ОБЪ ИЗГИБѢ БАЛКИ,

лежащей на сплошной упругой опорѣ.

Инж.-Мех. К. А. Есипова.

МОСКВА.
Типо-литографія «Русскаго Т-ва печатнаго и издательскаго дѣла».
Чистые пруды, Мыльниковъ пер., собственный домъ.
1903.

Объ изгибѣ балки, лежащей на сплошной упругой опорѣ.

Инж.-Мех. К. А. Есипова.

§. 1. Изслѣдованіе общаго рѣшенія.

Въ № 5-мъ Бюллетеней за 1902 годъ нами были найдены для постоянныхъ задачи слѣдующія выраженія:

$$r\,cos\varphi = \frac{e^{-2\,Ml} + cos\;2\;Ml}{Sinh\,(2\,Ml) + sin\,2\,Ml}\cdot\frac{MR}{2a};$$

$$r_1 cos\varphi_1 = \frac{e^{-2\,Ml} + cos\;2\;Ml}{Sinh\,(2\,Ml) + sin\,2\,Ml}\cdot\frac{MR}{2a}.$$

$$r\,sin\varphi = -\frac{Sin\;2\;Ml}{Sinh\,(2\,Ml) + sin\,2\,Ml}\cdot\frac{MR}{2a};$$

$$r_1 sin\varphi_1 = \frac{Sin\;2\;Ml}{Sinh\,(2\,Ml) + sin\,2\,Ml}\cdot\frac{MR}{2a}$$

Пользуясь этими формулами, можно чрезвычайно легко изслѣдовать случай очень длиннаго бруса и *установить предѣлы,* начиная съ которыхъ мы имѣемъ право считать разсматриваемый брусъ безконечно-длиннымъ. Дѣйствительно, легко замѣтить, что съ увеличеніемъ аргумента Ml—всѣ постоянныя стремятся къ нулю, кромѣ одного,— $r_1 cos\varphi_1$, — которое въ предѣлѣ обращается въ слѣдующее:

$$r_1 cos\varphi_1 = \frac{MR}{a}, \;.\;.\;.\;.\;.\quad (1)$$

тогда для упругой кривой найдемъ ур-іе:

$$y = \frac{2M}{a}\;R\;e^{-Mx}\;cos\;Mx, \;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

а изъ (2) получается ур-іе моментовъ:

$$(M)_x = \frac{R}{M}\;e^{-Mx}.\;Sin\;Mx\;.\;.\;.\;.\quad (3)$$

Разсмотримъ теперь функцію $Y_1 = A_1 e^{-Mx}\;sin\;Mx$, иначе ур-іе затухающаго колебанія, амплитуды котораго ассимптотически приближаются къ нулю. При значеніяхъ аргумента

$$Mx = 0, \pi, 2\pi, \;.\;.\;.\;.\;, n\pi$$

функція обращается въ нуль. Точно также ея первая, вторая и третья производныя обращаются въ нуль, когда аргументъ соотвѣтственно получаетъ значенія:

$$Mx = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, \;.\;.\;.\;.\;, (n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, \;.\;.\;.\;.\;, (n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, \\ \frac{3\pi}{4}, \pi + \frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{3\pi}{4}, \;.\;.\;.\;.\;, (n-1)\pi + \frac{3\pi}{4}, \end{Bmatrix}$$

Интервалы между послѣдовательными обращеніями въ нуль какъ самой функціи, такъ и ея первыхъ трехъ производныхъ, равны между собой, но не совпадаютъ по своему положенію. Если назовемъ этотъ интервалъ черезъ λ, то будемъ имѣть вообще:

$$\lambda = \frac{\pi}{M} \text{ или } \lambda = \text{длина полуволны.}$$

Такъ какъ полный періодъ колебанія соотвѣтствуетъ возвращенію точки въ свое первоначальное положеніе, то, слѣдовательно, 2λ есть длина волны затухающаго колебанія. Сопоставляя найденные результаты, легко установить слѣдующія основныя свойства кривой [1]):

1) максимальная амплитуда получается въ первой четверти полуволны и равна

$$Max\,(y_1) = (-1)^n\,\frac{A_1}{\sqrt{2}}\,e^{-\left[\frac{\pi}{4} + (n-1)\pi\right]};$$

2) максимальныя амплитуды убываютъ въ сторону положительныхъ $x^{\underline{\text{овъ}}}$ и возрастаютъ въ сторону отрицательныхъ $x^{\underline{\text{овъ}}}$ въ геометрической прогрессіи, знаменатель отношенія которой есть или $e^{-\pi}$, или $e^{+\pi}$;

3) точки перегиба кривой лежатъ во второй четверти длины полуволны или въ четверти волны.

---

[1]) *Хвольсонъ* „Курсъ Физики", т. I, стр. 136—139, Спб. 1897 г.

Зная геометрическій характеръ кривой,—ее нетрудно будетъ построить и затѣмъ приложить полученные такимъ образомъ выводы къ интересующему насъ вопросу.

Пусть $abcd\ldots$ (Чер. 1) представляетъ кривую затухающаго колебанія (*или иначе логариѳмическую синусоиду*)

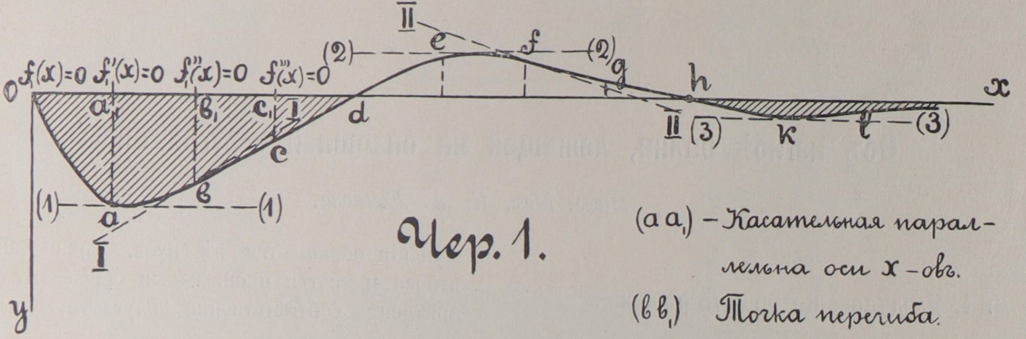
$$y_1 = A_1 e^{-Mx}\, Sin\, Mx,$$

длина полуволны которой $Od = dh = \ldots$ соотвѣтствуетъ длинѣ бруса $\lambda = 2l$ (Ox—поверхность земли)—, поэтому

$$Ml = \frac{\pi}{2},\ 2Ml = M\lambda = \pi.$$

Для точекъ a_1, b_1, $c_1\ldots$ получимъ слѣдующія значенія ординатъ:

$$aa_1 = \frac{A_1 e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}};\ bb_1 = A_1 e^{-\frac{\pi}{2}};\ cc_1 = \frac{A_1 e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$



Чер. 1.

Ур-іе (3) показываетъ, что при $Mx = \infty$,—моментъ обращается въ нуль; при $Mx = \frac{\pi}{4}$, — моментъ получаетъ свое наибольшее значеніе (сѣченіе aa_1); въ то же самое время въ этомъ сѣченіи срѣзающія усилія уничтожаются. Передвигая кривую моментовъ (Чер. 1) на четверть періода влѣво, будемъ имѣть форму упругой кривой (2). Итакъ, для безконечно-длинныхъ брусьевъ разсчетное сѣченіе находится въ (a), и мы найдемъ изъ (3) *):

$$Mx = \frac{\pi}{4};\ (M)_{max} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi e^{\frac{\pi}{4}}} \cdot Rl' = 0{,}47\ Rl'.\ (4).$$

Составляя теперь по общимъ формуламъ таблицы для вычисленія постоянныхъ (Таб. I) и вычисливши моментъ въ общемъ случаѣ въ видѣ:

$$(M)_l = \frac{2R}{M} \cdot \frac{Sinh\ (Ml)\ .\ Sin\ Ml}{Sinh\ (2\ Ml) + sin\ 2\ Ml}\ldots (5)$$

легко замѣтить, что, начиная со значенія $Ml = \frac{\pi}{2}$, моментъ будетъ меньше вычисленнаго по формулѣ (4). На основаніи предыдущаго мы можемъ установить слѣдующія правила:

1) Для изученія моментовъ въ различныхъ точкахъ длинныхъ брусьевъ служитъ кривая моментовъ (1); эта же кривая пригодна и для изслѣдованія глубинъ вдавливанія.

2) Размѣръ сѣченія опредѣляется по ур-ію (4).

3) Сила R вычисляется изъ условія:

$$R = P - \frac{\omega}{b}\, ah,$$

(гдѣ ω — площадь нагрузки, b — ширина бруса), при чемъ h—глубина погруженія въ точкѣ наибольшаго момента, опредѣляемая изъ (2),—

$$h = \frac{\sqrt{2}\, MR}{a e^{\frac{\pi}{4}}};$$

такимъ образомъ находимъ:

$$R = P : \left(1 + \frac{\sqrt{2}\,\omega\ M}{b e^{\frac{\pi}{4}}}\right).\quad (6).$$

4) Начиная съ величинъ

$$2Ml = \pi,\ Ml = \frac{\pi}{2}$$

опасное сѣченіе слѣдуетъ опредѣлять по моменту (4); для длинъ же меньшихъ этого предѣла служитъ таблица I, пользуясь которой можно найти всѣ необходимыя для разсчёта величины.

Замѣтимъ, что тотъ же результатъ можно было бы получить, исходя изъ общихъ формулъ, полагая въ нихъ $Ml = \frac{\pi}{4}$.

Заканчивая этотъ §, — воспользуемся случаемъ исправить ошибку, вкравшуюся по недосмотру въ нашу предыдущую статью,—при изученіи нами случая безконечно-длиннаго бруса. Ошибка эта заключалась въ томъ, что нами было пропущено постоянное въ интегралѣ задачи, благодаря чему получился парадоксальный выводъ, обратившій на себя вниманіе инж.-мех. В. Г. Шухова, которому мы очень благодарны за указаніе, хотя имъ и не была объяснена причина ошибки. Легко замѣтить, что ур-іе (2), аналогично полученному нами въ предыдущей

---

*) Слѣдуетъ замѣтить, что здѣсь l' — отлично отъ длины бруса, и опредѣляется *всегда* формулой

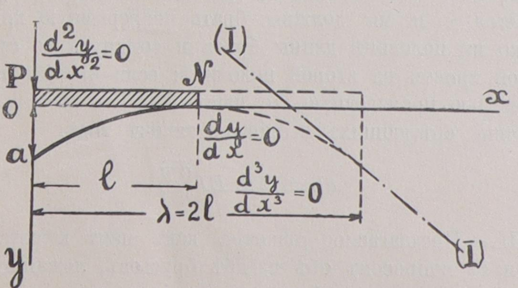
$$l' = \frac{\pi}{4M}.$$

статьѣ, и отличается отъ него только постояннымъ множителемъ, по введеніи котораго оба вывода совпадаютъ. Что же касается до остальныхъ возраженій В. Г. Шухова (см. № 8 Бюллетеней 1902 г.), — то мы не можемъ съ ними согласиться. Таковы указаніе на то, что постоянныя нами не получены въ окончательномъ видѣ или, что введеніе гиперболическихъ функцій усложнило выводъ (какъ будто бы постоянное A г. Шухова чѣмъ-нибудь по существу отличается отъ *sinh*). Едва ли также основательны и обвиненія въ сложности вывода, т. к. интегральныя выраженія, которыми мы пользовались въ нашей статьѣ, могутъ быть взяты готовыми въ любомъ учебникѣ, и очень мало поэтому усложняютъ рѣшеніе задачи. При этомъ мы замѣтимъ, что выраженія постоянныхъ, полученныя нами, приняли болѣе симметричный и, по нашему мнѣнію, болѣе простой (*двучлены* вмѣсто *пятичленовъ*) и удобный для вычисленія видъ, чѣмъ у г. Шухова (ср. стр. 573, значенія его C и C_1). Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только попробовать вычислить эти постоянныя при помощи прилагаемой ниже таблицы I, какъ сейчасъ же будетъ очевидна утомительность вычисленій по Шухову. (Наприм. возведеніе въ 4-ю степень количества $A = e^{Ml}$). Настоящая наша статья можетъ служить достаточнымъ отвѣтомъ нашему уважаемому критику, почему мы и не будемъ болѣе останавливаться на этомъ вопросѣ.

2. Частн[illegible] рѣшеніе вида $y = -A\,(e^{\pi - Mx}\cos Mx - e^{-Mx}\cos Mx)$.

Выше было найдено, что длина λ полуволны кривой затухающаго колебанія представляетъ собою двойную длину разсматриваемаго бруса, т. е. разстояніе между точками, въ которыхъ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

$$2l = \lambda = \frac{\pi}{M}, \quad Ml = \frac{\pi}{2}$$



Чер. 2.

Подставимъ теперь это значеніе аргумента въ выраженія для постоянныхъ найденныя нами въ общемъ случаѣ (см. *ibdm*), тогда количества $(2r\,Sin\varphi)$ и $(2r_1\,Sin\varphi_1)$ обратятся въ нуль и мы получимъ частный интегралъ, для котораго

$$A = 2r\cos\varphi = -\frac{\pi}{e^{\pi}+1}\cdot\frac{R}{al}$$

$$B = 2r_1\cos\varphi_1 = -e^{\pi}A = +\frac{\pi e^{\pi}}{e^{\pi}+1}\cdot\frac{R}{al}.$$

Поэтому ур-іе упругой кривой получаетъ видъ:

$$y = -A\left[e^{\pi - Mx}\cos Mx - e^{Mx}\cos Mx\right] \quad . \; . \; . (7)$$

Особенностью разсматриваемой функціи является то обстоятельство, что при $x = l$ погруженіе $h = 0$, т. е. средина бруса не смѣщается (чер. 2); при $x = 0$

$$Oa = h_0 = -A\left(e^{\pi} - 1\right) = \pi.\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}\cdot\frac{R}{al}.$$

Эта же величина h_0 характеризуетъ собою и стрѣлу прогиба, т. к. въ срединѣ $y = 0$. Сила R опредѣлится изъ слѣдующей формулы:

$$R = P - \frac{\omega}{b}\,ah_0 = P - \pi.\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}\,\frac{\omega}{b}\,\frac{R}{l} = P - k.\left(\frac{\pi}{l}\right)R, \quad . \; . \; (8)$$

гдѣ

$$k = \frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}\,\frac{\omega}{b}.$$

Слѣдовательно,

$$R = \frac{P}{\left(1 + k\left[\frac{\pi}{l}\right]\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Если мы построимъ кривую (7), то увидимъ, что она соотвѣтствуетъ случаю нагруженія бруса по концамъ (чер. 2), при отсутствіи момента защемленія [1]), что нетрудно замѣтить, взявши отъ ур. (7) вторую производную, которая для $x = 0$ и $x = 2\,l = \frac{\pi}{M}$ обращается въ нуль:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2M^2\left(Ae^{Mx}\,Sin\,Mx - Be^{-Mx}\,Sin\,Mx\right)$$

при

$$x = 0, \frac{\pi}{M}, \frac{2\pi}{M}, \; . \; . \; . \; . \; . \; , \frac{n\pi}{M}, \; \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Точно также для первой полуволны при x равномъ l производная $\frac{dy}{dx}$ уничтожается:

$$\frac{dy}{dx} = -M\Big[Ae^{Mx}(\cos Mx - Sin\,Mx)$$
$$+\; e^{\pi}Ae^{-Mx}\,(\cos Mx + Sin\,Mx)\Big] = 0$$

---

[1]) Впрочемъ это свойство непосредственно вытекаетъ изъ взятыхъ нами начальныхъ данныхъ.

Кромѣ того, если бы мы взяли третью производную отъ той же самой функціи, то увидали бы, что и она при $x = l$ обращается въ нуль; этотъ результатъ долженъ былъ получиться самъ собою изъ того обстоятельства, что въ срединѣ бруса N срѣзающія усилія вслѣдствіе симметріи положенія точки N равны нулю, что и характеризуется аналитически тѣмъ, что

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=l} = 0.$$

Изъ формулы (9) нетрудно замѣтить, что *отношеніе* $\frac{R}{P}$ *совсѣмъ не зависитъ отъ модуля упругости грунта и* что при большихъ пролетахъ отношеніе $\left(\frac{\pi}{l}\right)$ становится сравнительно малымъ, такъ что имъ можно безъ ощутительной погрѣшности пренебречь; въ этомъ случаѣ получимъ R равнымъ P. Допустимъ, что отношенія $\frac{R}{P}$ и $\left(\frac{\pi}{l}\right)$ величины перемѣнныя; тогда, если $\frac{R}{P} = y$ и $\left(\frac{\pi}{l}\right) = x'$, будемъ имѣть изъ (9):

$$y' + kx'y' = 1.$$

Полагая x' равнымъ $\left(x'' - \frac{1}{k}\right)$, наше ур-іе преобразуется въ слѣдующее:

$$x''y' = \frac{1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что отношенія силъ и отношенія длинъ связаны закономъ равносторонней гиперболы, отнесенной къ своимъ ассимптотамъ. Эту гиперболу можно построить по точкамъ и, тогда, задаваясь какимъ-нибудь отношеніемъ y' или x', графически, по координатамъ кривой можно найти соотвѣтствующую величину другого отношенія; здѣсь же мы приведемъ только таблицу, вычисленную для разныхъ отношеній $\left(\frac{\pi}{l}\right) = x$. (Таб. II-а). Когда будетъ извѣстно P, изъ таблицы мы найдемъ, по данному отношенію $\frac{R}{P}$, величину силы R и соотвѣтствующую длину l и обратно: зная l, мы по величинѣ отношенія $\left(\frac{\pi}{l}\right)$ вычислимъ отношеніе $\frac{R}{P}$. Только что разсмотрѣнный частный интегралъ даетъ рѣшеніе задачи для того случая, когда погруженіе въ срединѣ бруса уничтожается. Нетрудно показать, что получающаяся при этомъ длина бруса,—есть наименьшая. Дѣйствительно, если мы не будемъ мѣнять величины нагрузки и размѣровъ бруса, то изъ общаго рѣшенія увидимъ, что наименьшій [illegible], при которомъ уничтожаются [illegible] въ выраженіи функціи y и постоянныхъ, будетъ $\frac{n\pi}{2}$, т. е. когда $l = \frac{n\pi}{2M}$, т. к. Ml характеризуетъ собою длины волнъ, то, очевидно, что и длина бруса l будетъ *наименьшая*, т. е. когда Ml будетъ равно $\frac{n\pi}{2}$ и подавно въ срединѣ не будетъ погруженія $(n > 1)$.

Отмѣтимъ здѣсь, что разобранный случай является пограничнымъ, начиная съ котораго, съ очень большой для практики точностью, можно пользоваться выводами § 1-го.

Для наибольшаго изгибающаго момента $(x = l)$ мы получимъ слѣдующую формулу:

$$(M)_{max} = \frac{4\,e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi\left(e^{\pi} + 1\right)} \cdot Rl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Въ этомъ частномъ случаѣ также, какъ и въ общемъ, maximum момента получается въ срединѣ бруса; В. Г. Шуховъ возражаетъ намъ, что это не вѣрно, т. к. мы имѣемъ дѣло съ maximum'омъ maximorum'омъ,—но вѣдь мы же ищемъ max. момента въ данныхъ предѣлахъ *отъ 0 и до 2l*, т. е. въ совершенно *опредѣленныхъ границахъ*, а не при какой угодно длинѣ бруса и, значитъ, не въ общемъ случаѣ; да кромѣ того maximum maximorum и *не будетъ вообще рѣшеніемъ задачи*, ибо онъ, очевидно, равенъ безконечности; а рѣшеніемъ въ смыслѣ В. Г. Шухова будетъ *относительный* maximum, у насъ же въ области $0 - 2l$, — будетъ получаться только одинъ опредѣленный maximum.

§ 3. Заключительныя замѣчанія:

Заканчивая наше изслѣдованіе, укажемъ на нѣкоторые общіе результаты, которые можно получить изъ предыдущихъ данныхъ.

I.—Прежде всего замѣтимъ, что, когда для рѣшенія предлагается задача о нагруженіи бруса по концамъ, тогда въ срединѣ его срѣзающія усилія уничтожаются, и мы можемъ воспользоваться *непрерывной на длинѣ бруса кривой;* для случаевъ же загруженія по срединѣ одной силой, какъ легко замѣтить, третья производная не уничтожается, — и мы должны брать непрерывную кривую только на половинѣ длины бруса и сомкнуть ее съ обратной кривой на второй половинѣ; если бы мы вычислили 3-ю производную, то нашли бы для этого случая величину срѣзающихъ усилій въ такомъ видѣ:

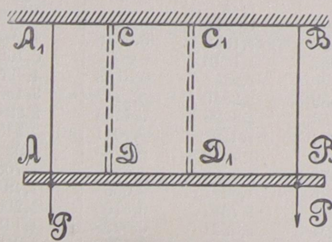
$$ah = R = EI\frac{d^3y}{dx^3}$$

II.—Предлагаемое рѣшеніе, какъ намъ кажется, въ связи съ вопросомъ объ изгибѣ брусьевъ, лежащихъ на грунтѣ, охватило и нѣкоторые другіе случаи.

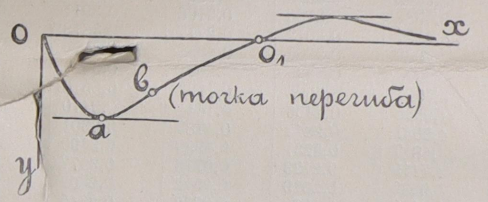
Если допустимъ, что реакція земли распредѣляется по закону, выражаемому общимъ или однимъ изъ частныхъ интеграловъ, которые были нами найдены, — то, при условіи, что вертикальныя смѣщенія пропорціональны дѣйствующимъ силамъ, всякій обратный сводъ, т. е. сводъ обращенный къ землѣ своей выпуклой поверхностью и нагруженный сверху вертикальными силами, можетъ быть очерченъ по линіи, выражаемой упомянутыми формулами и, кромѣ того, для этой кривой, *или линіи давленія,—линіей нагрузки* является *горизонтальная прямая*[1]).

Слѣдовательно, *всякій обратный сводъ* должно разсчитывать въ томъ предположеніи, что его *линія давленія* будетъ *одна* изъ разсмотрѣнныхъ нами *кривыхъ*, при чемъ нагрузка на этотъ сводъ будетъ состоять или изъ вертикальныхъ изолированныхъ силъ, или же распредѣлится сверху равномѣрно и передастся какъ-нибудь въ пятахъ свода.

III. — Второй задачей, обнимающей обширный классъ явленій изгиба, оказывается задача *о подвѣшиваніи брусьевъ при помощи сплошныхъ стѣнокъ* или *большого числа отдѣльныхъ тягъ*. Въ этомъ случаѣ, допущеніе закона Гука не можетъ, конечно, подлежать никакому сомнѣнію, а потому предыдущій анализъ можетъ быть утилизированъ весь цѣликомъ. Припомнимъ, теперь, что во всѣхъ нашихъ предыдущихъ выводахъ мы отбрасывали, при разсмотрѣніи различныхъ комбинацій нашей задачи, тѣ части кривыхъ, которыя лежали выше оси x; въ данномъ же случаѣ такого ограниченія дѣлать не приходится. Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB будетъ брусъ (чер. 3, 4), прикрѣпленный при помощи либо сплошной стѣнки AB_1, либо большого числа тягъ: $AA_1, CD, C_1D_1, \ldots$ Послѣ деформаціи онъ приметъ видъ, смотря потому, какъ будутъ дѣйствовать на него силы P, либо Oa, либо ab, либо bO_1, и т. д.,—комбинируя такія кривыя, т. е. беря разнообразныя сочетанія частныхъ интеграловъ, мы каждый разъ будемъ получать новые случаи нагрузки бруса.



Чер. 3.



Чер. 4.

Какъ уже было замѣчено, вопросъ не мѣняется, будемъ ли мы считать подвѣску AB_1 сплошной стѣнкой или состоящей изъ отдѣльныхъ тягъ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ, съ большой для практики точностью, можно допустить, что явленіе остается неизмѣннымъ и что тяги сжимаются и растягиваются такъ, какъ будто бы онѣ составляютъ одно цѣлое. Важно, между прочимъ, отмѣтить, что мы здѣсь *имѣемъ возможность* въ любой точкѣ стѣнки (или въ любой тягѣ), по длинѣ бруса AB, *опредѣлить деформирующую силу*, т. к. ординаты кривой $Oab\ldots$ измѣряютъ величину дѣйствующихъ нагрузокъ; знакъ при этихъ ординатахъ даетъ намъ указаніе на характеръ деформаціи, т. е. будетъ ли это сжатіе или же растяженіе.

Можно здѣсь попутно указать, что, вопреки утвержденію В. Г. Шухова, будто бы разсчетъ такихъ брусьевъ можетъ быть только повѣрочнымъ, — возможно по даннымъ § 1-го — опредѣлять прочные размѣры длинныхъ брусьевъ и *непосредственно*, разъ только ихъ длина превосходитъ $\frac{\pi}{2M}$ (напр. *случай баржи*).

Заканчивая эту статью, мы позволяемъ себѣ надѣяться, что другія лица, болѣе насъ знакомыя съ потребностями практики,—найдутъ возможность приложить наши скромные выводы къ болѣе быстрому рѣшенію задачъ, чѣмъ это возможно было сдѣлать въ нашемъ чисто теоретическомъ изслѣдованіи.

[1]) Извѣстно, что для горизонтальной линіи нагрузки была предложена Гагеномъ особая цѣпная линія (линія давленія).

Таблица I.

$$a=\frac{e^{-2\,Ml}+\cos 2\,Ml}{Sinh\,(2\,Ml)+Sin\,2\,Ml};\quad b_1=-b=\frac{Sin\ 2\,Ml}{Sinh\ (2\,Ml)+Sin\ 2\,Ml};\quad a_1=\frac{e^{2\,Ml.}+\cos\ 2\,Ml}{Sinh\ (2\,Ml)+Sin\ 2\,Ml}$$

Номера по порядку.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
	2 Ml (отвл. чис.).	2 Ml въ градус.	Sinh (2 Ml).	Cosh (2 Ml).	Sin 2 Ml.	Cos 2 Ml.	$e^{2\,Ml}$	$e^{-2\,Ml}$	a	$b_1=-b$	a_1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	∞	0,5	∞
2	0,05	2°52′	0,0500	1,0013	0,0500	0,9987	1,0513	0,9513	19,5000	0,5000	20,5000
3	0,10	5°44′	0,1002	1,0050	0,0999	0,9950	1,1052	0,9048	9,4942	0,4992	10,4957
4	0,15	8°36′	0,1506	1,0113	0,1495	0,9887	1,1618	0,8607	6,1626	0,4982	7,1659
5	0,20	11°28′	0,2013	1,0201	0,1988	0,9800	1,2214	0,8188	4,4959	0,4969	5,5024
6	0,25	14°19′	0,2526	1,0314	0,2473	0,9689	1,2840	0,7788	3,4961	0,4947	4,5067
7	0,30	17°11′	0,3045	1,0453	0,2954	0,9554	1,3498	0,7408	2,8275	0,4924	3,8426
8	0,35	20° 3′	0,3572	1,0619	0,3428	0,9394	1,4191	0,7047	2,3487	0,4897	3,3693
9	0,40	22°55′	0,4108	1,0811	0,3894	0,9211	1,4918	0,6703	1,9887	0,4866	3,0154
10	0,45	25°47′	0,4653	1,1030	0,4350	0,9004	1,5683	0,6377	1,7084	0,4832	2,7421
11	0,50	28°39′	0,5211	1,1276	0,4794	0,8776	1,6487	0,6065	1,4834	0,4792	2,5250
12	0,55	31°31′	0,5782	1,1551	0,5227	0,8525	1,7332	0,5769	1,2984	0,4748	2,3487
13	0,60	34°23′	0,6367	1,1855	0,5647	0,8253	1,8221	0,5488	1,1437	0,4700	2,2036
14	0,65	37°15′	0,6967	1,2188	0,6053	0,7960	1,9155	0,5221	1,0124	0,4649	2,0826
15	0,70	40° 7′	0,7586	1,2552	0,6443	0,7647	2,0137	0,4966	0,8991	0,4593	1,9805
16	0,75	42°59′	0,8223	1,2947	0,6818	0,7315	2,1170	0,4724	0,8004	0,4533	1,8938
17	0,80	45°51′	0,8881	1,3374	0,7175	0,6965	2,2255	0,4493	0,7136	0,4452	1,8199
18	0,85	48°42′	0,9561	1,3835	0,7513	0,6600	2,3396	0,4274	0.6369	0,4400	1,7568
19	0,90	51°34′	1,0265	1,4331	0,7833	0,6218	2,4596	0,4066	0,5683	0,4323	1,7028
20	0,95	54°26′	1,0995	1,4862	0,8134	0,5816	2,5857	0,3867	0,5062	0,4252	1,6557
21	1,00	57°18′	1,1752	1,5431	0,8415	0,5402	2,7183	0,3679	0,4503	0,4173	1,6157
22	1,05	60°10′	1,2539	1,6038	0,8675	0,4975	2,8576	0,3499	0,3995	0,4089	1,5811
23	1,10	63° 2′	1,3356	1,6685	0,8913	0,4535	3,0042	0,3329	0,3531	0,4002	1,5527
24	1,15	65°54′	1,4208	1,7374	0,9128	0,4083	3,1582	0,3166	0,3106	0,3911	1,5283
25	1,20	68°46′	1,5095	1,8107	0,9321	0,3622	3,3201	0,3012	0,2717	0,3818	1,5081
26	1,25	71°38′	1,6019	1,8884	0,9491	0,3151	3,4903	0,2865	0,2358	[illegible]	1,4917
27	1,30	74°29′	1,6984	1,9709	0,9635	0,2675	3,6693	0,2725	0 2028	[illegible]	[illegible]
28	1,35	77°21′	1,7991	2,0583	0,9757	0,2190	3,8574	0,2592	0,1723	0,3516	1,4691
29	1,40	80°13′	1,9043	2,1509	0,9854	0,1699	4,0552	0,2466	0,1441	0,3410	1,4621
30	1,45	83° 5′	2,0143	2,2488	0,9927	0,1204	4,2631	0,2345	0,1180	0,3301	1,4578
31	1,50	85°57′	2,1293	2,3524	0,9975	0,0706	4,4817	0,2231	0,0939	0,3190	1,4559
32	1,55	88°48′	2,2496	2,4619	0,9998	0,0209	4,7115	0,2123	0,0718	0,3077	1,4563
33	1,60	91°40′	2,3756	2,5775	0,9996	—0,0291	4,9530	0,2019	0,0512	0,2962	1,4588
34	1,65	94°32′	2,5075	2,6995	0,9969	—0,0790	5,2069	0,1920	0,0322	0,2845	1,4633
35	1,70	97°24′	2,6456	2,8283	0,9917	—0,1288	5,4739	0,1827	0,0148	0,2726	1,4695
36	1,75	100°16′	2,7904	2,9642	0,9840	—0,1782	5,7546	0,1738	—0,0012	0,2607	1,4774
37	1,80	103° 8′	2,9422	3,1075	0,9738	—0,2272	6,0496	0,1653	—0,0158	0,2487	1,4868
38	1,85	106° 0′	3,1013	3,2585	0,9613	—0,2756	6,3598	0,1572	—0,0289	0,2366	1,4976
39	1,90	108°52′	3,2682	3,4177	0,9463	—0,3234	6,6859	0,1495	—0,0413	0,2245	1,5097
40	1,95	111°44′	3,4432	3,5855	0,9289	—0,3703	7,0287	0,1423	—0,0521	0,2125	1,5229
41	2,00	114°36′	3,6269	3,7622	0,9092	—0,4163	7,3890	0,1353	—0,0619	0,2004	1,5371
42	2,05	117°28′	3,8196	3,9483	0,8873	—0,4612	7,7679	0,1287	—0,0706	0,1885	1,5515
43	2,10	120°20′	4,0219	4,1443	0,8631	—0,5050	8,1662	0,1224	—0,0783	0,1766	1,5683
44	2,15	123°12′	4,2342	4,3507	0,8368	—0,5476	8,5848	0,1165	—0,0850	0,1650	1,5849
45	2,20	126° 3′	4,4571	4,5679	0,8085	—0,5885	9,0250	0,1108	—0,0907	0,1535	1,6022
46	2,25	128°55′	4,6912	4,7966	0,7781	—0,6282	9,4877	0,1054	—0,0956	0,1423	1,6199
47	2,30	131°47′	4,9370	5,0372	0,7457	—0,6663	9,9742	0,1002	—0,0996	0,1312	1,6379
48	2,35	134°39′	5,1951	5,2905	0,7114	—0,7028	10,4856	0,0954	—0,1028	0,1204	1,6563
49	2,40	137°31′	5,4662	5,5569	0,6754	—0,7375	11,0232	0,0907	—0,1053	0,1100	1,6747
50	2,45	140°23′	5,7510	5,8373	0,6376	—0,7703	11,5883	0,0863	—0,1071	0,0998	1,6933
51	2,50	143°15′	6,0502	6,1323	0,5983	—0,8012	12,1825	0,0821	—0,1082	0,0900	1,7119
52	2,55	146° 6′	6,3645	6,4426	0,5577	—0,8298	12,8071	0,0781	—0,1086	0,0806	1,7303
53	2,60	148°58′	6,6947	6,7690	0,5155	—0,8569	13,4637	0,0743	—0,1085	0,0715	1,7485
54	2,65	151°50′	7,0417	7,1123	0,4720	—0,8816	14,1540	0,0706	—0,1079	0,0628	1,7664
55	2,70	154°42′	7,4063	7,4735	0,4273	—0,9041	14,8797	0,0672	—0,1068	0,0545	1,7841
56	2,75	157°34′	7,7894	7,8533	0,3816	—0,9243	15,6426	0,0639	—0,1053	0,0467	1,8013
57	2,80	160°26′	8,1919	8,2527	0,3349	—0,9422	16,4446	0,0608	—0,1034	0,0393	1,8188
58	2,85	163°18′	8,6150	8,6728	0,2874	—0,9578	17,2878	0,0578	—0,1011	0.0324	1,8343
59	2,90	166°10′	9,0596	9,1146	0,2391	—0,9710	18,1741	0,0550	—0,0985	0,0257	1,8479
60	2,95	169° 2′	9,5268	9,5791	0,1902	—0,9817	19,1059	0,0523	—0,0956	0,0196	1,8652
61	3,00	171°54′	10,0179	10,0677	0,1409	—0,9900	20,0855	0,0498	—0,0925	0,0139	1,8797
62	3,05	174°46′	10,5340	10,5814	0,0912	—0,9958	21,1153	0,0474	—0,0893	0,0086	1,8936
63	3,10	177°37′	11,0765	11,1215	0,0416	—0,9991	22,1979	0,0450	—0,0858	0,0038	1,9067
64	3,14	179°55′	11,5303	11,5736	0,0014	—1,0000	23,1034	0,0433	—0,0829	0,0001	1,9167
65	3,15	180°29′	11,6466	11,6895	—0,0084	—1,0000	23,3361	0,0429	—0,0819	—0,0008	1,9192
66	∞	Неопред.	∞	∞	Неопред.	Неопред.	∞	0	0	0	2

Таблица II.

Ур-іе кривой $y = -A\left(e^{\pi - Mx} - e^{Mx}\right)\cos Mx.$

$$A = -\frac{\pi}{e^{\pi}+1} \cdot \frac{R}{al}$$

$$R = \frac{P}{1 + k\left(\frac{\pi}{l}\right)}\ ; \quad k = \frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1} = 0{,}917.$$

$\frac{\pi}{l}$	$\frac{R}{P}$	l	Примѣчанія.
0,10	0,916	31,40	При $l = \infty$, R = P.
0,20	0,845	15,70	
0,30	0,784	10,40	Промежуточное значеніе R = 0,75 P.
0,40	0,710	7,85	
0,50	0,685	6,28	
0,60	0,645	5,23	Для простоты мы приняли множитель $\frac{\omega}{b}$ равнымъ единицѣ.
0,70	0,583	4,48	
0,80	0,576	3,92	
0,90	0,549	3,48	

$\frac{\pi \times 1}{l}$	$\frac{R}{P}$	l	Примѣчанія.
1,00	0,521	3,14	Промежуточное значеніе R = 0,5 P.
1,10	0,498	2,85	
1,20	0,476	2,61	*Приближенно:*
1,30	0,456	2,41	Отъ $\frac{\pi}{l} = 0$ до 0,3 R = P
1,40	0,432	2,24	
1,50	0,421	2,09	Отъ $\frac{\pi}{l} = 0{,}4$ до 1,00 R = 0,75 P
1,60	0,405	1,96	Отъ $\frac{\pi}{l} = 1{,}1$ до 3 R = 0,5 P
1,70	0,391	1,85	
1,80	0,377	1,74	Сила R распредѣляется только на половину длины бруса ($\lambda = 2l$).
1,90	0,364	1,65	
2,00	0,352	1,57	
3,00	0,266	1,04	
3,14	0,257	1,00	Промежуточное значеніе R = 0,25 P.
4,00	0,214	0,78	
5,00	0,179	0,63	

Таблица III (по Zimmermann'у).

$$\left(\frac{1}{M}\right)^4 = \frac{4EI}{a}\ ; \ M = \sqrt[4]{\frac{a}{4EI}}\ ; \ \frac{1}{M} = \sqrt[4]{\frac{4EI}{a}}\ ;$$

$\frac{1}{M}$	M	$\left(\frac{1}{M}\right)^4$	$\frac{1}{M}$	M	$\left(\frac{1}{M}\right)^4$	$\frac{1}{M}$	M	$\left(\frac{1}{M}\right)^4$
40	0,0250	2560000	68	0,0147	21381376	96	0,0104	84934656
41	0,0244	2825761	69	0,0145	22667121	97	0,0103	88529281
42	0,0238	3111696	70	0.0143	24010000	98	0,0102	92236816
43	0,0233	3418801	71	0,0141	25411681	99	0,0101	96059601
44	0,0227	3748096	72	0,0139	26873856	100	0,0100	100000000
45	0,0222	4100625	73	0,0137	28398241	101	0,00990	104060401
46	0,0217	4477456	74	0,0135	29986576	102	0,00980	108243216
47	0,0213	4879681	75	0,0133	31640625	103	0,00971	112550881
48	0,0208	5308416	76	0,0132	33362176	104	0,00962	116985856
49	0,0204	5764801	77	0,0130	35153041	105	0,00952	121550625
50	0,0200	6250000	78	0,0128	37015056	106	0,00943	126247696
51	0,0196	6765201	79	0,0127	38950081	107	0.00935	131079601
52	0,0192	7311616	80	0,0125	40960000	108	0,00926	136048896
53	0,0189	7890481	81	0,0123	43046721	109	0,00917	141158161
54	0,0185	8503056	82	0,0122	45212176	110	0,00909	146410000
55	0,0182	9150625	83	0,0120	47458321	111	0,00901	151807041
56	0.0179	9834496	84	0,0119	49787136	112	0,00893	157351936
57	0 0175	10556001	85	0.0118	52200625	113	0,00885	163047361
58	0,0172	11316496	86	0,0116	54700816	114	0,00877	168896016
59	0,0169	12117361	87	0,0115	57289761	115	0,00870	174900625
60	0,0167	12960000	88	0,0114	59969536	116	0,00862	181063936
61	0,0164	13845841	89	0,0112	62742241	117	0,00855	187388721
62	0,0161	14776336	90	0,0111	65610000	118	0,00847	193877776
63	0,0159	15752961	91	0,0110	68574961	119	0,00840	200533921
64	0,0156	16777216	92	0,0109	71639296	120	0,00833	207360000
65	0,0154	17850625	93	0,0108	74805201			
66	0,0152	18974736	94	0,0106	78074896			
67	0,0149	20151121	95	0,0105	81450625			

Примѣчаніе: M—величина, обратная длинѣ; $\frac{1}{M}$ — выражаетъ, поэтому, длину.

Хранит. Механ. Каб. въ Университетѣ *К. А. Есиповъ.* (Сообщено 13-го марта 1901 г. въ Политехн. Обществѣ).