$$x - \frac{P_2}{Q_2} < 0,$$

слѣдовательно, должно быть

$$\frac{P_3}{Q_3} - x < 0, \text{ т. е. } x > \frac{P_3}{Q_3}.$$

Итакъ, мы видимъ, что величина x всей непрерывной дроби больше подходящихъ дробей нечетнаго порядка

(1) $$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}, \ldots$$

но меньше подходящихъ дробей четнаго порядка

(2) $$\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6}, \ldots$$

Такъ какъ всякая слѣдующая подходящая дробь ближе къ величинѣ x всей дроби, то очевидно, что дроби (1) возрастаютъ съ возрастаніемъ нечетнаго значка, а дроби (2) убываютъ съ возрастаніемъ четнаго значка.

§ 13. Если непрерывная дробь конечная, то она совпадаетъ съ одной изъ своихъ подходящихъ, а именно тою, когда взяты всѣ звенья.

Если же дробь безконечная, то она является общимъ предѣломъ для двухъ рядовъ дробей (1) и (2) § 12. Причемъ дроби (1) приближаются къ этому предѣлу, увеличиваясь, а дроби (2) приближаются убывая. Такимъ образомъ мы получаемъ новый примѣръ на примѣненіе теоремы § 22 главы VII (стр. 118).

Чтобы доказать, что величина x всей безконечной дроби есть дѣйствительно предѣлъ, къ которому стремится $\frac{P_n}{Q_n}$ съ возрастаніемъ n, разсмотримъ формулу

$$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})},$$

откуда

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| = \frac{1}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})};$$

но $x_n > 1$, слѣдовательно, $Q_n x_n + Q_{n-1} > Q_n$, и, значитъ,

(1) $$\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Неравенство (1) показываетъ, что число x есть дѣйствительно предѣлъ дроби $\frac{P_n}{Q_n}$, ибо Q_n при возрастаніи n возрастаетъ безпредѣльно.

Очевидно, что $x_n > a_{n+1}$, такъ что $Q_n x_n + Q_{n-1} > Q_n a_{n+1} +$

$+Q_{n-1}$, или $Q_n x_n + Q_{n-1} > Q_{n+1}$. Поэтому вмѣсто неравенства (1) можно написать одно изъ слѣдующихъ

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| < \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})},$$

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

§ 14. Знаменитый математикъ Лагранжъ, критикуя представленную въ Парижскую Академію Наукъ попытку рѣшенія невозможной для рѣшенія циркулемъ и линейкой задачи—квадратуры круга, замѣтилъ слѣдующую теорему первостепенной важности, относящуюся къ степени приближенія, которую даютъ подходящія дроби:

Теорема: **Не существуетъ никакой раціональной дроби $\frac{M}{N}$ со знаменателемъ N не бо́льшимъ, чѣмъ Q_n, которая заключалась бы между рядомъ стоящими подходящими дробями $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.**

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что дробь $\frac{M}{N}$ заключается между указанными подходящими; тогда имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ двѣ разности

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Вторую разность мы не предполагаемъ равной нулю, потому что не желаемъ дѣлать предположенія, что промежуточная дробь $\frac{M}{N}$ совпадаетъ съ которой-нибудь изъ подходящихъ.

Такъ какъ абсолютная величина первой разности больше абсолютной величины второй, то мы можемъ написать неравенство

$$(-1)^n\left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > (-1)^n\left(\frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right),$$

или иначе

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > (-1)^n\left(\frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right).$$

Умножая обѣ части неравенства на NQ_{n-1}, получимъ

$$\frac{N}{Q_n} > (-1)^n (MQ_{n-1} - P_{n-1} N).$$

Во второй части этого неравенства находится положительное цѣлое число, отличное отъ нуля, значитъ, знаменатель N промежуточной дроби долженъ быть больше, чѣмъ Q_n, что и требовалось доказать.

§ 15. Изъ только что доказанной теоремы вытекаютъ весьма важныя свойства:

Теорема. **Всякая безконечная непрерывная дробь представляетъ ирраціональное число.**

Мы видѣли уже, что ирраціональныя числа раскладываются въ безконечныя непрерывныя дроби. Теперь покажемъ, что существуетъ предположеніе обратное, т. е., что величина безконечной непрерывной дроби не можетъ быть раціональнымъ числомъ $\frac{M}{N}$. На основаніи теоремы § 11 дробь $\frac{M}{N}$ должна заключаться между дробями $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ при всякомъ значеніи n; но это невозможно, ибо при достаточно большомъ n число Q_n, возрастая безпредѣльно, сдѣлается больше чѣмъ N.

§ 16. Разлагая число $\pi = 3{,}141592653....$ въ непрерывную дробь, получимъ

$$\pi = (3,7,15,1,292,\cdots\cdots)$$

Подходящія дроби будутъ

	3	7	15	1	292	
1	3	22	333	355	103993	
0	1	7	106	113	33102	

Итакъ, мы видимъ, что Архимедово число $\frac{22}{7}$ является второю подходящею дробью для π. По теоремѣ Лагранжа мы заключаемъ, что изъ дробей съ знаменателями, не превосходящими

числа 7, дробь $\frac{22}{7}$ ближе всего даетъ число π. Она больше числа π, и ошибка меньше $\frac{1}{7.106}$, то есть меньше одной сотой. Точно также число Адріана Меція $\frac{355}{113}$, будучи четной подходящей дробью, больше π и даетъ ошибку меньшую $\frac{1}{113.33102}$, которая меньше одной милліонной.

Приложеніе къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ.

§ 17. Въ главѣ V, когда мы разсматривали рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленныхъ уравненій 1-ой степени, мы видѣли, что задача приводится къ нахожденію одного рѣшенія уравненія

(1) $$ax - by = \pm 1$$

гдѣ a и b два взаимно простыхъ натуральныхъ числа. Выборомъ знака при единицѣ во второй части мы можемъ всегда достигнуть того, чтобы считать $a > b$.

Раскладываемъ дробь $\frac{a}{b}$ въ непрерывную

$$\frac{a}{b} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\alpha_n}}$$

которая будетъ, очевидно, конечной. Такъ что

$$a = P_n, \; b = Q_n.$$

Но мы имѣемъ

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n,$$

или иначе

(2) $$a Q_{n-1} - b P_{n-1} = (-1)^n.$$

На основаніи замѣчанія § 3 мы можемъ сдѣлать число n по произволу четнымъ и нечетнымъ, т. е. другими словами, можно достигнуть выборомъ n совпаденія знаковъ въ правыхъ частяхъ уравненій (1) и (2); тогда приходимъ къ рѣшенію

$$x = Q_{n-1}, \; y = P_{n-1}.$$

§ 18. Пояснимъ сказанное на примѣрѣ уравненія

$$347\,x - 89\,y = 1.$$

Число n должно быть четнымъ.

Производимъ послѣдовательное дѣленіе

	3	1	8	1	8
347	89	80	9	8	1
267	80	72	8	8	
80	9	8	1	0	

получаемъ

$$\frac{347}{89} = (3,1,8,1,8) = (3,1,8,1,7,1)$$

$$(3,1,8,1,7) = \frac{308}{79},$$

значитъ

$$x = 79,\ y = 308.$$

Періодическія непрерывныя дроби.

§ 19. Безконечныя непрерывныя дроби называются періодическими, если неполныя частныя повторяются въ той же послѣдовательности.

Чистая періодическая:

$$3 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

Смѣшанная періодическая:

$$3 + \frac{1}{\underbrace{2} + \frac{1}{\underbrace{4} + \frac{1}{\underbrace{2} + \frac{1}{4}}}}$$

§ 20. Теорема Лагранжа. **Всякій вещественный ирраціональный корень квадратнаго уравненія съ соизмѣримыми коэффиціентами разлагается въ непрерывную періодическую дробь.**

Случай корней разныхъ знаковъ.

Пусть уравненіе освобождено отъ дробныхъ коэффиціентовъ и приведено къ виду

(1) $$Ax^2 + 2Bx - C = 0,$$

гдѣ A, B, C суть цѣлыя числа безъ общаго дѣлителя. Числа A и C будутъ положительныя, если корни уравненія (1) разныхъ знаковъ. Если бы коэффиціентъ при x не былъ четнымъ числомъ, то мы умножили бы все уравненіе на 2. Число B^2+AC не точный квадратъ, ибо мы не разсматриваемъ случая раціональныхъ корней.

Будемъ раскладывать положительный корень

$$x=\frac{-B+\sqrt{B^2+AC}}{A}$$

въ непрерывную дробь. Число x содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a_1 и a_1+1, такъ что

$$x=a_1+\frac{1}{x_1},$$

гдѣ $x_1>1$. Уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$A\left(a_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+2B\left(a_1+\frac{1}{x_1}\right)-C=0,$$

или

(2) $$A_1 x_1^2+2B_1x_1-C=0,$$

причемъ

(3)
$$A_1=C-2Ba_1-Aa_1^2$$
$$B_1=-Aa_1-B$$
$$C_1=A.$$

Формулы (3) показываютъ, что новыя числа A_1, B_1, C_1 тоже цѣлыя. Покажемъ, что, 1^0., числа A_1 и C_1 положительныя, и 2^0., что $B_1^2+A_1C_1=B^2+AC$.

Для доказательства утвержденія 1^0 разсуждаемъ такъ: число C_1 положительно на основаніи равенства $C_1=A$. Остается доказать, что $A_1>0$. Такъ какъ другой корень

$$\frac{-B-\sqrt{B^2+AC}}{A}$$

есть отрицательное число, то существуютъ неравенства

$$\frac{-B-\sqrt{B^2+AC}}{A}<a_1<\frac{-B+\sqrt{B^2+AC}}{A},$$

или

$$-\sqrt{B^2+AC}<(Aa_1+B)<\sqrt{B^2+AC}.$$

Возвышая въ квадратъ, получимъ

$$(Aa_1 + B)^2 < B^2 + AC,$$

или

$$B^2 + AC - (Aa_1 + B)^2 > 0,$$

откуда, раскрывая, получимъ

$$AA_1 > 0,$$

но $A > 0$, слѣдовательно, $A_1 > 0$.

Что касается утвержденія 2^0, то оно доказывается непосредственно

$$B_1^2 + A_1 C_1 = (B + Aa_1)^2 + A(C - 2Ba_1 - Aa_1^2),$$

откуда

$$B_1^2 + A_1 C_1 = AC + B^2.$$

Теорема Лагранжа вытекаетъ отсюда непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, продолжая разложеніе въ непрерывную дробь

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}, \quad \ldots \quad x_{n-1} = a_n + \frac{1}{x_n},$$

гдѣ $x_2, x_3, \ldots x_n$ будутъ положительными корнями уравненій

$$\begin{aligned} A_2 x_2^2 + 2B_2 x_2 - C_2 &= 0, \\ A_3 x_3^2 + 2B_3 x_3 - C_3 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_n x_n^2 + 2B_n x_n - C_n &= 0, \end{aligned}$$

причемъ числа A_n, B_n и C_n будутъ всегда цѣлыми, числа A_n и C_n будутъ положительными и кромѣ того всегда

$$B_n^2 + A_n C_n = B^2 + AC.$$

Означая черезъ D заданное число $B^2 + AC$, замѣчаемъ, что положительныя числа B_n, A_n, C_n будутъ меньше D; а такъ какъ существуетъ конечное число цѣлыхъ чиселъ меньшихъ заданнаго числа D, то будетъ существовать конечное число комбинацій этихъ чиселъ по три

(4) $$A_n, \quad B_n, \quad C_n.$$

Итакъ, послѣ нѣкотораго числа операцій мы вернемся къ комбинаціи чиселъ (4) уже бывшей раньше, и, слѣдовательно, съ полнаго частнаго x_n, соотвѣтствующаго этому возвращенію къ одной изъ прежнихъ комбинацій, начнется повтореніе періода, и дробь будетъ періодическая, что и требовалось доказать.

Для того, чтобы получить разложеніе отрицательнаго корня уравненія (1), надо измѣнить x на $-x$, разложить, какъ сказано, положительный корень новаго уравненія и, наконецъ, къ полученной періодической непрерывной дроби приписать знакъ — (минусъ).

Случай двухъ положительныхъ корней.

Пусть уравненіе

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

имѣетъ два положительныхъ ирраціональныхъ корня x', x'', причемъ

$$0 < x' < x''.$$

Будемъ раскладывать большій корень x'' въ непрерывную дробь

(1) $$x = a_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Если цѣлая часть a_1 корня x'' будетъ больше корня x', то новое квадратное уравненіе для x_1

(2) $$A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 + C_1 = 0$$

будетъ имѣть оба корня разныхъ знаковъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) получаемъ

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1},$$

значитъ, два корня уравненія (2) будутъ

$$\frac{1}{x'' - a_1} > 0 \qquad \frac{1}{x' - a_1} < 0.$$

Новое уравненіе (2) подходитъ уже подъ случай нами разобранный.

Допустимъ, что цѣлая часть a_1 корня x'' оказывается меньше x', тогда она является также и цѣлою частью для корня x'. Значитъ, разложеніе обоихъ корней въ непрерывную дробь

$$x' = a_1 + \frac{1}{x_1'}, \quad x'' = a_1 + \frac{1}{x_1''}$$

имѣетъ общее первое звено. Новое уравненіе (2), имѣющее въ

этомъ случаѣ корнями числа x_1' и x_1'', будетъ имѣть также оба положительныхъ корня.

Продолжая далѣе этотъ процессъ, мы не можемъ допустить, чтобы при всякомъ новомъ уравненіи

$$A_n x_n^2 + 2B_n x_n + C_n = 0 \tag{3}$$

цѣлыя части обоихъ корней x_n' и x_n'' совпадали, ибо тогда получилось бы одно и то же разложеніе въ непрерывную дробь двухъ различныхъ между собою корней x' и x'' заданнаго уравненія.

Итакъ, послѣ нѣкотораго числа операцій мы должны притти къ уравненію (3), у котораго цѣлая часть a_{n+1} бо́льшаго корня x_n'' будетъ больше другого корня x_n', и мы приходимъ на слѣдующей операціи къ случаю корней разныхъ знаковъ, т. е. къ случаю уже разобранному.

Случай двухъ отрицательныхъ корней.

Замѣна x на $-x$ дастъ переходъ къ случаю двухъ положительныхъ корней.

§ 21. Обратная теорема. **Всякая періодическая непрерывная дробь есть корень квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами.**

Начнемъ со случая чистой періодической дроби:

$$x = (a_1, a_2, \ldots a_n, a_1, a_2, \ldots a_n, a_1, \ldots).$$

Очевидно, что будетъ

$$x = (a_1, a_2, \ldots a_n, x),$$

откуда

$$x = \frac{P_n x + P_{n-1}}{Q_n x + Q_{n-1}},$$

и мы приходимъ къ квадратному уравненію.

$$x^2 Q_n + (Q_{n-1} - P_n) x - P_{n-1} = 0. \tag{1}$$

Случай смѣшанной періодической дроби трактуется аналогично. Въ самомъ дѣлѣ, пусть задана смѣшанная дробь

$$y = (b_1, b_2, \ldots b_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots a_n, a_1, \ldots);$$

получаемъ

$$y = (b_1, b_2, \ldots b_n, x).$$

Обозначая

$$(2)\qquad \frac{T_m}{S_m} = (b_1, b_2, \ldots b_m), \quad \frac{T_{m-1}}{S_{m-1}} = (b_1, b_2, \ldots b_{m-1}),$$

получаемъ

$$(3)\qquad y = \frac{T_m x + T_{m-1}}{S_m x + S_{m-1}};$$

исключая x изъ уравненій (1) и (3), получимъ для y квадратное уравненіе.

§ 22. Покажемъ примѣненіе теоремы Лагранжа къ разложенію ирраціональнаго корня квадратнаго изъ цѣлаго числа.

Напримѣръ, требуется разложить $\sqrt{7}$.

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$x_4 = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2 = 4 + \frac{1}{x_1},$$

и періодъ обнаружился; получаемъ

$$\sqrt{7} = (2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots)$$

§ 23. Задача. **Найти безконечную непрерывную дробь, у которой рядъ знаменателей подходящихъ дробей**

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$$

обнаруживаетъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, тотъ же рядъ чиселъ, что и рядъ числителей

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

начиная также съ нѣкотораго мѣста.

Можемъ ограничиться случаемъ $a_1 > 0$, тогда $P_m > Q_m$.

Пусть совпадаютъ ряды чиселъ

$$P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots$$
$$Q_l, Q_{l+1}, Q_{+2}, \ldots$$

гдѣ, очевидно, $l > k$, такъ что

$$Q_l = P_k,\ Q_{l+1} = P_{k+1},\ Q_{l+2} = P_{l+2}, \ldots \tag{1}$$

Но

$$P_{k+2} = P_{k+1}\, a_{k+2} + P_k,$$
$$Q_{l+2} = Q_{l+1}\, a_{l+2} + Q_l,$$

значитъ

$$a_{k+2} = a_{l+2},$$

и непрерывная дробь должна быть періодической.

Покажемъ, что, если $Q_l > 1$, то и предыдущія числа P_{k-1} и Q_{l-1} должны быть въ обоихъ рядахъ одинаковы, ибо

$$P_{k+1} = P_k\, a_{k+1} + P_{k-1},$$
$$Q_{l+1} = Q_l\, a_{l+1} + Q_{l-1}. \tag{2}$$

Принимая въ расчетъ равенства (1), получимъ черезъ вычитаніе уравненій

$$Q_l (a_{k+1} - a_{l+1}) = Q_{l-1} - P_{k-1};$$

мы получаемъ, предполагая различными числа a_{k+1} и a_{l+1}

$$Q_l \leqq | Q_{l-1} - P_{k-1} |,$$

что невозможно, ибо числа Q_{l-1} и P_{k-1} меньше Q_l.

Значитъ, должно быть $a_{k+1} = a_{l+1}$ и $Q_{l-1} = P_{k-1}$. Другими словами общій рядъ чиселъ долженъ начаться съ $Q_l = 1$. Возможны только два случая:

Первый случай: $l = 1$; получаемъ

	$a_1 = a$	$a_2 = a$	$a_3 = a$	$a_4 = a$
$P_0 = 1$ $Q_0 = 0$	$P_1 = a$ $Q_1 = 1$	$P_2 = a^2 + 1$ $Q_2 = a$	$P_3 = a^3 + 2a$ $Q_2 = a^2 + 1$	$P_4 = a^4 + 3a^2 + 1$ $Q_4 = a^3 + 2a$

гдѣ a произвольное цѣлое число.

Получается разложеніе

$$x = (a, a, a, \ldots)$$

корня уравненія

$$x^2 - ax - 1 = 0.$$

Второй случай: $l=2$; получаемъ

	$a_1=a$	$a_2=1$	$a_3=a-1$	$a_4=1$	$a_5=a-1$
$P_0=1$	$P_1=a$	$P_2=a+1$	$P_3=a^2+a-1$	$P_4=a^2+2a$	$P_5=a^3+2a^2-$ $-a-1$
$Q_0=0$	$Q_1=1$	$Q_2=1$	$Q_3=a$	$Q_4=a+1$	$Q_5=a^2+a-1$

Получается разложеніе

$$x=(a,\ 1,\ a-1,\ 1,\ a-1,\ 1,\ a-1,\ \ldots)$$

корня уравненія

$$x^2-(a+1)x+1=0.$$

Подобную задачу можно рѣшить для конечной дроби.

§ 24. Приложимъ непрерывныя дроби къ вычисленію логариѳма числа 2. Надо рѣшить уравненіе

$$10^x=2.$$

Найдемъ для x ближайшее меньшее цѣлое число. Принимая въ соображеніе, что $10^0=1$, $10^1=10$, получаемъ, что x заключается между 0 и 1. Тогда

$$x=0+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1}.$$

Тогда $10^{\frac{1}{x_1}}=2$, или $2^{x_1}=10$; но $2^3=8$, $2^4=16$, слѣдовательно,

$$x_1=3+\frac{1}{x_2};$$

получаемъ

$$2^3.2^{\frac{1}{x_2}}=10,\quad 2^{\frac{1}{x_2}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4},$$

или

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2}=2.$$

Испытаніемъ мы находимъ x_2 заключающимся между 3 и 4. Значитъ, получаемъ

$$x_2=3+\frac{1}{x_3}.$$

Подобной же провѣркой получаемъ

$$x_3 = 9 + \frac{1}{x_4},$$

и мы получаемъ разложеніе искомаго логариѳма числа 2 въ непрерывную дробь

$$log\ 2 = (0, 3, 3, 9, \ldots.).$$

Но

$$(0, 3, 3, 9) = \frac{28}{93} = 0{,}30107\ldots.,$$

что даетъ уже достаточно близко величину логариѳма, ибо оказываются вѣрными 4 знака послѣ запятой.

Способъ Эвклида нахожденія общей мѣры двухъ отрѣзковъ.

§ 25. Пусть a и b обозначаютъ длины двухъ отрѣзковъ, причемъ $a > b$. Откладываемъ меньшій отрѣзокъ b на большемъ столько разъ, сколько возможно. Пусть этотъ отрѣзокъ отложился q_1 разъ и остался кусокъ r_1 отрѣзка a, меньшій чѣмъ b; получаемъ

$$a = bq_1 + r_1.$$

Откладываемъ r_1 на b и приходимъ къ равенству

$$b = r_1 q_2 + r_2,$$

гдѣ r_2 оставшійся кусокъ отрѣзка b, меньшій чѣмъ r_1, а q_2 цѣлое число.

Продолжая эту операцію далѣе, получимъ

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,$$
$$r_2 = r_3 q_4 + r_4.$$

Получается разложеніе отношенія $\frac{a}{b}$ двухъ отрѣзковъ въ непрерывную дробь

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}.$$

Когда a и b обозначали цѣлыя числа, то алгориѳмъ оканчивался послѣ ряда операцій, ибо остатки r_1, r_2, r_3, ... будучи

убывающими цѣлыми числами, могли принять только конечное число значеній. Въ случаѣ отрѣзковъ убывающіе по длинѣ куски $r_1, r_2, r_3, \ldots$ могутъ быть въ безконечномъ числѣ, ибо существуетъ безчисленное множество отрѣзковъ меньшихъ даннаго.

Если алгориѳмъ, относящійся къ отрѣзкамъ, окончится послѣ конечнаго числа операцій, т. е. если отрѣзокъ r_n отложится ровно цѣлое число q_{n+1} разъ на предыдущемъ r_{n-1}, то отрѣзокъ r_n будетъ общею мѣрой обоихъ заданныхъ отрѣзковъ, и отношеніе ихъ $\frac{a}{b}$ представится въ видѣ раціональной дроби. Эта общая мѣра будетъ заключаться цѣлое число разъ какъ въ отрѣзкѣ a, такъ и въ отрѣзкѣ b.

Если процессъ нахожденія общей мѣры не окончится, то отношеніе $\frac{a}{b}$ будетъ равняться безконечной непрерывной дроби, и будетъ числомъ ирраціональнымъ.

Если отрѣзокъ b принятъ за единицу, то отношеніе $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$ обращается въ длину отрѣзка a.

И мы приходимъ къ представленію длины отрѣзка въ видѣ непрерывной дроби

$$a = (q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots).$$

Итакъ, **длину отрѣзка можно опредѣлить, какъ число, которое даетъ непрерывная дробь, получаемая при процессѣ Эвклида нахожденія общей мѣры заданнаго отрѣзка и единицы длины.**

§ 26. Пояснимъ процессъ Эвклида на какомъ-нибудь примѣрѣ.

Возьмемъ за единицу сторону квадрата, тогда его діагональ выразится числомъ $\sqrt{2}$. Чтобы проще разложить число $\sqrt{2}$ въ непрерывную дробь, воспользуемся тождествомъ

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1.$$

Отсюда

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1};$$

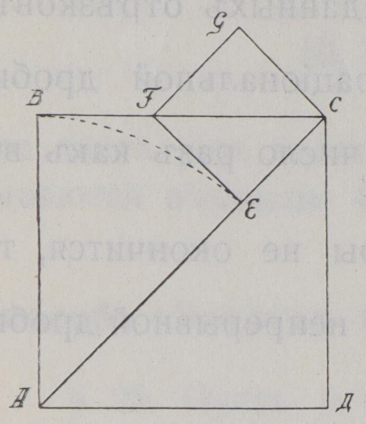
далѣе

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}},$$

или окончательно

(1) $$\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, \ldots).$$



Черт. 6.

Разсмотримъ этотъ же примѣръ геометрически.

Для доказательства будемъ находить способомъ Эвклида общую мѣру діагонали AC и стороны AB квадрата $ABCD$.

Отложимъ на діагонали AC отрѣзокъ AE, равный AB, проведемъ EF перпендикулярно AC въ точкѣ E. Имѣемъ

$$BF = FE,$$

какъ двѣ касательныя къ окружности, проведенныя изъ точки F; прямоугольный треугольникъ FEC равнобедренный, такъ какъ $\angle ECB = 45^0$. Находимъ общую мѣру отрѣзка EC и стороны квадрата AB, или, что одно и то же, BC; $EC = EF = FB$; отрѣзокъ EC откладываемъ одинъ разъ отъ точки B на сторонѣ BC; конецъ его упадетъ въ точку F. Задачу нашу мы свели къ нахожденію общей мѣры отрѣзковъ EC и FC; но, если мы построимъ на отрѣзкѣ EC квадратъ $ECGF$, то увидимъ, что FC служитъ діагональю этого квадрата; слѣдовательно, нашу задачу мы свели къ подобной ей задачѣ относительно меньшаго квадрата; очевидно, отъ второй задачи мы перейдемъ къ такой же третьей и т. д. до безконечности.

Отсюда можно заключить, что діагональ не имѣетъ общей мѣры со стороной квадрата, а, слѣдовательно, ихъ отношеніе разлагается въ безконечную непрерывную дробь.

Эта дробь будетъ какъ разъ вида (1). Это ясно изъ того, что первый разъ сторона квадрата помѣщается на діагонали одинъ разъ, что даетъ неполное частное 1; дальше отрѣзки ложатся на предыдущіе по два раза.

ГЛАВА XV.

Теорія соединеній; биномъ Ньютона.

Перемѣщенія.

§ 1. Поставимъ себѣ задачей найти, на сколько различныхъ способовъ можно расположить n предметовъ въ рядъ одинъ за другимъ.

Для разрѣшенія этого вопроса обозначимъ черезъ P искомое число способовъ и разсмотримъ послѣдовательно случаи простѣйшіе: $n=1, n=2, n=3, \ldots\ldots$

При $n=1$, очевидно, получаемъ $P_1=1$.

При $n=2$, если мы обозначимъ два предмета буквами a и b, то получимъ, очевидно, только два перемѣщенія

$$ab,\ ba;$$

слѣдовательно, $P_2=1\,.\,2=2$.

При $n=3$ обозначимъ предметы буквами a, b, c и будемъ разсуждать такъ. Чтобы получить всѣ перемѣщенія трехъ предметовъ, составимъ сначала тѣ изъ нихъ, у которыхъ на первомъ мѣстѣ стоитъ предметъ a, далѣе тѣ, у которыхъ первое мѣсто занимаетъ b, и, наконецъ, тѣ, у которыхъ на первомъ мѣстѣ c.

Получимъ такимъ образомъ 6 перемѣщеній

$$abc,\quad bac,\quad cab,$$
$$acb,\quad bca,\quad cba,$$

которыя представляютъ изъ себя всѣ возможныя перемѣщенія трехъ буквъ a, b, c. Въ самомъ дѣлѣ, если мы поставимъ на первое мѣсто, напримѣръ, букву a, то къ этой буквѣ можно приставить двѣ остальныя bc на столько способовъ, сколько перемѣщеній можно сдѣлать изъ двухъ предметовъ. Итакъ, мы получаемъ общее число перемѣщеній трехъ буквъ въ видѣ $P_3=3P_2=1\,.\,2\,.\,3=6$.

Переходя къ случаю $n=4$, поступимъ такъ же, т. е. будемъ выписывать отдѣльно перемѣщенія четырехъ буквъ, у которыхъ на первомъ мѣстѣ стоитъ какая-нибудь опредѣленная.

Получаемъ такимъ образомъ всѣ возможныя 24 перемѣщенія четырехъ буквъ a, b, c, d

abcd	*bacd*	*cabd*	*dacb*
abdc	*badc*	*cadb*	*dabc*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

Число перемѣщеній вычисляется такъ: надо умножить число буквъ (т. е. 4) на число перемѣщеній изъ трехъ буквъ

$$P_4 = 4 . P_3 = 1 . 2 . 3 . 4 = 24.$$

Продолжая то же разсужденіе далѣе, мы придемъ къ общей формулѣ

$$P_n = 1 . 2 . 3 . . . . n.$$

Итакъ, мы видимъ, что число перемѣщеній n предметовъ выражается произведеніемъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ. Подобныя произведенія носятъ названіе факторіаловъ и встрѣчаются часто въ формулахъ математики. Ихъ иногда обозначаютъ знакомъ

$$n! = 1 . 2 . 3 . . . . . n.$$

§ 2. Изъ соображеній предыдущаго §-а получается формула

$$P_n = n P_{n-1}.$$

Эта формула есть, такъ называемая, редукціонная, она сводитъ вычисленіе P_n на предварительное вычисленіе числа перемѣщеній P_{n-1}, составленныхъ изъ предметовъ, число которыхъ на единицу меньше.

§ 3. Полезно обратить вниманіе на то обстоятельство, что число P_n очень быстро возрастаетъ съ возрастаніемъ n. Яснѣе всего мы убѣдимся въ характерѣ возрастанія факторіала на слѣдующей задачѣ:

Требуется найти, сколько времени потребуется на то, чтобы пересадить 12 учениковъ класса по партамъ во всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, если на каждую пересадку дается 1 минута времени, въ сутки употребляется на пересадки 11 часовъ и въ году считается 365 дней, такъ что въ високосный годъ дается одинъ день отдыха.

Число всѣхъ перемѣщеній 12 учениковъ есть

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 = 479001600.$$

Число выполненныхъ въ одинъ годъ пересадокъ будетъ

$$365 . 11 . 60 = 240900.$$

Время, потребное на всѣ пересадки, будетъ

1988 лѣтъ 140 дней.

Итакъ, если бы мы желали окончить пересадку ко времени изданія настоящей книги, то надо было бы начать пересадки до Рождества Христова.

§ 4. На примѣрѣ предыдущаго §-а можетъ быть обнаружена разница между прикладной математикой и такъ называемой чистой.

Въ чистой математикѣ постоянно разсматриваются факторіалы для какого угодно числа n. Что же касается до приложеній математики, къ задачамъ, взятымъ изъ жизни, то факторіалъ уже для $n = 12$ оказывается настолько большимъ числомъ, что перемѣщенія 12-ти предметовъ въ смыслѣ ихъ дѣйствительнаго выполненія являются задачей, выходящей далеко изъ области житейскаго обихода.

Подобный случай представляетъ изъ себя извѣстная легенда о шахѣ Ширамѣ, который желалъ вознаградить изобрѣтателя шахматной игры и предложилъ ему самому выбрать для себя награду. Изобрѣтатель попросилъ положить на первый квадратъ шахматной доски одно пшеничное зерно, на второй квадратъ два зерна, на третій 4, и т. д. на каждый слѣдующій квадратъ вдвое болѣе, чѣмъ на предыдущій, и такимъ образомъ онъ просилъ получить столько зеренъ, сколько будетъ соотвѣтствовать всѣмъ 64 квадратамъ шахматной доски. Число зеренъ, равное суммѣ геометрической прогрессіи

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

имѣетъ двадцать десятичныхъ знаковъ (его логариѳмъ есть $64 \log 2 = 64 . 0{,}3010300 = 19{,}2659200$). Число оказывается настолько большимъ, что выполнить желаніе изобрѣтателя совершенно невозможно. Пришлось бы поставить подводы съ зерномъ сплошнымъ образомъ по экватору нѣсколько разъ кругомъ земного шара.

Когда мы опредѣляли ирраціональное число безконечною десятичною дробью, то мы предполагали, что извѣстны всѣ десятичные знаки въ томъ смыслѣ, что мы имѣемъ возможность указать правила, по которымъ можно найти цифру любого разряда.

Что касается практическихъ приложеній математики, то

имѣютъ значеніе лишь небольшое число первыхъ десятичныхъ знаковъ послѣ запятой.

Такъ, напримѣръ, для числа

$$\pi = 3{,}1415926538979 \ldots$$

выражающаго отношеніе окружности къ діаметру, вычислено въ настоящее время до 700 знаковъ. Такое точное вычисленіе π не имѣетъ однако ни теоретическаго интереса, ни практическаго значенія. Какова точность, которую даютъ уже 100 десятичныхъ знаковъ, можно судить по слѣдующимъ соображеніямъ. Вообразимъ себѣ шаръ, котораго радіусъ равенъ разстоянію Сиріуса отъ земли (около $134 . 10^{12}$ километровъ); этотъ шаръ представимъ себѣ наполненнымъ микробами такъ тѣсно, что въ каждомъ кубическомъ миллиметрѣ ихъ помѣщается цѣлый билліонъ (10^{12}). Вообразимъ далѣе, что всѣ эти микробы выравнены по прямой и разстояніе между каждыми двумя сосѣдними равно разстоянію Сиріуса отъ земли. Примемъ теперь эту прямую за діаметръ круга и вычислимъ длину окружности этого круга при помощи π со 100 десятичными знаками. Полученное число даетъ длину этой окружности съ ошибкой противъ истины лишь въ одну милліонную миллиметра.

Мы приводимъ всѣ эти соображенія лишь для того, чтобы показать, что въ приложеніяхъ математики имѣютъ значеніе лишь числа, не имѣющія большого числа десятичныхъ знаковъ. Это весьма важное замѣчаніе было сдѣлано уже знаменитымъ греческимъ математикомъ Архимедомъ, который въ сочиненіи подъ заглавіемъ „Псаммитъ“ показываетъ, что, если шаръ, имѣющій радіусъ орбиты Сатурна, заполнить мелкимъ пескомъ, то и тогда число песчинокъ будетъ выражаться числомъ, которое будетъ меньше 10^{63}.

Размѣщенія (Arrangements).

§ 6. Поставимъ себѣ задачей разсмотрѣть, на сколько способовъ можно изъ n предметовъ сдѣлать размѣщенія въ рядъ по k предметовъ ($k < n$) въ каждомъ. Число такихъ размѣщеній будемъ обозначать такъ

$$A_n^k .$$

Найдемъ число A_n^1, т. е. когда $k = 1$. Каждое изъ размѣ-

щеній состоитъ изъ одного предмета, такъ что число размѣщеній равно числу самихъ предметовъ

$$A_n^1 = n.$$

Если предметы обозначены буквами, то эти размѣщенія будутъ

$$a;\ b;\ c;\ .\ .\ .\ .\ \ ;\ g.$$

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію случая

$$A_n^2.$$

Чтобы составить эти размѣщенія можно разсуждать такъ. Поставимъ сначала одну букву a на лѣвое мѣсто и припишемъ къ ней справа размѣщенія остальныхъ буквъ по одной; получимъ $n-1$ размѣщеніе.

(1) $$ab;\ ac;\ ad;\ .\ .\ .\ .\ \ ;\ ag;$$

подобнымъ же образомъ поставимъ на первое мѣсто букву b и припишемъ къ ней остальныя; получимъ $n-1$ новыхъ размѣщеній

(2) $$ba;\ bc;\ bd;\ .\ .\ .\ .\ \ ;\ bg.$$

Продолжая ставить на первое мѣсто послѣдовательно одну за другой всѣ наши буквы, получимъ n рядовъ (1), (2), . . . по $n-1$ размѣщеній въ каждомъ. Всего выйдетъ $n\,(n-1)$ размѣщеній изъ n элементовъ по два, т. е.

$$A_n^2 = n\,(n-1).$$

Эту формулу можно будетъ переписать такъ

$$A_n^2 = n\,A_{n-1}^1.$$

Обращаемся теперь къ вычисленію A_n^3, числа размѣщеній изъ n элементовъ по 3. Будемъ ставить на первое мѣсто послѣдовательно каждую букву и будемъ къ ней приписывать размѣщенія остальныхъ $n-1$ буквъ по 2. Получимъ

$$A_n^3 = n\,A_{n-1}^2;$$

но

$$A_{n-1}^2 = (n-1)\,(n-2),$$

слѣдовательно,

$$A_n^3 = n\,(n-1)\,(n-2).$$

Продолжая разсужденіе далѣе, получимъ обычную формулу

(3) $$A_n^k = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1).$$

Напримѣръ,

$$A_{12}^5 = 12\,.\,11\,.\,10\,.\,9\,.\,8.$$

§ 7. Формула (3) предыдущаго §-а приводитъ къ слѣдующей

$$A_n^k = n\,A_{n-1}^{k-1}.$$

Сочетанія (Combinaisons).

§ 8. Число размѣщеній 4-хъ буквъ по 2 равно 12. Эти размѣщенія суть

(1)
ab	*ba*	*ca*	*da*
ac	*bc*	*cb*	*db*
ad	*bd*	*cd*	*dc*

Если два размѣщенія *ab* и *ba*, составленныя изъ тѣхъ же буквъ, выписанныхъ въ разномъ порядкѣ, не считать за различныя, тогда число различныхъ сопоставленій 4-хъ буквъ по 2 будетъ равно только шести:

(2) *ab*; *ac*; *ad*; *bc*; *bd*; *cd*.

Оставляя названіе размѣщеній для сопоставленій вида (1), будемъ называть сопоставленія (2) сочетаніями изъ 4-хъ элементовъ по 2. При сочетаніяхъ порядокъ элементовъ не играетъ роли. Различныя между собою сочетанія должны отличаться входящими въ нихъ элементами.

Пусть знакъ

$$C_n^k$$

обозначаетъ число сочетаній изъ n элементовъ по k.

Нетрудно изъ размѣщеній получить сочетанія. Для этой цѣли изъ всѣхъ размѣщеній, содержащихъ одинаковыя буквы, надо сохранить только одно, остальныя же отбросить. Если разсматриваются размѣщенія изъ n буквъ по k, тогда будетъ для каждаго размѣщенія существовать (считая вмѣстѣ съ нимъ) P_k размѣщеній съ тѣми же буквами, то есть какъ разъ столько, сколько перемѣщеній можно сдѣлать изъ k буквъ. Значитъ, для полу-

ченія изъ числа размѣщеній A_n^k числа сочетаній C_n^k, надо будетъ раздѣлить A_n^k на P_k, ибо изъ каждыхъ P_k размѣщеній, содержащихъ однѣ и тѣ же буквы, надо будетъ сохранить только одно.

Мы приходимъ къ формулѣ

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots k.\,(n-k)(n-k-1)\ldots 3.2.1} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Напримѣръ,

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 11.9.8 = 792.$$

Биномъ Ньютона.

§ 9. Разсмотримъ произведеніе n множителей

(1) $$Q = (x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+g).$$

Докажемъ, что произведеніе Q можно представить въ такомъ видѣ

(2) $$Q = x^n + S_n^1 x^{n-1} + S_n^2 x^{n-2} + \ldots + S_n^{n-1} x + S_n^n,$$

гдѣ знакъ S_n^k обозначаетъ сумму произведеній, изъ которыхъ каждое является сочетаніемъ изъ n множителей $a, b, c, \ldots g$ по k.

Такъ, напримѣръ,

$$S_n^1 = a+b+c\ldots+g,$$

$$S_n^2 = ab+ac+bc+\ldots \qquad S_n^n = abc\ldots g.$$

Для доказательства провѣримъ эту теорему для простѣйшихъ случаевъ $n=2$, $n=3$, $n=4$; мы видимъ, что дѣйствительно теорема вѣрна, ибо

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right| x + ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \Big| \; x^2 + \begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix} \Big| \; x + abc;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \Big| \; x^2 + \begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ bc \\ bd \\ cd \end{matrix} \Big| \; x^2 + \begin{matrix} bcd \\ acd \\ abd \\ abc \end{matrix} \Big| \; x + abcd.$$

А теперь примѣнимъ такъ называемый способъ доказательства по индукціи. То-есть предположимъ, что теорема вѣрна для n множителей, тогда покажемъ, что она должна остаться вѣрной и для числа множителей на единицу бо́льшаго, т.-е. для $n+1$ множителей. Но разъ она вѣрна для $n = 2, 3, 4$, то, слѣдовательно, она должна быть вѣрною при $n = 5, 6, 7, 8, \ldots$ т.-е. оставаться всегда вѣрной.

Итакъ, по предположенію вѣрна такая формула

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+g) =$$
$$= x_n + S_n^1 x^{n-1} + S_n^2 x^{n-2} + \ldots + S_n^{n-1} x + S_n^n.$$

Умножая обѣ ея части на $x+l$, получимъ

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+g)(x+l) =$$
$$= x^{n+1} + (S_n^1 + l)x^n + (S_n^2 + lS_n^1)x^{n-1} + (S_n^3 + lS_n^2)x^{n-2} + \ldots,$$

но очевидно, что

$$S_n^k + lS_n^{k-1} = S_{n+1}^k,$$

ибо сумма S_{n+1}^k сочетаній изъ $n+1$ элементовъ $a, b, c, \ldots g, l$ по k состоитъ изъ суммы подобныхъ же сочетаній S_n^k, въ которыхъ не входитъ буква l, и изъ суммы сочетаній lS_n^{k-1} съ буквой l; мы получаемъ

$$(x+a)(x+b) \ldots (x+g)(x+l) = x^{n+1} + S_{n+1}^1 x^n + S_{n+1}^2 x^{n-1} + \ldots$$

и теорема доказана.

§ 10. Обращаемся теперь къ наиболѣе важному для насъ случаю равенства всѣхъ вторыхъ членовъ множителей

$$a = b = c = \ldots = g;$$

тогда получается разложеніе по степенямъ x степени бинома

$$(x+a)^n.$$

Въ этомъ случаѣ

$$S_n^3 = a+b+c+\ldots+g = a+a+\ldots+a = na = C_n^1 a,$$

$$S_n^3 = ab+bc+ca+\ldots = a^2+a^2+a^2+\ldots = C_n^2 a^2 = \frac{n(n-1)}{1.2} a^2,$$

$$S_n^3 = abc+abd+\ldots = a^3+a^3+a^3+\ldots = C_n^3 a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3,$$

и т. д.

Сопоставляя съ формулами (1) и (2) предыдущаго §-а, получимъ знаменитую формулу, называемую биномомъ Ньютона:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} a^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} x^{n-k} a^k + \ldots + \frac{n}{1} x a^{n-1} + a^n,$$

или иначе

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n.$$

Въ этой формулѣ мы замѣчаемъ слѣдующія важныя обстоятельства:

1.^{0}, показатели надъ x убываютъ, 2.^{0}, показатели надъ a возрастаютъ, 3.^{0}, сумма показателей надъ x и надъ a въ каждомъ членѣ есть величина постоянная, равная показателю n степени, въ которую возвышается биномъ, 4.^{0}, коэффиціентъ при членѣ $x^{n-k} a^k$ равняется числу сочетаній изъ n элементовъ по k.

Три первыя свойства были извѣстны задолго до Ньютона. Ньютону принадлежитъ лишь указаніе четвертаго свойства—связи коэффиціентовъ съ числомъ сочетаній. Это свойство представляетъ теорему громадной важности. Формула Ньютона вырѣзана на гробницѣ Ньютона въ Вестминстерскомъ аббатствѣ.

§ 11. Числа C_n^k носятъ названіе биноміальныхъ коэффиціентовъ. Обратимъ вниманіе на ихъ главнѣйшія свойства.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что формула бинома не должна мѣняться отъ замѣны x на a и обратно, ибо

$$(x+a)^n = (a+x)^n,$$

слѣдовательно, должны быть одинаковы коэффиціенты при $x^{n-k}a^k$ и $x^k a^{n-k}$, то есть должно существовать свойство

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1}$$

получаемъ теорему: **биноміальные коэффиціенты, равноотстоящіе отъ концовъ формулы Ньютона, равны между собой.**

Въ справедливости формулы (1) можно убѣдиться также изъ представленія биноміальныхъ коэффиціентовъ черезъ факторіалы.

Пусть два цѣлыхъ числа k и l таковы, что ихъ сумма равна n, тогда, очевидно,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,l!} = \frac{n!}{l!\,k!} = C_n^l,$$

что совпадаетъ съ формулой (1), ибо $l = n - k$.

§ 12. Положимъ въ формулѣ (1) § 10 $x = 1$, $a = 1$, получимъ

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^{n-1} + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \\ + \ldots + C_n^n,$$

ибо можно считать $C_n^0 = 1$; мы приходимъ къ теоремѣ:

Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ равна 2^n.

§ 13. Полагая $x = 1$, $a = -1$, получимъ

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots,$$

откуда

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$$

т. е. **сумма коэффиціентовъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равна суммѣ коэффиціентовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.**

§ 14. Сравнимъ теперь биноміальные коэффиціенты при двухъ рядомъ стоящихъ показателяхъ n и $n+1$. Для этой цѣли умножимъ формулу

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x a^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots$$

съ обѣихъ сторонъ на $x+a$; получимъ

$$(x+a)^n (x+a) = x^{n+1} + \begin{matrix} 1 \\ C_n^1 \end{matrix} \Big| x^n a + \begin{matrix} C_n^1 \\ C_n^2 \end{matrix} \Big| x^{n-1} a^2 + \ldots + \\ + \begin{matrix} C_n^{k-1} \\ C_n^k \end{matrix} \Big| x^{n-k+1} a^k + \ldots$$

Сравнивая съ формулой

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + C^1_{n+1} x^n a + C^2_{n+1} x^{n-1} a^2 + \ldots + C^k_{n+1} x^{n-k+1} a^k + \ldots$$

получимъ формулу

(2) $$C^k_{n+1} = C^k_n + C^{k-1}_n,$$

справедливую при всякомъ k.

§ 15. На формулѣ (2) предыдущаго §-а основывается правило нахожденія биноміальныхъ коэффиціентовъ, называемое треугольникомъ Паскаля:

1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5		
1	3	6	10			
1	4	10				
1	5					
1						

Всякое число этой таблицы получается отъ сложенія числа выше стоящаго и числа, стоящаго налѣво. Напримѣръ, третье число третьяго ряда 6 есть сумма выше его стоящаго числа 3 и числа 3, стоящаго налѣво. Если мы разсмотримъ ряды чиселъ, стоящія въ діагональномъ порядкѣ, то получаемъ биноміальные коэффиціенты

$$(a+b) = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

и т. д.

§ 16. Примѣняя формулу (2) § 14 къ числамъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . k, получимъ

$$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1},$$
$$C^k_{n-1} = C^{k-1}_{n-2} + C^k_{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C^k_{k+1} = C^{k-1}_k + C^k_k.$$

Складывая, получимъ

$$(1) \qquad C_n^k = C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \ldots + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1},$$

ибо $C_k^k = 1 = C_{k-1}^{k-1}$.

§ 17. Формула (1) предыдущаго §-а даетъ возможность рѣшить задачу о числѣ ядеръ въ треугольной кучѣ.

Для составленія треугольника кучи складываемъ на плоскости слой ядеръ подобно тому, какъ это дѣлается при игрѣ на билліардѣ. Если мы обозначимъ черезъ n число шаровъ въ сторонѣ такого треугольника ядеръ, то число шаровъ во всемъ треугольникѣ будетъ, очевидно,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

Если мы теперь на этотъ слой ядеръ положимъ новый треугольный слой такимъ образомъ, что въ его сторонѣ будетъ на единицу меньше ядеръ, то число ядеръ въ новомъ слоѣ выразится черезъ C_n^2; число ядеръ въ третьемъ слоѣ будетъ C_{n-1}^2, и т. д. пока, наконецъ, мы не дойдемъ до случая $C^2{}_2$, соотвѣтствующаго вершинѣ кучи.

Итакъ, число ядеръ всей кучи выразится суммой

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

На основаніи формулы (1) § 16 послѣдняя формула будетъ ничѣмъ инымъ, какъ

$$C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)\ (n+1)\ n}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

и мы получаемъ окончательное выраженіе для числа ядеръ въ разсматриваемой кучѣ.

§ 18. Положимъ, что мы желаемъ вычислять биномiальные коэффиціенты послѣдовательно одинъ за другимъ. Пусть написаны уже k членовъ разложенія,

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1\ x^{n-1} a + C_n^2\ x^{n-2}\ a^2 + \ldots + C_n^{k-1} x^{n-k+1}\ a^{k-1} + \ldots$$

требуется написать слѣдующій членъ

$$+ C_n^k\ x^{n-k}\ a^k.$$

Принимая во вниманіе, что

$$C_n^k = C_n^{k-1} \frac{n-k+1}{k},$$

мы замѣчаемъ, что **надо умножить послѣдній написанный коэффиціентъ** C_n^{k-1} **на показатель** $n-k+1$ **надъ** x**-омъ въ послѣднемъ написанномъ членѣ и раздѣлить на число уже написанныхъ членовъ.**

Такъ, напримѣръ, если написаны 6 членовъ разложенія

$$(x+a)^{10} = x^{10} + 10x^9a + 45x^8a^2 + 120x^7a^3 + 210x^6a^4 + 252x^5a^5,$$

то коэффиціентъ слѣдующаго члена вычислится такъ

$$252 \cdot \frac{5}{6} = 210.$$

Возвышеніе полинома въ степень.

§ 19. Формулу бинома Ньютона можно переписать такъ

$$(1) \qquad (x+a)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^{n-k}\, a^k,$$

гдѣ знакъ суммированія распространяется на всѣ значенія k отъ нуля до n, причемъ мы предполагаемъ, что

$$0! = 1! = 1.$$

Полагая въ послѣдней формулѣ $a = y+b$ и замѣчая, что

$$a^k = (y+b)^k = \sum_{l=0}^{l=k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} y^{k-l}\, b^l,$$

представимъ формулу (1) въ такомъ видѣ

$$(x+y+b)^n = \sum \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{k!}{l!\,(k-l)!} x^{n-k}\, y^{k-l}\, b^l,$$

обозначая

$$l = \lambda,\ k-l = \mu,\ n-k = \nu,$$

причемъ

$$(2) \qquad \lambda + \mu + \nu = n,$$

получимъ

$$(x+y+b)^n = \sum \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} x^\nu\, y^\mu\, b^\lambda,$$

гдѣ сумма распространяется на всевозможныя значенія показателей (цѣлыя или равныя нулю) λ, μ, ν, удовлетворяющія равенству (2).

Мы получили формулу, дающую возможность возвысить въ цѣлую степень трехчленъ.

§ 20. Получается самая общая формула для возвышенія въ степень любого полинома

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum\frac{n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_m!}\,x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\cdot\cdots\cdot x_m^{\lambda_m},$$

гдѣ цѣлые или равные нулю показатели удовлетворяютъ уравненію

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n.$$

§ 21. Неравенство Н. Сонина [1]).

$$(1)\qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Примѣняя неравенство (1) § 38 главы XI (стр. 200), получимъ

$$(2)\qquad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}.$$

Интересно, что, если мы умножимъ лѣвую часть неравенства (2) на число

$$\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

меньшее единицы, то получимъ неравенство

$$(3)\qquad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}<1-\frac{1}{n},$$

равносильное съ подлежащимъ доказательству (1).

Итакъ, приступимъ къ доказательству неравенства (3), возвысивъ обѣ его части въ квадратъ

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

---

[1]) Н. Нинось. Этюды по элементарной алгебрѣ (Вѣстникъ опытной физики и элем. математики, 1913).

Удобнѣе доказывать неравенство въ такомъ видѣ

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{2n+1} > \left(\frac{n}{n-1}\right)^2,$$

или иначе

$$(1+\beta)^{2n+1} > (1+\alpha)^2, \tag{4}$$

гдѣ

$$\beta = \frac{1}{n^2-1},\ \alpha = \frac{1}{n-1} = \frac{n+1}{n^2-1}.$$

Перепишемъ неравенство (4) въ такомъ видѣ

$$1-1+(2n+1)\,\beta - 2\alpha + \frac{(2n+1)\,2n}{1\cdot 2}\,\beta^2 - \alpha^2 +$$
$$+\frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\beta^3 + L > 0,$$

или иначе

$$\frac{n^3+2n}{3(n^2-1)^3} + L > 0;$$

это же неравенство, очевидно, справедливо, ибо L есть сумма биномiальныхъ членовъ выраженія $(1+\beta)^{2n+1}$, начиная съ пятаго, которые всѣ положительны.

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

§ 22. Поясним на нѣсколькихъ задачахъ способъ рѣшенія задачъ, состоящій во введеніи неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Разсмотримъ задачу освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала. Пусть данное уравненіе содержитъ выраженіе $\sqrt[n]{A}$, гдѣ A есть выраженіе, содержащее неизвѣстныя, причемъ этотъ радикалъ входитъ въ уравненіе въ различныхъ степеняхъ.

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^2 = \sqrt[n]{A^2},\ \left(\sqrt[n]{A}\right)^3 = \sqrt[n]{A^3},\ \text{и т. д.}$$

Обозначивъ для сокращенія $\sqrt[n]{A}$ черезъ x, получимъ

$$\sqrt[n]{A} = x,\ \sqrt[n]{A^2} = x^2,\ \sqrt[n]{A^3} = x^3,\ \ldots\ldots$$

Можно предположить, что уравненіе имѣетъ раціональный и цѣлый видъ относительно x, ибо можно предварительно

освободить уравненіе отъ дробныхъ членовъ. Если x находится подъ знакомъ новаго радикала, который будетъ сложнымъ радикаломъ, то можно будетъ обозначить черезъ x этотъ сложный радикалъ, и заняться сначала его исключеніемъ.

Такъ какъ

(1) $$x^n = A,\ x^{n+1} = Ax, x^{n+2} = Ax^2,\ \text{и т. д.}$$

то мы замѣчаемъ, что, понижая, гдѣ возможно, при помощи формулъ (1) степень x, мы приведемъ уравненіе въ виду

(2) $$p_1\ x^{n-1} + p_2\ x^{n+2} + p_3\ x^{n+3} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_n$ суть выраженія, которыя могутъ заключать другіе радикалы. Нѣкоторые изъ этихъ коэффиціентовъ могутъ равняться нулю.

Чтобы освободить уравненіе (2) отъ радикала x, умножимъ первую часть его на многочленъ $(n-1)$-ой степени отъ x

$$x^{n-1} + a\,x^{n-2} + b\,x^{n-3} + \ldots\ldots$$

коэффиціенты котораго $a, b, c, \ldots$ оставимъ пока неопредѣленными. Число этихъ коэффиціентовъ есть $n-1$.

Послѣ умноженія получаемъ

$$p_1\ x^{2n-2} + (p_1\ a + p_2)x^{2n-3} + (p_1\ b + p_2\ a + p_3)\ x^{2n-4} + \ldots = 0.$$

Понижая всѣ степени x, показатели которыхъ больше или равны n, получимъ

$$K_1\ x^{n-1} + K_2\ x^{n-2} + \ldots + K_{n-1}x + L = 0,$$

гдѣ $K_1, K_2, \ldots K_{n-1}, L$ будутъ, какъ легко видѣть изъ процесса выкладки, выраженія первой степени относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ $a, b, c, \ldots\ldots$

Рѣшая $n-1$ уравненій 1-ой степени

$$K_1 = 0,\ K_2 = 0, \ldots K_{n-1} = 0,$$

относительно $n-1$ неизвѣстныхъ $a, b, c, \ldots$ получимъ послѣ подстановки найденныхъ выраженій для неизвѣстныхъ въ L, уравненіе

$$L = 0,$$

свободное отъ радикала $\sqrt[n]{A}$.

§ 23. Требуется, напримѣръ, освободить отъ радикаловъ уравненіе

$$B+\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{A^2}+\sqrt[4]{A^3}=0.$$

Слѣдуя теоріи, обозначимъ $x=\sqrt[4]{A}$ и пишемъ

$$(x^3+x^2+x+B)\ (x^3+ax^2+bx+c)=$$
$$=x^6+(a+1)\ x^5+(b+a+1)\ x^4+(c+b+a+B)\ x^3+$$
$$+(c+b+aB)\ x^2+(c+Bb)\ x+cB=0;$$

но

$$x^6=Ax^2,\ x^5=Ax,\ x^4=A,$$

и мы получаемъ уравненіе

$$(c+b+a+B)\ x^3+(c+b+aB+A)\ x^2+(c+bB+aA+A)\ x+$$
$$+A(b+a+1)+cB=0.$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при степеняхъ x, получимъ

$$\begin{aligned} c+b+a+B&=0,\\ c+b+aB+A&=0,\\ c+Bb+aA+A&=0, \end{aligned}\tag{1}$$

откуда

$$a=\frac{A-B}{1-B},\ b=\frac{(A-B)^2}{(1-B)^2},\ c=\frac{3BA-B^3-A-A^2}{(1-B)^2}.\tag{2}$$

Подставляя полученныя выраженія въ уравненіе

$$A(b+a+1)+cB=0,\tag{3}$$

получимъ

$$A\{(A-B)^2+(A-B)\ (1-B)+(1-B)^2\}+$$
$$+B(3BA^2-B^3-A-A^2)=0;$$

это уравненіе и представляетъ искомый результатъ исключенія радикала $\sqrt[n]{A}$ изъ уравненія.

Разсмотримъ теперь случай $B=1$. Формулы (2) теряютъ смыслъ въ этомъ случаѣ; задача рѣшается проще. Уравненіе (3) и первое изъ (1) принимаетъ видъ

$$\begin{aligned} A(b+a+1)+c&=0,\\ c+b+a+1&=0; \end{aligned}$$

черезъ вычитанія получимъ

$$(A-1)(b+a+1)=0,$$

слѣдовательно, искомое уравненіе, освобожденное отъ радикала, будетъ

(4) $$A-1=0.$$

Этотъ результатъ можно было получить, умноживъ первую часть заданнаго уравненія

$$x^3+x^2+x+1=0$$

на $x-1$. Получимъ $x^4-1=0$, то есть уравненіе (4).

§ 24. Задача. **Требуется найти общее выраженіе коэффиціента B_n^k полинома**

$$(1)\varphi_n(z)=z^n+B_n^1\,z^{n-2}+B_n^2\,z^{n-4}+\ldots+B_n^k\,z^{n-2k}+\ldots$$

разсматриваемаго нами въ § 13 главы XI.

Оставимъ пока неизвѣстными коэффиціенты B_n^k; подставимъ въ уравненіе (1)

$$\varphi_n(z)=x^n+\frac{1}{x^n},\quad z=x+\frac{1}{x},$$

и умножимъ его на x^n, тогда получимъ

$$(2)\qquad x^{2n}+1=(x^2+1)^n+B_n^1\,x^2(x^2+1)^{n-2}+$$
$$+B_n^2\,x^4(x^2+1)^{n-4}+\ldots\ldots$$

Сравнивая коэффиціенты у разныхъ степеней x въ обѣихъ частяхъ равенства (2), получимъ равенства

$$0=B_n^1+n,$$

$$0=B_n^2+(n-2)B_n^1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},$$

$$0=B_n^3+(n-4)B_n^2+\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}B_n^1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

. . . . . .

изъ этихъ равенствъ получаемъ послѣдовательно формулы:

$$B_n^1=-n,$$

$$B_n^2=n\frac{n-3}{1\cdot 2},$$

$$B_n^3=-n\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

. . . . . .

Разсматривая эти выраженія, догадываемся о существованіи формулы

$$(3)\qquad B_n^k=(-1)^k\frac{(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+1)}{1.2.3.\ldots.k}n.$$

Чтобы доказать, что эта формула дѣйствительно имѣетъ мѣсто всегда, провѣряемъ справедливость ея на первыхъ значеніяхъ n функціи $\varphi_n(z)$, т. е. на случаяхъ $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$, а затѣмъ покажемъ, что, если она вѣрна независимо отъ k при $n-1$ и $n-2$, то она будетъ вѣрна и при n.

Въ главѣ XI (стр. 182) мы вывели тождество

$$(4)\qquad \varphi_n(z)=z\varphi_{n-1}(z)-\varphi_{n-2}(z).$$

Но мы имѣемъ

$$\varphi_n(z)=\sum B_n^k z^{n-2k},$$

$$z\varphi_{n-1}(z)=\sum B_{n-1}^k z^{n-2k},\quad \varphi_{n-2}(z)=\sum B_{n-2}^{k-1} z^{n-2k},$$

откуда, принимая во вниманіе тождество (4), получимъ

$$B_n^k=B_{n-1}^k-B_{n-2}^{k-1}.$$

Подставляя B_{n-1}^k и B_{n-2}^{k-1} по формулѣ (3) и производя выкладки вычитанія, получимъ снова для B_n^k выраженіе (3). Значитъ, это выраженіе справедливо всегда.

§ 25. Задача. **Найти коэффиціентъ при x^r $(r<k)$ въ выраженіи**

$$P(x)=(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+kx^{k-1})^n.$$

Нетрудно убѣдиться въ существованіи тождества

$$(1-x)^2(1+2x+3x^2+\ldots+kx^{k-1})=1-(1+k)x^k+kx^{k+1}.$$

Итакъ, мы имѣемъ

$$(1-x)^{2n}P(x)=\left\{1-(1+k)x^k+kx^{k-1}\right\}^n.$$

Такъ какъ въ разложеніи, находящемся въ правой части равенства, не существуетъ членовъ со степенями x, x^2, x^3, $\ldots$ x^{k-1}, то мы должны приравнять нулю коэффиціенты при этихъ степеняхъ въ лѣвой части. Полагая

$$P(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, ... пока неопредѣленные коэффиціенты, получимъ рядъ равенствъ

$$a_1 - 2n = 0,$$

$$a_2 - 2n\,a_1 + \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2} = 0,$$

$$a_3 - 2n\,a_2 + \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2}\,a_1 - \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = 0,$$

. . . . . .

Отсюда получаемъ

$$a_1 = \frac{2n}{1},\quad a_2 = \frac{2n(2n+1)}{1\,.\,2},\quad a_3 = \frac{2n\,(2n+1)\,(2n+2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

вообще

$$a_k = \frac{2n\,(2n+1)\,(2n+2)\,.\,.\,.\,.\,(2n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,k}.$$

ГЛАВА XVI.

Понятіе о функціональной зависимости.

Понятіе о функціи.

§ 1. Если двѣ перемѣнныя x и y связаны между собою такъ, что каждому частному значенію одной изъ нихъ, напр., x, соотвѣтствуетъ опредѣленное частное значеніе другой y, то перемѣнная y называется функціей отъ x, которая носитъ названіе независимой перемѣнной.

То обстоятельство, что перемѣнная y есть функція отъ перемѣнной x, обозначается знакомъ

$$y = f(x),$$

что читается такъ: функція эфъ отъ икса.

Для обозначенія нѣсколькихъ различныхъ функцій пишутся различныя буквы или одна и та же буква съ различными значками

$$\varphi(x),\ \psi(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ .\ .\ .$$

что читается такъ: функція фи, пси, эфъ примъ, эфъ со значкомъ два и т. д.

Поправка:

На стр. 296, въ послѣдней формулѣ главы XV надо вмѣсто буквы k написать букву r.

§ 2. Всякая формула, заключающая букву x, есть, очевидно, функція отъ этой буквы.

Напримѣръ, y, выражаемый по формулѣ

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x},$$

есть функція отъ x.

Значеніямъ x

$$x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3, \ldots$$

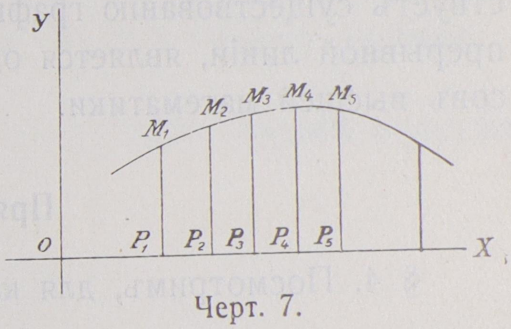
соотвѣтствуютъ значенія

$$y = \infty,\ y = 1,\ y = \frac{7}{2},\ y = \frac{17}{3}, \ldots$$

Графическое изображеніе функціи.

§ 3. Возьмемъ рядъ вещественныхъ значеній независимаго перемѣннаго x. Пусть эти значенія будутъ

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$



Черт. 7.

Этимъ значеніямъ, какъ абсциссамъ (см. § 14, главы IX, стр. 159) соотвѣтствуютъ точки $P_1, P_2, P_3, \ldots$ на оси OX, причемъ

$$x_1 = OP_1,\ x_2 = OP_2,\ x_3 = OP_3, \ldots$$

Въ точкахъ P_1, P_2, $P_3, \ldots$ возставимъ перпендикуляры P_1M_1, P_2M_2, $P_3M_3, \ldots$ къ оси абсциссъ и отложимъ на этихъ перпендикулярахъ соотвѣтствующія значенія функціи

$$y = f(x);$$

пусть эти значенія будутъ

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = M_1P_1, \\ y_2 &= f(x_2) = M_2P_2, \\ y_3 &= f(x_3) = M_3P_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Получаемъ точки M_1, M_2, M_3, $M_4, \ldots$ Эти точки сближаются другъ съ другомъ, если уменьшаются разстоянія между перпендикулярами P_1M_1, P_2M_2, $P_3M_3, \ldots$

Интересенъ фактъ, состоящій въ томъ, что для функцій,

образованныхъ формулами, составленными при помощи знаковъ элементарной алгебры, точки M_i обыкновенно заполняютъ непрерывную линію Эта линія можетъ быть или прямою, или кривою.

Каждой функціи соотвѣтствуетъ, какъ графическое изображеніе, своя линія.

Свойство функціи имѣть графическимъ изображеніемъ непрерывную линію навело на мысль разсматривать вопросъ, какими алгебраическими свойствами функціи обусловливается указанное геометрическое свойство.

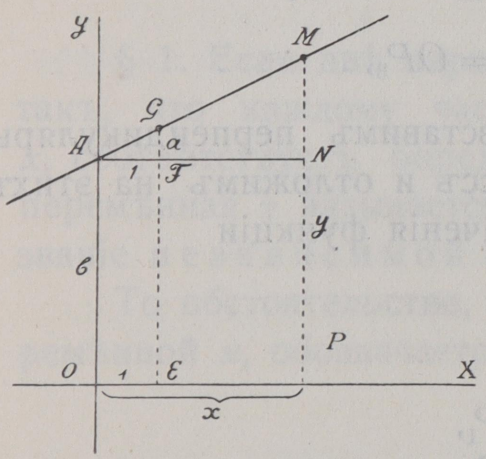
Наиболѣе распространено слѣдующее опредѣленіе непрерывности функціи.

Функція называется непрерывной, если безконечно малому приращенію независимаго перемѣннаго соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе функціи.

Вопросъ о томъ, въ какой мѣрѣ это опредѣленіе соотвѣтствуетъ существованію графическаго изображенія въ видѣ непрерывной линіи, является однимъ изъ самыхъ трудныхъ вопросовъ высшей математики.

Прямая линія.

§ 4. Посмотримъ, для какой функціи явится, какъ графическое изображеніе, прямая линія. Пусть разсматривается прямая AGM, пересѣкающая въ точкѣ A ось OY.



Черт. 8.

Возьмемъ произвольную точку M на прямой и обозначимъ черезъ x ея абсциссу OP, а черезъ y ея ординату PM. Покажемъ, какая будетъ существовать зависимость между $x = OP$ и $y = PM$.

Можно считать заданною ординату въ точкѣ A, въ которой пересѣкаетъ заданная прямая ось OY. Кромѣ того можно считать заданнымъ уголъ FAG, который прямая образуетъ съ осью абсциссъ. Вмѣсто угла можно взять нѣкоторое число a, заданіемъ котораго будетъ опредѣляться этотъ уголъ FAG. Возьмемъ абсциссу OE равную единицѣ, тогда соотвѣтственная ордината пересѣчетъ заданную прямую въ точкѣ G, а въ точкѣ F она пе-

ресѣчетъ прямую AN, проведенную черезъ точку A параллельно оси абсциссъ. Обозначимъ черезъ a длину отрѣзка FG, если точка G лежитъ выше точки F, и длину GF, взятую со знакомъ —, если G лежитъ ниже точки F. Будемъ называть число a степенью подъема прямой.

Тогда изъ подобныхъ треугольниковъ AMN и AGF получимъ

$$\frac{MN}{AN} = \frac{GF}{AF} \text{ или } \frac{y-b}{x} = \frac{a}{1},$$

откуда

(1) $$y = ax + b.$$

Итакъ прямая линія опредѣляется функціей $ax + b$ цѣлой и первой степени относительно x. На этомъ основано названіе линейныхъ, которое часто дается цѣлымъ функціямъ первой степени.

Итакъ, прямая линія опредѣляется уравненіемъ 1-ой степени относительно двухъ неизвѣстныхъ x и y. Задать прямую это значитъ задать коэффиціенты a и b.

Напримѣръ, уравненіе $y = 2x + 3$ даетъ вполнѣ опредѣленную прямую.

Параболы.

§ 5. Названіе параболъ дается линіямъ, которыя служатъ для графическаго изображенія функцій

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + g,$$

которыя суть полиномы относительно независимой перемѣнной x съ заданными коэффиціентами $a, b, c, \ldots g$. Степень n полинома носитъ названіе порядка параболы. Очевидно, что прямую линію можно разсматривать, какъ параболу перваго порядка.

Парабола 2-го порядка опредѣляется уравненіемъ

$$y = ax^2 + bx + c.$$

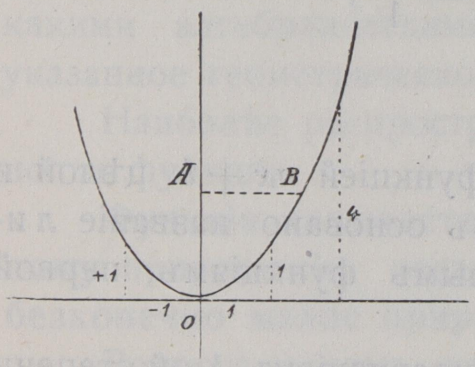
Отъ измѣненія коэффиціентовъ a, b, c мѣняется положеніе параболы на плоскости и до нѣкоторой степени ея внѣшній видъ. Измѣненіе вида параболы съ измѣненіемъ коэфиціентовъ a, b, c однако не очень велико въ качественномъ отношеніи, такъ что хорошее представленіе о видѣ параболы второго порядка можетъ дать уже простѣйшій частный случай

$$y = x^2,$$

когда $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

На чертежѣ приведено очертаніе параболы, опредѣляемой уравненіемъ $y = x^2$.

Если мы положимъ $y = 2$, то уравненіе $y = x^2$ даетъ для x выраженіе $\sqrt{2}$. **Доказательство существованія корня квадратнаго $\sqrt{2}$ геометрически приводится къ доказательству существованія опредѣленной точки B встрѣчи параболы съ прямой AB, опредѣляемой уравненіемъ $y = 2$.**



Черт. 9.

Вообще говоря, данное въ § 4 главы VIII (стр. 125) доказательство существованія радикала $\sqrt[n]{A}$ сводится къ доказательству существованія точки пересѣченія прямой $y = A$ съ параболой n-го порядка $y = x^n$.

Гипербола.

§ 6. Разсмотримъ теперь линію, опредѣляемую функціей

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{ax + b}. \tag{1}$$

Если существуетъ пропорція

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = k,$$

то уравненіе обращается въ $y = k$ и даетъ прямую параллельную оси абсциссъ.

Если указанная пропорціональность отсутствуетъ, то корни двухъ уравненій $\alpha x + \beta = 0$, $ax + b = 0$ различные. При корнѣ знаменателя $ax + b$, то есть при числѣ $x = -\frac{b}{a}$ ордината $y = \infty$.

Переписавъ уравненіе (1) въ видѣ

$$y = \frac{\alpha + \frac{\beta}{x}}{a + \frac{b}{x}},$$

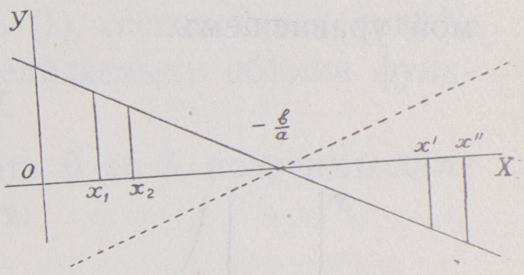
и полагая $x = \infty$, получимъ

$$\{\lim y\}_{x=\infty} = \frac{\alpha}{a}.$$

Какъ для значеній абсциссы меньшихъ $-\frac{b}{a}$, такъ и для значеній бо́льшихъ $-\frac{b}{a}$, ордината y или постоянно возрастаетъ съ возрастаніемъ x, или постоянно убываетъ. Въ самомъ дѣлѣ если мы разсмотримъ прямую

$$y = ax + b, \tag{2}$$

то уравненіе $ax + b = 0$ дастъ абсциссу $-\frac{b}{a}$ той точки, въ которой прямая (2) пересѣкаетъ ось абсциссъ. Изъ геометрическихъ соображеній очевидно, что если мы возьмемъ двѣ абсциссы x_1 и x_2 меньшія $-\frac{b}{a}$, то два значенія функціи $ax + b$, соотвѣтствующія этимъ абсциссамъ, т. е. значенія



Черт. 10.

$$ax_1 + b,\ ax_2 + b$$

будутъ одинаковаго знака; подобнымъ же образомъ будутъ одинаковы по знаку два значенія

$$ax' + b,\ ax'' + b,$$

которыя соотвѣтствуютъ двумъ значеніемъ x' и x'' абсциссы, бо́льшимъ корня $-\frac{b}{a}$.

Обозначимъ теперь

$$y_1 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{ax_1 + b},\quad y_2 = \frac{\alpha x_2 + \beta}{ax_2 + b},$$

и разсмотримъ разность $y_2 - y_1$, которую послѣ преобразованій можно представить такъ

$$y_2 - y_1 = \frac{(\alpha b - \beta a)(x_2 - x_1)}{(ax_1 + b)(ax_2 + b)}.$$

Такъ какъ $ax_1 + b$ и $ax_2 + b$ одного знака, то произведеніе $(ax_1 + b)(ax_2 + b)$ всегда положительно, и, слѣдовательно,

1^0., при $\alpha b - \beta a > 0$ изъ неравенства $x_2 - x_1 > 0$, будетъ слѣдовать

$$y_2 - y_1 > 0,$$

т. е. съ возрастаніемъ x возрастаетъ величина функціи y.

2^0., при $\alpha b - \beta a < 0$ изъ неравенства $x_2 - x_1 > 0$ будетъ слѣдовать

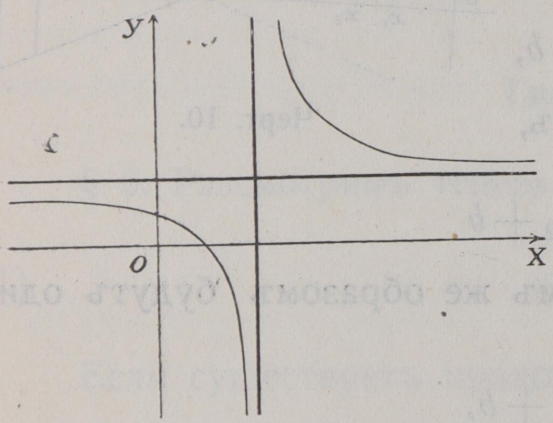
$$y_2 - y_1 < 0,$$

т.-е. съ возрастаніемъ x убываетъ величина функціи y.

Для значеній x', x'' бо́льшихъ корня $-\frac{b}{a}$ остается въ силѣ то же разсужденіе

Итакъ, пусть требуется разсмотрѣть видъ линіи, опредѣляемой уравненіемъ.

$$y = \frac{6x - 5}{3x - 9}.$$



Черт. 11.

При $x = \infty$ мы имѣемъ $y = 2$; при $x = 3$ мы имѣемъ $y = \infty$, $\alpha b - \beta a = -6.9 - (-5)\,3 = -54 + 15 = -39$, то есть $\alpha b - \beta a < 0$; слѣдовательно, функція y убываетъ. Получимъ кривую, указанную на чертежѣ. Линія состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей, которыя, удаляясь на безконечность, приближаются къ двумъ прямымъ

(3) $$x = 3,\ y = 2.$$

Линія носитъ названіе гиперболы, а прямыя (3) называются ассимптотами. Ассимптотой называется вообще такая прямая, съ которой стремится совпасть безконечная вѣтвь линіи кривой, не достигая однако ея.

Итакъ уравненіе (1) опредѣляетъ гиперболу, имѣющую ассимптоты

$$x = -\frac{b}{a},\quad y = \frac{\alpha}{a}.$$

Гипербола $y = \frac{1}{x}$ имѣетъ ассимптотами оси координатъ.

Эллипсъ.

§ 7. Разсмотримъ линію, опредѣляемую уравненіемъ

(1) $$4x^2 + y^2 = 36.$$

Это уравненіе, рѣшенное относительно y, даетъ такъ называемую двузначную функцію

$$y = \pm\sqrt{36 - 4x^2} = \pm 2\sqrt{9 - x^2}.$$

Задать двузначную функцію это все равно, что задать двѣ различныя однозначныя функціи. Въ данномъ примѣрѣ эти двѣ однозначныя функціи будутъ

(2) $$y = 2\sqrt{9 - x^2}, \qquad y = -2\sqrt{9 - x^2}.$$

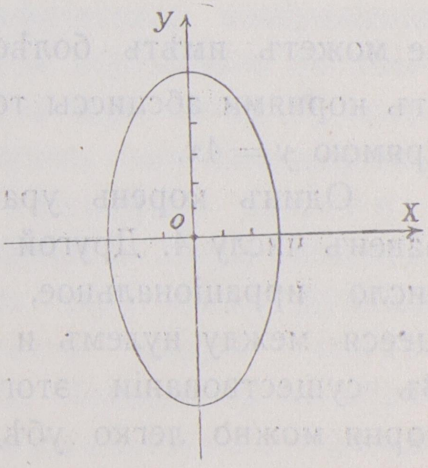
Линія, опредѣляемая уравненіемъ (1), состоитъ изъ совмѣщенія въ одно цѣлое двухъ линій, опредѣляемыхъ обѣими функціями (2).

Давая абсциссѣ x рядъ значеній отъ 0 до 3, получимъ соотвѣтственныя значенія для y. Напримѣръ:

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3$$

$$y = \pm 6, \; y = \pm\sqrt{35}, \; y = \pm 2\sqrt{8}, \; y = \pm 2\sqrt{5}, \; y = 0.$$

Такъ какъ подъ корнемъ квадратнымъ входитъ только x^2, то измѣненіе знака при x не измѣняетъ величину y. Получается овальнаго вида замкнутая линія, носящая названіе „эллипсъ“ и симметрично расположенная относительно обѣихъ осей координатъ.



Черт. 12.

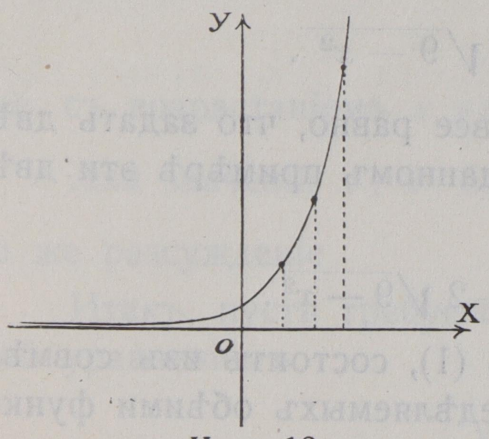
Логариѳмика.

§ 8. Названіе логариѳмики дается для линіи, опредѣляемой уравненіемъ

$$y = a^x,$$

гдѣ a есть заданное положительное число. На чертежѣ дано очертаніе логариѳмики при $a = 2$. Характерныя свойства вида

этой линіи состоятъ во первыхъ въ томъ, что при отрицательныхъ значеніяхъ x логариѳмика имѣетъ ассимптотою ось абсциссъ. При возрастающихъ положительныхъ x—ахъ возрастаніе ординаты логариѳмики совершается быстрѣе возрастанія ординаты любой параболы $y = x^n$, какое бы цѣлое число n не было. Такъ, напримѣръ, логариѳмика $y = 2^x$ перегонитъ кубическую параболу $y = x^3$ уже при числѣ $x = 10$, ибо для параболы получается $y = 1000$, а для логариѳмики $y = 1024$.



Черт. 13.

Данное нами въ § 10 главы XIII (стр. 215) доказательство существованія логариѳма при основаніи a для любого положительнаго числа A сводится на доказательство существованія точки пересѣченія прямой $y = A$ съ логариѳмикой $y = a^x$.

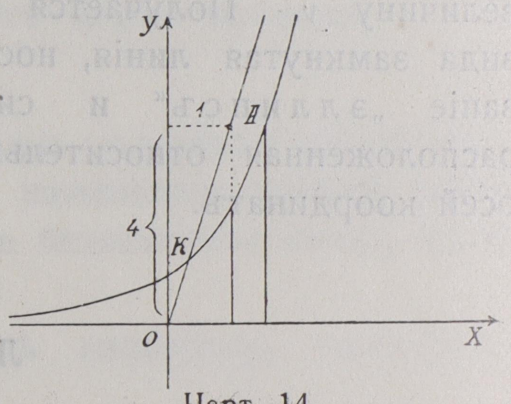
§ 9. Такъ какъ вогнутость логариѳмики обращена всегда въ одну и ту же сторону, то логариѳмика не можетъ пересѣкаться съ прямою болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе

$$2^x = 4x \tag{1}$$

не можетъ имѣть болѣе двухъ корней, ибо это уравненіе имѣетъ корнями абсциссы точекъ пересѣченія логариѳмики $y = 2^x$ съ прямою $y = 4x$.

Одинъ корень уравненія (1) равенъ числу 4. Другой его корень число ирраціональное, заключающееся между нулемъ и единицей. Въ существованіи этого второго корня можно легко убѣдиться, построивъ логариѳмику $y = 2^x$ и прямую $y = 4x$. Если мы возьмемъ клѣтчатую бумагу и построимъ логариѳмику въ большомъ масштабѣ, то найдемъ точку K пересѣченія ея съ прямою съ тѣмъ большею точностью, чѣмъ больше масштабъ. Оказывается, что абсцисса точки K равна



Черт. 14.

$$x = 0{,}3099\ldots.$$

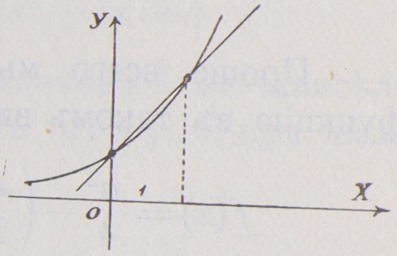
§ 10. Примѣнимъ свойства логариѳмики къ сравненію наростанія капитала по простымъ и сложнымъ процентамъ, если абсцисса x будетъ обозначать время.

Наростаніе простыхъ процентовъ совершается по прямой

(1) $$y = 1 + \frac{px}{100},$$

гдѣ p годовой процентъ; а наростаніе сложныхъ процентовъ совершается по логариѳмикѣ

(2) $$y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x.$$

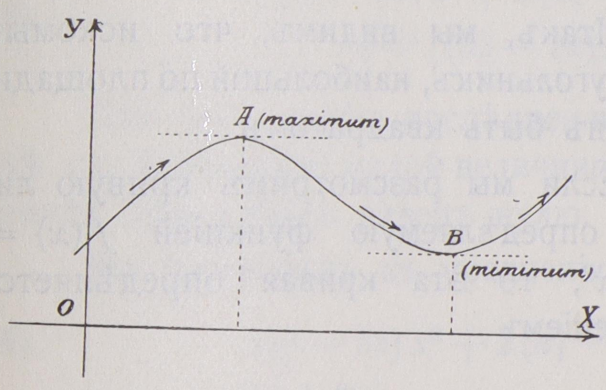


Черт. 15.

Прямая (1) и логариѳмика (2) встрѣчаются въ двухъ точкахъ, абсциссы которыхъ суть $x = 0$ и $x = 1$. Но между этими точками логариѳмика лежитъ ниже прямой, слѣдовательно, для времени меньшаго одного года сложные проценты даютъ меньшій приростъ, чѣмъ простые.

Maxima и minima функцій.

§ 11. Тѣ точки кривой линіи графическаго изображенія функціи, въ которыхъ возрастаніе функціи переходитъ въ убываніе (на черт. точка A), соотвѣтствуютъ такъ называемымъ наибольшимъ значеніямъ функціи. Иначе говорятъ, что въ этой точкѣ функція достигаетъ своего maximum'а. Подобнымъ же образомъ наименьшее значеніе функціи, ея такъ называемый minimum, соотвѣтствуетъ точкѣ кривой линіи (на черт. точка B), въ которой убываніе функціи смѣняется ея возрастаніемъ.



Черт. 16.

Нахожденіе maxima и minima функцій является очень важной задачей математики. Это была одна изъ тѣхъ задачъ, желаніе найти хорошее рѣшеніе которой привело къ изобрѣтенію дифференціальнаго исчисленія.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ задачъ, которыя могутъ быть рѣшены пріемами элементарной математики.

§ 12. Задача. **Изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра найти наибольшій по площади.**

Обозначимъ чрезъ $2a$ данный периметръ прямоугольника. Если чрезъ x обозначимъ одну изъ его сторонъ, то сторона ей не параллельная будетъ равна $a-x$, и площадь прямоугольника будетъ равна $x(a-x)$. Итакъ, намъ надо найти наибольшее значеніе функціи

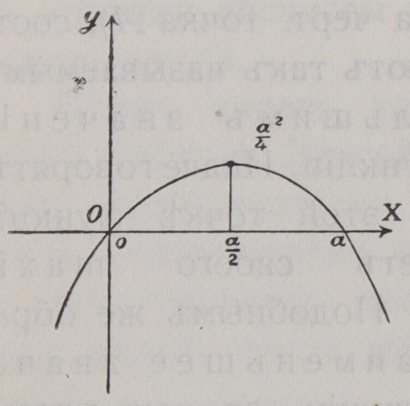
$$f(x)=x(a-x).$$

Проще всего мы рѣшимъ задачу, если представимъ нашу функцію въ такомъ видѣ

$$f(x)=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\,\frac{a}{2}\,x-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

Очевидно, что наибольшее значеніе функціи $f(x)$ соотвѣтствуетъ наименьшему значенію квадрата $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$; но этотъ квадратъ, какъ всякій квадратъ, есть число положительное или нуль; наименьшее значеніе этого квадрата есть нуль. Мы получаемъ

$$x-\frac{a}{2}=0,\ \text{то есть}\ x=\frac{a}{2}.$$



Черт. 17.

Итакъ, мы видимъ, что искомый прямоугольникъ, наибольшій по площади, долженъ быть квадратомъ.

Если мы разсмотримъ кривую линію, опредѣляемую функціей $f(x)=ax-x^2$, то эта кривая опредѣляется уравненіемъ

$$y=-x^2+ax,$$

и представляетъ изъ себя параболу 2-го порядка. Наибольшее значеніе $\frac{a^2}{4}$ функціи y соотвѣтствуетъ абсциссѣ $x=\frac{a}{2}$.

§ 13. Разсмотримъ maxima и minima квадратной дроби

$$(1)\qquad y=\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}.$$

Мы не предполагаемъ существованія пропорціи

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=k,$$

при которой функція (1) обращается въ постоянное число $y=k$.

Дадимъ числу x, соотвѣтствующему maximum'у или minimum'у функціи, безконечно малое приращеніе δ; требуется, чтобы знакъ разности

$$(2)\qquad \frac{a(x+\delta)^2+b(x+\delta)+c}{\alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma}-\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

при достаточно маломъ по абсолютной величинѣ δ не зависѣлъ отъ знака δ. Знакъ разности долженъ быть минусъ при maximum'ѣ и плюсъ при minimum'ѣ.

Знаменатели

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma$$

при достаточно маломъ δ одинаковы по знаку; слѣдовательно, знакъ разности (2) опредѣляется знакомъ выраженія

$$\{a(x+\delta)^2+b(x+\delta)+c\}\{\alpha x^2+\beta x+\gamma\}-$$
$$-\{\alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma\}\{ax^2+bx+c\},$$

которое послѣ упрощеній можно переписать такъ

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\delta\{(a\beta-b\alpha)x^2+2(a\gamma-c\alpha)x+b\gamma-c\beta\}+\\&+\delta^2\{(a\beta-b\alpha)x+a\gamma-c\alpha\}.\end{aligned}$$

Для того, чтобы послѣднее выраженіе не мѣняло знака вмѣстѣ съ безконечно малой величиной δ, необходимо, чтобы коэффиціентъ при δ былъ равенъ нулю.

Мы приходимъ къ уравненію

$$(4)\qquad (a\beta-b\alpha)x^2+2(a\gamma-c\alpha)x+b\gamma-c\beta=0.$$

Итакъ, мы видимъ, что первымъ условіемъ возможности существованія maximum'а или minimum'а состоитъ въ вещественности корней уравненія (4), для чего необходимо, чтобы было

$$(5)\qquad (a\gamma-c\alpha)^2-(a\beta-b\alpha)(b\gamma-c\beta)\geqslant 0.$$

Если въ формулѣ (5) мы возьмемъ случай равенства, то уравненіе (4) будетъ имѣть два одинаковыхъ корня, общая величина которыхъ опредѣляется равенствомъ

(6) $$x = -\frac{(a\gamma - c\alpha)}{a\beta - b\alpha},$$

которое можно переписать такъ

$$(a\beta - b\alpha)\, x + a\gamma - c\alpha = 0.$$

Отсюда видимъ, что выраженіе (3) равно нулю независимо отъ δ. Нетрудно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ не будетъ ни maximum'a, ни minimum'a.

Въ самомъ дѣлѣ, найдемъ условіе необходимое и достаточное, чтобы оба квадратныхъ уравненія

(7) $$ax^2 + bx + c = 0, \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

имѣли общій корень x.

Умножимъ первое изъ уравненій (7) на $-\alpha$, а второе на a и сложимъ; тогда получимъ

(8) $$(a\beta - \alpha b)\, x + a\gamma - c\alpha = 0.$$

Итакъ, общій корень x, если онъ существуетъ, равенъ числу (6). Обозначая это число черезъ x_0, можемъ нашу дробь (1) сократить на $x - x_0$ и получимъ дробь вида

$$\frac{ax + e}{\alpha x + \varepsilon},$$

у которой числитель и знаменатель первой степени относительно x. Такая дробь, какъ мы видѣли въ § 6, не можетъ имѣть ни maximum'a ни minimum'a, ибо она или всегда возрастаетъ, или всегда убываетъ.

Умножая первое изъ уравненій (7) на γ, а второе на $-c$ и складывая, получимъ послѣ сокращенія x

(9) $$(a\gamma - \alpha c)\, x + b\gamma - c\beta = 0.$$

Черезъ исключеніе же x изъ (8) и (9) получимъ какъ разъ равенство (5).

Итакъ, при равенствѣ (5) имѣетъ мѣсто случай сокращенія заданной квадратной дроби и вытекающее отсюда отсутствіе maximum'a и minimum'a.

Остается только разсмотрѣть случай неравенства

$$(a\gamma - \alpha c)^2 - (a\beta - b\alpha)(b\gamma - c\beta) > 0.$$

Пусть вещественные корни уравненія (4) будутъ x_1 и x_2 причемъ $x_1 < x_2$. Сравнивая съ величиной

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a\gamma - c\alpha}{a\beta - b\alpha},$$

получимъ

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2,$$

или, что одно и то же,

$$x_1 < -\frac{a\gamma - c\alpha}{a\beta - b\alpha} < x_2.$$

Если $a\beta - b\alpha > 0$, то послѣднія неравенства можно переписать такъ

$$(a\beta - b\alpha)\, x_1 + a\gamma - c\alpha < 0,$$
$$(a\beta - b\alpha)\, x_2 + a\gamma - c\alpha > 0,$$

отсюда

$$\{(a\beta - \beta\alpha)\, x_1 + a\gamma - c\alpha\}\, \delta^2 < 0,$$
$$\{(a\beta - b\alpha)\, x_2 + a\gamma - c\alpha\}\, \delta^2 > 0.$$

Отсюда видимъ, что числу x_1 соотвѣтствуетъ maximum дроби (1), а числу x_2 ея minimum.

Если $a\beta - b\alpha < 0$, то по умноженіи неравенства на отрицательное число $a\beta - b\alpha$, получимъ

$$\{(a\beta - b\alpha)\, x_1 + a\gamma - c\alpha\}\, \delta^2 > 0,$$
$$\{(a\beta - b\alpha)\, x_2 + a\gamma - c\alpha\}\, \delta^2 < 0.$$

Получаемъ обратно: при x_1 minimum, а при x_2 maximum.

Наконецъ, остается разсмотрѣть случай $a\beta - b\alpha = 0$.

Въ этомъ случаѣ уравненіе (4) будетъ 1-ой степени. При значеніи x равномъ корню этого уравненія выраженіе (3) перепишется такъ

$$\delta^2 (a\gamma - c\alpha);$$

получится maximum или minimum въ зависимости отъ того, будетъ ли двучленъ $a\gamma - c\alpha$ числомъ отрицательнымъ или положительнымъ.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
10	0000	043	086	128	170	212•	253	294•	334	374	10
11	414•	453	492	531•	569	607	645•	682•	719•	755	11
12	792•	828•	864•	899	934	969	*004•	*038	*072	*106•	12
13	1139	173•	206•	239•	271	303	335	367	399•	430	13
14	461	492	523•	553	584•	614•	644•	673	703•	732•	14
15	1761•	790•	818	847•	875	903	931	959	987•	*014	15
16	2041	068	095	122•	148	175•	201	227	253	279•	16
17	304	330	355	380	405	430	455	480•	504	529•	17
18	553•	577•	601•	625•	648	672•	695	718	742•	765•	18
19	788•	810	833	856•	878	900	923•	945•	967•	989•	19
20	3010	032	054•	075	096	118•	139•	160•	181•	201	20
21	222	243•	263	284•	304	324	345•	365•	385•	404	21
22	424	444•	464•	483	502	522•	541	560	579	598	22
23	617	636	655•	674•	692	711•	729	747	766•	784	23
24	802	820	838	856	874•	892•	909	927	945•	962	24
25	3979	997•	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133	25
26	4150•	166	183	200•	216	232	249•	265	281	298•	26
27	314•	330•	346•	362•	378•	393	409	425•	440	456	27
28	472•	487	502	518•	533	548	564•	579•	594•	609	28
29	624	639•	654•	669•	683	698	713•	728•	742	757•	29
30	4771	786•	800	814	829•	843	857	871	886•	900•	30
31	914•	928•	942•	955	969	983	997•	*011•	*024	*038•	31
32	5051	065	079•	092	105	119•	132	145	159•	172	32
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	33
34	315•	328•	340	353•	366•	378	391•	403	416•	428	34
35	5441•	453	465	478•	490	502	514	527•	539•	551•	35
36	563	575	587	599	611	623•	635•	647•	658	670	36
37	682	694•	705	717	729•	740	752•	763	775•	786	37
38	798•	809	821•	832	843	855•	866•	877	888	899	38
39	911•	922•	933•	944•	955	966	977	988•	999•	*010•	39
40	6021•	031	042	053	064•	075•	085	096•	107•	117	40
41	128•	138	149	160•	170	180	191•	201	212•	222	41
42	232	243•	253	263	274•	284•	294	304	314	325•	42
43	335•	345•	355•	365•	375•	385•	395•	405•	415•	425•	43
44	435•	444	454	464	474•	484•	493	503	513•	522	44
45	6532	542•	551	561	571•	580	590•	599	609•	618	45
46	628•	637	646	656•	665	675•	684•	693	702	712•	46
47	721	730	739	749•	758•	767•	776	785	794	803	47
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	48
49	902	911•	920•	928	937	946	955•	964•	972	981	49
50	6990•	998	*007	*016•	*024	*033	*042•	*050	*059•	*067	50
51	7076•	084	093•	101	110•	118	126	135•	143	152•	51
52	160	168	177•	185	193	202•	210•	218	226	235•	52
53	243•	251•	259	267	275	284•	292•	300•	308•	316•	53
54	324•	332	340	348	356	364	372•	380•	388•	396•	54

логариѳмы. *Таблица I.*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
55	7404•	412•	419	427	435	443•	451•	459•	466	474	55
56	482•	490•	497	505	513•	520	528	536•	543	551	56
57	559•	566	574	582•	589	597•	604	612•	619	627•	57
58	634	642•	649	657•	664	672•	679	686	694•	701	58
59	709•	716•	723	731•	738•	745	752	760•	767	774	59
60	7782•	789•	796	803	810	818•	825•	832•	839	846	60
61	853	860	868•	875•	882•	889•	896•	903•	910•	917•	61
62	924•	931•	938•	945•	952•	959•	966•	973•	980•	987•	62
63	993	*000	*007	*014	*021•	*028•	*035•	*041	*048	*055	63
64	8062•	069•	075	082	089•	096•	102	109	116•	122	64
65	8129	136•	142	149	156•	162	169	176•	182	189•	65
66	195	202	209•	215	222•	228	235•	241	248•	254	66
67	261•	267	274•	280	287•	293	299	306•	312	319•	67
68	325	331	338•	344	351•	357•	363	370•	376•	382	68
69	388	395•	401	407	414•	420•	426	432	439•	445•	69
70	8451	457	463	470•	476•	482•	488	494	500	506	70
71	513•	519•	525•	531•	537	543	549	555	561	567	71
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627	72
73	633	639	645	651	657	663•	669•	675•	681•	686	73
74	692	698	704	710•	716•	722•	727	733	739	745•	74
75	8751•	756	762	768•	774•	779	785	791	797•	802	75
76	808	814•	820•	825	831•	837•	842	848	854•	859	76
77	865•	871•	876	882•	887	893	899•	904	910•	915	77
78	921•	927•	932	938•	943	949•	954	960•	965	971•	78
79	976	982•	987	993•	998	*004•	*009	*015•	*020	*025	79
80	9031•	036	042•	047	053•	058	063	069•	074	079	80
81	085•	090	096•	101•	106	112•	117•	122	128•	133•	81
82	138	143	149•	154	159	165•	170•	175	180	186•	82
83	191•	196	201	206	212•	217•	222	227	232	238•	83
84	243•	248	253	258	263	269•	274•	279•	284	289	84
85	9294	299	304	309	315•	320•	325•	330•	335•	340•	85
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	86
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435•	440•	87
88	445•	450•	455•	460•	465•	469	474	479	484	489	88
89	494•	499•	504•	509•	513	518	523	528•	533•	538•	89
90	9542	547	552	557•	562•	566	571	576	581•	586•	90
91	590	595	600•	605•	609	614	619	624•	628	633	91
92	638•	643•	647	652	657•	661	666	671•	675	680	92
93	685•	689	694	699•	703	708	713•	717	722	727•	93
94	731	736•	741•	745	750•	754	759•	763	768	773•	94
95	9777	782•	786	791•	795	800	805•	809	814•	818	95
96	823•	827	832•	836	841•	845	850•	854	859•	863	96
97	868•	872	877•	881	886•	890	894	899•	903	908•	97
98	912	917•	921	926•	930	934	939•	943	948•	952	98
99	956	961•	965	969	974•	978	983•	987	991	996•	99

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
00	1000	002	005	007	009	012	014	016	019	021	00
01	023	026	028	030	033	035	038	040	042	045	01
02	047	050	052	054	057	059	062	064	067	069	02
03	072	074	076	079	081	084	086	089	091	094	03
04	096	099	102	104	107	109	112	114	117	119	04
05	1112	125	127	130	132	135	138	140	143	146	05
06	148	151	153	156	159	161	164	167	169	172	06
07	175	178	180	183	186	189	191	194	197	199	07
08	202	205	208	211	213	216	219	222	225	227	08
09	230	233	236	239	242	245	247	250	253	256	09
10	1259	262	265	268	271	274	276	279	282	285	10
11	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315	11
12	318	321	324	327	330	334	337	340	343	346	12
13	349	352	355	358	361	365	368	371	374	377	13
14	380	384	387	390	393	396	400	403	406	409	14
15	1413	416	419	422	426	429	432	435	439	442	15
16	445	449	452	455	459	462	466	469	472	476	16
17	479	483	486	489	493	496	500	503	507	510	17
18	514	517	521	524	528	531	535	538	542	545	18
19	549	552	556	560	563	567	570	574	578	581	19
20	1585	589	592	596	600	603	607	611	614	618	20
21	622	626	629	633	637	641	644	648	652	656	21
22	660	663	667	671	675	679	683	687	690	694	22
23	698	702	706	710	714	718	722	726	730	734	23
24	738	742	746	750	754	758	762	766	770	774	24
25	1778	782	786	791	795	799	803	807	811	816	25
26	820	824	828	832	837	841	845	849	854	858	26
27	862	866	871	875	879	884	888	892	897	901	27
28	905	910	914	919	923	928	932	936	941	945	28
29	950	954	959	963	968	972	977	982	986	991	29
30	1995	*000	*004	*009	*014	*018	*023	*028	*032	*037	30
31	2042	046	051	056	061	065	070	075	080	084	31
32	089	094	099	104	109	113	118	123	128	133	32
33	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183	33
34	188	193	198	203	208	213	218	223	228	234	34
35	2239	244	249	254	259	265	270	275	280	286	35
36	291	296	301	307	312	317	323	328	333	339	36
37	344	350	355	360	366	371	377	382	388	393	37
38	399	404	410	415	421	427	432	438	443	449	38
39	455	460	466	472	477	483	489	495	500	506	39
40	2512	518	523	529	535	541	547	553	559	564	40
41	570	576	582	588	594	600	606	612	618	624	41
42	630	636	642	649	655	661	667	673	679	685	42
43	692	698	704	710	716	723	729	735	742	748	43
44	754	761	767	773	780	786	793	799	805	812	44
45	2818	825	831	838	844	851	858	864	871	877	45
46	884	891	897	904	911	917	924	931	938	944	46
47	951	958	965	972	979	985	992	999	*006	*013	47
48	3020	027	034	041	048	055	062	069	076	083	48
49	090	097	105	112	119	126	133	141	148	155	49

антилогариѳмы.

Таблица II.

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
50	3162	170	177	184	192	199	206	214	221	228	**50**
51	236	243	251	258	266	273	281	289	296	304	**51**
52	311	319	327	334	342	350	357	365	373	381	**52**
53	388	396	404	412	420	428	436	443	451	459	**53**
54	467	475	483	491	499	508	516	524	532	540	**54**
55	3548	556	565	573	581	589	597	606	614	622	**55**
56	631	639	648	656	664	673	681	690	698	707	**56**
57	715	724	733	741	750	758	767	776	784	793	**57**
58	802	811	819	828	837	846	855	864	873	882	**58**
59	890	899	908	917	926	936	945	954	963	972	**59**
60	3981	990	999	*009	*018	*027	*036	*046	*055	*064	**60**
61	4074	083	093	102	111	121	130	140	150	159	**61**
62	169	178	188	198	207	217	227	236	246	256	**62**
63	266	276	285	295	305	315	325	335	345	355	**63**
64	365	375	385	395	406	416	426	436	446	457	**64**
65	4467	477	487	498	508	519	529	539	550	560	**65**
66	571	581	592	603	613	624	634	645	656	667	**66**
67	677	688	699	710	721	732	742	753	764	775	**67**
68	786	797	808	819	831	842	853	864	875	887	**68**
69	898	909	920	932	943	955	966	977	989	*000	**69**
70	5012	023	035	047	058	070	082	093	105	117	**70**
71	129	140	152	164	176	188	200	212	224	236	**71**
72	248	260	272	284	297	309	321	333	346	358	**72**
73	370	383	395	408	420	433	445	458	470	483	**73**
74	495	508	521	534	546	559	572	585	598	610	**74**
75	5623	636	649	662	675	689	702	715	728	741	**75**
76	754	768	781	794	808	821	834	848	861	875	**76**
77	888	902	916	929	943	957	970	984	998	*012	**77**
78	6026	039	053	067	081	095	109	124	138	152	**78**
79	166	180	194	209	223	237	252	266	281	295	**79**
80	6310	324	339	353	368	383	397	412	427	442	**80**
81	457	471	486	501	516	531	546	561	577	592	**81**
82	607	622	637	653	668	683	699	714	730	745	**82**
83	761	776	792	808	823	839	855	871	887	902	**83**
84	918	934	950	966	982	998	*015	*031	*047	*063	**84**
85	7079	096	112	129	145	161	178	194	211	228	**85**
86	244	261	278	295	311	328	345	362	379	396	**86**
87	413	430	447	464	482	499	516	534	551	568	**87**
88	586	603	621	638	656	674	691	709	727	745	**88**
89	762	780	798	816	834	852	870	889	907	925	**89**
90	943	962	980	998	*017	*035	*054	*072	*091	*110	**90**
91	8128	147	166	185	204	222	241	260	279	299	**91**
92	318	337	356	375	395	414	433	453	472	492	**92**
93	511	531	551	570	590	610	630	650	670	690	**93**
94	710	730	750	770	790	810	831	851	872	892	**94**
95	8913	933	954	974	995	*016	*036	*057	*078	*099	**95**
96	9120	141	162	183	204	226	247	268	290	311	**96**
97	333	354	376	397	419	441	462	484	506	528	**97**
98	550	572	594	616	638	661	683	705	727	750	**98**
99	772	795	817	840	863	886	908	931	954	977	**99**

Таблица III.

Таблица кратныхъ модуля M для перехода отъ обыкновенныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ.

	Кратныя.		Кратныя.		Кратныя.		Кратныя.
0	0.000 0000	25	57.564 6273	**50**	115.129 2546	75	172.693 8820
1	2.302 5851	26	59.867 2124	51	117.431 8397	76	174.996 4671
2	4.605 1702	27	62.169 7975	52	119.734 4248	77	177.299 0522
3	6.907 7553	28	64.472 3826	53	122.037 0099	78	179.601 6373
4	9.210 3404	29	66.774 9677	54	124.339 5950	79	181.904 2223
5	11.512 9255	**30**	69.077 5528	55	126.642 1801	**80**	184.206 8074
6	13.815 5106	31	71.380 1379	56	128.944 7652	81	186.509 3925
7	16.118 0957	32	73.682 7230	57	131.247 3503	82	188.811 9776
8	18.420 6807	33	75.985 3081	58	133.549 9354	83	191.114 5627
9	20.723 2658	34	78.287 8932	59	135.852 5205	84	193.417 1478
10	23.025 8509	35	80.590 4783	**60**	138.155 1056	85	195.719 7329
11	25.328 4360	36	82.893 0633	61	140.457 6907	86	198.022 3180
12	27.631 0211	37	85.195 6484	62	142.760 2758	87	200.324 9031
13	29.933 6062	38	87.498 2335	63	145.062 8609	88	202.627 4882
14	32.236 1913	39	89.800 8186	64	147.365 4460	89	204.930 0733
15	34.538 7764	**40**	92.103 4037	65	149.668 0310	**90**	207.232 6584
16	36.841 3615	41	94.405 9888	66	151.970 6161	91	209.535 2435
17	39.143 9466	42	96.708 5739	67	154.273 2012	92	211.837 8286
18	41.446 5317	43	99.011 1590	68	156.575 7863	93	214.140 4136
19	43.749 1168	44	101.313 7441	69	158.878 3714	94	216.442 9987
20	46.051 7019	45	103.616 3292	**70**	161.180 9565	95	218.745 5838
21	48.354 2870	46	105.918 9143	71	163.483 5416	96	221.048 1689
22	50.656 8720	47	108.221 4994	72	165.786 1267	97	223.350.7540
23	52.959 4571	48	110.524 0845	73	168.088 7118	98	225.653 3391
24	55.262 0422	49	112.826 6696	74	170.391 2969	99	227.955 9242
25	57.564 6273	**50**	115.129 2546	75	172.693 8820	**100**	230.258 5093

Объясненія см. стр. 316.

Таблица IV.

Таблица кратныхъ модуля M для перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ обыкновеннымъ.

	Кратныя.		Кратныя.		Кратныя.		Кратныя.
0	0.000 0000	25	10.857 3620	**50**	21.714 7241	75	32.572 0861
1	0.434 2945	26	11.291 6565	51	22.149 0186	76	33.006 3806
2	0.868 5890	27	11.725 9510	52	22.583 3131	77	33.440 6751
3	1.302 8834	28	12.160 2455	53	23.017 6075	78	33.874 9696
4	1.737 1779	29	12.594 5400	54	23.451 9020	79	34.309 2641
5	2.171 4724	**30**	13.028 8345	55	23.886 1965	**80**	34.743 5586
6	2.605 7669	31	13.463 1289	56	24.320 4910	81	35.177 8530
7	3.040 0614	32	13.897 4234	57	24.754 7855	82	35.612 1475
8	3.474 3559	33	14.331 7179	58	25.189 0800	83	36.046 4420
9	3.908 6503	34	14.766 0124	59	25.623 3744	84	36.480 7365
10	4.342 9448	35	15.200 3069	**60**	26.057 6689	85	36.915 0310
11	4.777 2393	36	15.634 6013	61	26.491 9634	86	37.349 3254
12	5.211 5338	37	16.068 8958	62	26.926 2579	87	37.783 6199
13	5.645 8283	38	16.503 1903	63	27.360 5524	88	38.217 9144
14	6.080 1227	39	16.937 4848	64	27.794 8468	89	38.652 2089
15	6.514 4172	**40**	17.371 7793	65	28.229 1413	**90**	39.086 5034
16	6.948 7117	41	17.806 0738	66	28.663 4358	91	39.520 7979
17	7.383 0062	42	18.240 3682	67	29.097 7303	92	39.955 0923
18	7.817 3007	43	18.674 6627	68	29.532 0248	93	40.389 3868
19	8.251 5952	44	19.108 9572	69	29.966 3193	94	40.823 6813
20	8.685 8896	45	19.543 2517	**70**	30.400 6137	95	41.257 9758
21	9.120 1841	46	19.977 5462	71	30.834 9082	96	41.692 2703
22	9.554 4786	47	20.411 8406	72	31.269 2027	97	42.126 5647
23	9.988 7731	48	20.846 1351	73	31.703 4972	98	42.560 8592
24	10.423 0676	49	21.280 4296	74	32.137 7917	99	42.995 1537
25	10.857 3620	**50**	21.714 7241	75	32.572 0861	**100**	43.429 4482

Объясненіе см. стр. 316.

Объясненіе къ таблицамъ кратныхъ модуля перехода отъ однихъ логариѳмовъ къ другимъ.

Натуральные логариѳмы очень важны по своимъ теоретическимъ приложеніямъ. Кромѣ этихъ приложеній натуральные логариѳмы имѣютъ преимущество передъ логариѳмами всякой другой системы вслѣдствіе существованія замѣчательныхъ формулъ, дающихъ возможность вычислять ихъ съ любою точностью. Съ другой стороны обыкновенные десятичные логариѳмы практичнѣе при составленіи логариѳмическихъ таблицъ.

Является важнымъ упростить способъ перехода отъ обыкновенныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ и обратно. Для этой цѣли служатъ таблицы III и IV (стр. 314 и 315). Покажемъ ихъ употребленіе на примѣрѣ. Надо найти натуральный логариѳмъ числа, если его обыкновенный есть

(1) $3{,}415678$

Умножимъ модуль перехода 2,302585.... на число (1). Въ таблицѣ III (стр. 314) даны готовыя произведенія модуля на двузначныя числа

$$\begin{aligned}
3{,}000000 &= 6{,}9077553\\
0{,}410000 &= \phantom{6{,}}94.4059888\\
0{,}005600 &= \phantom{6{,}9}128.9447652\\
0{,}000078 &= \phantom{6{,}94}179.6016373\\
\hline
&\ 7.8648892661573
\end{aligned}$$

Искомый натуральный логариѳмъ будетъ

(2) 7.864889

Подобнымъ же образомъ перейдемъ отъ числа (2) обратно къ числу (1) по таблицѣ IV (стр. 315)

$$\begin{aligned}
7{,}000000 &= 3{,}0400614\\
0{,}860000 &= \phantom{3{,}}37.3493254\\
0{,}004800 &= \phantom{3{,}37}20.8461351\\
0{,}000089 &= \phantom{3{,}3}38.6522089\\
\hline
&\ 3.4156779197189
\end{aligned}$$