УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 15. Гомель, 2022

УДК 531.311:531.111.5

Э. А. АСЛАНОВ, Г. Г. САФАРОВ, И. А. ИСМАИЛ
Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан

СВЯЗЬ СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА И ЗАКОНОВ НЬЮТОНА

На основе свойств изотропии и однородности пространства-времени предложены пути обоснования законов современной классической механики. Представлены доказательство закона инерции и обоснование эквивалентности векторов во втором законе Ньютона.

Ключевые слова: симметрия, пространство, законы Ньютона.

Более 330 лет назад Ньютон в своём классическом произведении «Математические начала натуральной философии» сформулировал законы динамики как аксиомы [1, с. 12]. Вторая из них такова: вектор силы, приложенной к частице, равен произведению массы частицы m на её вектор ускорения $\vec{a}$:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Именно в такой векторной форме второй закон Ньютона приводится в учебниках. В то же время при его обсуждении авторы обращают внимание на некоторые неудобства. Так, физик-теоретик, нобелевский лауреат Р. Фейнман отмечает: «…сила обладает независимыми свойствами в дополнение к закону $\vec{F} = m\vec{a}$; но характерные независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь еще; поэтому физический закон $\vec{F} = m\vec{a}$ – закон неполный» [2, с. 214]. Авторы известного учебника по физике указывают: «Показав универсальный характер законов сохранения мы тем самым пришли к некоторому логическому противоречию <…> законы сохранения были нами получены как следствия второго и третьего законов Ньютона. Между тем сами законы Ньютона являются результатом обобщения экспериментов с упругими, гравитационными и кулоновскими взаимодействиями» [3, с. 194]. Зарубежные специалисты обращают внимание: «Классическую механику можно излагать и изучать по-разному, начиная либо с законов Ньютона, либо с закона сохранения импульса» [4, с. 18].

В учебнике Л. Д. Ландау имеется замечание: «…свойство инерциальности можно сформулировать также как утверждение об однородности и изотропии пространства и однородности времени по отношению к такой системе отсчёта» [5, с. 14]. Цель данной работы – рассмотрение свойств сил и связанного с ними второго закона Ньютона на основе приведенного суждения. Она представляет собой обобщение и дальнейшее развитие теории, которая ранее была представлена в статьях [6, 7].

Вначале рассмотрим те «неудобства», которые возникают в связи с законом Ньютона (1).

Во-первых, обратим внимание, что равенство (1) справедливо, если векторы в левой и правой его частях эквивалентны. Без соблюдения этого условия второй закон Ньютона *нельзя считать достоверным.* Два свободных вектора эквивалентны, если они имеют одинаковые модули и направления. Для эквивалентности двух связанных векторов они также должны лежать на одной прямой и прикладываться к одной точке. Уточним, в чем состоит эквивалентность векторов силы $\vec{F}$ и $m\vec{a}$ (в дальнейшем последний для облегчения восприятия материала будем называть количеством ускорения). Они приложены к одной и той же свободной частице, но не являются свободными векторами, поскольку отличаются по сути. Сила – это причина физического явления, а количество ускорения – его результат. Как нельзя складывать причину и результат, так нельзя складывать и эти векторы. Вектор количества ускорения присущ частице и является связанным, а вектор силы действует на частицу извне. Но примечательно, что количество ускорения $m\vec{a}$ как порождается с приложением вектора силы $\vec{F}$, так и пропадает с ее исчезновением. Такая одновременность наталкивает на мысль, что, как и количество ускорения, вектор силы тоже должен быть связанным вектором. Это интуитивное соображение является предварительным условием эквивалентности векторов в выражении (1).

Во-вторых, во всех учебниках теоремы о моменте количества движения и законе сохранения механической энергии выводят из второго закона Ньютона [8, 9], приводя к выводу о том, что они являются его следствием. В действительности законы сохранения имеют фундаментальное значение и подтверждают неуничтожаемость материи и её движения. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить. Однако эти законы не дают прямых указаний о направлении процесса и его ходе.

Второй закон Ньютона позволяет определить силы и даёт представление о детальном ходе процесса, давая возможность найти для любого момента времени закон движения, траекторию, величину и направление скорости. Существование первых интегралов дифференциальных уравнений движения позволяет утверждать, что выражение (1) не противоречит законам сохранения.

Вектор силы в соответствии с (1) определяется как результат изменения только количества движения, сохранение которого обусловлено однородностью пространства [10]. Действие силы является причиной изменения момента количества движения и кинетической энергии. Следовательно, в определении вектора силы следует учесть свойство изотропии пространства и однородности времени.

Основными *понятиями* классической механики являются абсолютное пространство и абсолютное время. При этом все ее законы в соответствии с современными представлениями должны удовлетворять требованиям *симметрии* (или инвариантности), согласно которым объект путём применения некоторых операций должен переходить сам в себя. К числу таких операций относятся параллельный перенос, поворот, зеркальное отражение и др. Свойства симметрии определяются аксиомами, в соответствии с которыми к изменению физических законов не приводят:

– сдвиг системы координат в пространстве, что соответствует его однородности (сдвиговая симметрия);

– поворот системы координат как целого, что свидетельствует об изотропии пространства (поворотная симметрия);

– сдвиг системы координат как целого во времени, что говорит о равноправии всех моментов времени (однородность времени).

Отметим, что связь между симметрией пространства и законами сохранения была установлена немецким математиком Э. Нётер [11].

Выбор системы отсчёта. В силу однородности и изотропии пространства все его точки равноценны, а направления равноправны, поэтому в нем *невозможно* выделить какую-либо точку с особыми свойствами. Предполагается существование инерциальных систем отсчёта, а симметрия позволяет произвольно принять в качестве тела отсчета любое из двух тел, перемещающихся относительно друг друга. Соответственно возможно определить положение двух точек, отстоящих на определённом расстоянии друг от друга. Отметим, что в эвклидовой группе симметрий сохраняются длины, углы и площади.

Введем в рассмотрение радиус-вектор $\vec{r}$. Его начало O располагается на теле отсчета, и с ним связана система координат. Конец вектора A совмещен с частицей, обладающей количеством движения $m\vec{v}$ (рисунок 1).

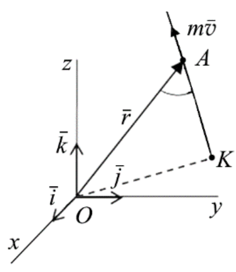

Рисунок 1 – Рассматриваемая система

Вириал вектора относительно начала координат определяется положением точки приложения этого вектора и не зависит от его физической сути. В данном случае вириал вектора количества движения относительно начала координат

$$V_O(m\vec{v}) = \vec{r} \cdot m\vec{v}.$$

Он явно не зависит от времени и удовлетворяет свойству однородности времени, которое предполагает независимость физического явления от того, какой момент времени мы примем в качестве начального. Вириал количества движения – скалярная величина, поэтому не зависит от направлений осей координат. Следовательно, он удовлетворяет и свойству изотропии пространства. Пространство, во всех точках которого количество движения частицы одинаково, является эвклидовым.

Выбранная система отсчёта, относительно которой определяется положение частицы с количеством движения $m\vec{v}$, тоже расположена в эвклидовом пространстве. В этой системе координат момент количества движения

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Он также не зависит от сдвига и поворота системы координат. Таким образом, при свободном движении частицы с количеством движения $m\vec{v}$ вириал $V_O(m\vec{v})$ и момент $\vec{M}_O(m\vec{v})$ количества движения удовлетворяют аксиоме об однородности и изотропии пространства.

Следовательно, свободное движение материальной точки в пространстве характеризуют семь параметров: по три проекции векторов количества и момента количества движения и один вириал количества движения.

Перейдём к *выводу первого закона Ньютона*. Мы рассматриваем движение частицы, но при этом отсутствует информация о системе, относительно которой оно происходит. Предполагается, что выбранная система отсчёта, для которой выполняются аксиомы о свойствах пространства-времени, инерциальная. Доказав данное утверждение, удастся доказать первый закон Ньютона: существуют системы отсчёта, относительно которых все тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся прямолинейно и равномерно.

Доказательство. Вириал и момент количества движения относительно начала координат определяются выражениями:

$$V_O(m\vec{v}) = \vec{r} \cdot m\vec{v}; \quad \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

В соответствии с формулами, приведенными в [12, с. 38], выразим отсюда радиус-вектор

$$\vec{r} = \frac{m\vec{v} \times \vec{M}_O(m\vec{v})}{m^2 v^2} + \frac{m\vec{v} \cdot V_O(m\vec{v})}{m^2 v^2}. \qquad (2)$$

Легко убедиться, что первое слагаемое представляет собой $\vec{r}_K$ – радиус-вектор точки *K*, а второе – вектор $\overrightarrow{KA}$ (см. рисунок 1). С учетом этих обозначений получаем

$$\vec{r} = \vec{r}_K + c \cdot m\vec{v},$$

где c – коэффициент, пропорциональный расстоянию *KA*.

Получено уравнение прямой в параметрической форме.

Введем единичный вектор $\vec{\tau}$ по направлению количества движения. Тогда

$$\frac{m\vec{v}}{mv} = \vec{\tau};\ \ \vec{r}_K = \vec{\tau} \times \vec{M}_O(\vec{\tau})\,;\ \ l = V_O(\vec{\tau})\,.$$

Подстановка в (2) преобразует уравнение прямой к виду

$$\vec{r} = \vec{r}_K + l\vec{\tau}.$$

Из данного выражения следует, что при увеличении параметра l точка A удаляется по траектории от точки K, в которой вириал вектора равен нулю.

Таким образом, при движении частицы по инерции ее траектория, которая не зависит от массы и значения скорости, представляет собой прямую. При этом количество движения $m\vec{v}$ частицы остаётся постоянным как по величине, так и по направлению.

Системы отсчёта, в которых свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью, называются инерциальными. А утверждение их существования и есть закон инерции. Таким образом, первый закон Ньютона доказан.

Вектор момента количества движения относительно начала координат в рассмотренном случае также не изменяется. Остаётся показать, что сохраняется и кинетическая энергия частицы. В силу однородности пространства и времени, а также изотропии пространства кинетическая энергия не может зависеть от радиус-вектора, времени и направления вектора скорости. Этому требованию удовлетворяет скалярное произведение векторов скорости и количества движения, умноженное на любой постоянный коэффициент, например,

$$T = \frac{\vec{v} \cdot (m\vec{v})}{2}.$$

Следует подчеркнуть, что при данном определении выражение кинетической энергии приобретает реальный физический смысл. Очевидно, что в силу постоянства скорости частицы сохраняется и механическая энергия.

Перейдём к доказательству эквивалентности векторов во втором законе Ньютона.

Теорема. Для того чтобы векторы силы $\vec{F}$ и количества ускорения $m\vec{a}$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы эти векторы удовлетворяли условиям однородности и изотропии пространства и однородности времени:

$$\vec{F} = m\vec{a}; \tag{3}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(m\vec{a}); \tag{4}$$

$$V_O(\vec{F}) = V_O(m\vec{a}). \tag{5}$$

Доказательство.

1 Потребуем обратного, чтобы векторы $\vec{F}$ и $m\vec{a}$ удовлетворяли уравнению (3), являясь свободными векторами. Данные векторы равны по модулю и одинаковы по направлению. Однако вектор $m\vec{a}$ является атрибутом частицы и всегда приложен к ней. Если вектор $\vec{F}$ удовлетворяет требованию, но не лежит на траектории и не приложен к частице, то векторы $\vec{F}$ и $m\vec{a}$ нельзя считать эквивалентными (рисунок 2, *а*).

2 Предположим, что векторы дополнительно удовлетворяют условию однородности пространства, то есть их векторы-моменты относительно начала координат одинаковы. При выполнении условий (3), (4) векторы $\vec{F}$ и $m\vec{a}$ лежат на одной прямой, но их точки приложения различны (рисунок 2, *б*). Сила не приложена к частице, следовательно рассматриваемые векторы нельзя считать эквивалентными.

3 Требуем, чтобы векторы $\vec{F}$ и $m\vec{a}$ удовлетворяли условию изотропии пространства (5).

Вириал определяет координаты точки приложения вектора на траектории:

$$V_O(m\vec{a}) = m\vec{a} \cdot \vec{r}_A = ma \cdot r_A \cos\theta_1 = ma \cdot KA;$$

$$V_O(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{r}_B = F \cdot r_B \cos\theta_2 = F \cdot KB,$$

где θ_1 – угол между векторами $\vec{r}_A$ и $m\vec{a}$; θ_2 – угол между векторами $\vec{r}_B$ и $\vec{F}$; $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$; $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$.

Чтобы удовлетворить требованию равенства обоих значений, надо выполнение условий $\theta_1 = \theta_2$; $KB = KA$. Следовательно, точки A и B, являющиеся началами векторов $m\vec{a}$ и $\vec{F}$, совпадают (рисунок 2, *в*). Теорема доказана.

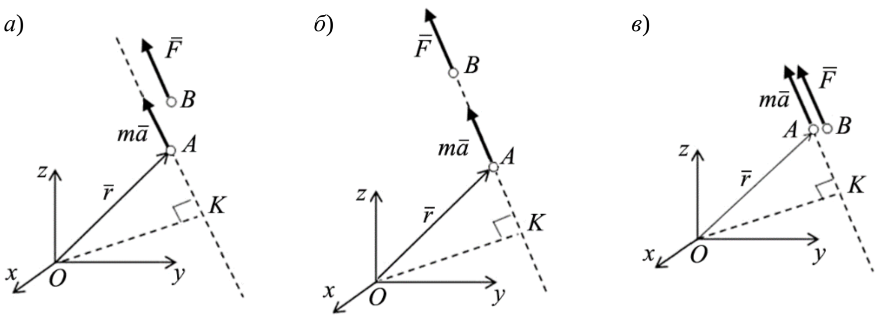

Рисунок 2 – Схемы к доказательству эквивалентности векторов

В статьях [6, 7] показано, как из условий эквивалентности (3)–(5) могут быть выведены общие теоремы динамики материальной точки. Таким образом, аксиомы, определяющие законы симметрии, позволили с нетрадиционной стороны взглянуть на законы Ньютона и предложить новые подходы к их рассмотрению при обучении студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Newton, I.** Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica / I. Newton. – Londini : Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater, 1687. – 510 p.

2 **Фейнман, Р.** Фейнмановские лекции по физике : Т. 1 : Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : АСТ, 2021. – 448 с.

3 **Яворский, Б. М.** Основы физики. Т. 1: Движение и силы; законы сохранения, молекулярно-кинетическая теория газа; молекулярные силы и агрегатные состояния вещества, электродинамика / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – М. : Наука, 1974. – 495 с.

4 **Акоста, В.** Основы современной физики / В. Акоста, К. Кован, Б. Грэм. – М. : Просвещение, 1981. – 495 с.

5 **Ландау, Л. Д.** Краткий курс теоретической физики. Кн. 1. Механика. Электродинамика : учеб. пособие для физ. специальностей вузов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М. : Наука, 1969. – 271 с.

6 **Сафаров, Г. Г.** Симметрия и законы Ньютона / Г. Г. Сафаров // Вестник современных исследований. – 2019. – № 3.7 (30). – С. 29–37.

7 **Сафаров, Г. Г.** Новые аксиомы классической механики / Г. Г. Сафаров // Инновации. Наука. Образование. – 2021. – № 26. – С. 1751–1762.

8 **Ольховский, И. И.** Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 575 с.

9 **Bəktaşi, T. H.** Nəzəri mexanika / T. H. Bəktaşi. – Bakı: Maarif, 1981. – 510 s.

10 **Тютин, И. В.** Симметрия в физике элементарных частиц. Ч. 1. Пространственно-временные симметрии / И. В. Тютин // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – № 5. – С. 64–69.

11 **Noether, E.** Invariante Variationsprobleme / E. Noether // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1918. – S. 235–257.

12 **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики. Т. 1. Кинематика, статика, динамика точки / Н. А. Кильчевский. – М. : Наука, 1977. – 480 с.

E. A. ASLANOV, G. G. SAFAROV, I. A. ISMAIL
Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

RELATIONSHIP OF SPACE SYMMETRY AND NEWTON'S LAWS

On the basis of the space-time isotropy and homogeneity properties, ways of substantiating the laws of modern classical mechanics are proposed. The proof of the inertia law and the justification of the equivalence of vectors in Newton's second law are presented.

Keywords: symmetry, space, Newton’s laws.

Получено 14.03.2022