УДК 534.01

Д. В. КОМНАТНЫЙ
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ТРАНСПОРТНОГО ВУЗА

Предлагается методический подход к изучению колебательных цепей в курсах теоретической механики для подготовки инженеров транспорта. Приведена классификация колебательных цепей. Рассмотрена применимость теоремы Штурма к различным их типам. Получены уравнения движения колебательных цепей методом уравнений Лагранжа второго рода и описаны методы их решения. Показана аналогия простых и сложных колебательных цепей с фильтрами электрических колебаний.

Ключевые слова: колебательные цепи, теоретическая механика, уравнения Лагранжа, теорема Штурма, частотные фильтры.

Системой цепной структуры или колебательной цепью называется колебательная система с конечным числом степеней свободы, в которой упругие силы зависят только от разности смещений соседних тел [1].

Изучение этих систем восходит к трудам И. Бернулли, Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, Ж.-Л. Даламбера, У. Томпсона (лорда Кельвина), Э. Рауса. Исследования позволили получить обширные математические и физические результаты, представляющие интерес и для современности. Они, например, оказываются востребованными при исследованиях движения автомобилей и железнодорожных поездов [2, 3]. Поэтому изучение колебательных цепей целесообразно осуществлять в курсах теоретической механики, ориентированных на подготовку инженеров транспорта.

В существующих литературных источниках теория колебательных цепей излагается с разнообразных точек зрения. Так, в [4–6] изложение ведется с позиций теории колебаний, выявления свойств системы в целом. В [7–9] колебательные цепи рассматриваются с целью подготовки к освоению физики немеханических явлений и процессов. В книгах [10, 11] осуществляется вывод законов движения цепей тел на основе положений теоретической механики, причем изложение либо удалено от практики в область теоретических построений [10], либо углубляется в практические вопросы конструирования и моделирования технических средств [2, 11].

В данной статье предпринят анализ накопленного теоретического материала по колебательным цепям с целью сформировать методический подход к изучению его в курсах теоретической механики транспортных вузов. Критериями формирования в этом случае являются: достаточная теоретическая полнота, широкие практические приложения, возможность межпредметных связей, научение навыкам анализа динамики модельных систем, в том числе, моделей транспортных средств. Таким образом, достигается основная цель преподавания – подготовка высококвалифицированных инженеров транспорта на современном уровне.

Начальным этапом анализа является классификация колебательных цепей [2]. Их упругие элементы часто имеют зависимость между силой и деформацией, более сложную, нежели закон Гука, а массивные элементы могут совершать колебания, которые нельзя считать малыми. Колебательные цепи, для которых справедливо минимум одно из этих условий, являются нелинейными. Их теория достаточно сложна и далека от завершения [12], поэтому в курсе теоретической механики рационально рассматривать только линейные колебательные цепи.

С точки зрения топологии колебательные цепи подразделяются на прямолинейные, разветвленные, кольцевые и сложносоединенные [2]. Разветвленные и сложносоединенные цепи содержат параллельные присоединения к некоторой массе или к некоторому ответвлению. Присоединения к ответвлению реализуются в виде зубчатых передач, картеры которых упруго соединены с другими массами посредством пружин, рессор и тому подобного. Цепи, содержащие такие элементы, называются цепями с реактивными элементами. Соответственно, цепи без реактивных элементов присоединений к ответвлениям не содержат [2].

Если колебания совершаются под действием одной возвращающей силы по одной обобщенной координате, то такие колебательные цепи будем считать простыми. Если же в системе имеется несколько возвращающих сил, а колебания могут происходить по нескольким обобщенным координатам, то колебательная цепь является сложной. Например, цепочки из математических маятников, связанных пружинами; из стержней, связанных упругими нитями; из твердых тел, соединенных подпружиненными шарнирами [5, 10, 11].

В курсах теоретической механики, особенно ориентированных на подготовку инженеров транспорта, рационально рассматривать прямолинейные и разветвленные простые колебательные цепи без реактивных элементов, поскольку наличие последних значительно усложняет восприятие материала студентами. На базе таких цепей могут строиться модели динамики транспортных средств [2, 3].

Топология простой прямолинейной колебательной цепи показана на рисунке 1, *а*, простой разветвленной цепи – на рисунке 1, *б*. Конкретными примерами таких цепей являются [2, 10]:

– цепи из точечных масс, соединенных пружинами, совершающие параллельные продольные колебания в одной плоскости;

– цепи из точечных масс, соединенных упругими нитями, совершающие колебания по одной вертикальной координате;

– цепи из дисков, соединенные упругими валами, совершающие крутильные колебания.

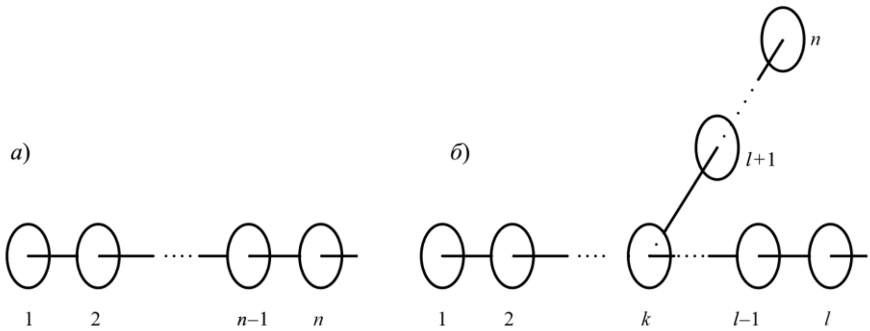

Рисунок 1 – Топологии простых колебательных цепей

Наиболее рационально для анализа динамики колебательных цепей использовать метод уравнений Лагранжа II рода [1].

Кинетическая энергия таких цепей

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \dot{q}_i^2 \ , \tag{1}$$

где i – счетная переменная; n – число массовых элементов; I_i – инерционный параметр элемента; q_i – обобщенная координата, точка над переменной обозначает производную по времени.

Потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(q_i - q_j)^2 \ , \tag{2}$$

где j – счетная переменная, c_{ij} – коэффициент упругости.

В случае простой прямолинейной колебательной цепи выражение (2) может быть представлено в виде

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} A_i q_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} B_i q_i q_{i-1} \,, \tag{3}$$

где A_i, B_i – расчетные коэффициенты.

Для систем, кинетическая энергия которых выражается формулой (1), а потенциальная – выражением (3), справедлива теорема Штурма [10, 13]:

– частоты собственных колебаний цепи различны;

– для амплитудного вектора $\vec{y}\left(y_{m1},\ y_{m2}, \ldots,\ y_{mn}\right)$ амплитуды вектора основного тона имеют одинаковый знак;

– амплитудный вектор k-го обертона имеет k узлов;

– узлы амплитудных векторов двух соседних обертонов перемежаются;

– между двумя узлами k-го обертона лежит, по крайней мере, один узел $(k+1)$-го обертона.

Разветвленные колебательные цепи не удовлетворяют теореме Штурма, так как для них не выполняется соотношение (3). Отметим, что изучение данной теоремы, даже без доказательства, представляет значительный интерес, так как позволяет выявить отличительные особенности динамики простых прямолинейных колебательных цепей.

Полученная методом уравнений Лагранжа II рода матричная система дифференциальных уравнений движения колебательных цепей имеет вид [1, 2]

$$[I][\ddot{q}]+[c][q]=[Q], \tag{4}$$

где $[I]$ = diag $(I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n)$ – матрица инерциальных коэффициентов; $q^{\mathrm{T}} = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n)$ – матрица обобщенных координат; $[c]$ – матрица коэффициентов упругости; $Q^{\mathrm{T}} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}, Q_n)$ – матрица обобщенных сил.

Для анализа переходных и установившихся процессов обобщенные силы целесообразно принимать в виде

$$Q_i = M(1-e^{-t/\tau});\ \ Q_i = M\sin(\omega_i t);\ \ Q_i = M(1-e^{-t/\tau})\sin(\omega_i t),$$

где M, τ, ω_i – некоторые константы; t – время.

Система (4) позволяет решить ряд задач (методы их решения описаны в литературе [1, 2, 6, 10], поэтому ограничимся кратким обзором).

Если принять $[Q] = [0]$ и каждое уравнение системы разделить на I_i, то получится матричная система однородных дифференциальных уравнений

$$[\ddot{q}]+[k][q]=[0].$$

Основываясь на ней, можно отыскать собственные частоты и соответствующие им формы колебаний. Определение таких форм позволяет найти опасные зоны [1, 2]. Данный алгоритм решения, называемый методом разложения по главным координатам, рационально использовать для определения параметров свободных колебаний, возникших после приложения мгновенного импульсного воздействия [1].

Для анализа динамики колебательной цепи под действием ненулевых обобщенных сил в [2] предложен метод, основанный на получении решения системы (4) в виде суммы общего решения однородной системы дифференциальных уравнений (т. е. для случая $[Q] = [0]$), и частного решения системы (4).

Метод комплексных амплитуд оказывается полезным при анализе стационарного режима гармонических колебаний и построении амплитудно-частотных характеристик колебательной цепи [1].

Перечисленные методы анализа динамики колебательных цепей позволяют решить широкий круг задач, которые регулярно возникают на практике.

Отдельный интерес представляют амплитудно-частотные характеристики простых прямолинейных колебательных цепей при равенстве всех инерционных и упругих коэффициентов в (1) и (2). В этом случае амплитудно-частотная характеристика имеет полосу пропускания, отвечающую механическому фильтру нижних частот. Для этого частного случая колебательной цепи можно подобрать акустический и электрический аналоги [7].

Некоторые сложные колебательные цепи при том же условии равенства инерционных и упругих параметров также обладают амплитудно-частотными характеристиками со свойствами фильтров: верхних частот, полосопропускающего, заграждающего. Для них также имеются электрические аналоги [5, 7, 8]. Структура таких колебательных цепей приведена на рисунке 2.

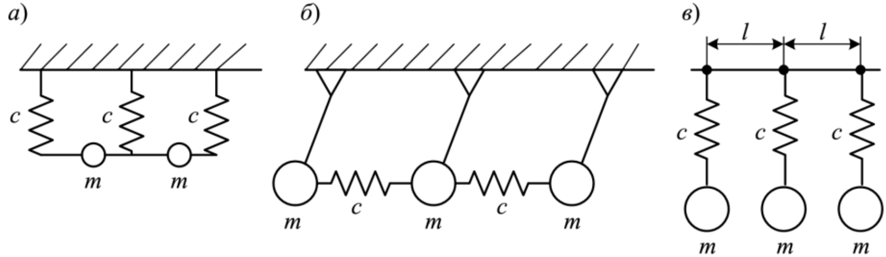

Рисунок 2 – Колебательные цепи со свойствами фильтра верхних частот (*а*); полосопропускающего фильтра (*б*); заграждающего частотного фильтра (*в*)

Для студентов транспортных специальностей при отсутствии в учебных планах курса теории колебаний рассмотрение колебательных систем со свойствами фильтров колебаний может выноситься на самостоятельное изучение. Этот элемент теории может использоваться для организации семинарских занятий, кружковой, учебно-исследовательской работы. Весьма привлекательной является возможность выполнения анализа механических систем на основе уравнений динамики, а их электрических аналогов – на основе теории электрических цепей [14]. Сравнение результатов анализа позволяет выявить аналогичный характер колебаний в них. Установление межпредметных связей, так же как изучение аналогий в динамике систем различной природы весьма полезно для активизации учебного процесса.

Таким образом, анализ представленных материалов по динамике колебательных цепей показывает целесообразность их изучения в транспортных вузах на основе рассмотрения методов определения движения материальной системы под действием обобщенных сил. Рассмотрение данного материала представляет собой обучение расчетным методам, применяемым при моделировании средств транспорта. Вместе с тем анализ получаемых результатов должен включать и выявление возможных в принципе режимов колебаний. Представленный подход обеспечивает теоретическую подготовку на современном уровне, широкий кругозор студента, умение пользоваться аналогиями. Тем самым будет достигнуто оптимальное сочетание теоретической и практической составляющих в знаниях и компетенциях современного инженера.

Автор выражает искреннюю благодарность коллективу кафедры «Строительная механика» БелГУТа за предоставленные литературные источники для работы над настоящей статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Воробьев, С. А.** Сопротивление материалов. Прикладная теория колебаний / С. А. Воробьев. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 257 с.

2 **Микулик, Н. А.** Динамические системы с реактивными звеньями / Н. А. Микулик. – Минск : Выш. шк., 1985. – 192 с.

3 **Сахаров, П. А.** Оценка влияния характеристик межвагонных связей в поезде на величину продольных сил при электрическом торможении / П. А. Сахаров, А. О. Шимановский // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 171–181.

4 **Магнус, К.** Колебания. Введение в исследование колебательных систем / К. Магнус. – М. : Мир, 1982. – 393 с.

5 Решение и анализ задач линейной теории колебаний / В. П. Кандидов [и др.]. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 291 с.

6 **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1965. – 559 с.

7 **Рабинович, М. И.** Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. Н. Трубецков. – М. : Наука, 1992. – 453 с.

8 **Бриллюэн, Л.** Распространение волн в периодических структурах / Л. Бриллюэн, М. Пароди. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 457 с.

9 **Ольховский, И. И.** Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 574 с.

10 **Раус, Э. Д.** Динамика системы твердых тел : в 2 т. Т. 2 / Э. Д. Раус. – М. : Наука, 1983. – 544 с.

11 **Нагаев, Р. Ф.** Колебания механических систем с периодическими структурами / Р. Ф. Нагаев, К. Ш. Ходжаев. – Ташкент : Фан, 1973. – 270 с.

12 **Тода, М.** Теория нелинейных решеток / М. Тода. – М. : Мир, 1984. – 259 с.

13 **Гантмахер, Ф. Р.** Осцилляторные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. – М.–Л. : Гостеортехиздат, 1950. – 359 с.

14 **Булгаков, С. В.** Колебания / С. В. Булгаков. – М. : Гостеортехиздат, 1954. – 891 с.

D. V. KOMNATNY
Gomel State Technical University named by P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus

OSCILLATION CHAINS IN ENGINEERING MECHANICS COURSE OF A TRANSPORT UNIVERSITY

A methodical approach to the study of oscillatory chains in the courses of engineering mechanics for the transport engineers training is proposed. The classification of oscillatory chains is given. The applicability of Sturm's theorem to their various types is considered. The motion equations for the oscillatory chains are obtained by the method of Lagrange equations of the second kind, and the methods for their solution are described. The analogy of simple and complex oscillatory chains with filters of electrical oscillations is shown.

Keywords: oscillating chains, theoretical mechanics, Lagrange equations, Sturm's theorem, frequency filters.

Получено 21.02.2022