

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра технической физики и теоретической механики

# МЕХАНИКА. ИССЛЕДОВАНИЯ И ИННОВАЦИИ

Международный сборник научных трудов

Выпуск 15

Под редакцией  
доктора технических наук, профессора *А. О. ШИМАНОВСКОГО*

Гомель 2022

В сборнике публикуются материалы, которые представлены на Международном семинаре преподавателей вузов по теоретической механике, состоявшемся в Белорусском государственном университете транспорта.

Для преподавателей вузов, ученых, занимающихся исследованиями в области механики. Может быть полезен аспирантам, студентам технических вузов, инженерно-техническим работникам.

*Сборник включен в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по направлениям: механика и машиностроение по технической отрасли и механика физико-математической отрасли науки.*

**Редакционная коллегия:**

*Шимановский А. О.* (главный редактор), доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Пуцято А. В.* (зам. главного редактора), доктор технических наук, доцент (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого);

*Черноус Д. А.* (отв. секретарь), кандидат технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

*Богданович П. Н.*, доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Боцко Й. С.*, PhD, профессор (Словакия, Кошице, Технический университет Кошице);

*Галай Э. И.*, доктор технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

*Довгяло В. А.*, доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Кузнецова М. Г.*, кандидат технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

*Леоненко Д. В.*, доктор физико-математических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

*Плескачевский Ю. М.*, доктор технических наук, член-корреспондент НАН Беларуси;

*Старовойтов Э. И.*, доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Халецки М.*, PhD (Польша, Варшава, SGGW);

*Шабловский О. Н.*, доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого)

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научные публикации

<i>Akhramenko N. A.</i> Force interaction of a massive ring and a material point located inside the ring.....	5
<i>Gegedesh M. G., Gustinovich R. Yu.</i> Design features and parameters of movement of the Wankel engine main elements.....	11
<i>Бондаренко В. О., Шимановский А. О.</i> Анализ деформирования армированной балки с учетом коррозии защитного слоя .....	18
<i>Босаков С. В., Котов Ю. Н.</i> Контактная задача в полярных координатах для круглой пластинки, некоторые перемещения которой ограничены.....	25
<i>Бочков К. А., Комнатный Д. В.</i> Математическое моделирование движения якоря электромагнитного контактора локомотива при его отключении.....	31
<i>Веремейчик А. И.</i> Напряженно-деформированное состояние образцов с серповидными зонами измененной структуры материала при осевом растяжении.....	37
<i>Веремейчик А. И.</i> Решение задачи термоупругости для полупространства о действии движущегося источника тепла.....	50
<i>Волчек О. М.</i> Совершенствование оборудования для производства гранулированного хлористого калия .....	60
<i>Ворожун И. А., Шилович А. В.</i> Влияние повторных торможений поезда на смещение ярусов транспортируемых труб.....	68
<i>Галай Э. И., Юлдашов А. А., Галай Е. Э., Рудов П. К.</i> Эффективность композиционных тормозных колодок с различной степенью износа.....	75
<i>Демьянчук О. В., Шимановский А. О.</i> Анализ динамики закрепленного на пути вагона с учетом поворота кузова вокруг вертикальной оси .....	83
<i>Коднянко Е. В., Черноус Д. А.</i> Использование модели Винклера для анализа качения колеса с тонким упругим ободом.....	92
<i>Козел А. Г.</i> Термоупругопластический изгиб трехслойной круговой пластины на основании Пастернака .....	100
<i>Кракова И. Е.</i> Напряженно-деформированное состояние пакета сэндвич-панелей при его транспортировке .....	109
<i>Лачугина Е. А.</i> Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жестким наполнителем.....	116
<i>Леоненко Д. В.</i> Изгиб ступенчатой круговой сэндвич-пластины при тепловом нагружении .....	123
<i>Локтионов А. В.</i> Кинематический анализ стреловидных исполнительных механизмов с продольными и поперечными режущими головками.....	128
<i>Маркова М. В.</i> Напряженно-деформированное состояние круговой трёхслойной ступенчатой пластины при вынужденных колебаниях .....	134

<i>Мартыненко Т. М., Пронкевич С. А., Мартыненко И. М., Максимович В. А.</i> Анализ прочности узловых соединений при различных исполнениях конструкции на основе моделирования в среде ANSYS.....	147
<i>Огородников Л. В.</i> Динамические испытания рам тележек длительно эксплуатировавшегося вагона дизель-поезда ДРБ1.....	152
<i>Отока А. Г., Лях А. М., Дашук П. А., Холодилов О. В.</i> Технология магнитопорошкового контроля цельнокатаных колес на автоматизированном стенде .....	160
<i>Пасовец В. Н., Ковтун В. А., Мирчев Й., Лодня В. А.</i> Влияние углеродных нанотрубок на прочностные свойства композиционных материалов на основе меди ..	169
<i>Пигунов А. В., Пигунов В. В.</i> Анализ прочности рам платформ при различном конструктивном исполнении средней части.....	175
<i>Пигунов А. В., Пигунов В. В.</i> Конструктивные решения для повышения объема кузова вагона-хоппера .....	183
<i>Проневич И. И.</i> Влияние формы обода колеса на ходовые качества велосипеда .....	191
<i>Рожкова Е. В.</i> Продольные колебания стержня в обобщенной упругой среде.....	197
<i>Рудов П. К., Ворожун А. В.</i> Сравнение методов определения тормозного пути при движении поезда по переменному профилю .....	203
<i>Салицкий В. С.</i> Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины..	209
<i>Симанович Н. М., Остриков О. М., Кульгейко М. П.</i> Поля напряжений в области расположенного у поверхности серповидного двойника, к которому приложена распределенная нагрузка .....	214
<i>Старовойтов Э. И.</i> Изгиб трехслойной пластины в температурном поле нагрузкой, приложенной к линии .....	221
<i>Цыганок О. И., Кракова И. Е., Шимановский А. О.</i> Деформирование дорожной одежды при разных температурах ее поверхности .....	227
<i>Черняк А. В.</i> Изгиб сэндвич-пластины с внешними слоями, линейно изменяющимися по толщине.....	235
<i>Шимановский А. О., Цыганок О. И.</i> Научное наследие академика В. А. Белого.....	241
<i>Юсубова С. М.</i> Построение однородных решений в задаче о кручении радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы.....	246
<i>Яровая А. В.</i> Свободные колебания шарнирно закрепленной круговой сэндвич-пластины в температурном поле .....	256

#### **Учебно-методические публикации**

<i>Асланов Э. А., Сафаров Г. Г., Исмаил И. А.</i> Связь симметрии пространства и законов Ньютона.....	263
<i>Джумаев Х. Д., Мирзаев И.</i> Современный подход к преподаванию теоретической механики.....	270
<i>Комнатный Д. В.</i> Колебательные цепи в курсе теоретической механики транспортного вуза.....	273
<i>Локтионов А. В., Сидорович А. А.</i> Вывод уравнения малых колебаний эллиптического маятника на основе теории относительного движения.....	279
<i>Фисенко Е. Н., Сабиров Р. А.</i> Анализ устойчивости центрально-сжатых тонкостенных стержней.....	283
<b>Правила оформления статей.....</b>	<b>286</b>

## НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ (SCIENTIFIC PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. *Mechanics. Researches and Innovations*. Vol. 15. Gomel, 2022

---

UDC 531.5

*N. A. AKHRAMENKO*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### **FORCE INTERACTION OF A MASSIVE RING AND A MATERIAL POINT LOCATED INSIDE THE RING**

The force interaction of a massive ring and a point material object is considered. The case of the location of a point material object in the plane of the ring in its inner region is investigated. It is determined that in the center of the ring the magnitude of the force interaction is minimal and increases with the distance from the center. At approaching directly to the ring, this force sharply increases. It was established that the force acting on a point material object is directed radially from the center.

**Keywords:** gravitational field strength, force interaction, massive ring.

**Introduction.** In Newton's theory of gravity, the gravitational mass is the source of the gravitational field. The gravitational field intensity is its power characteristic. The intensity of static gravitational field is determined by the magnitude of the force acting on a resting test body of unit mass.

In the solar system, some planets are surrounded by rings. They consist of cosmic dust and ice orbiting the planet. At first Saturn was discovered as a planet with rings. Galileo was one of the first to suggest that Saturn had "an addition to". This event was in 1610, and in 1655 Christian Huygens first described this "appendage" as a ring surrounding Saturn.

The nature of the origin of the rings is not completely clear. There are two most popular hypotheses for the formation of rings around Saturn and other planets. According to the first, the rings were formed from the substance remnants of a circumplanetary cloud. According to the second theory, the rings appeared as a result of the destruction of a large satellite due to a collision with a meteorite, a large comet or an asteroid. Saturn rings were studied by P. Laplace, S.V. Kovalevskaya, D. Maxwell, M.S. Bobrov [1–4].

The total mass of clastic material in the ring system is estimated as  $(1.54 \pm 0.49) \cdot 10^{19}$  kilograms, and it was formed  $10^7$ – $10^8$  years ago. According to the automatic interplanetary probe Voyager 1 photographs the rings of Saturn consist of hundreds of narrow rings. Subsequently, in the images obtained by the probes, it can be seen that the rings are formed from thousands of rings, alternating with slots. The particles of the rings range in size from 1 centimeter to 10 meters.

In contrast to a gravitating object spherical shape the ring mass configuration has a more complex force field distribution. Therefore, similar problems remain relevant at the present time [5–7]. In this paper, it is considered the force interaction of a massive ring and a point material object (located in the inner region in the plane of the ring).

**Force interaction determination for a massive ring and a point material object.** The gravitating mass with a certain volume density is assumed to be distributed inside a torus of a small cross section and a large radius  $R$ . Considering the small cross section of the torus, it can be replaced by a ring of radius  $R$  with a linear mass density  $\tau$ . Then the elementary mass  $dm$ , corresponding to the length element  $dl$ , is equal to  $\tau dl$  (figure 1).

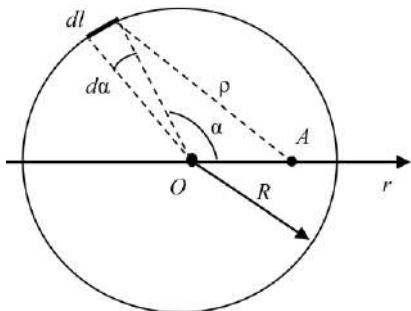


Figure 1 – A ring element and a small material object at point A

unit point mass), created by the elementary mass  $dm$  at point A, located at a distance  $\rho$  from it, is determined by the relation

$$dg = -\frac{Gdm}{\rho^2}. \quad (2)$$

The minus sign shows that the gravitational field intensity vector is directed towards the elementary mass.

An element of length  $dl$  as an elementary part of a circle is considered as  $Rd\alpha$  (see figure 1). Substituting the quantity  $\tau Rd\alpha$  instead of  $dm$  in (2), the equation (2) takes the following form

$$dg = -\frac{G\tau R d\alpha}{\rho^2}. \quad (3)$$

The gravitational interaction force for the two point masses  $m_1$  and  $m_2$ , located at a distance  $\rho$  from each other, is determined by the expression [8–10]

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{\rho^2}, \quad (1)$$

where  $G$  – the gravitational constant.

Then the intensity of the gravitational field (the ratio of the interaction force to a

unit point mass), created by the elementary mass  $dm$  at point A, located at a distance  $\rho$  from it, is determined by the relation

According to the cosine theorem by the quantity  $\rho^2$  can be replaced by

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha . \quad (4)$$

The expression (3), taking into account relation (4), can be written as

$$dg = -\frac{G\tau R d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} . \quad (5)$$

The gravitational field strength vector  $d\vec{g}$  is directed at an angle  $\beta$  to the horizontal axis (figure 2).

Considering (5) the projection of this vector onto the axis is

$$dg_{OA} = -\frac{G\tau R d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \cos \beta . \quad (6)$$

The  $\cos \beta$  can be expressed in terms of the angle  $\alpha$  from the rectangular triangles shown in figure 3.

From figure 3, *a* it follows that  $|BO| + |OA| = |BA|$ . Then we can write

$$R \cos(\pi - \alpha) + r = \rho \cos \beta . \quad (7)$$

From figure 3, *b* it follows that  $|OB| + |BA| = |OA|$ . Then we get

$$R \cos \alpha + \rho \cos \beta = r . \quad (8)$$

From figure 3, *c* it follows that  $|OA| + |AB| = |OB|$ . Then we get

$$r + \rho \cos(\pi - \beta) = R \cos \alpha . \quad (9)$$

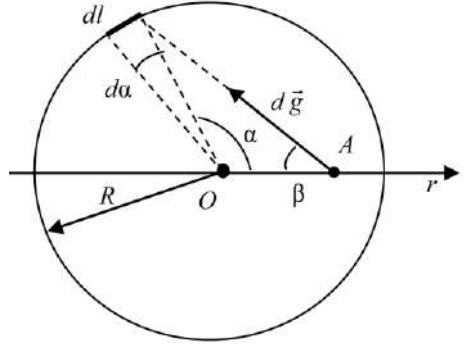


Figure 2 – Direction of a vector  $d\vec{g}$  at a point A

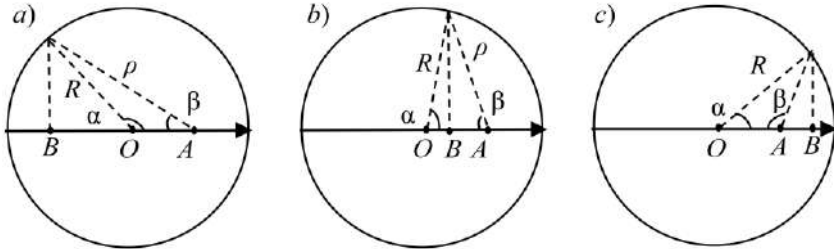


Figure 3 – Various locations of the element  $dl$

From relations (7), (8) and (9) it follows that

$$\cos \beta = \frac{r - R \cos \alpha}{\rho} \quad (10)$$

for any angles.

From expression (6), taking into account (10), it can be obtained

$$dg_{OA} = -\frac{(r - R \cos \alpha)G\tau R d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha)^{1.5}}. \quad (11)$$

The intensity of the gravitational field created by the entire ring at the point A, taking into account expression (11), is as follows

$$g = -2 \int_0^{\pi} \frac{(r - R \cos \alpha)G\tau R d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha)^{1.5}}. \quad (12)$$

The relation (12) can be transformed by introducing the parameter  $k = \frac{r}{R}$ , then

$$g = -\frac{2\tau G}{R} I(k),$$

where the integral  $I(k)$  is equal to

$$I(k) = \int_0^{\pi} \frac{(k - \cos \alpha) d\alpha}{(1 + k^2 - 2k \cos \alpha)^{1.5}}.$$

The gravitational field strength can also be expressed in terms of the ring mass

$$g = -\frac{Gm}{\pi R^2} I(k).$$

Knowing the gravitational field intensity, the force interaction of a massive ring and a point material object can be determined by the equation

$$F = -\frac{Gmm_0}{\pi R^2} I(k), \quad (13)$$

where  $m_0$  – is the mass of a point material object.



In this case, the structure of formula (13) differs from the structure of formula (1) by the presence of the factor  $I(k) / \pi$ . The calculated values of the integral  $I(k)$  for some values of  $k$  are presented in table 1.

*Table 1 – The calculated values of the integral  $I(k)$*

$k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$I(k)$	0	-0,158865	-0,328911	-0,523877	-0,763939	-1,08346
$k$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999
$I(k)$	-1,55001	-2,32133	-3,87528	-8,63617	-97,6275	-996,502

The integral  $I(k)$  in (13) is determined by the parameter  $k$  value. When the parameter  $k = 0$ , a point is in the center of the ring. In this case, the value of the integral becomes equal to 0 and the force is also equal to 0. This is an obvious result due to the symmetry of the ring.

Since there is a minus in formula (13) and the integral value is also negative, the force is positive and, accordingly, it is directed to the right in Figure 1, from the point  $A$  in the  $r$  axis direction. Thus, the force acting on a point material object is directed radially from the center. This is a significant difference from the spherical mass distribution.

In the ring center the magnitude of the massive ring-point material object force interaction is minimal, and it increases at an increasing distance from the center. At approaching directly to the ring, this force increases sharply, as it follows from the table 1.

Getting into the gravitational field inside the ring, an external substance particles are attracted to the ring due to the radially divergent force field, which is one of the ring stability factors.

**The discussion of the results.** Analyzing the dependence of the values of the integral  $I(k)$ , that determines the force magnitude for the points inside the ring, the following conclusions can be presented. Firstly, in the center of the ring, the force interaction magnitude is minimal (absent) and it increases with distance from the center. At point approaching directly to the ring, this force sharply increases. Secondly, the force acting on the point material object from the side of the ring is directed radially from the center, in contrast to the spherical mass distribution. Thirdly, the presence of the radially divergent force field is one of the ring stability factors. Flying particles of substance are attracted at approaching to the ring.

## REFERENCES

- 1 **Laplace, P. S.** Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne / P. S. Laplace // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. – 1787. – P. 201–234.
- 2 **Maxwell, J. C.** On the stability of the motion of Saturn's Rings / J. C. Maxwell // The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – Vol. 1. – P. 288–376.
- 3 **Ковалевская, С. В.** Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна / С. В. Ковалевская // Научные работы. – М. : АН СССР, 1948. – С. 139–152.
- 4 **Бобров, М. С.** Кольца Сатурна / М. С. Бобров. – М. : Наука, 1970. – 123 с.
- 5 **Sakharov, A. V.** Some trajectories of a point in the potential of a fixed ring and center / A. V. Sakharov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 15, no. 4. – P. 587–592.
- 6 **Tresaco, E.** Dynamics of a particle under the gravitational potential of a massive annulus: properties and equilibrium description / E. Tresaco, A. Elipe, A. Riaguas // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2011. – Vol. 111, no. 4. – P. 431–447.
- 7 **Ахраменко, Н. А.** Потенциал гравитирующего кольца / Н. А. Ахраменко // Научная конференция, посвященная 110-летию со дня рождения Ф. И. Федорова (Гомель, 25 июня 2021 года) : сб. материалов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – С. 194–198.
- 8 **Сивухин, Д. В.** Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.
- 9 **Serway, R. A.** Physics for Scientists and Engineers (with PhysicsNOW and info Trac) / R. A. Serway, J. W. Jewett. – 6<sup>th</sup> ed. – Belmon : Thomson-Brooks/Cole, 2004. – 1296 p.
- 10 **Шиляева, К. П.** Физика. Краткая теория и задачи : пособие / К. П. Шиляева, И. О. Деликатная, Н. А. Ахраменко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 211 с.

*Н. А. АХРАМЕНКО*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

### **СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАССИВНОГО КОЛЬЦА С РАСПОЛОЖЕННОЙ ВНУТРИ НЕГО МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ**

Рассматривается силовое взаимодействие массивного кольца и точечного материального объекта. Исследуется случай расположения такого объекта в плоскости кольца во внутренней его области. Определено, что в центре кольца величина силового взаимодействия является минимальной и по мере удаления от центра она возрастает. При приближении же непосредственно к кольцу эта сила резко возрастает. Установлено, что сила, действующая на точечный материальный объект, направлена радиально от центра.

**Ключевые слова:** напряженность гравитационного поля, силовое взаимодействие, массивное кольцо.

Получено 30.10.2022

UDC 621.437:531.8

*M. G. GEGEDESH, R. Yu. GUSTINOVICH*  
*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

**DESIGN FEATURES AND PARAMETERS OF MOVEMENT OF THE WANKEL ENGINE MAIN ELEMENTS**

In this investigation there is analyzed the influence of the ratio of the radii of the movable gear and the fixed gear of the triangular Wankel engine on the configuration of the engine housing, as well as on the kinematic parameters of the rotor points, on the base of the program created in the MatLab system.

**Key words:** rotary engines, Wankel engine, epitrochoid, synchronized gears.

Rotary engines have been considered as an alternative to classical internal combustion engines since the beginning of the 20th century.

The performed analysis of literary sources of the scientists from different countries allowed to define that at present, the following types of rotary engines are considered by various researchers: automobile [1, 2], aviation [3], used in mining machines [4]; there are designs with 2-stroke [5], 4-stroke [6, 7] and 6-stroke [8] cycles; the number of the main working elements of the engine and the principle of their movement differ either [9] (figure 1).

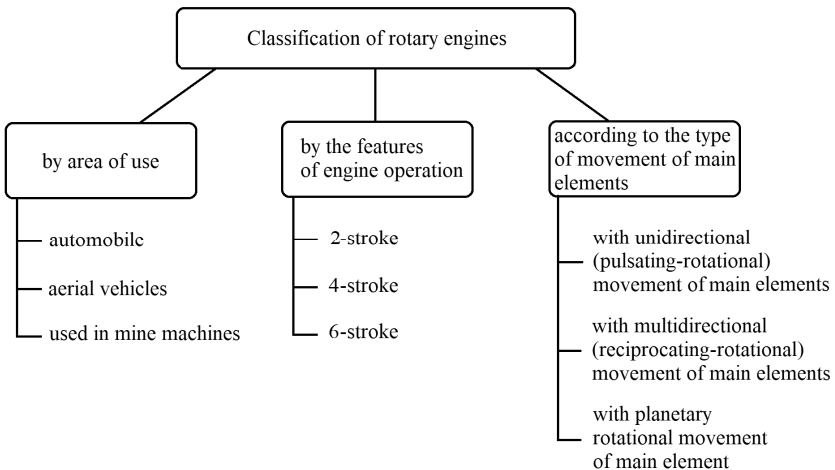


Figure 1 – Classification of modern rotary engines

One of the most widely used designs of rotary engines is the one with planetary rotational movement of the main working element (rotor), named after one of its developers, F. Wankel (figure 2). This variant was developed in 1954 and it

was used in the automotive industry in the USSR and abroad, but it had certain disadvantages [10, 11] and it was practically ceased to be used in production by the end of the 20th century.

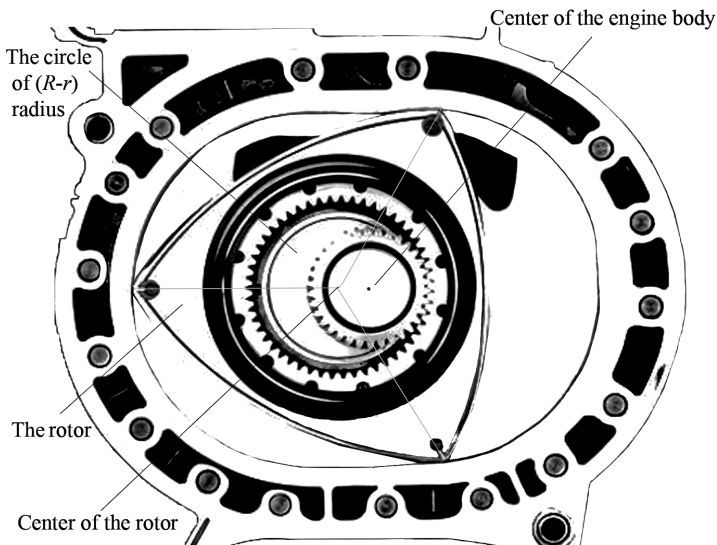


Figure 2 – Scheme of Wankel engine

Currently, the rotary engine of Wankel type is experiencing a renaissance in the internal combustion engine industry, mainly due to the simplicity of its design and high power [12, 13]. Despite the presence of significant disadvantages, the Wankel engine also has a number of advantages; therefore, investigations on its improvement are still relevant at the present time [14–16]. Wankel rotary engines are used as power units in modern machines, such as unmanned aerial vehicles (drones), vehicles with a hybrid engine [17, 18] and etc.

Such an engine consists of a housing and two moving parts: a rotor and an eccentric output shaft (see figure 2). There are two spur gears: the outer one is fixed on the housing side, the inner one is fixed inside the rotor so that the rotor tips are in contact with the housing [17]. The difference  $(R - r)$  is called the eccentricity  $e$ , its choosing requires to take into account the possibility of the eccentric power take-off shaft displacement through the central hole of the small fixed gear [18]. The fixed gear is rigidly bolted to the motor housing and cannot be rotated. The geometry of the rotor, housing and sides is determined mainly by the parameter  $R$ , called the radius of the rotor, and the eccentricity  $e$  of the output shaft. The eccentricity  $e = R - r$  and the generating radius  $R$  are the key dimensions of the Wankel engine. The fundamental difference between such an engine and a classic internal combustion engine is that the rotor plays the role of a piston. That is, it par-

ticipates in the formation of internal combustion chambers; with its help, gases are admitted and released and it drives the main shaft.

Thus, the purpose of the presented work is to study the influence of the rotor parameters on the trajectory of its points and their kinematical parameters.

The rotor performs two simple movements: displacement of the center of the rotor along the eccentric shaft with radius  $e$  and rotation around its own center. While the rotor makes one revolution around its center, the output shaft makes three revolutions in the eccentric circle. In this case, the points of the rotor move along a curvilinear trajectory called an epitrochoid.

In technical literature, for example, in [20], the equation for the epitrochoid can be written as follows:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos(n\varphi) + CR \cos \varphi, \\ y = (R - r) \sin(n\varphi) + CR \sin \varphi, \end{cases}$$

where  $R, r$  – radii of the movable gear and fixed gear, respectively, m;  $\varphi$  – angle of rotation characterizing planetary motion, rad;  $n$  – gear ratio; for this engine type it is

$$n = \frac{R}{R - r};$$

$C$  – dimensionless parameter that determines the dimensions of the engine [20]; it is usually taken equal to 2.1–2.7.

For example, for the engine with parameters  $R = 108$  mm,  $r = 54$  mm;  $n = 2$ ;  $C = 2.6$ ;  $R/r = 3/1$  the graphs of changes in the point epitrochoid coordinates along the axes  $x$  and  $y$  and the type of the epitrochoid, defining the configuration of the engine are shown in figures 3 and 4.

At the development process of a rotary engine configuration it is necessary to select parameters to achieve the required characteristics of the device. Manual selection is very difficult, therefore, there was written the script in the MatLab environment (figure 5) that allows to get the form of an epitrochoid, kinematic parameters (velocity and acceleration values) of the rotor point, which is at distance  $R$  from its center for any entered value of  $R, r, C$  (figure 6).

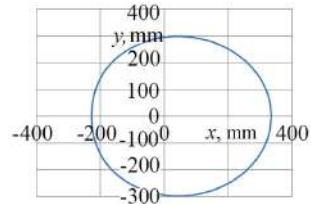


Figure 3 – The configuration of the internal part of the rotary engine at  $R/r = 3/1$

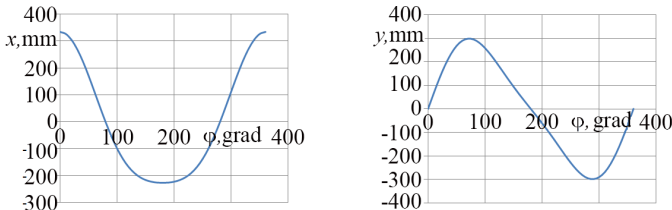


Figure 4 – Coordinates of the rotor extreme point at  $R/r = 3/1$

```

1   R = input('R (mm) = ');
2   r = input('r (mm) = ');
3   C = input ('C = ');
4   n = R/(R-r);
5   syms fi;
6   x = (R-r)*cos(n*fi)+ C*R*cos(fi);
7   y = (R-r)*sin(n*fi)+ C*R*sin(fi);
8   Vx = diff(x);
9   Vy = diff(y);
10  V = (Vx^2+Vy^2)^0.5;
11  ax = diff(Vx);
12  ay = diff(Vy);
13  a = (ax^2+ay^2)^0.5;
14  fi = 0:0.01:2*pi;
15  grid on;
16  subplot(1,3,1); plot(subs(x),subs(y), 'r');
17  xlabel('x, mm');
18  ylabel('y, mm');
19  subplot(1,3,2); plot(fi,subs(V), 'g');
20  xlabel('fi, rad');
21  ylabel('V, mm/sec');
22  subplot(1,3,3); plot(fi,subs(a), 'b');
23  xlabel('fi, rad');
24  ylabel('a, mm/sec^2');

```

Figure 5 – The script for getting the form of an epitrochoid, kinematic parameters (velocity and acceleration values) of the rotor point, which is at distance  $R$  from its center for the triangle Wankel engine

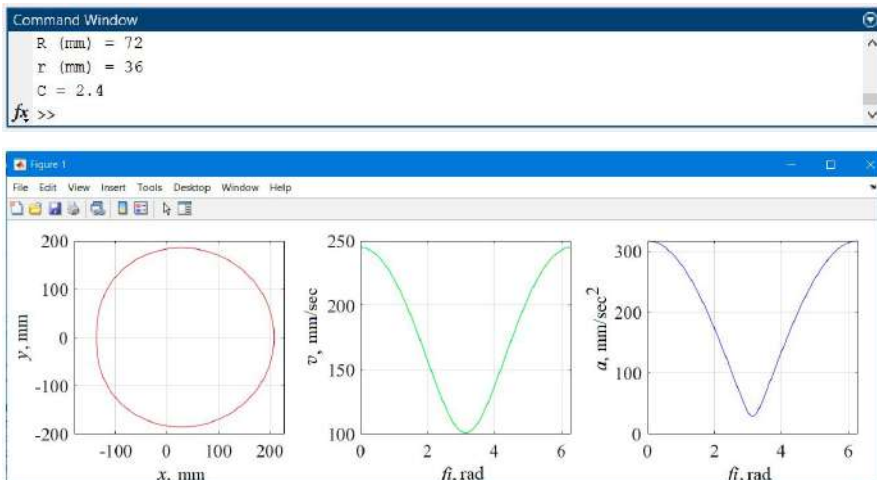
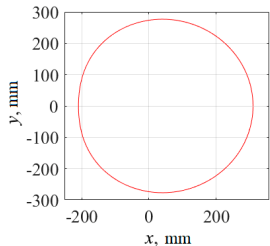
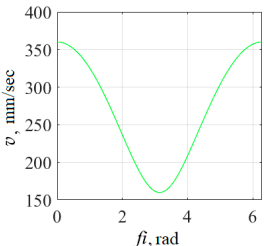
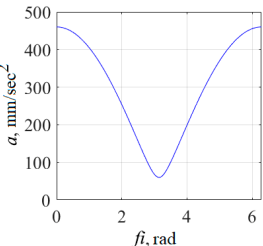
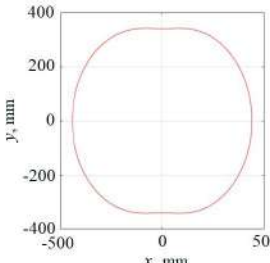
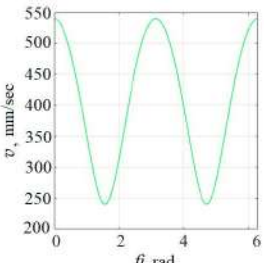
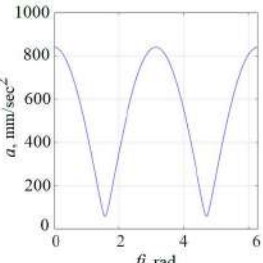
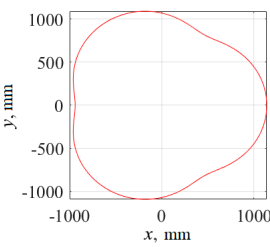
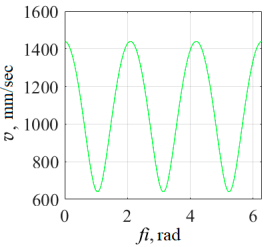
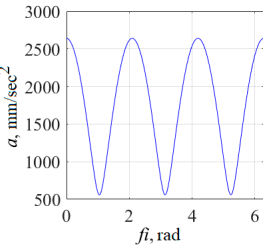
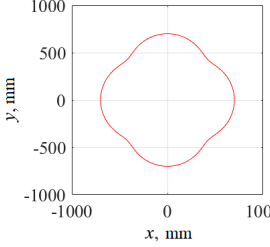
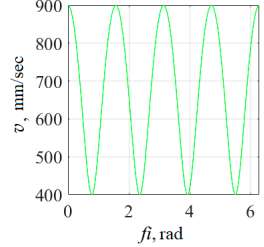
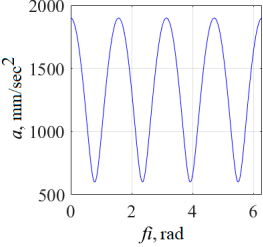


Figure 6 – Example of the MatLab script realization

The analysis of the ratio  $R/r$  influence of on the epitrochoid type was performed, some of the obtained results are shown in the table 1. The calculations were performed for a constant value of the fixed gear radius  $r$ , taken equal to 50 mm, the parameter  $C = 2.6$ .

Table 1 – Some computational results

$R/r$	The obtained results in the MatLab system		
2/1			
3/2			
4/3			
5/4			

The computational results demonstrated that the number of convex sections of the epitrochoid is equal to the denominator of the  $R/r$  ratio, while the dimensions of the engine body, depending on the extreme positions of the points of the epitrochoid, tend to decrease. With an increase in the  $R/r$  ratio, it is necessary to design the engine of large dimensions, and in this case, it may be difficult to produce parts because of the complex geometry and it will be possible only by using laser technologies.

Also, for each value of the radius  $r$ , there are such ratios  $R/r$ , that lead to the formation of not closed epitrochoid; so, it won't be possible to create an engine configuration for such parameters. For the radius  $r = 50$  mm, such ratios for the numerator range 2–10 are: 3/2, 4/1, 5/1, 5/2, 5/3, 6/1, 7/1, 7/2, 7/3, 7/4, 7/5, 8/1, 8/3, 8/5, 9/1, 9/2, 9/4, 9/5, 9/7, 10/1, 10/3, 10/6, 10/7. For ratios 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6, 8/7, 10/9, the epitrochoid has a closed contour.

Thus, the ratio of the radii of the movable gear and the fixed gear influence both the dimensions of the Wankel engine housing and the trajectories of the rotor points. There are also possible the variants of the ratio  $R/r$ , when the construction of the engine is not possible for the specific values of  $R$  and  $r$ .

## REFERENCES

- 1 **Лободин, А. В.** Роторно-поршневой двигатель / А. В. Лободин, Б. А. Семенихин // Современные автомобильные материалы и технологии : сб. статей VI Междунар. науч.-техн. конф. – Курск : Юго-Зап. гос. ун-т, 2014. – С. 91–96.
- 2 Recent studies of fuels used in Wankel rotary engines / P. Otchere [et al.] // Journal of Energy Resources Technology. – 2021. – Vol. 143, no. 3. – 13 p.
- 3 Effect of nozzle parameters on the spray characteristics for small-scaled aviation kerosene rotary engine / Y. Li [et al.] // Atomization and Sprays. – 2022. – Vol. 32. – P. 11–32.
- 4 **Isheyskiy, V.** Prospects of applying MWD technology for quality management of drilling and blasting operations at mining enterprises / V. Isheyskiy, J. A. Sanchidrián // Minerals. – 2020. – Vol. 10, no. 10. – Article 925. – 18 p.
- 5 **Smail, B.** Combustion chamber design effect on the rotary engine performance-a review / B. Smail, M. Akm // International Journal of Automotive Engineering. – 2020. – Vol. 11, no. 4. – P. 200–212.
- 6 Computational Model of Rotary Engine Thermodynamic Cycle / M. Drbal [et al.] // Acta Mechanica Slovaca. – 2019. – Vol. 23, no. 2. – P. 26–29.
- 7 **Mittal, V.** Design parameters for small engines based on market research / V. Mittal // SAE Technical Paper 2018-01-1717. – 2018. – 7 p.
- 8 Двигатель внутреннего сгорания: 6-тактный роторный двигатель с вращающимися запорными элементами, отдельными роторными секциями разного назначения, камерами сгорания неизменного объема, расположенными в рабочих роторах, и способ его работы : пат. 2011146256, Рос. Федерация, МПК (2006.01) : F 02B 53/00 / И. Ю. Исаев; заявл. 16.11.2011; опубл. 27.05.2013. – Бюл. № 15. – 19 p.
- 9 Роторные двигатели: прошлое и будущее [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.rotor-motor.ru/page01.htm>. – Date of access : 20.09.2022.
- 10 **Саакян, А. К.** Роторный двигатель «Ванкеля» / А. К. Саакян, А. Н. Чурзин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2010. – № 3. – С. 33–34.



11 **Косаченко, С. Ю.** Сравнительный анализ роторно-поршневого двигателя Ванкеля / С. Ю. Косаченко, С. Ф. Чернобрисов // Современное строительство и архитектура. Энергосберегающие технологии : сб. материалов X Респ. науч.-практ. конф. (с междунар. участием), 30 ноября 2018 года. – Бендеры : ПГУ им. Т. Г. Шевченко, 2019. – С. 219–222.

12 Альтернативные двигатели внутреннего сгорания / А. Е. Ломовских [и др.] // Повышение эффективности использования мобильных энергетических средств в различных режимах движения : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 115-й годовщине со дня рожд. проф. Харитончика Ефима Мироновича. Ч. 1. – Воронеж : ВГАУ, 2017. – С. 322–329.

13 **Drbal, M.** Mathematical modelling of the rotary engine / M. Drbal, D. Svida // Vibroengineering Procedia. – 2018. – Vol. 19. – P. 289–292.

14 **Hsieh, C. F.** Dynamics analysis of the triangular rotary engine structures / C. F. Hsieh // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2018. – Vol. 140, is. 11. – Article 112804. – 12 p.

15 Усовершенствование двигателя Ванкеля и аналогичных роторных двигателей: пат. 2485335 Рос. Федерация, МПК (2006.01) : F02B53/04; F02B53/08; F02B55/14; F01C1/18; F01C1/22; F01C19/04 / Х. Ром, Т. Ром; заявл. 07.08.2006; опубл. 20.06.2013. – Бюл. № 17. – 65 с.

16 **Глушанков, А. Р.** Принцип работы и развитие конструкции двигателя Ванкеля / А. Р. Глушанков, А. Н. Кузнецов // Молодежный вектор развития аграрной науки : материалы 71-й студенческой науч. конф. – Воронеж : ВГАУ, 2020. – С. 244–248.

17 Experimental and numerical study of combustion and emissions performance in a hydrogen-enriched Wankel engine at stoichiometric and lean operations / C. Shi [et al.] // Fuel. – 2021. – Vol. 291. – 17 p.

18 Laser surface texturing of Wankel engine apex seals / N. Morris [et al.] // Surface Topography : Metrology and Properties. – 2020. – Vol. 8, no. 3. – Paper 034001. – 13 p.

19 **Sadiq, G. A.** Development of rotary Wankel devices for hybrid automotive applications / G. A. Sadiq, R. Al-Dadah, S. Mahmoud // Energy Conversion and Management. – 2019. – Vol. 202. – Paper 112159. – 17 p.

20 Особенности кинематического расчёта роторно-поршневого двигателя Ванкеля / Ю. П. Макушев [и др.] // Омский научный вестник. – 2020. – № 5 (173). – С. 22–28.

*М. Г. ГЕГЕДЕШ, Р. Ю. ГУСТИНОВИЧ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКЦИИ И ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДВИГАТЕЛЯ ВАНКЕЛЯ**

В работе исследовано влияние соотношения радиусов подвижного зубчатого колеса и неподвижной шестерни треугольного двигателя Ванкеля на конфигурацию корпуса двигателя, а также на кинематические параметры крайних точек ротора с применением разработанной в системе MatLab программы.

**Ключевые слова:** роторные двигатели, двигатель Ванкеля, эпитрохоида, синхронизирующиеся шестерни.

Получено 22.09.2021

УДК 691.328:004.94

*В. О. БОНДАРЕНКО, А. О. ШИМАНОВСКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРМИРОВАННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ КОРРОЗИИ ЗАЩИТНОГО СЛОЯ**

Рассматривается деформирование железобетонной балки, опертой по концам, под действием изгибающей нагрузки. Принимается во внимание изменение механических характеристик защитного слоя, связанное с его коррозией. На основе компьютерного моделирования показано, что уменьшение модуля упругости поверхностного слоя бетона ведет существенному увеличению деформаций балки, фиксируя которые можно получать информацию о степени повреждения элемента конструкции здания.

**Ключевые слова:** железобетонная балка, напряженно-деформированное состояние, коррозия защитного слоя.

**Введение.** Железобетонные конструкции при эксплуатации подвергаются действию различных факторов окружающей среды, которые приводят к коррозии защитного слоя бетона. Изменение его физико-механических характеристик, в свою очередь, становится причиной уменьшения жесткости конструкции и увеличения напряжений в ней под действием приложенной нагрузки, что ведет к снижению долговечности. При значительной коррозии бетона его защитных свойств оказывается недостаточно, чтобы предотвратить коррозию арматуры, это еще больше сказывается на прочности балок, плит и иных элементов [1–3]. Поэтому существует практическая необходимость анализа влияния коррозии защитного слоя бетона на несущую способность элементов строительных конструкций.

Модели разрушения строительных конструкций вследствие влияния приложенных к объекту сил и воздействия окружающей среды были предложены в работах [4, 5], где также продемонстрировано существенное изменение напряженно-деформированного состояния армированных конструкций вследствие совместного действия коррозионных сред и силовых факторов.

В научных трудах И. Г. Овчинникова и его коллег [6–8] был представлен системный подход к оценке долговечности конструкций, подверженных действию хлоридосодержащих сред, который включает в себя расчёт на основе сочетания моделей конструктивного элемента, грунтового основания, материала, воздействия среды и модели наступления предельного состояния.

Экспериментальное исследование влияния коррозии на прочность железобетонных балок рассмотрено в статье [9]. Установлено соответствие между степенью коррозии и нагрузкой, вызывающей хрупкое разрушение. Выявлено, что при незначительной коррозии растянутой арматуры наблюдается повышение прочности на сдвиг примерно на 7 % по сравнению с контролем.

ными образцами. Такой эффект связан с повышенным радиальным давлением, появляющимся вследствие расширения продуктов коррозии на границе раздела, что приводит к повышению удерживающей способности арматуры.

В ходе длительного эксперимента, результаты которого описаны в работе [10], было выявлено, что недостаточно учитывать только глубину проникновения и концентрацию хлоридов в защитном слое бетона при прогнозировании срока службы элементов. Жесткость при изгибе также зависит от коррозии растянутой арматуры, которая приводит к уменьшению поперечного сечения стали и нарушению сцепления арматуры с бетоном за счет появления между ними продуктов коррозии.

В работе [11], используя трехмерный нелинейный анализ методом конечных элементов, авторы установили влияние неравномерной коррозии арматуры на пределы текучести и прочности, структуру трещин. При циклическом приложении нагрузок в случае степени коррозии сверх 17 % наблюдалось увеличение податливости железобетонных балок.

В статье [12] представлена конечноэлементная модель, позволяющая анализировать образование трещин в железобетонной балке с учетом поперечной арматуры. Результаты расчетов показали, что наличие такой арматуры позволяет ограничить образование трещин, связанное с наличием коррозии, но эффект снижается по мере удаления от арматурных стержней. В работе [13] рассмотрена численно-аналитическая модель, позволяющая прогнозировать распространение трещин, вызванных хлоридной коррозией.

В статье [14] был предложен метод оценки хлоридной коррозии железобетонных элементов, поврежденных коррозией, при сейсмических воздействиях. Показано, что данный метод дает хорошее соответствие с результатами экспериментов при анализе деформаций изгиба и сдвига.

На основе анализа напряженно-деформированного состояния в зоне наклонных трещин в статье [15] было показано, что коррозионные процессы оказывают значительное влияние на деформации характерного железобетонного элемента. Чем выше уровень напряжений, тем оно более существенно.

Результаты влияния ослабления бетонного участка на перераспределение напряжений в сечении при ударе по железобетонной балке представлены в работе [16]. Они свидетельствуют повышению риска хрупкого разрушения коррозионного-поврежденного элемента вследствие увеличения высоты сжатой зоны бетона.

В статье [17] представлено численное исследование влияния коррозии, вызванной хлоридами, на срок службы конструкций. На основе рассмотренных примеров показано, что уменьшение толщины защитного слоя бетона с 30 до 25 мм и увеличение водоцементного отношения с 0,5 до 0,55 может привести к снижению срока службы более, чем на 20 и 30 % соответственно.

В работе [18] представлен алгоритм расчета, позволяющий оценить изменение напряженно-деформированного состояния железобетонной плиты,

подверженной действию хлоридной коррозии с использованием метода секток. Приведенные результаты показывают, что коррозия может приводить к уменьшению долговечности конструкции в два раза и более.

Обзор исследований, в которых для анализа влияния коррозии на прочность железобетонных конструкций использовался метод конечных элементов, представлен в работе [19].

В данном исследовании анализируется влияние коррозии защитного слоя на напряженно-деформированное состояние армированной балки, опирающейся концами на горизонтальную поверхность. В качестве средства решения задачи использован программный комплекс ANSYS Mechanical, в котором реализован метод конечных элементов.

**Постановка задачи.** Объектом данного исследования является консольная балка длиной 3 м, которая имеет прямоугольное поперечное сечение  $120 \times 220$  мм. Ее армирование осуществляется тремя стальными стержнями диаметром 8 мм. С учетом эксплуатации в умеренной атмосферной среде принято, что толщина защитного слоя бетона 20 мм. Чтобы учесть изменение механических характеристик бетона, связанное с его коррозией, защитный слой разделен на пластины, в пределах которых модуль упругости и коэффициент Пуассона принимались постоянными. На рисунке 1 представлены графики, демонстрирующие зависимости модулей упругости бетонов разных классов в зависимости от расстояния до фронта коррозии, которые построены на основе информации, приведенной в работах [20, 21]. Коэффициент Пуассона во всех слоях бетона принят равным 0,2.

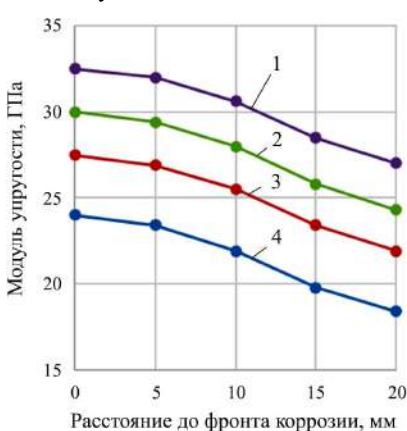


Рисунок 1 – Изменение модуля упругости в зависимости от глубины проникновения коррозии для бетона класса:

1 – C<sub>25/30</sub>, 2 – C<sub>20/25</sub>, 3 – C<sub>16/20</sub>, 4 – C<sub>12/15</sub>,

Модуль упругости арматурных стержней принят равным 210 ГПа, коэффициент Пуассона – 0,3.

На первом этапе создана геометрическая модель выделенного структурного элемента, разделенного на объёмы с различными характеристиками, которая представлена на рисунке 2.

Далее выполнено разбиение модели на конечные элементы. Как для бетона, так и для арматуры использован элемент SOLID65. Общее число элементов модели составило около 30000.

Силы, которые приложены к верхней грани балки в области контакта, прикладывались как равномерно распределенное статическое давление размером 25 кПа. Также учитывалась сила тяжести самой балки. При задании гра-

ничных условий принято, что балка опирается обоими своими концами на основание. В этом случае схема деформирования является симметричной, поэтому расчеты велись для половины балки, а в месте ее разделения на части задавалось условие симметрии.

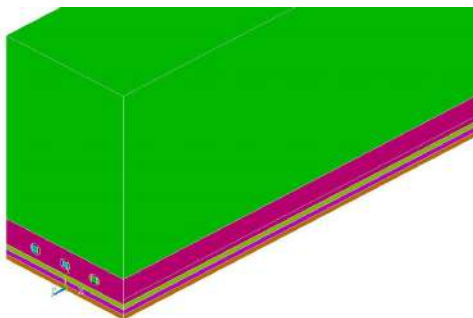


Рисунок 2 – Геометрическая модель железобетонной балки

В ходе выполнения расчетов получены распределения эквивалентных напряжений и деформаций арматуре и бетонной матрице. На рисунке 3 представлена схема распределения эквивалентных по Мизесу напряжений в бетонной матрице для случая отсутствия коррозии.

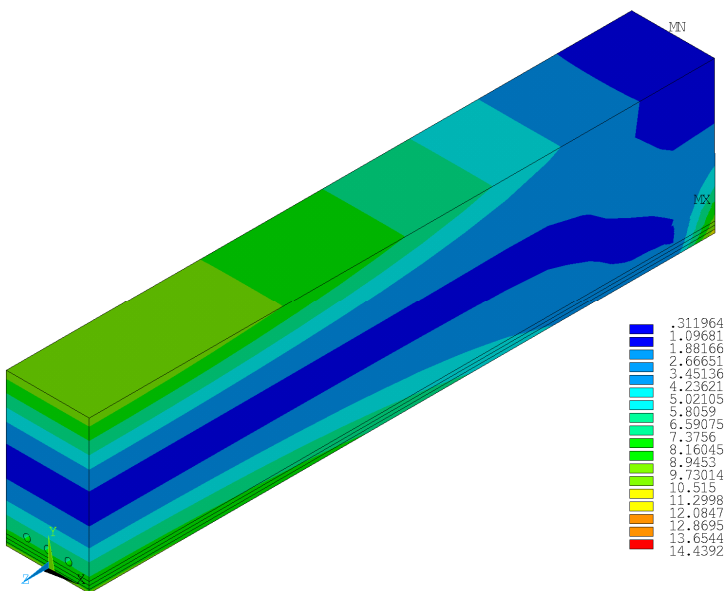


Рисунок 3 – Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений, МПа, в железобетонной балке без учета коррозии

Изменение механических характеристик слоев балки, связанное с протеканием процессов деградации бетона, не привело к существенному изменению картины распределения напряжений. Из приведенной схемы видно, что наибольшие напряжения возникают в месте опирания балки на основание. Именно там должны располагаться закладные детали. Максимальные напряжения в арматурных стержнях оказались приблизительно в пять раз большими, чем в бетоне.

На рисунке 4 приведена схема распределения сдвиговых напряжений в области расположения арматурных стержней. Как видно из приведенной шкалы напряжений, их значения оказались на порядок меньшими, чем эквивалентные напряжения. Замечено, что увеличение толщины подвергнутого коррозии бетона приводит к увеличению неравномерности напряжений вблизи арматурных стержней, которая приводит к образованию трещин.

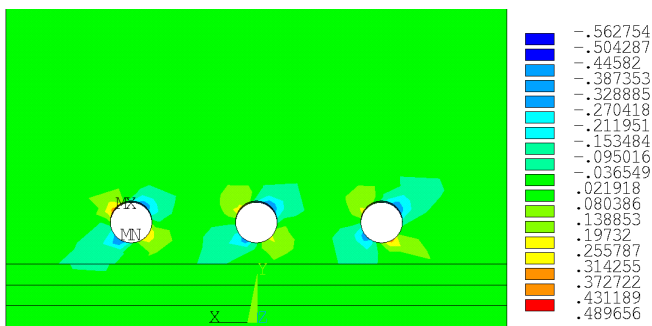


Рисунок 4 – Схема распределения сдвиговых напряжений  $\sigma_{xy}$  (значения в МПа)

Анализ деформаций балки (рисунок 5) показал, что их градиент растет при увеличении глубины проникновения коррозии. Изменение деформации, соответствующее состоянию, при котором она достигает арматурных стержней, может быть легко зафиксировано приборами. Таким образом, появляется возможность оперативного контроля состояния конструкции.

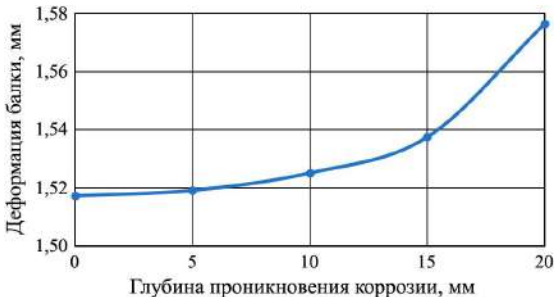


Рисунок 5 – Зависимость деформации балки от глубины проникновения коррозии

**Выводы.** В работе предложена методика конечно-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния армированной балки с учетом коррозии бетона. Полученные результаты показали, что напряжения в балке до тех пор, пока не начнется коррозия арматуры, меняются незначительно. В то же время, фиксируя деформации железобетонной балки, можно установить момент, при котором начинается развитие коррозии арматуры, что может быть учтено при анализе технического состояния здания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Corrosion-induced bond strength degradation in reinforced concrete – Analytical and empirical models / K. Bhargava [et al.] // *Nuclear Engineering and Design*. – 2007. – Vol. 237, is. 11. – P. 1140–1157.

2 **Васильев, А. А.** Оценка и прогнозирование технического состояния железобетонных конструкций с учетом карбонизации бетона : [монография] / А. А. Васильев. – Гомель : БелГУТ, 2019. – 215 с.

3 Analytical method for the evaluation of the residual service life of prestressed concrete beams subjected to corrosion deterioration / L. Franceschini [et al.] // *Structural Concrete*. – 2022. – Vol. 23, is. 1. – P. 121–137.

4 **Гузев, Е. А.** Интегральный метод оценки напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов в случае воздействия агрессивной среды и силовой нагрузки / Е. А. Гузев, В. М. Бондаренко, Н. В. Савицкий // *Коррозионная стойкость бетона и железобетона в агрессивных средах*. – М. : НИИЖБ, 1984. – С. 20–27.

5 **Бондаренко, В. М.** К вопросу об оценке силового сопротивления железобетона повреждению коррозионными воздействиями / В. М. Бондаренко, В. Н. Прохоров // *Известия вузов. Строительство*. – 1998. – № 3. – С. 30–41.

6 **Петров, В. В.** Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / В. В. Петров, И. Г. Овчинников, Ю. М. Шихов. – Саратов : Изд-во СГУ, 1987. – 228 с.

7 **Овчинников И. Г.** Работоспособность сталежелезобетонных элементов конструкций в условиях воздействия хлоридсодержащих сред / И. Г. Овчинников, В. В. Раткин, Р. Б. Гарибов. – Саратов : Изд-во СГУ, 2002. – 155 с.

8 **Овчинников, И. И.** Применение нелинейной деформационной модели для анализа поведения армированных пластин на упругом основании, взаимодействующих с хлоридсодержащей средой. Основные соотношения / И. И. Овчинников, И. Г. Овчинников // *Инженерно-строительный журнал*. – 2012. – № 1 (36). – С. 27–38.

9 **Tan, N. N.** An experimental study on the shear capacity of corroded reinforced concrete beams without shear reinforcement / N. N. Tan, N. T. Kien // *Journal of Science and Technology in Civil Engineering, NUCE*. – 2021. – Vol. 15, is. 1. – P. 55–66.

10 **Vidal, T.** Corrosion process and structural performance of a 17 year old reinforced concrete beam stored in chloride environment / T. Vidal, A. Castel, R. François // *Cement and Concrete Research*. – 2007. – Vol. 37, is. 11. – P. 1551–1561.

11 Finite element analysis of RC beams subjected to non-uniform corrosion of steel bars / R. Biswas [et al.] // *Fifth International Conference on Sustainable Construction Materials and Technologies (SCMT5)*. – Coventry : Coventry University, 2019. – 12 p.

12 Developing a three-dimensional finite element analysis approach to simulate corrosion-induced concrete cracking in reinforced concrete beams / Y. Z. Wang [et al.] // *Engineering Structures*. – 2022. – Vol. 257. – Article 114072. – 16 p.

13 A prediction model for concrete cracks due to chloride-induced corrosion / J. Wang [et al.] // *Advances in Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 2020. – Article 1049258. – 12 p.

14 **Jung, J.-S.** Structural performance degradation of corrosion-damaged reinforced concrete beams based on finite element analysis / J.-S. Jung, J.-W. Jeong, K.-S. Lee // *Applied Sciences*. – 2022. – Vol. 12. – Article 2090. – 24 p.

15 **Колчунов, В. И.** Напряженно-деформированное состояние нагруженного и коррозионно-поврежденного железобетона в зоне наклонных трещин / В. И. Колчунов, М. С. Губанова // *Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура*. – 2016. – № 2 (42). – С. 11–22.

16 **Тамразян, А. Г.** Напряженно-деформированное состояние коррозионно-поврежденных железобетонных элементов при динамическом нагружении / А. Г. Тамразян, Д. С. Попов // *Промышленное и гражданское строительство*. – 2019. – № 2. – С. 19–26.

17 **Ramos, É. S.** Numerical analysis of reinforced concrete beam subject to pitting corrosion / É. S. Ramos, R. Carrazedo // *Ambiente Construído*. – 2022. – Vol. 22, no. 1. – P. 201–222.

18 **Shimanovsky, A.** Influence of chloride corrosion on the stress-strain state of the reinforced concrete plate on an elastic base / A. Shimanovsky, S. Gridnev, I. Ovchinnikov // *Rural development 2017: Bioeconomy Challenges: Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Scientific Conference*. – Kaunas : Aleksandras Stulginskis University, 2017. – P. 417–422.

19 **Sumangala, K.** Finite element analysis of RC beam subjected to corrosion – A review / K. Sumangala, C. M. Flora Dani // *International Journal of Research in Engineering and Science*. – 2021. – Vol. 9, is. 6. – P. 59–63.

20 **Попеско, А. И.** Работоспособность железобетонных конструкций, подверженных коррозии / А. И. Попеско. – СПб. : СПб. гос. архит.-строит. ун-т, 1996. – 182 с.

21 **Овчинников, И. И.** Накопление повреждений в стержневых и пластинчатых армированных конструкциях, взаимодействующих с агрессивными средами / И. И. Овчинников, Г. А. Наумова. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2007. – 272 с.

*V. O. BANDARENKA, A. O. SHIMANOVSKY*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **ANALYSIS OF A REINFORCED BEAM DEFORMATION CONSIDERING THE PROTECTIVE LAYER CORROSION**

Deformation of a supported at the ends reinforced concrete beam under the bending load action is considered. The change in the protective layer mechanical characteristics associated with its corrosion is taken into account. On the basis of computer simulation, it is shown that a decrease in the concrete surface layer elasticity modulus leads to a significant increase in beam deformations, using their determination it is possible to obtain information on the damage degree for a building structural element.

**Keywords:** reinforced concrete beam, stress-strain state, protective layer corrosion.

Получено 07.11.2022



УДК 539.3

С. В. БОСАКОВ, Ю. Н. КОТОВ

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, НЕКОТОРЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОТОРОЙ ОГРАНИЧЕНЫ

Рассматривается задача расчета круглой пластинки на упругом основании способом Б. Н. Жемочкина при условии, что часть точек пластинки при её изгибе лежат в одной наклонной плоскости. Практическим аналогом этой задачи является пространственная деформация базы внецентренно сжатой металлической колонны кольцевого поперечного сечения, лежащей на бетонном основании. Приведен пример расчёта, а также графики контактных напряжений и перемещений, график распределения сил давления колонны на опорную плиту.

**Ключевые слова:** круглая пластинка, база металлической колонны, упругое основание, контактные напряжения, способ Жемочкина.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим круглую пластинку на упругом основании под действием внешней нагрузки, вызывающей такие перемещения некоторых точек пластинки, при которых они остаются лежать в одной наклонной плоскости (рисунок 1). Примем, что на контакте между пластинкой и упругим основанием возникают только нормальные напряжения, для пластинки справедливы гипотезы технической теории изгиба [1]. Требуется определить контактные напряжения между пластинкой и упругим основанием, вертикальные перемещения и усилия в ней.

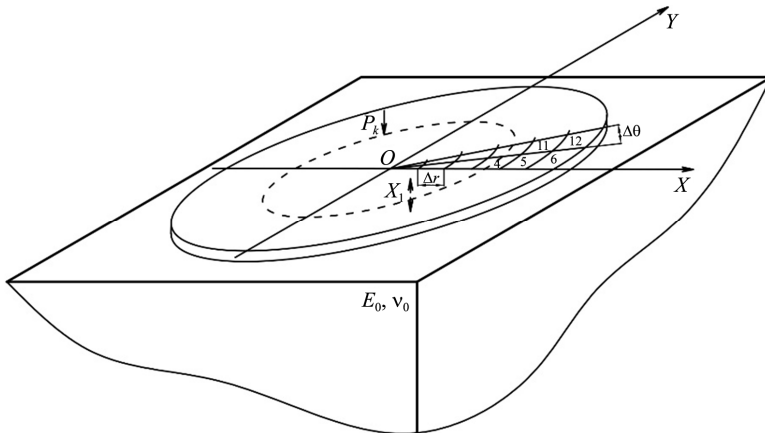


Рисунок 1 – Круглая пластинка на упругом основании

Решение поставленной задачи будем осуществлять способом Жемочкина [2, 3], который хорошо себя показал при решении подобных задач [4]. В статье [5] представлен обзор русскоязычных работ по применению метода Жемочкина для решения контактных задач, причем результаты расчетов данным методом хорошо согласуются с моделированием методом конечных элементов [6]. В работе [7] задача о поступательном перемещении штампа на плоском клине решена методом ортогональных многочленов. В статье [8] представлено решение для неосесимметричной круглой пластинки без действия на неё внешних сил. Расчет плит в виде сектора круга с произвольным углом или части кольца методом Жемочкина приведен в [9]. В статье [10] представлена методика расчета балочной плиты на упругом основании для случая расположения ряда точек плиты на одной прямой. В данной работе эта методика развивается на расчет круглой пластинки.

Разобьем пластинку на участки с размерами  $\Delta r$  и  $\Delta\theta$ . В центре каждого из них разместим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт пластинки с упругим основанием. Считаем, что сила в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений в пределах каждого участка. Внешние силы  $P_k$  неизвестны и вызывают вертикальные перемещения некоторых точек пластинки, которые лежат в одной наклонной плоскости. Решение задачи выполним, используя смешанный метод строительной механики [11]. Для этого мысленно разрежем все связи и в начале координат введем защемление.

Система уравнений для случая, при котором величина равнодействующей внешних сил равна  $R$ , имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \delta_{i,k} X_k + u + \varphi_x r_i \sin \theta_i + \varphi_y r_i \cos \theta_i + \sum_{k=1}^n y_{i,k} P_k = 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ -\sum_{k=1}^m X_k + \sum_{k=1}^n P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m r_k \sin \theta_k X_k + \sum_{k=1}^n r_{pk} \sin \theta_{pk} P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m r_k \cos \theta_k X_k + \sum_{k=1}^n r_{pk} \cos \theta_{pk} P_k = 0; \\ \sum_{k=1}^m F_{i,k} X_k - u_1 - \varphi_{1x} r_i \sin \theta_i - \varphi_{1y} r_i \cos \theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{k=1}^n P_k = R; \\ \sum_{k=1}^n r_{pk} \sin \theta_{pk} P_k = R a_x; \\ \sum_{k=1}^n r_{pk} \cos \theta_{pk} P_k = R a_y, \end{array} \right.$$

где  $m$  – число участков Жемочкина на пластинке;  $\delta_{i,k}$  – взаимное вертикальное перемещение разрезанной связи Жемочкина с номером  $i$  от  $X_k = 1$ ;  $X_k$  – неизвестная сила в связи Жемочкина на участке с номером  $k$ ;  $u$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного в начале координат пластинки защемления;  $r_k \sin \theta_k$ ,  $r_k \cos \theta_k$  – расстояния от защемления до места приложения силы  $X_k$ ;  $r_{pk} \sin \theta_{pk}$ ,  $r_{pk} \cos \theta_{pk}$  – расстояния от защемления до участков, где приложены сосредоточенные неизвестные силы  $P_k$ ;  $n$  – число неизвестных сил, приложенных к точкам пластинки с перемещениями, лежащими в одной наклонной плоскости;  $y_{i,k}$  – вертикальное перемещение (прогиб) центра участка Жемочкина с номером  $i$  на пластинке с защемлением от единичной силы, приложенной к центру участка плиты с номером  $k$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ( $k = 1, \dots, m$ ), определяется по формуле, приведенной в [11];  $P_k$  – неизвестная сила, приложенная к центру расположенного на пластинке участка с номером  $k$  ( $k = 1, \dots, m$ );  $u_1$ ,  $\varphi_{1x}$ ,  $\varphi_{1y}$  – неизвестные линейное и угловые перемещения наклонной плоскости, на которую действуют неизвестные силы;  $R$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  – равнодействующая внешних сил, абсцисса и ордината её приложения на балочной плите.

Выражение  $\delta_{i,k}$  включает два слагаемых. Первое представляет перемещение центра участка с номером  $i$  упругого основания от единичной силы, распределенной равномерно по участку с номером  $k$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ( $k = 1, \dots, m$ ). Определяется для упругого слоя по формуле

$$\delta_{i,k} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 r_k \Delta r \Delta \theta} F_{i,k} + y_{i,k},$$

где  $E_0$ ,  $\nu_0$  – упругие постоянные слоя; выражения для  $F_{i,k}$ ,  $y_{i,k}$  получаются по методике, представленной в работе [12], но здесь не приводятся из-за их громоздкости.

**Результаты расчета.** Расчет выполнялся для круглой металлической базы размерами опорной плиты  $0,7 \times 0,05$  м на бетонном фундаменте с упругими постоянными  $E_0 = 30600$  МПа,  $\nu_0 = 0,17$ . Колонна кольцевого сечения, диаметром  $0,35$  м опирается на базу симметрично. Контактная зона колонны с опорной плитой содержит 24 участка Жемочкина (рисунок 2).

Центры этих участков принадлежат базе, находятся в одной наклонной плоскости и имеют одинаковые угловые перемещения. Из-за действия асимметричной вертикальной нагрузки принято, что равнодействующая внешних сил  $R$  проходит через центр участка под № 4 (см. рисунок 2). Система разрешающих уравнений имеет 174-й порядок. После решения системы находились контактные напряжения и определялись перемещения. На рисунках 3, 4 приводятся графики перемещений и напряжений по характерным сечениям базы. Явно видна область контакта и внецентренного сжатия.

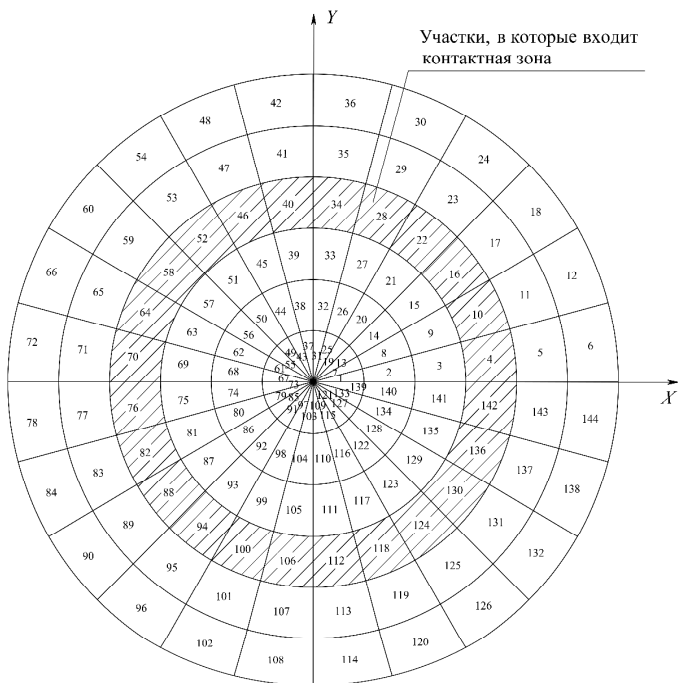


Рисунок 2 – Разбиение пластинки на участки Жемочкина

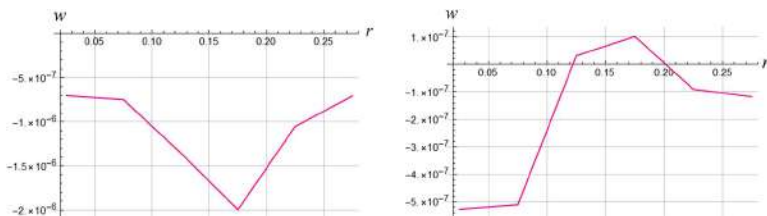


Рисунок 3 – Перемещения узлов базы по вертикальной оси (участки 1–6, 73–78)

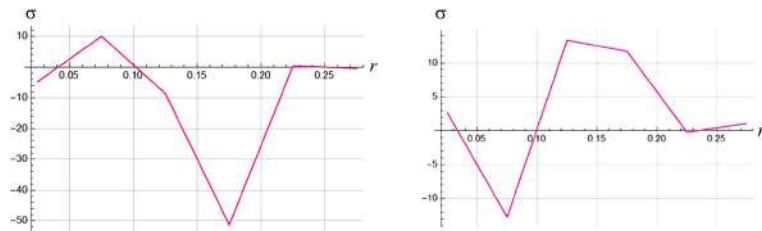


Рисунок 4 – Распределения контактных напряжений (участки 1–6, 73–78)

На рисунке 5 показаны 24 вертикальные силы, возникающие по окружности на контакте круглой колонны и базы в долях от величины  $R$  внецентренно приложенной равнодействующей силы. На графике распределения сил давления колонны на опорную плиту видно, что значения сил симметричны и имеют максимумы относительно нейтральной оси внецентренного сжатия. Все расчеты выполнялись в программном комплексе *Wolfram Mathematica 12.2* [13, 14].

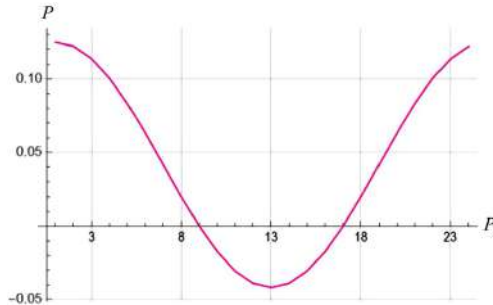


Рисунок 5 – График распределения сил давления колонны на опорную плиту по кольцевому сечению

**Заключение.** В работе изложена методика расчета круглой пластинки на упругом основании в полярных координатах способом Жемочкина при условии, что часть точек пластинки при изгибе лежат в одной наклонной плоскости. Данная методика позволяет найти вертикальные перемещения пластинки, распределение контактных напряжений и силы, обеспечивающие нахождение некоторых перемещений пластинки в одной плоскости. Предлагаемая методика может быть использована для разных моделей упругого основания и произвольном числе точек, лежащих в одной плоскости. Полученные результаты могут быть использоваться на стадии эксплуатации металлической базы колонны кольцевого поперечного сечения, кольцевых фундаментов дымовых труб ТЭЦ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 400 с.
- 2 Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М. : Стройиздат, 1962. – 239 с.
- 3 Ding, D. Problems in calculating the flexure of beams on elastic foundation / D. Ding // Canadian Journal of Civil Engineering. – 1987. – Vol. 14, no. 4. – P. 581–584.
- 4 Wang, Y. H. Beams and plates on elastic foundations: a review / Y. H. Wang, L. G. Tham, Y. K. Cheung // Progress in Structural Engineering and Materials. – 2005. – Vol. 7, no. 4. – P. 174–182.

5 **Босаков, С. В.** Способ Б. Н. Жемочкина в задачах устойчивости стержней на упругом основании / С. В. Босаков // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 4 (291). – С. 61–66.

6 Convergence of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method / V. A. Pshenichkina [et al.] // Actual Issues of Mechanical Engineering (AIME 2018) : Proceedings of the International Conference // Advances in Engineering Research. – 2018. – Vol. 157. – P. 520–523.

7 **Ворович, И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1974. – 456 с.

8 **Босаков, С. В.** Неосесимметричная контактная задача для кольцевой пластинки / С. В. Босаков, С. Генфуд // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 5. – С. 101–107.

9 **Босаков, С. В.** Способ Б. Н. Жемочкина в расчетах плит в форме части круга или кольца на произвольном упругом основании / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 1 (294). – С. 40–44.

10 **Босаков, С. В.** Статический расчет балочной плиты на упругом основании при условии ограничений на перемещения плиты / С. В. Босаков, Ю. Н. Котов // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 17–23.

11 **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М. : Высш. шк., 1991. – 439 с.

12 **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 128 с.

13 **Дьяконов, В. П.** Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК-Пресс, 2009. – 624 с.

14 **Половко, А. М.** Mathematica для студента / А. М. Половко. – СПб. : БХВ-Петербург. – 2007. – 368 с.

*S. V. BOSAKOV, Yu. N. KOTOV*

*Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus*

## **CONTACT PROBLEM IN POLAR COORDINATES FOR A ROUND PLATE FOR CONDITIONS OF ITS SOME DISPLACEMENT LIMITATION**

The problem of a round plate on an elastic foundation calculating by the method of B. N. Zhemochkin is considered for the case that some of the plate points at its bending lie in one inclined plane. A practical analogue of this problem is the spatial deformation of the base of an eccentrically compressed metal column with an annular cross section lying on a concrete base. An example of calculation is given, as well as the graphs of contact stresses and displacements and the distribution diagram for pressure forces of the column on the base plate.

**Keywords:** round plate, metal column foundation, flexible foundation, contact stresses, Zhemochkin's method.

Получено 14.09.2022

УДК 629.42

К. А. БОЧКОВ<sup>1</sup>, Д. В. КОМНАТНЫЙ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЯКОРЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КОНТАКТОРА ЛОКОМОТИВА ПРИ ЕГО ОТКЛЮЧЕНИИ

Скорости поворота якоря и расхождения контактов электроаппаратов являются важным фактором, определяющим возникновение повторных зажиганий дуги. Рассмотрено движение якоря при отключении контактора, который применяется в цепях управления тягового подвижного состава. Получено решение уравнения движения с применением кусочно-линейной аппроксимации механической характеристики контактора. Предлагаемый подход позволяет получить аналитические зависимости, характеризующие изменение угла поворота якоря контактора и его угловой скорости во времени, а также скорости расхождения контактов, которые могут быть использованы при анализе уровня создаваемых при отключении контактора помех.

**Ключевые слова:** контактор, уравнение движения якоря, повторное зажигание дуги, кусочно-линейная аппроксимация, метод неопределенных коэффициентов.

В цепях управления электроприводом современного тягового подвижного состава широко используются электромагнитные электромеханические контакторы [1]. Электромагнитные контакторы имеют большую индуктивность катушек, поэтому в процессе коммутации возникают электромагнитные кондуктивные и некондуктивные помехи в форме пачек наносекундных импульсов [2]. Помехи такого типа вызывают отказы и сбои микроэлектронных устройств, что может повлечь за собой недопустимое снижение уровня безопасности движения поездов. На борту подвижного состава современных конструкций эксплуатируется большое количество микроэлектронных и микропроцессорных систем, которые обеспечивают безопасность движения. К ним относятся автоматическая локомотивная сигнализация, комплексные локомотивные устройства обеспечения безопасности, системы автоведения поезда, системы отображения информации для машиниста, системы поездной связи и др. Поэтому требуются методы прогнозирования воздействия указанных типов помех на микроэлектронную аппаратуру подвижного состава и предварительного расчета параметров указанных помех.

Согласно [3] при размыкании контактора, находящегося под током, происходит рассеивание накопленной в катушке контактора энергии магнитного поля по цепи, включающей индуктивность катушки, омическое сопротивление обмотки и паразитную емкость конструкции (рисунок 1). При этом коммутуются достаточно высокие напряжения и токи.

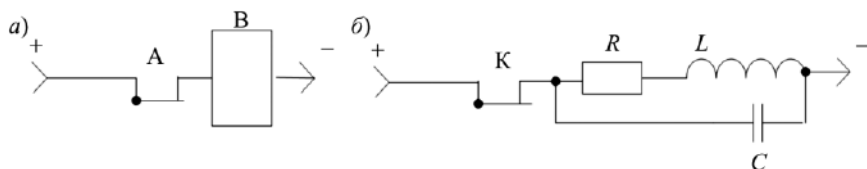


Рисунок 1 – Цепь разряда катушки контактора (а) и ее схема замещения (б)

Если напряжение на контакте достигает пробивного напряжения воздушного промежутка, на контактах возникает дуговой разряд. Считается, что паразитная емкость мгновенно разряжается через канал дуги, после чего процесс зарядки емкости повторяется. Так как якорь и контакты при этом продолжают перемещаться, воздушный промежуток между ними увеличивается и напряжение пробоя промежутка возрастает. Следующий пробой промежутка наступает при достижении напряжением на контакте большей величины. Пробои продолжают до тех пор, пока воздушный промежуток не увеличится настолько, что для его пробоя будет недостаточно создаваемого на контактах напряжения [2, 3].

Моменты зажигания дуги являются случайными величинами, так как зависят от множества факторов, одним из которых является скорость расхождения контактов. Тем не менее в литературных источниках не представлен расчет динамики процесса размыкания контакторов [4]. Что, в свою очередь, не позволяет достоверно проанализировать один из факторов, определяющих процесс возникновения помех в цепях управления тяговым подвижным составом.

Поэтому целью представленной работы является разработка методики анализа движения якоря контактора при его отключении, которая позволяет

с достаточной степенью точности учесть особенности конструкции и механических характеристик контактора.

Конструкция рассматриваемого аппарата представлена на рисунке 2 [4]. При его отключении силовые контакты размыкаются под действием трех пружин.

Движение якоря контактора характеризуется углом поворота якоря относительно катушки. Для упрощения расчетов принимается, что силы упругости пружин и сила тяжести якоря приведены к эквивалентным силам относительно выбранного расстояния от точки крепления якоря [5]. Поэтому при

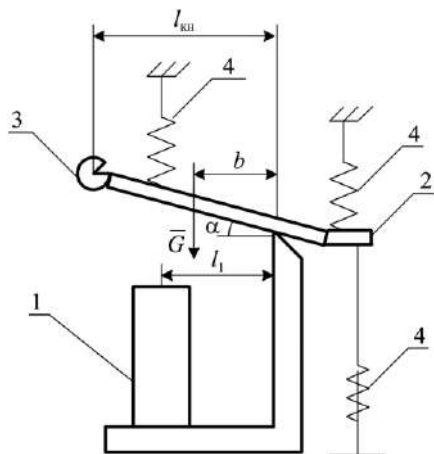


Рисунок 2 – Конструкция контактора:

1 – катушка электромагнита; 2 – якорь контактора;  
3 – контакт силовой цепи; 4 – пружины



записи уравнения движения якоря рассматриваются приведенные силы и их моменты. Уравнение вращательного движения якоря записывается в виде [6]

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_G - M_{\text{пр}}, \quad (1)$$

где  $J$  – момент инерции якоря,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $\alpha$  – угол поворота якоря, рад;  $t$  – время движения, с;  $M_G$  – момент приведенной силы тяжести, Н·м;  $M_{\text{пр}}$  – момент приведенной силы упругости пружин, Н·м.

Моменты сил вычисляются по формулам [4]

$$M_G = mgb; \quad M_{\text{пр}} = F_{\text{пр}}(\delta)l_3, \quad (2)$$

где  $m$  – масса якоря, кг;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  $b$  – плечо силы тяжести, м;  $F_{\text{пр}}$  – приведенная сила упругости пружин контактора, Н;  $\delta$  – зазор между катушкой и якорем контактора, м;  $l_3$  – плечо приведенной силы упругости пружин, м.

Зависимость приведенной силы упругости пружины от зазора между катушкой и якорем реле  $\delta$  определяется механической характеристикой контактора (рисунок 3) [4]. Так как приближенно  $\alpha \approx \delta/l_1$ , где  $l_1$  – плечо силы тяги электромагнита, то легко получить зависимость рассматриваемой силы от угла поворота якоря.

Таким образом, уравнение (1) после подстановки выражений (2) приобретает вид

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -F_{\text{пр}}l_3 + mgb. \quad (3)$$

Из рисунка 3 следует, что полученное уравнение (3) является существенно нелинейным. Поскольку механическая характеристика является ломаной линией, то удобно применить метод кусочно-линейной аппроксимации, который успешно апробирован на решениях различных нелинейных задач механики [7–9].

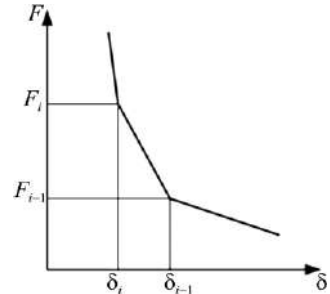


Рисунок 3 – Механическая характеристика контактора

Каждый отрезок механической характеристики на рисунке 3 может быть описан уравнением прямой линии, составленным по двум точкам [10].

$$F = -k_2 \delta + k_3 = -k_2 l_1 \alpha + k_3,$$

где  $k_2 = \frac{F_i - F_{i-1}}{\delta_i - \delta_{i-1}}$ ;  $k_3 = F_{i-1} - \delta_{i-1} \frac{F_i - F_{i-1}}{\delta_i - \delta_{i-1}}$ .

Тогда для указанного участка механической характеристики уравнение движения якоря (3) примет вид

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -(-k_2 l_1 \alpha + k_3)l_3 + mgb.$$

После преобразований оно приводится к виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - C_2\alpha = C_4, \quad (4)$$

где

$$C_2 = \frac{l_3 k_2 l_1}{J}, \quad C_4 = \frac{mgb}{J} - \frac{l_3 k_3}{J}.$$

Решение полученного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (4) ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [11].

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - C_2\alpha = 0$$

имеет вид

$$\alpha_{\text{общ}} = A_1 e^{-\sqrt{C_2}t} + A_2 e^{+\sqrt{C_2}t}. \quad (5)$$

В правой части уравнения (6) константа, поэтому частное решение

$$\alpha_{\text{час}} = D_1. \quad (6)$$

Значение  $D_1$  находится методом неопределенных коэффициентов [8] путем подстановки выражения (6) в (4), что дает

$$D_1 = \frac{-C_4}{C_2}.$$

При назначении начальных условий принимается во внимание, что якорь контактора начинает движение, когда магнитный поток в катушке достигает нуля. Отсчет времени начинается именно с этого момента. Поэтому начальные условия представляются выражениями

$$\alpha = \frac{\delta_0}{l_1}; \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

где  $\delta_0$  – зазор между притянутым якорем и катушкой контактора, м.

При дальнейшем движении якоря должны выполняться условия сопряжения, которые заключаются в том, что как угол поворота якоря  $\alpha$ , так и его

угловая скорость  $\frac{d\alpha}{dt}$  не изменяются при переходе с  $i$ -го участка механической

характеристики на  $(i+1)$ -й. Из этих условий определяются константы интегрирования в (5) для описания движения, при котором сила противодействия пружины соответствует участку  $i+1$  механической характеристики. На основании выражений (5) и (6) записывается система уравнений для нахождения констант интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , соответствующих рассматриваемому участку:

$$A_1 e^{-\sqrt{C_2} t_c} + A_2 e^{+\sqrt{C_2} t_c} = \alpha_c - D_1; \quad (7)$$

$$A_1 \sqrt{C_2} e^{+\sqrt{C_2} t_c} - \sqrt{C_2} A_2 e^{-\sqrt{C_2} t_c} = \frac{d\alpha}{dt_c}.$$

В этих уравнениях значения времени перехода  $t_c$ , угла поворота и угловой скорости якоря устанавливаются из условия достижения якорем зазора, соответствующему значению на границе  $i$ -го участка механической характеристики. Вычисление момента перехода требует решения трансцендентного алгебраического уравнения вида (7), что возможно сделать только численно.

Предполагается, что в момент времени, соответствующий максимальному углу поворота якоря  $t_m$ , возвратная пружина максимально сжимается, и скорость якоря гасится вследствие неупругого удара. Этот процесс в предлагаемом методе расчета не рассматривается.

Изменение скорости движения контакта рассматривается в промежутке времени от 0 до  $t_m$  для каждого участка механической характеристики, на котором скорость движения контакта дается формулой

$$v = l_{\text{кн}} \frac{d\alpha}{dt} = l_{\text{кн}} \left( A_1 \sqrt{C_2} e^{+\sqrt{C_2} t} - \sqrt{C_2} A_2 e^{-\sqrt{C_2} t} \right),$$

где  $l_{\text{кн}}$  – длина плеча якоря, на котором расположен контакт (рисунок 2).

Таким образом, использование кусочно-линейной аппроксимации механической характеристики контактора позволяет свести решение нелинейного дифференциального уравнения движения якоря контактора к последовательному решению ряда линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения имеют решения одинаковой математической формы, которые могут быть найдены аналитически. Следовательно, рассмотренный способ расчета движения якоря контактора дает возможность анализа одного из факторов, влияющих на возникновение повторного зажигания дуги на контактах при отключении контактора.

Разработанная методика позволяет повысить достоверность анализа процесса возникновения помех в контакторе, которые могут вызывать отказы и сбои аппаратуры обеспечения безопасности движения поездов. Для практического применения целесообразно, чтобы такой анализ производился на основе моделей, сочетающих достаточную точность и сравнительно несложный математический аппарат. Первое позволяет обеспечить требуемый уровень безопасности, второе – минимальные затраты времени на анализ конструкции контактора. Поэтому рассмотренный в статье способ может найти применение при разработке мероприятий по повышению электромагнитной совместимости систем управления и систем обеспечения безопасности тягового подвижного состава.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 **Тетерко, О. А.** Результати експлуатаційних випробувань відновлених електричних контактів контакторів ЕКГ-8Ж електровозів змінного струму / О. А. Тетерко // Електротехніка і електромеханіка. – 2007. – № 4. – С. 53–56.
- 2 **Плакс, А. В.** Системы управления электрическим подвижным составом / А. В. Плакс. – М. : Маршрут, 2005. – 360 с.
- 3 **Бочков, К. А.** Теория и методы контроля электромагнитной совместимости микроэлектронных систем обеспечения безопасности движения поездов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.22.08 / К. А. Бочков ; Моск. ин-т инженеров железнодорожного транспорта. – М., 1993. – 381 с.
- 4 **Логинава, Е. Ю.** Электрическое оборудование локомотивов / Е. Ю. Логинава. – М. : Учеб.-метод. центр по образованию на ж.-д. транспорте, 2014. – 576 с.
- 5 **Комнатный, Д. В.** Расчет движения якоря электромагнитного реле первого класса надежности / Д. В. Комнатный // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 128–133.
- 6 **Qi, L.** Eliminating the contact bounce of AC contactor based on speed feedback // L. Qi, M. Zong, X. Wang International Journal of Circuit Theory and Applications. – 2021. – Vol. 49, is. 3. – P. 731–745.
- 7 **Dai, L.** Nonlinear Dynamics of Piecewise Constant Systems and Implementation of Piecewise Constant Arguments / L. Dai. – New York : World Scientific, 2008. – 328 p.
- 8 **Klecza, M.** Local and global stability of a piecewise linear oscillator / M. Klecza, E. Kreazer, W. Schiehlen // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences. – 1992. – Vol. 338. – P. 533–546.
- 9 **Svahn, F.** On the stability and control of piecewise-smooth dynamical systems with impacts and friction : Doctoral Thesis / F. Svahn. – Stockholm : KTH, 2009. – 53 p.
- 10 **Гусак, А. А.** Линии и поверхности / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск : Выш. шк., 1985. – 220 с.
- 11 **Пономарев, К. К.** Специальный курс высшей математики / К. К. Пономарев. – М. : Высш. шк., 1974. – 376 с.

*K. A. BOCHKOV<sup>1</sup>, D. V. KOMNATNY<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

<sup>2</sup>*Gomel State Technical University named by P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus*

### **MATHEMATICAL MODELING FOR THE MOVEMENT OF ARMATURE OF LOCOMOTIVE ELECTROMAGNETIC CONTACTOR AT ITS DISCONNECTION**

The armature rotational velocity and the rapidity of the electric devices' contacts divergence are an important factor determining the occurrence of re-ignitions of the arc. There is considered the armature movement for the case when the contactor is turned off, this is used in the control circuits of railway rolling stock. The motion equation solution is obtained using a piecewise linear approximation of the contactor mechanical characteristic. The proposed approach makes it possible to obtain analytical dependences that characterize the change in the rotation angle of the contactor armature and its angular velocity over time, as well as the rapidity of contacts divergence, that can be used in analyzing the level of interferences generated when the contactor is turned off.

**Keywords:** contactor, armature motion equation, arc re-ignition, piecewise linear approximation, method of uncertain coefficients.

Получено 22.10.2022

УДК 539.3:004.94

*А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК*

*Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь*

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦОВ С СЕРПОВИДНЫМИ ЗОНАМИ ИЗМЕНЕННОЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ**

В статье исследуется деформирование образцов с зонами измененной структуры материала, которые возникают после термообработки локальным высокоэнергетическим источником нагрева. Проведено компьютерное моделирование растяжения образцов с зонами серповидной формы по всей длине и на ее части. Исследовано влияние механических характеристик материала зон термообработки на напряженно-деформированное состояние. Рассмотрен случай двух параллельных зон для разных их размеров и расстояний между ними. Определены коэффициенты концентрации напряжений в окрестности термообработанных областей.

**Ключевые слова:** зона измененной структуры, напряженно-деформированное состояние, коэффициент концентрации напряжений, модуль упругости, коэффициент Пуассона.

**Введение.** Известно, что использование лазерного, плазменного и других высокоэнергетических методов термообработки позволяет улучшить многие эксплуатационные показатели: механические характеристики, износостойкость, теплостойкость, коррозионную стойкость, уменьшить остаточные напряжения в упрочненном слое и др. Упрочнение металла при закалке без оплавления в этих случаях сопровождается возникновением областей с измененной структурой исходного материала – зоны целевого воздействия и окружающей ее зоны термического влияния (зоны отпуски). Они на практике представляют собой «дорожку», возникающую после воздействия на образец движущимся лазером или плазменной струей (дугой), и влияют на локальное напряженно-деформированное состояние (НДС) материала в своей окрестности [1–4]. Такое влияние можно охарактеризовать либо коэффициентами концентрации напряжений, либо параметрами, используемыми в механике разрушения, например, коэффициентами интенсивности напряжений. Имеются соответствующие аналитические и численные решения, приведенные, например, в [4–9].

При поверхностной закалке в деталях протекают сложные изменения фазового и структурного состояния металла ввиду локального и неравномерного нагрева. Высокие скорости подвода энергии определяют особенности протекания фазовых превращений как при нагреве, так и при охлаждении, а наличие градиента температур и напряжений – различие в процессах фазовых и структурных превращений по участкам зоны термического влия-

ния [10]. Результаты исследований [11–14] показывают, что структура металла в зоне термического влияния заметно отличается как от структуры зоны обработки, так и от структуры основного материала, а управление ее свойствами ограничено в связи с отсутствием возможности непосредственного сопутствующего воздействия на структурообразование в этой области. Данные о свойствах материала в указанных местах ограничены, что является существенным недостатком при прогнозировании поведения термообработанного объекта в разнообразных условиях его эксплуатации. Наиболее важными механическими характеристиками материала являются модуль упругости, коэффициент Пуассона, пределы прочности и текучести. Однозначных аналитических зависимостей, определяющих связи между ними, не существует, поэтому после сосредоточенной высокоэнергетической обработки материала имеется неопределенность в их значениях [4].

Исследованию НДС при воздействии на материалы локальных источников тепла посвящен ряд работ [11–20]. Например, в [11] разработана новая методика назначения режимов поверхностной закалки с использованием концентрированных источников энергии, отличающаяся от известных тем, что режимы термообработки устанавливаются с учетом не только задаваемой глубины и твердости упрочненного слоя, но и характера распределения остаточных напряжений по глубине материала. В работе [12] выполнен анализ влияния технологических особенностей кратковременных локальных термических воздействий на характер структурных изменений и степень деградации свойств машиностроительных материалов, установлены закономерности и взаимосвязи между технологическими факторами, определяющими особенности кратковременных локальных термических воздействий на исследуемые стали и характером структурных изменений и их свойств. В статье [13] создана математическая модель для определения НДС элементов составных конструкций при воздействии локального источника нагрева. В работе [14] представлены результаты исследований влияния процесса лазерной обработки на микроструктуру и распределение элементов между различными структурными составляющими, а также на формирование зоны термического влияния. Исследование влияния режимов термообработки на структуру и механические характеристики стали пониженной прокаливаемости 60ПП проведено в [15]. В статье [16] изучено, к каким изменениям механических свойств и микроструктуры стали ST 37-2 приводит термическая обработка (отжиг, нормализация, закалка, отпуск) в электропечи.

Анализ литературных источников показывает, что проводимые отечественными и зарубежными учеными исследования в этой области направлены в основном на установление механических характеристик термообработанного материала, а проблемам, касающимся изучения иных свойств материала обработанной области, уделяется недостаточное внимание. Особенности структуры и свойств зоны термического влияния рассматриваются

в литературе, как правило, для сварных соединений [10, 17, 18]. Кроме того, имеется лишь незначительная информация об изменении механических характеристик зон материала после термообработки, возникающих при использовании высокоэнергетических методов сосредоточенного воздействия.

Результаты экспериментальных исследований и ряд работ, например [21], показали, что глубина поверхностной закалки невелика по сравнению с толщиной детали. В этом случае оценку влияния параметров материала с зонами измененной структуры целесообразно проводить при отсутствии градиентов напряжений, обеспечивая однородность НДС растянутого образца.

**Постановка задачи.** Для исследования влияния изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона двух новообразованных после термообработки областей по сравнению с характеристиками основного материала проведено конечно-элементное моделирование растяжения образца с зоной обработанного материала, которая имеет сечение в форме полукруга [22], окруженного промежуточной серповидной зоной термического влияния (рисунок 1).

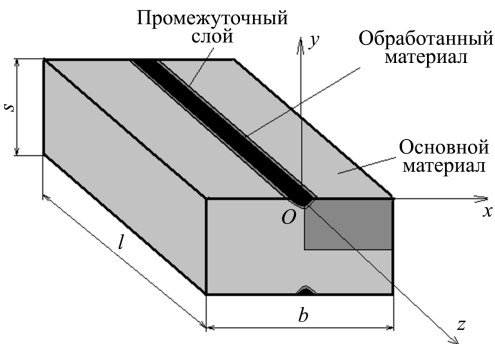


Рисунок 1 – Образец и выделенный элемент

Ввиду симметрии задачи при моделировании рассматривается выделенная четверть образца (рисунок 2). В качестве расчетного пакета использован программный комплекс *ANSYS Workbench 2019 R2*.

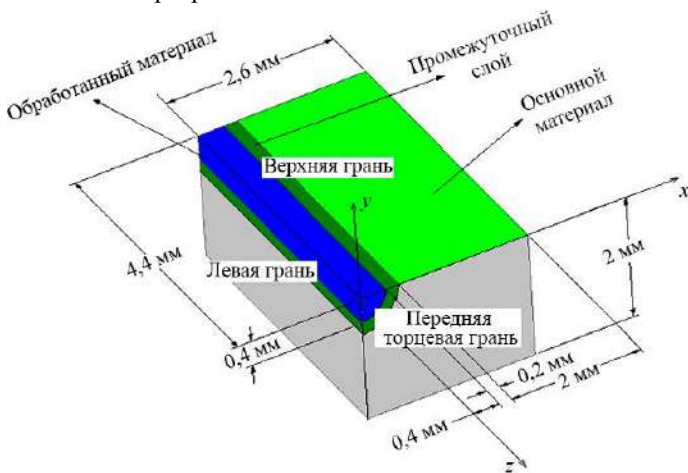


Рисунок 2 – Расчетная схема выделенной области

Левый верхний угол радиусом 0,4 мм занимает область обработанного материала. Этот объем окружен переходной зоной толщиной 0,2 мм. Все остальное пространство занято исходным (основным) материалом. Габаритные размеры модели 2,0×2,6×4,4 мм. Средствами программного обеспечения задавалась автоматическая генерация сетки параллелепипедами, а там, где это оказалось невозможным, – трехгранными призмами.

Длина зон измененной структуры принята равной длине образца (рисунок 3, а) или ее половине (рисунок 3, б).

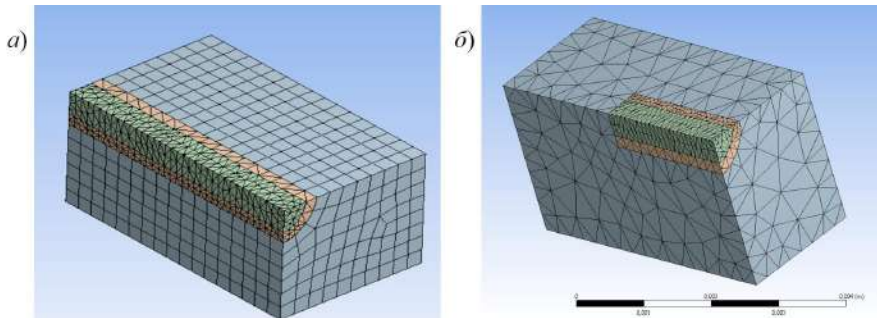


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель части образца

Граничные условия задавались в виде ограничения перемещений: в направлении оси  $Oy$  ( $v_y = 0$ ) – для точек верхней и нижней граней тела, по оси  $Oz$  ( $w_z = 0$ ) – для задней торцевой грани, по  $Ox$  ( $u_x = 0$ ) – для левой грани.

Для правой продольной грани задавались граничные условия двух видов:

- 1)  $u_x \neq 0$  – имитация стержневого образца;
- 2)  $u_x = 0$  – имитация стесненной деформации.

Принято, что модуль упругости исходного материала  $E = E_{bas} = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu = \mu_{bas} = 0,3$ . Модули упругости промежуточного  $E_{int}$  и обработанного  $E_{pr}$  слоев и их коэффициенты Пуассона  $\mu_{int}$ ,  $\mu_{pr}$  варьировались, но считалось, что после обработки материал тела во всех его точках сохраняет упругие свойства и имеет одинаковую температуру, что соответствует большинству реализующихся случаев эксплуатации деталей машин и механизмов. Тепловой режим принимался установившимся.

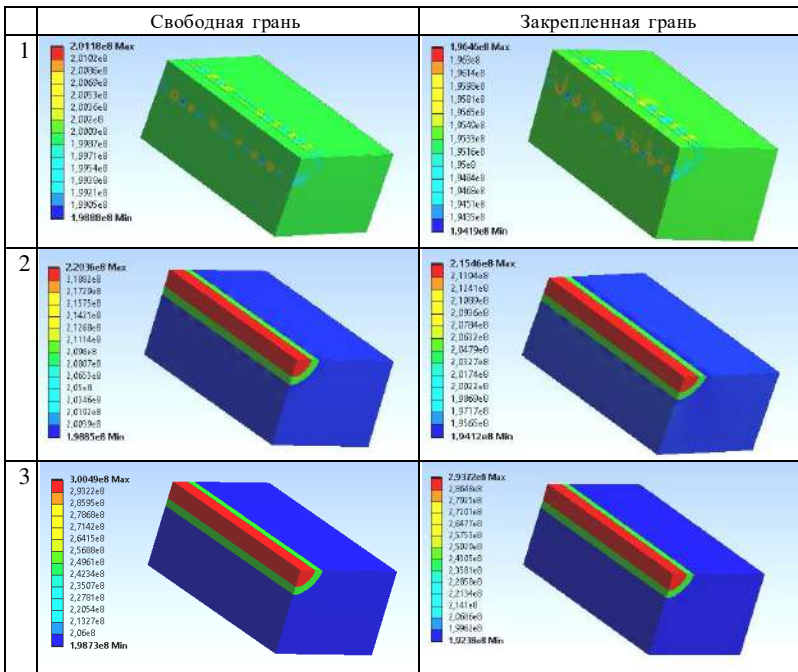
Нагружение осуществлялось заданием перемещения передней торцевой грани на величину  $w_z = 0,0044$  мм, которая определена из условия равенства осевых напряжений  $\sigma_z = 200$  МПа для однородного стержня. Проведенные расчеты показали, что выбранная длина стержня достаточна для выравнивания напряженного состояния по объему и позволяет пренебречь влиянием на него условий на границах.

**Результаты исследования НДС для образцов с одной дорожкой.** Расчет моделей образцов с двумя зонами измененной структуры проводился



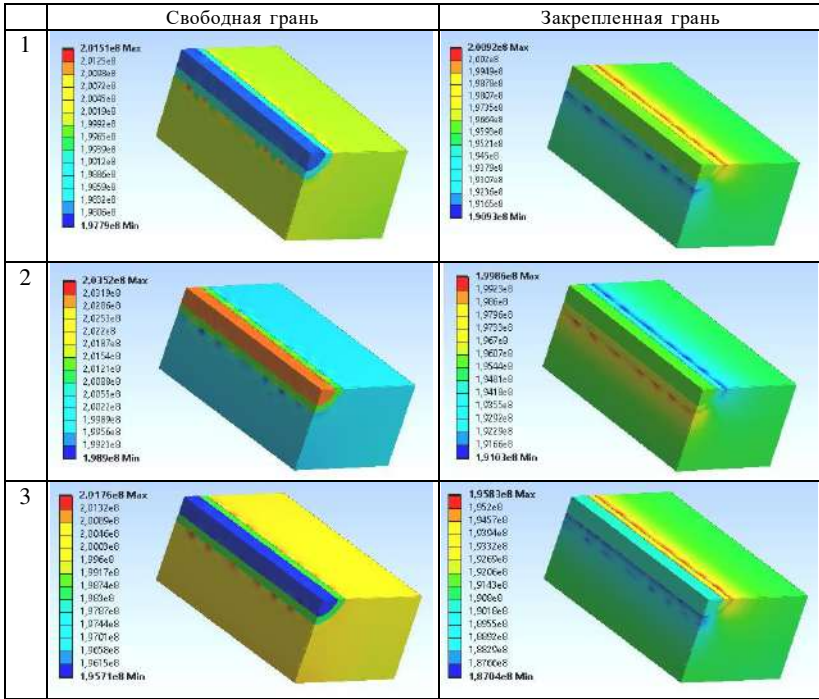
для отношений модулей упругости и коэффициентов Пуассона обработанного материала к аналогичным характеристикам исходного, находящихся в пределах  $K_E = E_{pr} / E_{bas} = 0,5 \dots 1,5$ ;  $K_\mu = \mu_{pr} / \mu_{bas} = 0,6 \dots 1,5$  соответственно. На рисунках 4, 5 и в таблице 1 приведены эквивалентные по Мизесу  $\sigma_{эКВ}$  и продольные  $\sigma_z$  напряжения в объеме материала для разных характеристик зон материала образцов, что позволяет определить влияние этих параметров на изменение НДС материала.

Представлены средние величины напряжений в соответствующих элементах, которые незначительно отличаются от максимальных, наблюдаемых в угловых точках, поскольку размеры конечных элементов малы по сравнению с габаритными размерами тела. Главные напряжения  $\sigma_1$  близки к продольным  $\sigma_z$ , поэтому их уровни не выведены отдельно. Отметим, что приведенные в одной строке таблицы 1 минимальные и максимальные значения эквивалентных по Мизесу и продольных напряжений относятся к разным зонам.



- 1)  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 200$  ГПа,  $E_{pr} = 200$  ГПа;  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 210$  ГПа,  $E_{pr} = 220$  ГПа;  
 2)  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 250$  ГПа,  $E_{pr} = 300$  ГПа

Рисунок 4 – Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений  $\sigma_{эКВ}$  в образце, толщина промежуточного слоя 0,2 мм,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$



1)  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,33$ ,  $\mu_{pr} = 0,36$ ; 2)  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,27$ ,  $\mu_{pr} = 0,24$ ; 3)  $\mu_{bas} = 0,21$ ,  $\mu_{int} = 0,24$ ,  $\mu_{pr} = 0,3$

Рисунок 5 – Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений  $\sigma_{эkv}$  в образце при толщине промежуточного слоя 0,2 мм и  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа

Таблица 1 – Напряжения при структуре материала, измененной на половине длины

Модуль упругости, ГПа			Коэффициент Пуассона			Правая грань свободна ( $u_x \neq 0$ )		Правая грань закреплена ( $u_x = 0$ )	
$E_{bas}$	$E_{int}$	$E_{pr}$	$\mu_{bas}$	$\mu_{int}$	$\mu_{pr}$	Эквивалентные по Мизесу напряжения, МПа	Продольные напряжения, МПа	Эквивалентные по Мизесу напряжения, МПа	Продольные напряжения, МПа
						$\sigma_{эkv}^{min} / \sigma_{эkv}^{max}$	$\sigma_z^{min} / \sigma_z^{max}$	$\sigma_{эkv}^{min} / \sigma_{эkv}^{max}$	$\sigma_z^{min} / \sigma_z^{max}$
200	200	200	0,30	0,30	0,30	181,58/208,86	176,49/214,16	173,42/247,69	193,04/245,02
200	210	220	0,30	0,30	0,30	190,41/218,80	184,35/219,33	178,96/248,03	201,00/250,77
200	220	240	0,30	0,30	0,30	193,11/237,09	192,21/237,51	182,39/257,89	209,09/269,45
200	250	300	0,30	0,30	0,30	184,82/290,65	182,45/291,64	181,40/312,87	203,20/326,39
200	200	200	0,30	0,33	0,36	179,39/213,74	178,52/215,34	176,27/263,67	197,66/255,99
200	200	200	0,30	0,36	0,42	175,75/230,13	181,10/233,82	164,08/281,54	196,96/276,40
200	200	200	0,30	0,27	0,24	184,16/210,68	174,88/213,26	171,09/233,64	189,08/235,90
200	200	200	0,30	0,24	0,21	182,24/215,89	173,86/212,66	169,21/230,70	185,18/236,73
200	200	200	0,21	0,24	0,30	178,97/219,00	180,06/214,64	168,98/251,26	189,58/231,09

Результаты исследований показали, что любое изменение характеристик материала обработанной и промежуточной зон по отношению к основному материалу приводит к изменению НДС образцов. Максимальные напряжения возникают как в обработанном слое, так и в основном материале или промежуточной зоне. При  $E_{pr} > E_{bas}$  возрастают максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу  $\sigma_{эКВ}$  и продольные напряжения  $\sigma_z$ , в то время как возникающие на границе переходной зоны и основного материала или в основном материале минимальные значения  $\sigma_{эКВ}$  и  $\sigma_z$  этой закономерности не подчиняются.

**Исследование влияния характеристик обработанной и промежуточной зон на коэффициент концентрации напряжений.** Результаты расчетов показали, что отклонение коэффициента Пуассона обработанной зоны от коэффициента  $\mu$  для основного материала в любую сторону ведет к возрастанию максимальных напряжений, но по-разному может сказаться на уровне минимальных. На рисунках 6, 7 приведены значения отношений  $\sigma_z^{\max}$  к фиксированному значению  $\sigma_N = 200$  МПа, которые представляют собой коэффициенты концентрации напряжений для данной задачи  $K_\sigma = \sigma_z^{\max} / \sigma_N$ , в зависимости от отношений  $K_E$  или  $K_\mu$ . При расчетах принималось  $\mu_{int} = (\mu_{bas} + \mu_{pr}) / 2$ .

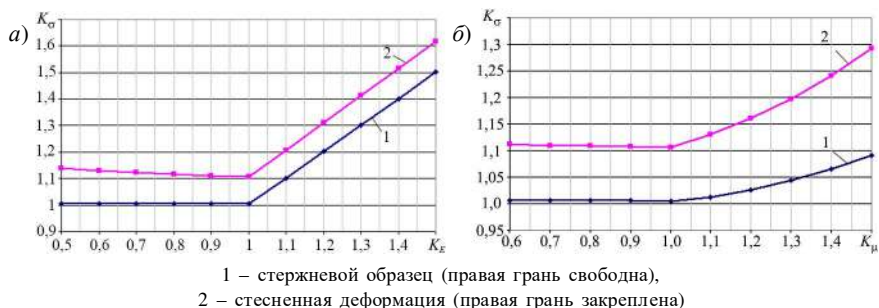


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента концентрации напряжений от соотношений  $K_E$  (а) или  $K_\mu$  (б) для образца с зонами измененной структуры по всей длине

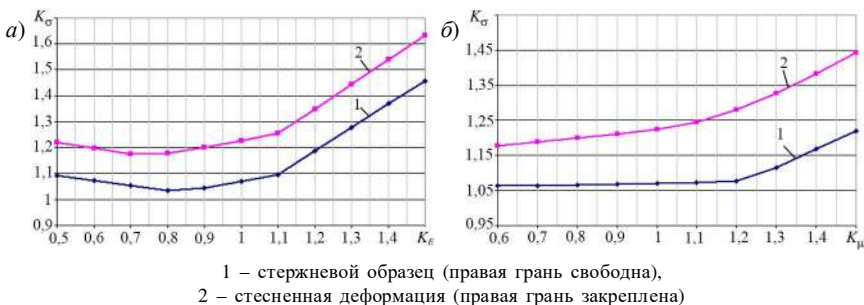
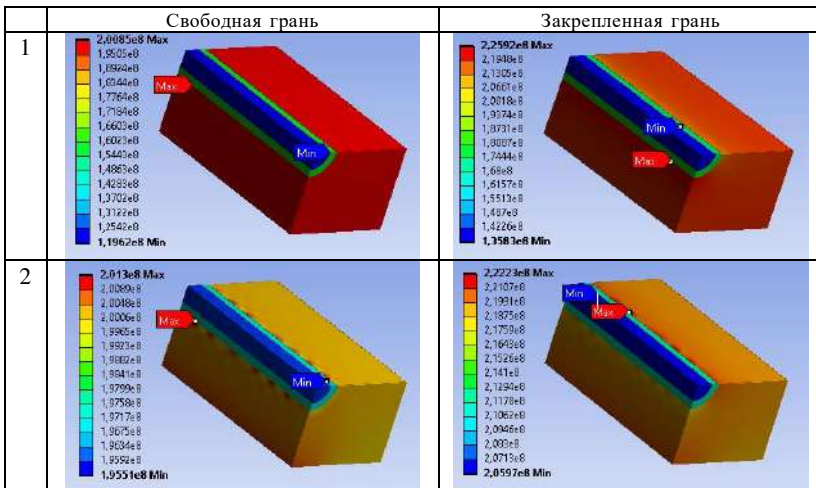


Рисунок 7 – Зависимость коэффициента концентрации напряжений от  $K_E$  (а) или  $K_\mu$  (б) для образца с зонами измененной структуры на половине длины

Графики показывают, что в случае наличия дорожки по всей длине образца для материала с  $E_{pr} < E_{bas}$  при стесненной деформации (см. рисунок 6, а, кривая 2) коэффициент концентрации напряжений медленно снижается до величины  $K_\sigma = 1,1058$ , затем линейно возрастает с ростом модуля упругости обработанной зоны. В случае стержневого образца (см. рисунок 6, а, кривая 1) коэффициент концентрации напряжений на интервале  $0,5 \leq K_E \leq 1$  медленно возрастает (на 0,9 %), при  $1 \leq K_E \leq 1,5$  растет линейно аналогично росту коэффициента для образца со стесненной деформацией, при этом значения  $K_\sigma$  ниже случая стесненной деформации на 10,1–11,6 %. Небольшое изменение коэффициента  $K_\sigma$  при  $0,5 \leq K_E \leq 1$  связано с тем, что концентрация напряжений для образца, у которого модуль упругости основного материала меньше модуля упругости обработанного, в соответствии с законом Гука находится в пределах основного материала (рисунок 8).



$$\begin{aligned}
 1 - E_{bas} &= 200 \text{ ГПа}, E_{int} = 160 \text{ ГПа}, E_{pr} = 120 \text{ ГПа}, \mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3; \\
 2 - E_{bas} &= E_{int} = E_{pr} = 200 \text{ МПа}, \mu_{bas} = 0,3, \mu_{int} = 0,24, \mu_{pr} = 0,18.
 \end{aligned}$$

Рисунок 8 – Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  в образце при свободной и закрепленной правой грани, толщина промежуточного слоя 0,2 мм

Коэффициенты концентрации напряжений при варьировании коэффициента Пуассона ведут себя аналогично для случаев стесненной деформации и стержневого образца: при  $K_\mu \leq 1$  уменьшаются до величин 1,11 и 1,01 соответственно (см. рисунок 6, б), затем нелинейно растут, причем при стесненной деформации рост коэффициента концентрации более стремителен, чем при стержневом образце, и при  $K_\mu = 1,5$  максимальные продольные напряжения превышают номинальные на 29,3 %.

Коэффициент  $K_\sigma$  при наличии зон с измененными свойствами материала на половине длины образца в исследуемом диапазоне значений  $E$  сначала умень-

шается при увеличении  $K_E$  от 0,5 до 0,8, затем растет линейно в диапазоне  $0,8 \leq K_E \leq 1,1$  на 6,1 и 7,6 % для случаев стержневого образца и стесненной деформации соответственно (см. рисунок 7, а). При  $E_{pr} > 220$  МПа рост коэффициента концентрации напряжений на интервале  $1,1 \leq K_E \leq 1,5$  составил 133 % для свободного стержня и 130 % для стесненной деформации.

При варьировании  $\mu$  обработанной зоны в исследуемом диапазоне значений (см. рисунок 7, б) для образца со свободной правой гранью можно выделить два участка. На первом участке до значения  $\mu_{pr} = 0,36$  коэффициент концентрации напряжений возрастает на 0,2–0,3 % при росте отношения  $\mu_{pr} / \mu_{bas}$  на 0,1. На втором участке в диапазоне  $1,2 \leq K_\mu \leq 1,5$  коэффициент концентрации возрастает до величины, равной 1,22. В случае закрепленной правой грани при изменении коэффициента Пуассона коэффициент  $K_\sigma$  нелинейно растет.

Результаты расчетов показывают, что при стесненной деформации напряжения во всех рассмотренных случаях выше, чем при свободной.

**Анализ поперечных напряжений при стесненной деформации образцов.** Исследовано влияние механических характеристик на НДС образцов (рисунок 9). При увеличении  $K_E$  и  $K_\mu$  от 0,6 до значений, соответствующих модулю упругости и коэффициенту Пуассона основного материала, поперечные напряжения уменьшаются до величины 68,16 МПа. Превышение модуля упругости и коэффициента Пуассона обрабатываемого материала значений для основного материала приводит к росту напряжений  $\sigma_x$ , причем изменение  $\mu$  более существенно влияет на рост поперечных напряжений, чем изменение  $E$ .

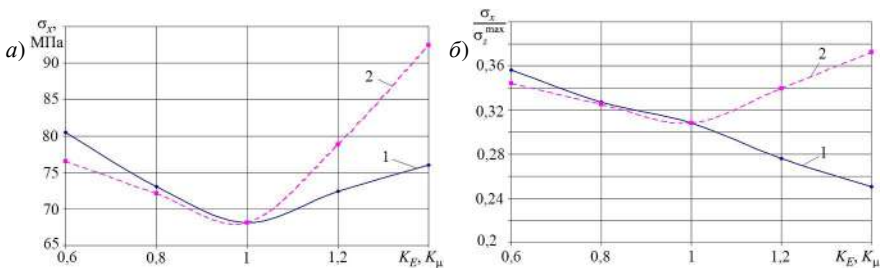
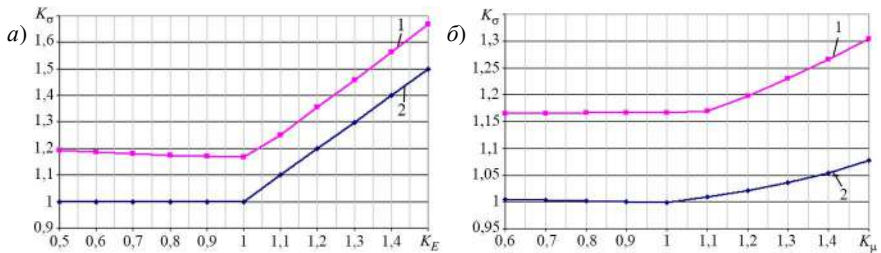


Рисунок 9 – Зависимость поперечных напряжений  $\sigma_x$  (а) и их отношений к максимальным продольным напряжениям  $\sigma_z^{\max}$  (б) при изменении  $K_E$  (1) и  $K_\mu$  (2)

Установлено, что в исследуемом диапазоне параметров при стесненной деформации поперечные напряжения  $\sigma_x$  составляют 25–36 % от продольных при изменении модуля упругости и 30–37 % вследствие изменения коэффициента Пуассона (см. рисунок 9). Наибольшие значения отношения  $\sigma_x / \sigma_z^{\max}$  при варьировании модуля упругости соответствуют минимальному соотношению  $E_{pr} / E_{bas}$  и при  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 150$  ГПа,  $E_{pr} = 100$  ГПа составляют  $\sigma_x / \sigma_z = 0,356$ , а при увеличении  $K_E$  происходит снижение этого параметра. При увеличении  $K_\mu$  до значения  $K_\mu = 1$  отношения  $\sigma_x / \sigma_z^{\max}$  уменьшаются. Дальнейший рост коэффициента Пуассона обработанной зоны приводит к увеличению доли поперечных напряжений.

В рассмотренном диапазоне параметров наибольшие поперечные напряжения возникают при минимальном модуле упругости материала обработанной зоны  $E_{pr} = 100$  ГПа и составляют  $\sigma_x = 85,09$  МПа, а также при максимальном коэффициенте Пуассона обработанного материала  $\mu = 0,42$  (92,44 МПа).

**Моделирование НДС образцов с двумя параллельными дорожками по всей длине.** Анализировались влияние на НДС расстояния между дорожками и характеристик материала зон. Рассмотрены варианты увеличенных и уменьшенных значений коэффициента Пуассона и модуля упругости материала зон по сравнению с основным материалом. На рисунке 10 приведена типичная зависимость коэффициента концентрации напряжений от характеристик материала зон измененной структуры при расстоянии между ними 0,4 мм.

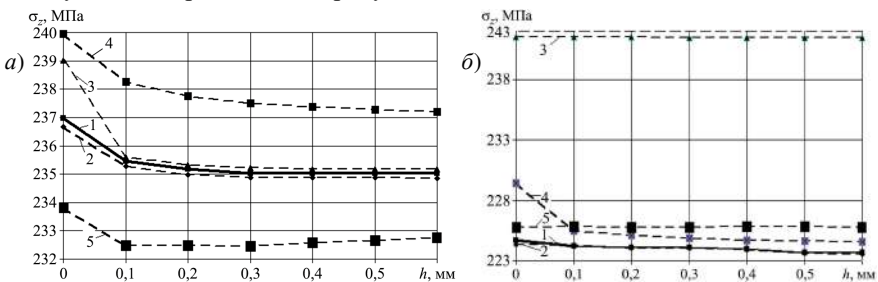


1 – стержневой образец (правая грань свободна);  
2 – стесненная деформация (правая грань закреплена)

Рисунок 10 – Зависимость коэффициента концентрации напряжений:

а – от  $K_E$ ; б – от  $K_\mu$  (для образца при расстоянии между дорожками 0,4 мм)

Характер изменения коэффициента концентрации напряжений при варьировании механических характеристик обработанного слоя и промежуточной зоны не отличается для образцов с двумя и одной дорожкой по всей длине (см. рисунок 6). Зависимости продольных напряжений от расстояния между зонами приведены на рисунке 11.



1 –  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  МПа,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ;  
2 –  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 190$  ГПа,  $E_{pr} = 180$  ГПа,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ;  
3 –  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $E_{int} = 210$  ГПа,  $E_{pr} = 220$  ГПа,  $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ;  
4 –  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  МПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,285$ ,  $\mu_{pr} = 0,27$ ;  
5 –  $E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$  МПа,  $\mu_{bas} = 0,3$ ,  $\mu_{int} = 0,315$ ,  $\mu_{pr} = 0,33$ .

Рисунок 11 – Зависимость продольных напряжений  $\sigma_z$  от расстояния между дорожками: а – свободная правая грань; б – закреплённая правая грань

Результаты расчетов показали незначительное влияние расстояния между параллельными дорожками на продольные напряжения. Лишь при расстоянии  $h = 0$  для образца со свободной правой гранью с модулем упругости обработанной зоны на 10 % выше, чем у основного материала, наблюдается увеличение продольных напряжений на 3,5 МПа по сравнению с образцом, у которого  $h > 0$ . На образцы со стесненной деформацией с модулем упругости обработанного материала выше, чем у основного материала, изменение расстояния между зонами с измененной структурой материала не оказывает влияния на продольные напряжения.

Проведены исследования влияния расстояния между дорожками на продольные напряжения для различных коэффициентов Пуассона материала обработанной зоны. Результаты показали изменение продольных напряжений в диапазоне расстояний 0,1–0,6 мм, не превышающее 0,5 %. Для всех образцов, кроме образца с модулем упругости обработанной зоны выше модуля упругости основного материала, находящегося в условиях стесненной деформации, при увеличении расстояния  $h$  от 0 до 0,1 мм продольные напряжения снижаются, причем наиболее значительно (почти на 4 МПа) – у указанного здесь образца, для которого  $\mu_{pr} < \mu_{bas}$ .

Анализ изменения расстояния между дорожками на эквивалентные напряжения показал, что оно не влияет для образцов с  $E_{pr} > E_{bas}$  при обоих рассмотренных случаях граничных условий и оказывает незначительное влияние для иных сочетаний механических характеристик зон. Следует отметить, что при стесненной деформации эквивалентные напряжения при увеличении  $d$  от 0 до 0,1 мм уменьшаются на 2–3 %, а для свободного образца – растут на 2,5–4 %. При больших расстояниях изменение не превышает доли процента.

**Заключение.** Проведено исследование влияния характеристик зон измененной структуры исходного материала, возникающих после термообработки образцов движущимся высококонцентрированным источником тепла (лазером, плазмотроном), на НДС при растяжении. Моделирование задачи о растяжении образца с двумя зонами измененной структуры серповидной формы проводилось с использованием конечно-элементного пакета *ANSYS Workbench*. По результатам конечно-элементного расчета для широкого диапазона значений модуля упругости и коэффициента Пуассона определено НДС образцов с одной или несколькими дорожками по всей его длине и на части длины. В случаях различных граничных условий, размеров зон и расстояний между ними определены коэффициенты концентрации напряжений в окрестности зон обработки. Установлено незначительное влияние расстояния между дорожками на коэффициент концентрации напряжений. Исследованы поперечные напряжения в зависимости от механических характеристик обработанного и основного материала.

Полученные значения коэффициентов концентрации, хотя и отражают общие тенденции трансформации НДС при наличии локальной обработки



материала, не являются однозначными, а зависят от геометрических и механических характеристик объекта (соотношений размеров обработанной зоны и исходной детали, толщин промежуточного слоя, модулей упругости и коэффициентов Пуассона материалов слоев). Результаты исследований показывают как важность знания точных значений механических характеристик материала в области локального воздействия, так и необходимость проведения расчетов на прочность заданной детали с учетом наличия этого воздействия, без чего невозможен выбор оптимального режима обработки, обеспечивающего требуемые эксплуатационные свойства упрочняемых деталей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 708 с.
- 2 **Нейбер, Г.** Концентрация напряжений / Г. Нейбер ; пер. с нем. Н. Н. Лебедева ; под ред. проф. А. И. Лурье. – М.–Л. : Гостехиздат, 1947. – 204 с.
- 3 Исследование влияния механических характеристик зон термообработанного материала при растяжении / А. И. Веремейчик [и др.] // Актуальные проблемы прочности : материалы Междунар. науч. конф., г. Минск, 23–27 мая 2022 г. – Минск : УП «ИВЦ Минфина», 2022. – С. 262–264.
- 4 **Савин, Г. Н.** Концентрация напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – М.–Л. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1951. – 496 с.
- 5 Прочность, устойчивость, колебания : справ. В 3 т. Т. 2 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 463 с.
- 6 **Петерсон, Р.** Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / Р. Петерсон ; пер. с англ. И. А. Нечай, И. П. Сухарева, Б. Н. Ушакова. – М. : Мир, 1977. – 302 с.
- 7 Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 т. / Ю. Ито [и др.] ; под ред. Ю. Мураками ; пер. с англ. В. И. Даниленко. – М. : Мир, 1990. – Т. 1 – 447 с.; Т. 2 – 453 с.
- 8 **Черепанов, Г. П.** Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- 9 **Бережницкий, Л. Т.** Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницкий, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1979. – 400 с.
- 10 **Шекшеев, М. А.** Особенности структуры и свойства зоны термического влияния сварных соединений сталей класса прочности К56 : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.16.01 / М. А. Шекшеев. – Магнитогорск, 2013. – 18 с.
- 11 **Иванциевский, В. В.** Управление структурным и напряженным состоянием поверхностных слоев деталей машин при их упрочнении с использованием концентрированных источников нагрева и финишного шлифования : дис. ... д-ра техн. наук : 05.16.09 / В. В. Иванциевский. – Новосибирск, 2012. – 425 с.
- 12 **Шарапова, Д. М.** Эволюция структуры и свойств конструкционных низколегированных сталей при кратковременных локальных термических воздействиях концентрированными источниками тепла : дис. ... канд. техн. наук : 05.16.09 / Д. М. Шарапова. – СПб., 2018. – 140 с.
- 13 **Гулаков, С. В.** Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния элементов составных конструкций при воздействии локального ис-



точника нагрєва / С. В. Гулаков, С. В. Щєрбаков, Н. Г. Заварика // Вїсник Приазовського державного технїчного унїверситету. – 2004. – Вип. 14. – С. 223–226.

14 **Войтович, О. Н.** Исследование влияния параметров лазерной термообработки на свойства упрочненных поверхностных слоев / О. Н. Войтович, И. Н. Соколов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 2. – С. 6–14.

15 Влияние режимов нагрєва на структуру и механические свойства стали 60ПП / А. И. Гордиенко [и др.] // Литье и металлургия. – 2011. – № 1. – С. 146–153.

16 **Fadara, T. G.** Effect of Heat Treatment on Mechanical Properties and Microstructure of NST 37-2 Steel / T. G. Fadara, O. Y. Akanbi, D. A. Fadare // Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering. – 2011. – Vol. 10, no. 3. – P. 299–308.

17 Структура та властивостї металу зони термїчного впливу зварних з'єднань високомїцних спеціальних сталей / Г. М. Григоренко [и др.] // Металознавство та обробка металів. – 2018. – № 4. – С. 27–34.

18 Structure and properties of weld joints in X80, X90, and K70 pipe steel / A. Yu. Ivanov [et al.] // Steel in Translation. – 2011. – Vol. 41, no. 7. – P. 611–616.

19 The Influence of the Highly Concentrated Energy Treatments on the Structure and Properties of Medium Carbon Steel / S. N. Grigoriev [et al.] // Metals. – 2020. – Vol. 10, is. 12. – Paper 1669. – 15 p.

20 **Dinesh Babu, P.** Laser surface hardening: a review / P. Dinesh Babu, K. R. Balasubramanian, G. H. Buvanashakaran // International Journal of Surface Science and Engineering. – 2011. – Vol. 5, no. 2–3. – P. 131–151.

21 **Войтович, О. Н.** Исследование влияния параметров лазерной термообработки на свойства упрочненных поверхностных слоев / О. Н. Войтович, И. Н. Соколов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 2. – С. 6–14.

22 **Лахтин, Ю. М.** Материаловедение / Ю. М. Лахтин, В. П. Леонтьева. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1990. – 528 с.

*A. I. VERAMEICHYK*

*Brest State Technical University, Brest, Belarus*

## **STRESS-STRAIN STATE OF SAMPLES WITH SICKLE-SHAPED ZONES OF CHANGED MATERIAL STRUCTURE UNDER AXIAL TENSION**

In the paper there is investigated the stress-strain state of samples with zones of changed material structure that arise after a heat treatment by a local high-energy heating source. There is performed the computer simulation of the stretching problem for the samples with sickle-shaped zones along the entire length and on the part of the length. The influence of the material mechanical characteristics of the zones under the heat treatment on the stress-strain state is investigated. The case of two parallel zones for their different values and the distance between them is analyzed. Stress concentration coefficients in the area of the thermo treated zones are determined.

**Keywords:** zone of changed structure, stress-strain state, stress concentration coefficient, elasticity modulus, Poisson's ratio.

Получено 22.08.2022

УДК 539.3

А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК

*Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь***РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА  
О ДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА**

Рассмотрено решение несвязанных задач однородной и неоднородной термоупругости для полупространства, на граничной поверхности которого движется прямолинейно локальный источник тепла с постоянной скоростью.

**Ключевые слова:** напряжения, полупространство, задача термоупругости, температура, источник тепла, термоупругий потенциал, неоднородность.

**Введение.** Современный уровень развития науки и техники выдвигает перед инженером требования по созданию эффективных методов расчета оптимальных режимов термообработки деталей и инструмента, позволяющих улучшить характеристики поверхности без изменения свойств сердцевины. Плазменное упрочнение по технико-экономическим показателям является более перспективным способом по сравнению с лазерным и электронно-лучевыми технологиями упрочнения [1]. При поверхностной плазменной закалке используется действие движущихся концентрированных источников энергии, создающих направленную высокотемпературную газовую струю, тепловой поток которой и является главным действующим фактором процесса. В связи с наличием движения струи вдоль обрабатываемой поверхности достигаемая температура разогрева материала и скорость охлаждения его после прохода струи оказываются жестко связанными. Согласно [2] процессы нагрева и охлаждения зависят от интенсивности теплового потока, коэффициентов теплопроводности материала и скорости движения источника тепла. Для учета влияния этих параметров на напряженно-деформированное состояние (НДС) необходимо решение соответствующих задач термоупругости для тел, подверженных тепловому нагружению движущимся источником нагрева [3, 4].

**Постановка и решение однородной задачи термоупругости.** Решение задачи классической однородной и изотропной линейной термоупругости рассмотрим на примере нагружения полупространства температурным полем, возникающим при действии движущегося по прямой линии с постоянной скоростью на поверхности источника тепла. Такой модели может удовлетворять, например, процесс поверхностного плазменного упрочнения деталей и инструмента, в основе которого лежит способность плазменной струи (дуги) создавать на небольшом участке поверхности высокие плотности теплового потока, достаточные для нагрева, плавления или испарения металла.

Рассмотрим однородное линейно-упругое полупространство  $x_3 \geq 0$ , на граничной поверхности  $x_3 = 0$  которого по оси  $Ox_2$  движется с постоянной скоростью  $v$  источник тепла мощности  $Q$ .

Возможная передача тепла от полупространства к окружающей среде на граничной поверхности за рассматриваемые короткие промежутки времени не учитывается, поэтому в любой момент времени  $\tau$  граничное условие на плоскости  $x_3 = 0$  не будет зависеть от  $\tau$  и запишется в виде

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)_{+0} = 0, \quad (\sigma_{i3})_{+0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Нагрузка полупространства представляется температурным полем  $T$ , которое получается путем решения дифференциального уравнения теплопроводности [5], удовлетворяющего первому условию (1). Постановка и решение задачи теплопроводности для полупространства, на которое действует источник тепла, движущийся с постоянной скоростью  $v$ , рассмотрено в [6], где для подвижной системы координат, перемещающейся вместе с рассматриваемым источником, получено следующее решение:

$$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q}{4\pi\lambda_T R} \exp\left(-\frac{v(x_2 + R)}{2a}\right), \quad R^2 = x_k x_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\lambda_T$  – коэффициент теплопроводности;  $R$  – расстояние до точки, в которой определяется температура  $T$ ;  $a = \lambda_T / (c\rho)$  – коэффициент температуропроводности;  $c$  – удельная теплоемкость;  $\rho$  – плотность материала.

Определим напряжения  $\sigma_{ij}$ , возникающие в полупространстве при воздействии температуры (2) и удовлетворяющие граничным условиям (1) на его поверхности. Поскольку среда, заполняющая полупространство, является однородной и изотропной, т. е. ее параметры не зависят от температуры, уравнения равновесия в перемещениях без учета инерционных членов имеют вид

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения.

В правую часть уравнения (3) входят элементы градиента известной функции  $T$ , т. е. решения (2). Для получения общего решения системы уравнений (3) сначала найдем частное решение, которое в форме, предложенной Гудьером [7], представляется в виде градиента некоторой функции термоупругого потенциала  $\Phi$ :

$$\bar{u}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), найдем, что термоупругий потенциал  $\Phi$  должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T. \quad (5)$$

Для движущейся системы координат, согласно [6], температура  $T$  должна соответствовать уравнению

$$\nabla^2 T + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0. \quad (6)$$

Дифференцируем уравнение (5) по координате  $x_2$  и подставляем  $\frac{\partial T}{\partial x_2}$  в (6):

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha a}{v} \nabla^2 T. \quad (7)$$

Уравнение (7) будет удовлетворено, если принять:

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha a}{v} \int T dx_2 + \Phi_0.$$

Здесь  $T$  представлено в виде (2), а  $\Phi_0$  – произвольная гармоническая функция, которая выбирается таким образом, чтобы термоупругий потенциал  $\Phi$  был представлен в форме

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha Q a}{4\pi v \lambda_T} \int \frac{1}{R} \exp\left(-\frac{v(x_2+R)}{2a}\right) dx_2 + \Phi_0 = \\ &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} Q \frac{\alpha a}{4\pi v \lambda_T} Ei\left[-\frac{v}{2a}(x_2+R)\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) содержит специальную функцию – интегральную показательную функцию  $Ei$ , которая имеет вид

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad Ei(z) = -Ei(-z), \quad z \neq 0.$$

Термоупругие напряжения  $\sigma_{ij}^T$ , которые соответствуют частному решению (4) в перемещениях, вычисляются путем дифференцирования потенциала  $\Phi$  и подстановки в физические уравнения. В результате получаем

$$\sigma_{ij}^T = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \Phi \right),$$

где  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E$  – модуль упругости;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Окончательно для  $\sigma_{ij}^T$  с учетом обозначения  $K = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha \mu a}{2\pi v \lambda_T} Q$  имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^T &= -\frac{K}{R^2} \left[ \frac{R}{x_2 + R} - x_1^2 \frac{x_2 + 2R}{R(x_2 + R)^2} + \frac{v}{2a} \left( 2R - \frac{x_1^2}{x_2 + R} \right) \right] \exp \left( -\frac{v(x_2 + R)}{2a} \right); \\
\sigma_{22}^T &= -\frac{K}{R^2} \left[ \frac{x_2}{R} + \frac{v}{2a} (x_2 - R) \right] \exp \left( -\frac{v(x_2 + R)}{2a} \right); \\
\sigma_{33}^T &= -\frac{K}{R^2} \left[ \frac{R}{x_2 + R} - x_3^2 \frac{x_2 + 2R}{R(x_2 + R)^2} + \frac{v}{2a} \left( 2R - \frac{x_3^2}{x_2 + R} \right) \right] \exp \left( -\frac{v(x_2 + R)}{2a} \right); \\
\sigma_{12}^T &= -\frac{K}{R^3} x_1 \left( 1 + \frac{v}{2a} \right) \exp \left( -\frac{v(x_2 + R)}{2a} \right); \\
\sigma_{23}^T &= -\frac{K}{R^3} x_3 \left( 1 + \frac{v}{2a} \right) \exp \left( -\frac{v(x_2 + R)}{2a} \right); \\
\sigma_{13}^T &= -\frac{K}{R^3} \frac{x_1 x_3}{x_2 + R} \left( 1 + \frac{R}{x_2 + R} + \frac{v}{2a} R \right) \exp \left( -\frac{v(x_2 + R)}{2a} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Согласно условиям (1) граничная поверхность  $x_3 = 0$  свободна от напряжений:

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = 0; \quad \sigma_{23}(x_1, x_2, 0) = 0; \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, 0) = 0. \tag{10}$$

Полученное частное решение (9) соответствует второму и третьему условиям (10), но не удовлетворяет первому:

$$\sigma_{33}^T(x_1, x_2, 0) = -\frac{K}{r} \left[ \frac{1}{x_2 + r} + \frac{v}{2a} \right] \exp \left( -\frac{v(x_2 + r)}{2a} \right), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{11}$$

Поэтому для полного решения краевой задачи необходимо к частному решению (9) добавить решение задачи теории упругости для полупространства, нагруженного на границе нормальным давлением  $p_3$ , уничтожающим напряжение (11), а именно

$$p_3 = \sigma_{33}^T(x_1, x_2, 0).$$

Обозначим решение упругой задачи через  $\sigma_{ij}^*$ , тогда полное решение термоупругой задачи  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T + \sigma_{ij}^*$ . Задача теории упругости для полупространства с заданным нормальным давлением решается в квадратурах как суперпозиция решений Буссинеска для действия сосредоточенной нормальной силы в некоторой произвольной точке граничной поверхности с координатами

натами  $(\xi_1, \xi_2, 0)$ . Вместо сосредоточенной силы  $P$  в решение Буссинеска необходимо подставить значение бесконечно малой элементарной нагрузки  $p_3 d\xi_1 d\xi_2$ , приходящейся на площадь  $d\xi_1 d\xi_2$  окрестности точки  $(\xi_1, \xi_2, 0)$ .

Выполняя интегрирование, получим решение  $\sigma_{ij}^*$  в квадратурах:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= \frac{3K}{2\pi} \oint_S \frac{Q'}{R^3} \left[ \frac{x_3(x_1 - \xi_1)^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{3} \left( \frac{R^2 + Rx_3 - x_3^2}{R-x_3} - \frac{(x_1 - \xi_1)^2 (2R-x_3)}{(R-x_3)^2} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2; \\ \sigma_{22}^* &= \frac{3K}{2\pi} \oint_S \frac{Q'}{R^3} \left[ \frac{x_3(x_2 - \xi_2)^2}{R^2} - \frac{1-2\nu}{3} \left( \frac{R^2 + Rx_3 - x_3^2}{R-x_3} - \frac{(x_2 - \xi_2)^2 (2R-x_3)}{(R-x_3)^2} \right) \right] d\xi_1 d\xi_2; \\ \sigma_{33}^* &= \frac{3K}{2\pi} x_3^3 \oint_S \frac{Q'}{R^5} d\xi_1 d\xi_2; \tag{12}\end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^* = \frac{3K}{2\pi} \oint_S \frac{Q'(x_2 - \xi_2)(x_1 - \xi_1)}{R^3} \left[ \frac{x_3}{R^2} - \frac{1-2\nu}{3} \frac{(2R-x_3)}{(R-x_3)^2} \right] d\xi_1 d\xi_2;$$

$$\sigma_{13}^* = \frac{3K}{2\pi} x_3^2 \oint_S \frac{Q'(x_1 - \xi_1)}{R^5} d\xi_1 d\xi_2; \quad \sigma_{23}^* = \frac{3K}{2\pi} x_3^2 \oint_S \frac{Q'(x_2 - \xi_2)}{R^5} d\xi_1 d\xi_2,$$

где  $Q' = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{x_2 - \xi_2 + r} + \frac{\nu}{a} \right) \exp\left(-\frac{\nu(x_2 - \xi_2 + r)}{2a}\right)$ ,  $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$ ,  
 $R^2 = r^2 + x_3^2$ .

Значения напряжений  $\sigma_{ij}^*$  на поверхности  $x_3 = 0$  определяются по формулам (12) путем предельного перехода при  $x_3 \rightarrow 0$ . Однако получить выражения предельных напряжений таким путем затруднительно, т. к. их значения не могут быть представлены в замкнутой форме. Вместо решения упругой задачи (12) можно использовать численное решение упругой пространственной задачи. В этом случае можно заменить безгранично протяженное полупространство на внутреннюю область конечных размеров. Например, можно вырезать из рассматриваемого полупространства куб или параллелепипед, на гранях которого будут заданы механические напряжения, которые определяются по формулам (9). После отыскания напряжений  $\sigma_{ij}^*$  численным методом внутри и на поверхности куба (параллелепипеда) их нужно сложить с напряжениями частного решения (9). В результате будет получено решение поставленной задачи термоупругости для однородной упругой изотропной среды.

На основе решения задачи однородной термоупругости рассматривается задача термоупругости для континуально неоднородной среды, т. е. с учетом влияния на решение изменения теплофизических параметров материала.

**Решение задачи неоднородной термоупругости при высоких температурах.** Согласно методу возмущений Ломакина [3] полное решение задачи термоупругости для неоднородной изотропной среды можно получить на основании решения задачи для однородной изотропной линейно-упругой среды. Рассмотрим, как влияет температура, создаваемая движущимся источником, на напряжения, возникающие при нагреве. При этом необходимо учесть, что параметры упругости  $\lambda(T)$ ,  $\mu(T)$  зависят от температуры, которая в свою очередь зависит от координат  $x_i$ . Поскольку процесс нагрева полупространства рассматривается в системе координат, которая движется вместе с источником, все заданные и искомые функции от времени не зависят. Теплофизический параметр  $\gamma(T)$  также считаем зависящим от температуры. Дифференциальные уравнения термоупругости такой непрерывно неоднородной среды имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\theta) + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma T) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Выполняя дифференцирование (13), получим

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = \gamma\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}T - \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\theta - \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (14)$$

где 
$$\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad \gamma = (2\mu + 3\lambda)\alpha = \frac{E}{1-2\nu}\alpha.$$

Рассмотрим квазистатическую задачу термоупругости для полупространства  $x_3 \geq 0$ , граничная поверхность которого совпадает с плоскостью координат  $Ox_1x_2$ . По оси  $Ox_2$  с постоянной скоростью  $v$  движется источник тепла мощностью  $Q$ . Считаем, что усилия на границе полупространства равны нулю. Определим напряжения  $\sigma_{ij}$ , возникающие в полупространстве от нагрева таким источником. Температуру в дифференциальных уравнениях (14) считаем известной функцией, т. е. решением краевой задачи теплопроводности. Если принимать коэффициент температуропроводности  $a$  постоянным, а также не учитывать отдачу тепла окружающей среде на граничной поверхности, то в подвижных координатах температурное поле соответствует (2).

Решаем систему уравнений (14) для определения неизвестных перемещений  $u_i$ , по которым будут определены напряжения  $\sigma_{ij}$ , причем на граничной поверхности  $x_3 = 0$  усилия должны быть равны нулю:

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \sigma_{23}(x_1, x_2, 0) = 0.$$

Функции  $\lambda(T)$ ,  $\mu(T)$ ,  $\gamma(T)$ , где  $T$  представлено выражением (2), считаем заданными. Выразим их через  $E(T)$ :

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E(T), \quad \mu = \frac{1}{2(1+\nu)}E(T), \quad \gamma = \frac{\alpha}{1-2\nu}E(T). \quad (15)$$

Коэффициент Пуассона  $\nu$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  принимаем не зависящим от температуры  $T$ , причем  $\nu \neq 0,5$ .

Подставим значения (15) в дифференциальное уравнение (14), разделив предварительно все члены на  $\mu$ . Получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{T}{E} \frac{\partial E}{\partial x_i} - \\ - \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\theta}{E} \frac{\partial E}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это уравнение отличается от аналогичного уравнения для однородной среды (3) дополнительным слагаемым в правой части, которое можно рассматривать как фиктивные массовые силы  $K_i^\Phi$  и представить в виде

$$K_i^\Phi = \mu \left[ \frac{\alpha}{1-2\nu} T \frac{\partial E}{\partial x_i} - \frac{\nu \theta}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial E}{\partial x_i} - \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial E}{\partial x_j} \right]. \quad (17)$$

По известной температуре здесь можно вычислить лишь первое слагаемое в правой части, поскольку все остальные зависят от неизвестных деформаций. Используя метод возмущений В. А. Ломакина [3], введем в правой части уравнения (17) малый параметр и будем выполнять дальнейшее решение последовательными приближениями. В этом случае на каждом этапе итераций введение массовых сил  $K_i^\Phi$  облегчает вычисления при использовании решения Миндлина [8] для случая сосредоточенной силы, действующей в произвольной внутренней точке полупространства. Будем вычислять производную от модуля упругости как от сложной функции:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Зависимость модуля упругости  $E$  от температуры в определенных интервалах представим линейной функцией  $E = AT + B$ . Тогда  $\frac{\partial E}{\partial T} = A = \text{const}$ , а

сомножитель  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  вычисляется непосредственным дифференцированием:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{Q}{4\pi\lambda_T R} \exp\left(-\frac{\nu}{2a}(x_2 + R)\right) \left[ \frac{\beta_i}{R} + \frac{\nu}{2a}(1-\beta_i) \right], \beta_i = \frac{x_i}{R}, i = 1, 2, 3,$$

$$\psi_i = \frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{QA}{4\pi\lambda_T R} \exp\left(-\frac{\nu}{2a}(x_2 + R)\right) \left[ \frac{\beta_i}{R} + \frac{\nu}{2a}(1-\beta_i) \right].$$



Элементы вектора  $\psi_i$  вычисляются лишь в той области полупространства, в которой модуль  $E$  является переменным, т. е. где  $A \neq 0$ . Это имеет место в наиболее нагретой зоне, близкой к источнику. На каждом этапе расчета нужно выявлять границу этой зоны, в которой будут действовать фиктивные массовые силы  $K_i^\Phi$ . Отметим, что множитель  $1/E$  представляет собой ма-

лый параметр  $\varepsilon = \frac{1}{E(T)}$ . Тогда уравнение (16) примет вид

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = \varepsilon R_i(x_1, x_2, x_3), \quad (18)$$

где  $R_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{2\alpha(1+\nu)T - 2\nu\theta}{1-2\nu} \Psi_i - \Psi_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ;  $\Psi_i = \frac{\partial E}{\partial x_i}$ ;  $\Psi_j = \frac{\partial E}{\partial x_j}$ .

В соответствии с методом возмущений В. А. Ломакина решение уравнения (18) краевой задачи термоупругости неоднородной среды ищется в виде степенного ряда по степеням параметра  $\varepsilon$ , причем коэффициенты ряда являются векторными функциями, представляющими последовательные приближения к искомому решению задачи:

$$u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_i^{(k)}. \quad (19)$$

Поскольку параметр  $\varepsilon$  мал, можно в разложении (19) воспользоваться лишь первыми двумя членами:

$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)}. \quad (20)$$

Подставим (20) в (18) и приравняем между собой выражения при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ . В результате получим дифференциальное уравнение для начального приближения  $u_i^{(0)}$ :

$$\nabla^2 u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Для первого приближения дифференциальное уравнение имеет вид

$$\nabla^2 u_i^{(1)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_i} = \varepsilon R_i^{(1)}, \quad (21)$$

где правая часть выражена через известные перемещения  $u_i^{(0)}$ :

$$R_i^{(1)} = \frac{2\alpha(1+\nu)T - 2\nu\theta^{(0)}}{1-2\nu} \Psi_i - \Psi_j \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right).$$

Массовая нагрузка  $\varepsilon R_i$  распределена в ограниченной области, вблизи движущегося источника, и она определяется численно. Тогда решение поставленной краевой задачи для уравнения (21) можно представить в виде суммы двух решений  $\sigma_{ij}^{(1)} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^*$ , где  $\sigma_{ij}^*$  – общее решение уравнения (21) с правой частью. На границе области напряжения будут принимать некоторые ненулевые значения:

$$\bar{\sigma}_{33}(x_1, x_2, 0) = f_3, \quad \bar{\sigma}_{13}(x_1, x_2, 0) = f_1, \quad \bar{\sigma}_{23}(x_1, x_2, 0) = f_2.$$

$$u_{ij}^{\text{ед}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \beta_i\beta_j \right].$$

В результате суперпозиции таких решений получим

$$\bar{u}_i = \int_D u_{ij}^{\text{ед}} \varepsilon R_j dx, \quad (22)$$

где  $D$  – область, в которой  $A \neq 0$ ;  $dx$  – элемент объема.

Напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}$  и усилия  $\bar{p}_i$  на любой площадке получаются путем дифференцирования (22) под знаком интеграла и дальнейшей подстановки в формулу закона Гука в соответствии с [9].

При рассмотрении задачи для полупространства при заданных краевых условиях (равенство нулю усилий на границе) известен тензор Грина, который обычно называют решением Миндлина  $G_{ij}(x, y)$  [10], представляющий собой перемещение точки  $x$  по оси  $x_i$ , вызванное единичной силой, приложенной в произвольной точке  $y$  полупространства по направлению оси  $x_j$ . При этом усилия на поверхности полупространства, которые соответствуют перемещениям  $G_{ij}(x, y)$ , равны нулю. Применяя суперпозицию решений Миндлина, получим сразу первое приближение  $u_i^{(1)}$  – решение уравнения (21):

$$u_i^{(1)}(x) = \int_D G_{ij}(x, y) \varepsilon(y) R_j(y) dy.$$

Представленная схема решения может использоваться для численной реализации задач термоупругости методом граничных интегральных уравнений [7] и пригодна для областей произвольной формы, ограниченных гладкой поверхностью.

**Заключение.** Проведено решение задачи однородной термоупругости о нагружении полупространства движущимся по прямой линии с постоянной скоростью источником тепла. На основе решения задачи однородной термоупругости проведено исследование НДС при нагреве полупространства движущимся тепловым источником с учетом зависимости теплофизических параметров среды от температуры.

Результаты решения задач термоупругости могут использоваться для оценки НДС тел при действии движущегося локального источника тепла (например, плазменной дуги) с целью определения оптимальных режимов термозакалки, выявления зон трещинообразования, а также при разработке новых конструкций плазмотронов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гречнева, М. В.** Краткий анализ результатов работ в области плазменного поверхностного упрочнения сталей и сплавов / М. В. Гречнева // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2017. – Т. 21, № 5. – С. 10–23.

2 **Youssef, H. M.** The boundary value problem of a three-dimensional generalized thermoelastic half-space subjected to moving rectangular heat source / H. M. Youssef, E. A. N. Al-Lehaibi // Boundary Value Problems. – 2019. – Vol. 2019. – Article 8. – 15 p.

3 **Ломакин, В. А.** Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Ленанд, 2014. – 367 с.

4 Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: a review / F. Shakeriaski [et al.] // Journal of Computational Design and Engineering. – 2021. – Vol. 8, is. 1. – P. 15–35.

5 **Карлслю, Г.** Теплопроводность твердых тел / Г. Карлслю, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

6 **Веремейчик, А. И.** Механико-математическое моделирование процесса плазменно-механической обработки / А. И. Веремейчик, М. И. Сазонов, В. М. Хвисевич // Актуальные проблемы прочности. – Минск : УП «ИВЦ Минфина», 2022. – Гл. 27. – С. 340–357.

7 **Хвисевич, В. М.** Метод потенциала в нестационарных термоупругих задачах механики деформируемого твердого тела / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – Вып. 27. – С. 351–357.

8 **Lurie, A. I.** Theory of elasticity / A. I. Lurie ; transl. by A. Belyaev. – Berlin : Springer-Verlag, 2005. – 1050 p.

9 **Купрадзе, В. Д.** Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1976. – 664 с.

10 **Mindlin, R. D.** Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R. D. Mindlin // Physics. – 1936. – Vol. 7, is. 5. – P. 195–202.

*A. I. VERAMEICHYK*

*Brest State Technical University, Brest, Belarus*

#### **SOLUTION OF THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A HALF-SPACE OF THE MOVING HEAT SOURCE ACTION**

There is considered the the solution of unrelated problems of the homogeneous and inhomogeneous thermoelasticity for a half-space when a local heat source moves rectilinearly on the boundary surface with a constant velocity.

**Keywords:** stresses, half-space, thermoelasticity problem, temperature, heat source, thermoelastic potential, inhomogeneity.

Получено 05.10.2022

УДК 631.83:66.022.55:621.77.07

*О. М. ВОЛЧЕК*

*Барановичский государственный университет, Барановичи, Беларусь*

## **СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ГРАНУЛИРОВАННОГО ХЛОРИСТОГО КАЛИЯ**

Предлагаются новые конструкции оборудования, позволяющего эффективно производить гранулированный хлористый калий при повышенных температурах прессования. Представлен турболопастной смеситель-агломератор непрерывного действия, предназначенный для агломерирования мелкозернистых и пылевидных частиц хлористого калия, который позволяет получить значительное межмолекулярное сцепление механоактивированных поверхностей перерабатываемых частиц. Особенностью аппарата является рабочая цилиндрическая полость с загрузочным и разгрузочными окнами, внутри которой размещен вал с закрепленными на нем перемешивающими элементами трех типов. Предложена конструкция вальц-пресса для прессования частиц хлористого калия при высоких температурах, отличительной особенностью которого является наличие системы охлаждения валков постоянно циркулирующей охлаждающей жидкостью, что исключает налипание частиц прессуемого материала на рабочие поверхности валков.

**Ключевые слова:** вальц-пресс, смеситель-агломератор, хлористый калий.

**Введение.** Одной из наиболее важных операций в производстве калийных удобрений является процесс гранулирования [1, с. 377]. Постоянно ведутся разработки, связанные с повышением производительности оборудования, обеспечивающего процесс производства гранул. В работе [2] показано, что увеличение температуры прессования со 120 до 140 °С позволяет существенно повысить производительность грануляционных установок при сохранении высоких прочностных и гранулометрических характеристик готовой продукции. Однако переход на более высокие температуры прессования в условиях обогатительных фабрик ОАО «Беларуськалий» требует совершенствования существующего оборудования.

Так, при проведении лабораторных и экспериментальных исследований была установлена важность проведения на этапе подготовки шихты к прессованию структурной агломерации поступающих в процесс мелкозернистых и пылевидных частиц хлористого калия [3, 4]. В действующих флотационных фабриках такая операция осуществляется в приспособленных для этих целей лопастных смесителях, конструкция которых была изначально предназначена для иных целей. Выполненный анализ показал, что указанные аппараты имеют ряд конструктивных недостатков, в результате которых в них недостаточно эффективно осуществляются гомогенизация шихты по гранулометрическому составу и влажности, и механоактивация частиц хлористого калия со структурной агломерацией. В результате не обеспечивается необходимое качество процесса подготовки шихты и производится избы-

точная дозировка структурообразующего реагента, не соответствующая стехиометрии по отношению к компонентам шихты. При этом отечественная промышленность не выпускает аппаратов, специально разработанных для непрерывного крупнотоннажного агломерирования мелкозернистых и пылевых частиц хлористого калия или других минеральных удобрений.

В литературе описаны только возможные подходы к созданию таких аппаратов на основе лопастных грануляторов [5]. В качестве основы для разработки аппарата для структурной агломерации минеральных удобрений представляет интерес смеситель-гранулятор непрерывного действия для гранулирования сыпучих материалов в производстве стеновой керамики, описанный в работе [6]. Перспективной также представляется конструкция горизонтального смесителя для непрерывного гранулирования комбикормов [7], отличительной особенностью которого является наличие ротора с закрепленными по винтовой линии лопатками.

Кроме того, в процессе исследования прессования подготовленной шихты в вальц-прессах была выявлена проблема налипания продукта на рабочих поверхностях валков при температуре выше 120–130 °С. Предлагаемые способы предотвращения такого налипания, предусматривающие подачу в зону контакта прессуемого материала с валками различных антиадгезионных смазок [8–10], являются нетехнологичными и не могут быть использованы при получении гранулированного хлористого калия. Решением данной проблемы при одновременном сохранении высокого качества готового продукта может быть снижение температуры рабочей поверхности валков путем подачи охлажденной воды в их внутреннюю полость [11]. Однако известные технические решения не могут быть использованы в современных высокопроизводительных вальц-прессах, предназначенных для крупнотоннажного гранулирования минеральных удобрений.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что для обеспечения высокой производительности прессования хлористого калия существует необходимость разработки аппарата непрерывного действия для структурной агломерации поступающих на прессование мелкозернистых и пылевидных частиц хлористого калия, а также вальц-пресса с охлаждаемыми валками.

**Разработка аппарата для структурной агломерации шихты.** Для обеспечения непрерывной структурной агломерации мелкозернистых и пылевидных частиц хлористого калия в процессе подготовки шихты к прессованию предложена конструкция турболопастного смесителя-агломератора непрерывного действия. Основная задача заключалась в создании в аппарате равномерного энергетического поля высокой плотности, образуемого потоком материала, который способен обеспечить получение межмолекулярного сцепления, достаточного для качественной структурной агломерации продукта.

На рисунке 1 представлен чертеж установки турболопастного смесителя-агломератора, серийное изготовление которого налажено в ЗАО «Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством» под маркой ТЛА-080. Аппарат имеет следующие технические характеристики:

внутренний диаметр рабочей камеры – 800 мм, длина рабочей камеры – 3720 мм, частота вращения вала ротора – 310 об/мин, плотность потока мелкозернистой шихты до 500 т/ч·м<sup>2</sup>.

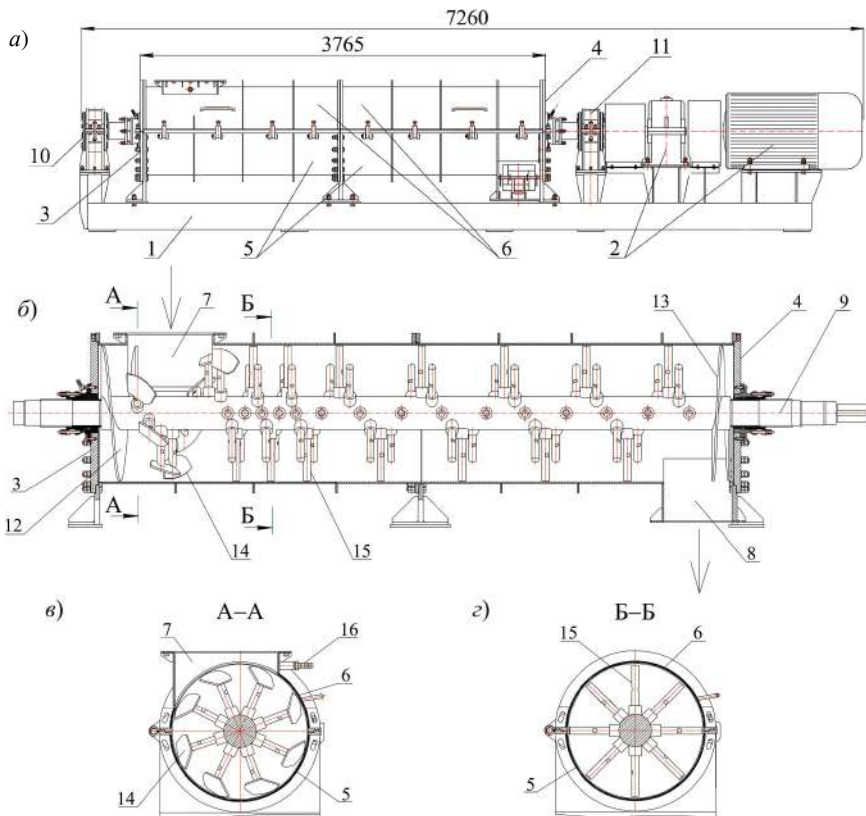


Рисунок 1 – Турболопастной смеситель-агломератор ТЛА-080:

*а* – общий вид устройства с приводом; *б* – смеситель в разрезе; *в* – разрез А-А; *г* – разрез Б-Б

Смеситель-агломератор непрерывного действия включает раму 1, привод 2, корпус с плоскими торцевыми стенками 3 и 4, корытом 5, крышкой 6. Загрузочное окно 7 выполнено в крышке 6, а разгрузочное 8 – в корыте 5. Внутри корпуса размещен вал 9 с закрепленными на нем перемешивающими элементами, опорные подшипники 10 и 11 которого установлены на раме 1. Торцевые стенки 3 и 4, корыто 5 и крышка 6 образуют рабочую камеру цилиндрической формы. Крышка 6 связана с корытом 5 с помощью нескольких шарнирных соединений, закрепленных последовательно вдоль одной из его продольных сторон, и фиксируется в закрытом состоянии с помощью винтовых зажимов, которые прикреплены к корыту вдоль противоположной про-

дольной стороны устройства. Места прохода вала 9 через торцевые стенки 3 и 4 загерметизированы с помощью уплотнительных устройств.

На валу 9 закреплены три типа перемешивающих элементов:

- элементы 12 и 13 шнекового типа, образующие минимально возможный зазор с торцевыми стенками 3 и 4 соответственно; направление спирали таких элементов приспособлено для перемещения материала при вращении вала в направлении к центру цилиндрической полости, в сторону, противоположную соответствующим торцевым стенкам;

- элементы 14, выполненные в виде радиально расположенных цилиндрических стержней с лопатками на конце, которые размещены под загрузочным окном 7 по винтовой линии; лопатки при вращении вала перемещают материал, поступающий через загрузочное окно в сторону разгрузочного;

- элементы 15, выполненные в виде радиально расположенных цилиндрических стержней, установленных в зоне между загрузочным и разгрузочным окнами по винтовой линии; данные элементы закреплены с переменным шагом, увеличивающимся в сторону разгрузочного окна 8, а именно первые два витка таких элементов со стороны перемешивающих элементов 14 выполнены с более коротким шагом.

Устройство работает следующим образом. Привод 2 приводит во вращение вал 9 с закрепленными на нем перемешивающими элементами. В загрузочное окно 7 подаются мелкозернистые и пылевидные частицы хлористого калия, которые с помощью форсунки 16 орошаются структурообразующим реагентом. Из загрузочного окна 7 материал поступает в рабочую камеру и подается лопатками перемешивающего элемента 14 в направлении разгрузочного окна 8 в зону расположения элементов 15, где осуществляется структурная агломерация. Цилиндрическая форма стержней 15 позволяет обеспечить интенсивное перемешивание и накопление материала по всему объему цилиндрической полости. При этом материал из зоны расположения элементов 15 постепенно перемещается в направлении разгрузочного окна 8 вследствие кинетического давления вновь поступающих частиц, создаваемого лопатками перемешивающих элементов 14. Таким образом в зоне расположения стержней 15 образуется равномерное энергетическое поле высокой плотности, создаваемое потоком материала, которое обеспечивает получение механоактивированных поверхностей обрабатываемых частиц, обладающих высоким межмолекулярным сцеплением, достаточным для качественной структурной агломерации продукта. Наличие элементов 12 и 13 шнекового типа позволяет предотвратить налипание материала на торцевые стенки 4 и 5, отгаливая его от этих стенок.

Более короткий шаг первых витков перемешивающих элементов 15 обеспечивает быструю гомогенизацию частиц хлористого калия и тем самым ускоряет процесс их дальнейшей структурной агломерации.

Изготовленные аппараты были поставлены в отделения грануляции обогатительных фабрик ОАО «Беларуськалий» для комплектации технологических

линий подготовки шихты к прессованию. Опытно-промышленные испытания подтвердили эффективность разработанных технических решений как с точки зрения качества процесса агломерации флотационного хлористого калия, так и с точки зрения технической надежности устройства. В частности, внедрение усовершенствованных турболопастных смесителей-агломераторов на участках подготовки шихты в отделениях грануляции позволило рекомендовать снижение дозировки применяемого структурообразующего реагента карбоната натрия до количества, соответствующего стехиометрии по отношению к хлоридам кальция и магния: 0,9–1,0 кг/т готового гранулированного продукта.

**Создание усовершенствованной модели вальц-пресса с охлаждаемыми валками.** На основании выработанных технологических требований к прессованию галургического хлористого калия в условиях повышенных температур разработана конструкция вальц-пресса с охлаждаемыми валками. Предложенное совместно со специалистами ЗАО «Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством» техническое решение связано с глубокой модернизацией выпускаемого на этом предприятии вальц-пресса типа ПВП 650×1000. Чертежи разработанного оборудования представлены на рисунках 2 и 3.

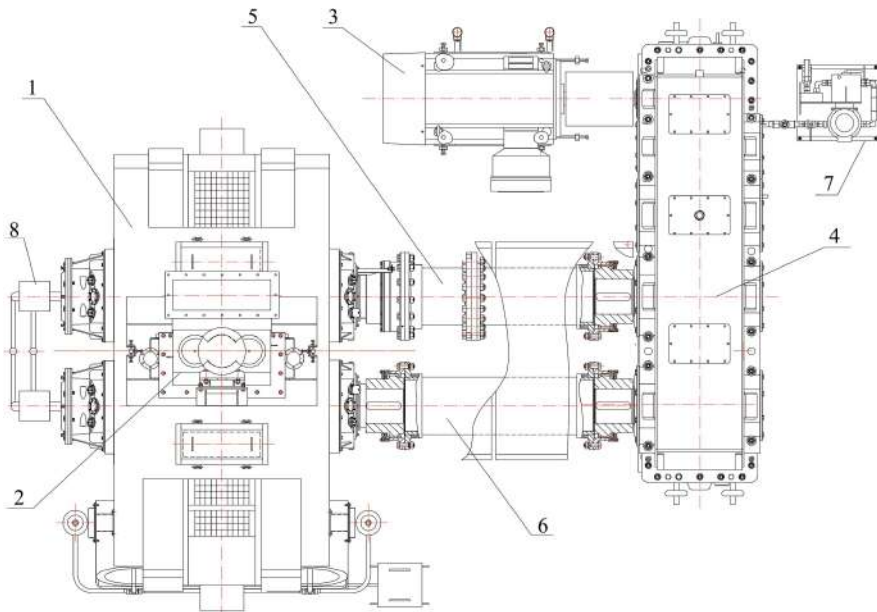


Рисунок 2 – Общий вид установки прессования

На рисунке 2 изображен общий вид установки прессования, которая состоит из вальц-пресса 1, подпрессовщика 2, электродвигателя 3 и редуктора 4



привода валков, регулировочного 5 и соединительного 6 валов, маслостанции 7, а также системы охлаждения валков 8.

Конструкция вала вальц-пресса (рисунок 3), в свою очередь, включает вал 1 с закрепленным на нем бандажом 2, узлы 3 и 4 опорных подшипников, установленные в раме 5 вальц-пресса, узел 6 упорных подшипников и зубчатую полушестерню 7, закрепленную на валу 1 со стороны привода вальц-пресса.

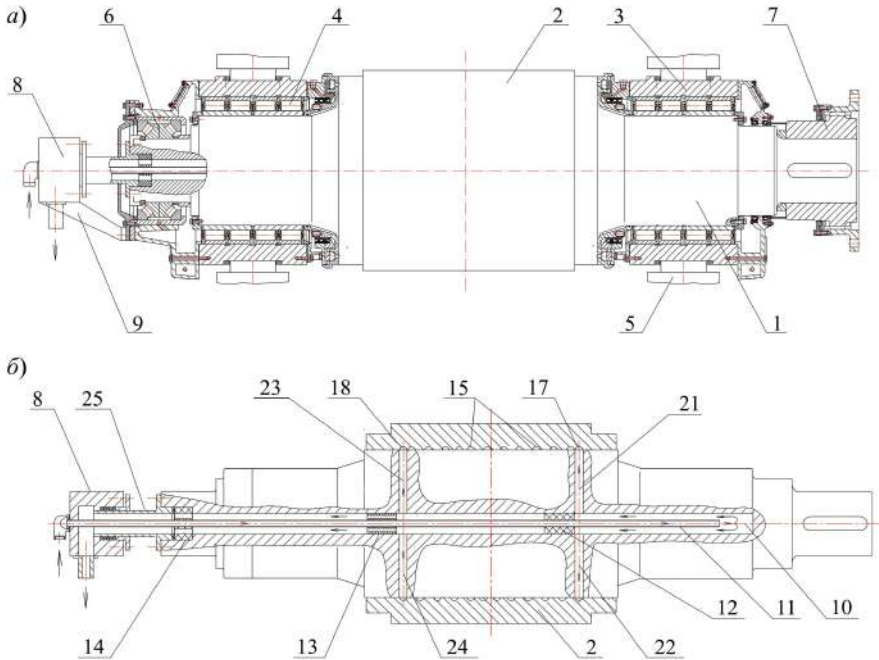


Рисунок 3 – Валок вальц-пресса:  
а – валок в сборе; б – валок в разрезе

Для снижения температуры рабочей поверхности валков они оборудованы системой охлаждения, включающей ряд элементов. Распределительная головка 8 закреплена на торцевой крышке вала соосно с валом 1 с помощью кронштейнов 9. Вал 1 имеет внутреннюю цилиндрическую полость 10. Труба 11 подачи охлаждающей жидкости закреплена в направляющих втулках 12, 13, 14, выполненных с применением антифрикционных материалов, причем втулка 12 глухо перекрывает живое сечение цилиндрической полости 10, а втулки 13 и 14 имеют сквозные отверстия, обеспечивающие проток охлаждающей жидкости через них. Спиральный канал 15 образован спиральной канавкой 16, выполненной на внутренней поверхности бандажа 2, и ответной поверхностью вала 1. Кольцевые каналы 17 и 18 образуются кольцевыми канавками 19 и 20, выполненными на внутренней поверхности бан-

даже 2, и ответной поверхностью вала 1. Радиально расположенные каналы 21 и 22 соединяют цилиндрическую полость 10 с кольцевым каналом 17, а аналогично расположенные каналы 23 и 24 – цилиндрическую полость 10 с кольцевым каналом 18. Труба 25 жестко и соосно оси вала 1 закреплена на его торце с образованием общего канала с цилиндрической полостью 10. Распределительная головка 8 включает корпус, стенки которого образуют внутреннее пространство, соединенное с трубой 25 отвода охлаждающей жидкости и патрубком, приспособленным для присоединения к магистральному трубопроводу слива отработанной охлаждающей жидкости. Труба 11 подачи охлаждающей жидкости закреплена в распределительной головке 8 с возможностью подсоединения внешнего напорного трубопровода подачи охлаждающей жидкости.

В ЗАО «Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством» начато производство модернизированного прессового оборудования для комплектации отделений грануляции хлористого калия. Опытно-промышленные испытания показали, что разработка обеспечивает снижение высоких температур нагрева рабочих поверхностей валков в процессе прессования материалов. Степень охлаждения валков определяется объемом и температурой поступающей охлаждающей жидкости.

**Заключение.** Предложена конструкция турболопастного смесителя-агломератора непрерывного действия, позволяющего обеспечить создание равномерного потока мелкозернистых и пылевидных частиц хлористого калия с высокой плотностью энергетического поля, который позволяет создать необходимую степень межмолекулярного сцепления механоактивированных поверхностей перерабатываемых частиц. Конструкционной особенностью аппарата является рабочая цилиндрическая полость с загрузочным и разгрузочными окнами, внутри которой размещен вал с закрепленными на нем перемешивающими элементами трех типов.

Разработан и внедрен вальц-пресс, позволяющий осуществлять компактирование частиц хлористого калия при высоких температурах. Отличительной особенностью разработанного устройства является наличие системы охлаждения валков постоянно циркулирующей охлаждающей жидкостью, что исключает налипание частиц прессуемого материала на рабочие поверхности валков.

Таким образом, предлагаемые технические решения дают возможность эффективного производства гранулированного хлористого калия при повышенных температурах прессования.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- 1 **Garrett, D. E.** Potash: Deposits, Processing, Properties and Uses / D. E. Garrett. – London : Chapman & Hall, 1996. – 734 p.
- 2 **Peraschuk, S. V.** Influence of the pressing temperature of halurgic potassium chloride on the operating conditions of the granulation plants / S. V. Peraschuk, O. M. Volchek,

V. Ya. Prushak // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series. – 2022. – Т. 67, № 3. – С. 263–268.

3 Разработка технологий кондиционирования мелкодисперсного и гранулированного хлорида калия / В. В. Шевчук [и др.] // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. хім. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 288–298.

4 Андреева, Н. К. Повышение качества калийных удобрений на основе улучшения физико-химических свойств исходного продукта / Н. К. Андреева // Горный журнал. – 2016. – № 4. – С. 76–79.

5 Классен, П. В. Гранулирование / П. В. Классен, И. Г. Гришаев, И. П. Шомин. – М. : Химия. – 1991. – С. 53.

6 Казаков, А. И. Оборудование для смешивания и гранулирования сыпучих материалов в производстве стеновой керамики / А. И. Казаков, Г. И. Стороженко // Строительные материалы. – 2011. – № 4. – С. 10–11.

7 Смеситель : пат. 14698 Респ. Беларусь : МПК (2006.01): В 01F 7/04 / А. В. Иванов, А. Э. Кошак, Ж. В. Кошак. – а 20090653 ; заявл. 06.05.09; опубл. 30.08.11. – 2 с.

8 Антиадгезионная смазка форм при формовании и получении изделий из синтетических полимеров : пат. 2014231 Россия : МПК В 29С 33/64 / В. А. Литвинова, А. И. Лаговский, О. В. Пахомова. – 19915017886 ; заявл. 09.07.91 ; опубл. 15.06.94. – 2 с.

9 Способ снижения налипания солей на поверхности валковых пресс-грануляторов : пат. 2764206 Россия : МПК (2006.01): В 08В 17/02, В 08В 3/02, В 08В 9/00 / В. З. Пойлов [и др.]. – 2020130283 ; заявл. 14.09.20 ; опубл. 14.01.22. – 7 с.

10 Пресс валковый для брикетирования полидисперсных сыпучих материалов : пат. 2450930 Россия : МПК (2006.01): В 30В 11/18 / П. И. Шашмурын [и др.]. – 20100132543 ; заявл. 02.08.10 ; опубл. 20.05.12. – 2 с.

11 Устройство для охлаждения валков : а. с. 266196 СССР : МПК<sup>3</sup> В 29В 3/00 / Н. Д. Дугинец. – 1269147/23-5 ; заявл. 06.09.68 ; опубл. 17.03.70. – 3 с.

*O. M. VOLCHEK*

*Baranovich State University, Baranovich, Belarus*

## **IMPROVEMENT OF EQUIPMENT FOR THE PRODUCTION OF GRANULAR POTASSIUM CHLORIDE**

There are proposed new designs of equipment that allows to product a granular potassium chloride efficiently at increased pressing temperatures. A turboblade mixer-agglomerator of continuous operation is presented, it is designed for agglomeration of fine-grained and dust-like potassium chloride particles, that makes it possible to obtain significant intermolecular adhesion of the mechanically activated surfaces of the processed particles. A feature equipment is a working cylindrical cavity with loading and unloading windows, a shaft with fixed three types of mixing elements is placed inside it. A roller press design for the potassium chloride particles pressing at high temperatures is proposed, its distinctive feature is the presence of a cooling system for the rolls with a constantly circulating coolant, that prevents the pressed material particles from sticking to the working surfaces of the rolls.

**Keywords:** roller press, agglomerator mixer, potassium chloride.

Получено 24.11.2022

УДК 656.136

И. А. ВОРОЖУН, А. В. ШИЛОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

## ВЛИЯНИЕ ПОВТОРНЫХ ТОРМОЖЕНИЙ ПОЕЗДА НА СМЕЩЕНИЯ ЯРУСОВ ТРАНСПОРТИРУЕМЫХ ТРУБ

Рассмотрена динамика поезда, который составлен из вагонов-платформ с трубами большого диаметра, размещенными в три яруса по высоте. Методом математического моделирования определены величины продольного смещения ярусов труб в случаях повторных торможений поезда.

**Ключевые слова:** платформа, ярусы труб, упругое крепление, смещение труб, торможение поезда.

Анализ литературных источников показал, что основной причиной, приводящей к разрушению и повреждению как перевозимых грузов, так и самих вагонов, является нарушение режимов эксплуатации подвижного состава, особенно при сортировочной работе [1, 2]. Значительные ускорения, возникающие при соударениях вагонов и экстренном торможении, становятся причиной перемещений многоярусных грузов. Данный факт имеет место, например, при упругом способе продольного крепления ярусов труб большого диаметра на платформах [3, 4]. Моделирование однократных продольных перемещений ярусов грузов, наблюдаемых при эксплуатации, представлено в работах [5, 6], однако в процессе следования по маршруту возможны случаи повторного экстренного торможения поезда как в прямом, так и в обратном направлении. Целью представленной работы является оценка продольных смещений ярусов труб в случае повторных торможений поезда.

Состав поезда представляет механическую систему со многими степенями свободы. В качестве расчетной схемы при решении рассматриваемой задачи целесообразно использование упрощенной одномерной модели, отражающей основные свойства системы [7]. Она включает движущиеся по прямому горизонтальному участку пути локомотив и вагоны, в качестве которых выступают, в том числе, платформы, загруженные  $n$  ярусами груза (рисунок 1).

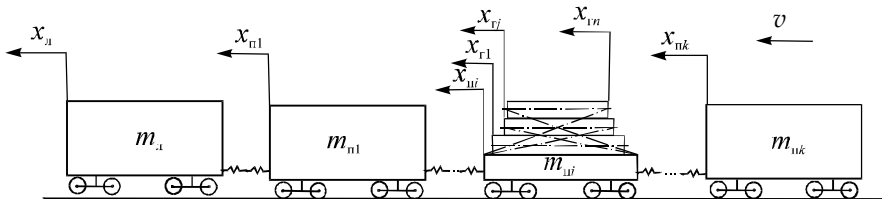


Рисунок 1 – Расчетная схема поезда с вагонами, загруженными трубами

Начало отсчета каждой из координат  $x_{\text{л}}, x_{\text{п}i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), определяющих положение локомотива и платформ, соответствует их нахождению на рассматриваемом участке пути в начальный момент времени ( $t = 0$ ) при недеформированных упругих элементах автосцепок. При этом начало отсчета каждой из координат  $x_{\text{г}j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), определяющих положение ярусов груза на платформе с номером  $i$ , соответствует их нахождению в начальный момент времени при недеформированных упругих элементах крепления.

Применение принципа Даламбера приводит к системе дифференциальных уравнений, отражающих движение локомотива,  $k$  платформ и  $n$  ярусов груза на  $i$ -й платформе:

$$\left. \begin{aligned} m_{\text{л}} \ddot{x}_{\text{л}} - R_{\text{л}} + B_{\text{л}} + W_{\text{л}} &= 0; \\ m_{\text{п}1} \ddot{x}_{\text{п}1} + R_{\text{л}} - R_{\text{п}1} + B_{\text{п}1} + W_{\text{п}1} &= 0; \\ \dots \\ m_{\text{п}i} \ddot{x}_{\text{п}i} + R_{\text{п}i} - R_{\text{п}i+1} - T_{\text{п}i} - F_{\text{г}1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\text{г}1} - \dot{x}_{\text{п}i}) + B_{\text{п}i} + W_{\text{п}i} &= 0; \\ m_{\text{г}1} \ddot{x}_{\text{г}1} + T_{\text{г}1} + F_{\text{г}1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\text{г}1} - \dot{x}_{\text{п}i}) + F_{\text{г}2} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\text{г}1} - \dot{x}_{\text{г}2}) &= 0; \\ \dots \\ m_{\text{г}j} \ddot{x}_{\text{г}j} + T_{\text{г}j} + F_{\text{г}j} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\text{г}j} - \dot{x}_{\text{г}j-1}) + F_{\text{г}j+1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\text{г}j} - \dot{x}_{\text{г}j+1}) &= 0; \\ \dots \\ m_{\text{г}n} \ddot{x}_{\text{г}n} - T_{\text{г}n} + F_{\text{г}n} \operatorname{sgn}(\dot{x}_{\text{г}n-1} - \dot{x}_{\text{г}n}) &= 0; \\ \dots \\ m_{\text{п}k} \ddot{x}_{\text{п}k} + R_{\text{п}k} + B_{\text{п}k} + W_{\text{п}k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $m_{\text{л}}, m_{\text{п}i}$  – масса соответственно локомотива и  $i$ -й платформы;  $m_{\text{г}j}$  – масса  $j$ -го яруса груза ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), размещенного на  $i$ -й платформе;  $\ddot{x}_{\text{л}}, \ddot{x}_{\text{п}i}, \ddot{x}_{\text{г}j}$  – продольное ускорение соответственно локомотива,  $i$ -й платформы поезда и  $j$ -го яруса груза;  $R_{\text{л}}, R_{\text{п}1}, R_{\text{п}k}$  – силы в междувагонных связях;  $B_{\text{л}}, B_{\text{п}1}, B_{\text{п}i}, B_{\text{п}k}$  – силы торможения;  $W_{\text{л}}, W_{\text{п}1}, W_{\text{п}i}, W_{\text{п}k}$  – силы основного сопротивления движению;  $T_{\text{п}i}$  – суммарная продольная горизонтальная сила в упругих элементах крепления ярусов груза к платформе;  $T_{\text{г}j}$  – продольная горизонтальная сила в упругих элементах крепления  $j$ -го яруса груза;  $F_{\text{г}j}$  – силы сухого трения между ярусами груза.

Система уравнений (1) справедлива также при наличии в схеме крепления поперечной обвязки и промежуточных опор между ярусами труб. В этом случае поперечную обвязку и промежуточные опоры следует рассматривать как соответствующие ярусы груза. Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x_{\text{л}}(0) = x_{\text{п}1}(0) = \dots x_{\text{п}i}(0) = \dots x_{\text{п}k}(0) = x_{\text{г}1}(0) = \dots x_{\text{г}j}(0) = \dots x_{\text{г}n}(0) &= 0; \\ \dot{x}_{\text{л}}(0) = \dot{x}_{\text{п}1}(0) = \dots \dot{x}_{\text{п}i}(0) = \dots \dot{x}_{\text{п}k}(0) = \dot{x}_{\text{г}1}(0) = \dots \dot{x}_{\text{г}j}(0) = \dots \dot{x}_{\text{г}n}(0) &= v_0, \end{aligned}$$

где  $\dot{x}_л$ ,  $\dot{x}_{ni}$  – скорости локомотива и  $i$ -го вагона;  $v_0$  – начальная скорость, соответствующая скорости движения поезда на момент начала торможения, м/с.

Силы в междувагонных соединениях с пружинно-фрикционными поглощающими аппаратами при перемещениях вагонов, не превышающих ход таких аппаратов, имеют вид [8]

$$R_i = c(x_{n(i+1)} - x_{ni})(1 + \mu \operatorname{sgn}((x_{n(i+1)} - x_{ni})(\dot{x}_{n(i+1)} - \dot{x}_{ni}))),$$

где  $c$  – коэффициент жесткости упругих элементов в междувагонных соединениях;  $\mu$  – коэффициент трения в междувагонных элементах.

Сила торможения локомотива (платформы) [9]

$$B = zP\varphi_{кр},$$

где  $z$  – число тормозных осей локомотива (платформы);  $P$  – расчетное нажатие тормозных колодок на ось, Н;  $\varphi_{кр}$  – расчетный коэффициент трения тормозных колодок. Его значение для чугуновых тормозных колодок определяется выражением

$$\varphi_{кр} = 0,27(v + 100)/(5v + 100),$$

где  $v$  – скорость движения, км/ч.

При экстренном торможении поезда расчетное нажатие тормозных колодок на ось  $P$ , Н, принимают:

- для шестиосного тепловоза – 120000;
- для четырехосных груженых платформ – 70000.

Сила основного сопротивления движению локомотива (платформы) определяется выражением

$$W = mgw,$$

где  $m$  – масса локомотива (платформы), т;  $g$  – ускорение свободного падения;  $w$  – удельная сила сопротивления движению локомотива (платформы), Н/т.

Значение удельной силы сопротивления движению принимают:

- для локомотива на холостом ходу

$$w = 24 + 0,11v + 0,0035v^2;$$

- для четырехосных груженых платформ ( $q > 6$  т) на роликовых подшипниках при бесстыковом пути

$$w = 7 + (30 + 0,9v + 0,02v^2)/q,$$

где  $q$  – масса платформы, приходящаяся на ось колесной пары, т,

$$q = m/4.$$

Представленная математическая модель позволяет провести расчеты при различных способах продольного крепления ярусов труб на платформе. Все эти способы крепления труб можно свести к двум основным [10, 11]:

– с продольным креплением труб всех ярусов непосредственно к раме платформы;

– с продольным креплением труб нижнего яруса к раме платформы, а труб каждого последующего яруса – к трубам предыдущего яруса (ярусное крепление).

Возможен также комбинированный способ продольного крепления ярусов труб, совмещающий названные выше.

С целью конкретизации модели рассмотрен процесс экстренного торможения поезда на тепловозной тяге, включающего 16 четырехосных платформ. Каждая платформа загружена пятью трубами в три яруса (рисунок 2).

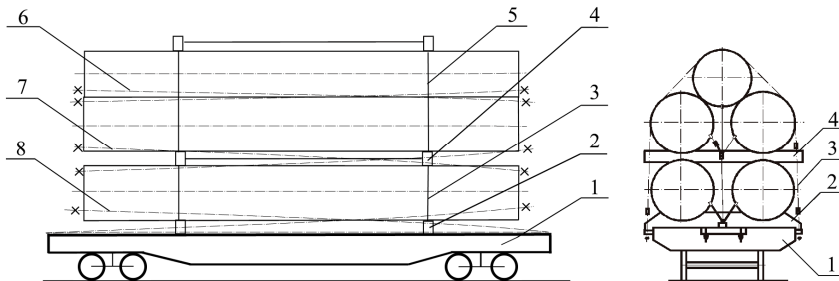


Рисунок 2 – Продольное крепление к раме платформы пяти труб:

1 – платформа; 2 – опоры для труб нижнего яруса; 3 – тяжи крепления промежуточных опор; 4 – промежуточные опоры для труб среднего яруса; 5 – поперечная обвязка; 6 – элементы продольного крепления трубы верхнего яруса к трубам среднего яруса; 7 – крепления среднего яруса к трубам нижнего яруса; 8 – нижнего яруса к раме платформы

Суммарная продольная горизонтальная сила в упругих элементах крепления ярусов груза к платформе определяется выражением

$$T_{pi} = T_{r1} + T_{r2} \cdot \sin \alpha_2 + T_{r5} \cdot \sin \alpha_1,$$

где  $T_{r1}$ ,  $T_{r2}$ ,  $T_{r5}$  – силы в упругих элементах продольного крепления труб нижнего яруса, крепления промежуточных опор и поперечной обвязки к раме платформы (см. рисунок 2) определяются выражениями

$$T_{r1} = c_1(x_{r1} - x_{pi}); \quad T_{r2} = c_2(\sqrt{h_2^2 + (x_{r2} - x_{pi})^2} - h_2);$$

$$T_{r5} = c_5(\sqrt{h_1^2 + (x_{r5} - x_{pi})^2} - h_1),$$

$c_1, \dots, c_5$  – соответственно коэффициенты жесткости упругих элементов: продольного крепления труб нижнего яруса, крепления промежуточных опор, продольного крепления труб среднего и верхнего ярусов, поперечной обвязки;  $h_1, h_2$  – соответственно длины канатов крепления поперечной обвязки и промежуточных опор в свободном (недеформированном) состоянии;  $\alpha_1, \alpha_2$  – соответственно отклонения канатов крепления поперечной обвязки и промежуточных опор от вертикали.

Горизонтальные силы в упругих элементах продольного крепления труб среднего яруса к трубам нижнего яруса и трубы верхнего яруса к трубам среднего яруса определяются выражениями

$$T_{r3} = c_3(x_{r3} - x_{r1}); \quad T_{r4} = c_4(x_{r4} - x_{r3}).$$

Силы сухого трения между поверхностями труб нижнего яруса и опор платформы, а также промежуточных опор, труб среднего яруса и промежуточных опор, а также трубы верхнего яруса, трубы верхнего яруса и элементов поперечной обвязки определяются выражениями

$$F_{r1} = f_1((m_{r1} + m_{r2} + m_{r3} + m_{r4} + m_{r5})g + T_{r2} \cos \alpha_2 + T_{r5} \cos \alpha_1);$$

$$F_{r2} = f_2((m_{r2} + m_{r3} + m_{r4} + m_{r5})g + T_{r2} \cos \alpha_2 + T_{r5} \cos \alpha_1);$$

$$F_{r3} = f_3((m_{r3} + m_{r4} + m_{r5})g + T_{r5} \cos \alpha_1);$$

$$F_{r4} = f_4((m_{r4} + m_{r5})g + T_{r5} \cos \alpha_1);$$

$$F_{r5} = f_5(m_{r5}g + T_{r5} \cos \alpha_1),$$

где  $f_1, \dots, f_5$  – соответственно коэффициенты трения между трубами нижнего яруса и опорами платформы, а также промежуточными опорами; между трубами среднего яруса и промежуточными опорами, а также трубой верхнего яруса; между трубой верхнего яруса и элементами поперечной обвязки.

Тригонометрические функции углов  $\alpha_1, \alpha_2$  определяются с учетом размеров труб и устройства их крепления, а также смещения ярусов труб относительно платформы в процессе торможения поезда:

$$\sin \alpha_1 = (x_{r5} - x_{ni}) / \sqrt{h_1^2 + (x_{r5} - x_{ni})^2}; \quad \cos \alpha_1 = h_1 / \sqrt{h_1^2 + (x_{r5} - x_{ni})^2};$$

$$\sin \alpha_2 = (x_{r2} - x_{ni}) / \sqrt{h_2^2 + (x_{r2} - x_{ni})^2}; \quad \cos \alpha_2 = h_2 / \sqrt{h_2^2 + (x_{r2} - x_{ni})^2}.$$

Численное интегрирование уравнений системы (1) проводилось для скорости 100 км/ч на момент начала торможения поезда, состоящего из тепловоза и 16 платформ с трубами. Расчеты проводились в среде MathCAD [12] при следующих исходных данных:  $m_n = 129000$  кг;  $m_{n1} = \dots = m_{n(i-1)} = m_{n(i+1)} = \dots = m_k = 56610$  кг;  $m_{ni} = 22000$  кг;  $m_{r1} = m_{r3} = 13800$  кг;  $m_{r2} = 100$  кг;  $m_{r4} = 6900$  кг;  $m_{r5} = 10$  кг;  $c = 11$  МН/м;  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 2$  МН/м;  $\mu = 0,55$ ;  $h_1 = 4,2$  м;  $h_2 = 1,6$  м;  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0,35$ .

Результаты расчета смещения ярусов труб относительно платформы приведены на рисунках 3 и 4. Из представленных графиков видно, что после первого торможения (см. рисунок 3, а) и после повторного торможения в направлении предыдущего (см. рисунок 3, б) конечные смещения ярусов труб относительно платформы остаются практически неизменными.



Приведенные результаты расчетов (см. рисунки 3, а и 4) свидетельствуют о том, что смещения ярусов труб относительно платформы после повторного торможения в направлении, противоположном предыдущему, также практически не изменяются.

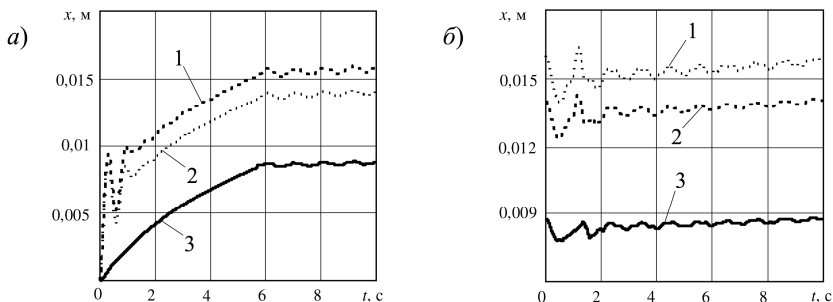


Рисунок 3 – Смещение ярусов труб относительно платформы после первого торможения (а) и повторного в направлении предыдущего (б):  
1 – верхний ярус; 2 – средний ярус; 3 – нижний ярус

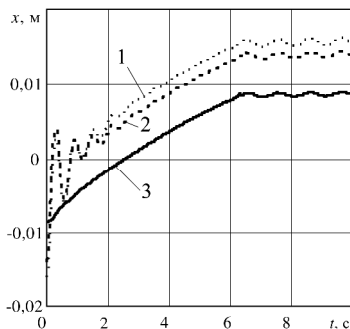


Рисунок 4 – Смещение ярусов труб относительно платформы после повторного торможения в направлении, противоположном предыдущему:  
1 – верхний ярус; 2 – средний ярус; 3 – нижний ярус

**Заключение.** Полученные в результате проведенных исследований данные свидетельствуют о том, что при повторных торможениях поезда в одинаковых или разных направлениях величины конечных смещений ярусов труб относительно платформы по отношению к их положению после погрузки в обоих направлениях остаются практически неизменными. Расхождение конечных величин смещений ярусов труб не превышает 2 мм.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Королёва, Д. Ю. Совершенствование метода расчета крепления грузов при соударениях вагонов: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.22.08 / Д. Ю. Королёва. – Новосибирск : СГУПС, 2001. – 23 с.

2 **Костина, Н. А.** Уточнение характеристик нагруженности вагона продольными силами через автосцепку / Н. А. Костина // Вестник ВНИИЖТ, 1981. – № 4. – С. 36–39.

3 **Заворотный, А. В.** Влияние ослабления крепления на величину продольного смещения труб / А. В. Заворотный, И. А. Ворожун // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2008. – № 1 – С. 81–84.

4 **Псеровская, Е. Д.** Изучение динамики многоярусного груза и воспринимаемых креплениями нагрузок при маневровых соударениях вагонов / Е. Д. Псеровская, С. Ю. Хорунжин // Известия Транссиба. – 2010. – № 1 (1). – С. 106–112.

5 Моделирование взаимных продольных перемещений ярусов штабельных грузов с учетом сил трения / А. Н. Бондаренко [и др.] // Механика и трибология транспортных систем – 2003 : материалы докл. Междунар. конгр. – Ростов н/Д, 2003. – С. 126–130.

6 **Chaganova, O. S.** Fastenings parameters determination for highly deformative cargo, taking into account its durability during transportation in cars and trains / O. S. Chaganova, I. A. Varazhun // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2018. – Vol. 7, no. 3. – P. 218–222.

7 **Ворожун, И. А.** Моделирование взаимодействия ярусов груза и платформы при торможении поезда / И. А. Ворожун, А. В. Шилович // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 2. – С. 52–58.

8 **Вершинский, С. В.** Динамика вагонов / С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, В. Д. Хусидов. – М. : Транспорт, 1991. – 360 с.

9 **Рудов, П. К.** Расчет тормозов вагонов : учеб.-метод. пособие по курсовому проектированию / П. К. Рудов. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 90 с.

10 **Ворожун, И. А.** Метод определения динамических сил при соударении вагонов / И. А. Ворожун, А. В. Заворотный, А. В. Шилович // Горная механика и машиностроение. – 2011. – № 1. – С. 65–72.

11 **Varazhun, I.** Determination of Longitudinal Forces in the Cars Automatic Couplers at Train Electrodynamic Braking / I. Varazhun, A. Shimanovsky, A. Zavarotny // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 134. – P. 415–421.

12 **Поршнев, С. В.** Компьютерное моделирование физических систем с использованием пакета MathCAD / С. В. Поршнев. – М. : Горячая Линия – Телеком, 2015. – 320 с.

*I. A. VARAZHUN, A. V. SHILOVICH*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **INFLUENCE OF REPEATED TRAIN BRAKES ON DISPLACEMENTS OF PIPES LAYERS**

The dynamics of a train composed of flatcars loaded by large diameter pipes placed in three tiers in height is considered. The longitudinal displacement values for the tiers of pipes in cases of the train repeated braking are determined by the method of mathematical modeling.

**Keywords:** platform, tiers of pipes, elastic fastening, displacement of pipes, train braking.

Получено 15.10.2022

УДК 629.4.077-597.3:629.46

*Э. И. ГАЛАЙ, А. А. ЮЛДАШОВ, Е. Э. ГАЛАЙ, П. К. РУДОВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОМПОЗИЦИОННЫХ ТОРМОЗНЫХ КОЛОДОК С РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ ИЗНОСА**

Приведены методика и результаты расчета эффективности тормозов при различных параметрах изношенной тормозной колодки. Установлено, что при любом износе композиционной колодки давление (удельное нажатие) во фрикционном узле превышает допускаемое значение при установке воздухораспределителя на груженный режим. Даже на среднем режиме возможно увеличение удельной тормозной силы сверх допускаемой нормы при нажатии неизношенных композиционных колодок. Коэффициент трения и тормозная сила зависят от диаметра колесной пары при прочих равных показателях. Температура в зоне фрикционного контакта также существенно влияет на коэффициент трения колодки. Поэтому для нормальной работы тормозного узла с композиционными колодками рекомендуется включать воздухораспределители на средний режим, и в настоящее время грузовые вагоны эксплуатируются с пониженным давлением в тормозных цилиндрах.

**Ключевые слова:** тормозная колодка, коэффициент трения, тормозная сила, износ, удельная тормозная сила, диаметр колеса.

Известно, что тормозная сила грузового вагона не должна превышать силы сцепления колес с рельсами. Она зависит не только от материала тормозной колодки, но и от степени её износа, поскольку площадь фактического контакта колодки и колеса может изменяться, в том числе в зависимости от шероховатости их поверхностей. Эмпирические формулы для расчета коэффициента трения не учитывают различие площади трения колодок по мере износа и фактической величины давления при той же силе нажатия для новой и изношенной колодок [1]. Поэтому существует необходимость анализа влияния величины износа колодок на эффективность торможения.

Во фрикционных тормозных узлах железнодорожного подвижного состава, как правило, имеет место трение скольжения без смазочного материала, поскольку даже при попадании влаги в зону фрикционного контакта, когда проявляется эффект граничной смазки, резкое возрастание температуры при торможении приводит к быстрому испарению влаги и переходу фрикционной пары на сухое трение. Поэтому при расчете тормозов учитывают эффект сухого внешнего трения. В этом случае в результате различных процессов – механических, тепловых – в зоне контакта поверхности колодки и колеса разделены тонкими адсорбционными слоями различной природы, поэтому, очевидно, более правильно говорить о граничном трении во фрикционных узлах тормозов.

Одним из тел трения является стальной обод колеса, а другим – чугун или композиционный материал тормозной колодки. Согласно наиболее рас-

пространенной в настоящее время молекулярно-механической теории И. В. Крагельского [2–5] сила трения  $F$  состоит из двух компонентов: молекулярного  $f_a$  и деформационного  $f_d$ . Соответственно, коэффициент трения  $f$  также состоит из двух частей

$$f = f_a = f_d.$$

Для шероховатых поверхностей при постоянной скорости скольжения [6]

$$f = \frac{\tau_0}{\delta} + \beta + k\alpha_g \sqrt{\frac{\alpha}{R}}, \quad (1)$$

где  $\tau_0$ ,  $\beta$  – коэффициенты, зависящие от наличия плёнок на поверхностях колеса и тормозной колодки;  $\delta$  – коэффициент, зависящий от силы нажатия и механических свойств материалов, из которых состоят трущиеся поверхности;  $k$  – коэффициент шероховатости;  $\alpha_g$  – коэффициент гистерезисных потерь, изменяется от 0 до 1. При чисто упругом контакте  $\alpha_g = 0$ , при пластическом  $\alpha_g = 1$ ;  $\alpha$  – зазор между трущимися поверхностями, зависящий от силы нажатия и физико-механических свойств материалов;  $R$  – радиус площадки точечного контакта.

Контакт твердых тел (колодки и колеса) из-за наличия неровностей осуществляется в отдельных точках (пятнах), в области которых при скольжении тел друг по другу возникают силы, препятствующие их взаимному перемещению (силы трения) [3–5].

Рассматривая формулу (1), убеждаемся, что практически ни одну из величин, входящих в неё, невозможно однозначно задать при торможении подвижного состава, тем более что указанная формула записана для какой-то одной скорости трения.

В теории тормозов, в том числе в руководящих документах, коэффициент трения обозначается  $\varphi_k$  [4–7], в то время как в научной литературе принято обозначение  $f$  [2, 3, 5, 8–11], а в некоторых работах –  $\mu$  [12, 13]. Коэффициент трения  $\varphi_k$ , как правило, является функцией скорости взаимного перемещения трущихся тел, то есть фактически скорости движения экипажа (локомотива или вагона), хотя в последнее время появились фрикционные элементы из композиционных материалов, обеспечивающие его постоянную величину при различных скоростях движения или даже увеличение при повышенной скорости [14].

Тормозная сила фрикционных тормозов во многом зависит от значения коэффициента трения. В частности, удельная тормозная сила  $b_T(v)$ , реализуемая при торможении при скорости  $v$ , определяется выражением

$$b_T(v) = 10^6 nK \varphi_k q_0^{-1}, \quad (2)$$

где  $n$  – число тормозных колодок, действующих на оси колесной пары;  $K$  – их сила нажатия, кН;  $\varphi_k$  – коэффициент трения;  $q_0$  – осевая нагрузка, т.

Кроме того, удельная тормозная сила  $b_T(v)$  не должна превышать значение, допускаемое при безюзовом торможении,

$$[b_{\tau}(v)] = 10^3 g q_0 \psi_k(v) k_c k_{\text{тепл}},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ ;  $\psi_k(v)$  – коэффициент сцепления для данной единицы подвижного состава при скорости  $v$ ;  $k_c$  – коэффициент запаса по сцеплению;  $k_{\text{тепл}}$  – коэффициент, который вводится для учета тепловой нагрузки фрикционного узла при торможении.

Очевидно, что  $[b_{\tau}(v)] \geq b_{\tau}(v)$ .

На процесс трения оказывает влияние действующая сила нажатия  $K$ , которая распределяется по площади фрикционного контакта и создает механические напряжения в микровыступах, образующих рельеф поверхностей, который определяет ее шероховатость. Здесь возникают упруго-пластические деформации, образуется «третье тело» в виде пленок и наростов, повышается температура в зоне контакта. Трение является граничным, поскольку деформации сосредоточены в тонком поверхностном слое композиционного материала или чугуна колодки и в теле стального бандажа.

Многочисленные исследования [2, 15] показывают, что в тормозных колодках коэффициент трения покоя  $\varphi_c$  при неподвижной зоне трения, как правило, всегда значительно больше коэффициента кинетического трения (чугунные колодки). В то же время для композиционных материалов, применяемых в тормозных узлах,  $\varphi_c$  незначительно превышает  $\varphi_k$ , а в некоторых случаях оказывается даже меньше. В частности, данный факт имеет место для колодки EV5 «Диафрикт К4» производства Чехии, где при скорости 40–60 км/ч и силе нажатия  $K = 20$  кН получается  $\varphi_c = 0,22$ ,  $\varphi_k = 0,33$  [14]. Это создает определенные сложности в эксплуатации, например, при оснащении локомотива композиционными колодками, остановке поезда на уклоне и последующем трогании, когда тормозная сила локомотива оказывается недостаточной для удержания поезда с отпущенными тормозами (рисунок 1). Такая ситуация имела место на Белорусской железной дороге при следовании грузового поезда с локомотивом БКГ-1 китайского производства с односторонним нажатием тормозных колодок на колесо.

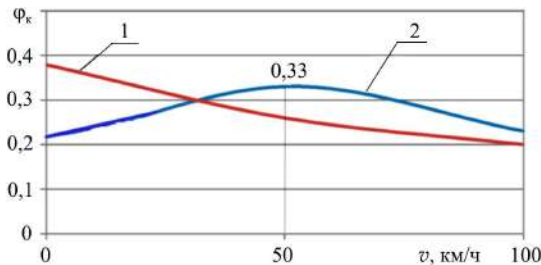


Рисунок 1 – Зависимости коэффициента трения от скорости  $\varphi_k(v)$ :

- 1 – для композиционных колодок из материалов ТИИР;
- 2 – из бронзографитового материала EV5 Диафрикт К4

Если величины  $n$ ,  $K$ ,  $q_0$  всегда имеют определенное значение для данного экипажа, то коэффициент трения  $\varphi_k$  и коэффициент сцепления  $\psi_k$  зависят от множества факторов, в том числе случайных, которые сложно описать количественно с помощью элементарных формул. Поэтому для вычисления коэффициента трения  $\varphi_k$  применяют экспериментальные зависимости, полученные при многочисленных испытаниях различных железнодорожных экипажей для изменения скорости от  $v_{\max}$  до остановки  $v = 0$  в случае различной силы нажатия  $K$  тормозных колодок. Коэффициент сцепления  $\psi_k$  зависит от скорости движения, давления в зоне касания колеса и рельса (осевой нагрузки), а также ряда случайных явлений, которые учесть практически невозможно (погодные условия, загрязнение рельсов и колес, диаметр колеса и др.).

При расчетах железнодорожных тормозов [6, 7, 13, 16, 17] используются эмпирические формулы, устанавливающие зависимость коэффициента трения  $\varphi_k$  от силы нажатия тормозного элемента  $K$  и скорости  $v$  движения поезда, а также формулы для определения коэффициента сцепления  $\psi_k$ ,

$$\varphi_k = \alpha\varphi(K)\varphi(v), \quad (3)$$

где  $\varphi(K) = \frac{\beta K + \gamma}{\delta K + \gamma}$ ;  $\varphi(v) = \frac{fv + e}{cv + e}$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $f$ ,  $c$ ,  $e$  – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала колодки.

Коэффициент сцепления позволяет определить ограничение тормозной силы экипажа

$$\psi_k = \psi(q)\psi(v), \quad (4)$$

где  $\psi(q) = 0,17 - 0,0015(q_0 - 5)$ ;  $\psi(v) = \frac{v + 576}{4v + 605}$  – для грузовых вагонов с

буксовым и смешанным рессорным подвешиванием;  $\psi(v) = \frac{v + 81}{2,5v + 85,3}$  – для

грузовых вагонов на тележках с центральным рессорным подвешиванием.

В формулах (3), (4) скорость  $v$  задается в км/ч.

Эмпирические формулы, принятые для расчета коэффициента трения, не учитывают площадь трущихся тел, хотя сила нажатия  $K$  и давление во фрикционном контакте рассчитаны для стандартных тормозных колодок, имеющих площади: чугунные  $S_{\text{нч}} = 0,0305 \text{ м}^2$ , композиционные  $S_{\text{нк}} = 0,029 \text{ м}^2$ .

В композиционной колодке имеется паз шириной 2–3 см, разделяющий её на две части. В последнее время появились композиционные колодки несколько меньших размеров и колодки с одной или двумя чугунными вставками [7, 17]. Локомотивные композиционные колодки производства КНР имеют большую ширину  $86 \pm 2$  мм, их длина  $311 \pm 5$  мм. На локомотивах применяют одностороннее нажатие и колодки с повышенным коэффициентом трения, практически постоянным при данной силе нажатия, мало зависящим от скорости.

Поскольку площадь фактического контакта может изменяться, в том числе в зависимости от шероховатости поверхности колодки и колеса, то целесообразно представить силу нажатия  $K$  как произведение величины давления или удельного нажатия колодки на колесо на площадь трения:

$$K = 10^3 p S_n, \quad (5)$$

где  $p$  – удельное нажатие (давление) во фрикционном узле, МПа;  $S_n$  – номинальная, полная геометрическая площадь контакта колодки, м<sup>2</sup>.

Функция, представляющая зависимость коэффициента трения от удельного нажатия колодки на колесо [11],

$$\varphi(p) = \frac{\beta_1 p + \gamma}{\delta_1 p + \gamma},$$

где  $\beta_1 = 10^3 \beta S_n$ ;  $\delta_1 = 10^3 \delta S_n$ .

Тогда формула для расчета коэффициента трения приобретает вид

$$\varphi_k = \alpha \frac{10^3 \beta p S_n + \gamma}{10^3 \delta p S_n + \gamma} \varphi(v).$$

Удельная тормозная сила (2), развиваемая на оси колесной пары при известном давлении  $p$  и площади  $S_{нк}$  композиционных колодок с различной степенью износа при постоянной силе нажатия  $K$  тормозной колодки, зависит от передаточного числа рычажной передачи и величины давления в тормозном цилиндре.

При допустимой силе нажатия композиционной тормозной колодки по тепловому режиму фрикционного узла  $K = 26,1$  кН в случае  $S_{нк} = 0,029$  м<sup>2</sup> обеспечивается величина давления  $[p] = 0,9$  МПа [7, 17].

На среднем режиме воздухораспределителя, как работают в настоящее время тормоза в грузовых поездах, сила нажатия колодки составляет 16–18 кН при расчетном давлении в тормозном цилиндре  $p_{ци} = 0,28$  МПа в рабочей камере 295.000 и  $p_{ци} = 0,3 \dots 0,34$  МПа – в рабочей камере 295М-002. Передаточное число тормозной рычажной передачи для композиционных колодок в зависимости от конструкции вагона и пневматической системы может быть  $n_p = 4 \dots 10$ . Композиционные колодки ТИИР различных модификаций имеют в сечениях разную площадь трения  $S_{нк}$ . По мере износа колодки площадь контактной поверхности изменяется от 170–180 (для новой) и до 280–290 см<sup>2</sup> для полностью изношенной. При этом в значительной мере изменяется фактическое давление при той же силе нажатия  $K$ .

Сечение типовой тормозной колодки выбрано исходя из профиля обода нового цельнокатаного колеса грузового вагона, однако при износе колеса профиль несколько меняется, также изнашивается тормозная колодка, а площадь поверхности трения по мере износа колодки возрастает (рисунок 2).

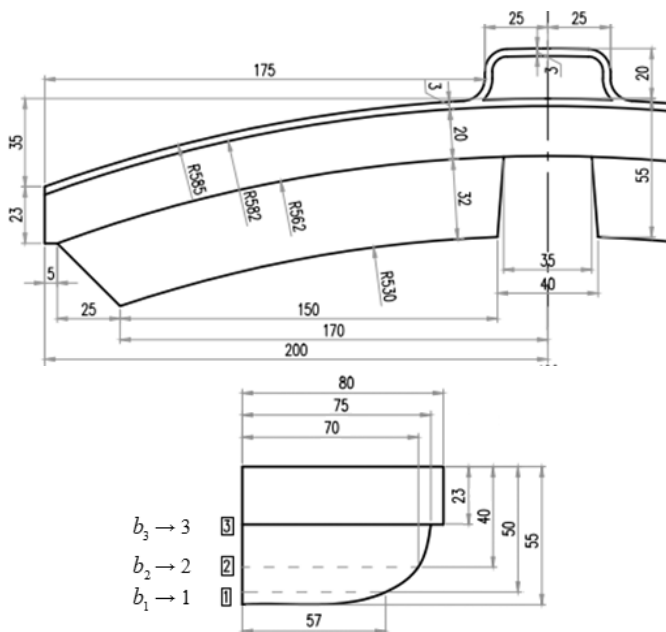


Рисунок 2 – Параметры композиционной тормозной колодки

Площадь трения новой неизношенной колодки (в сечении 1)

$$S_{н1} = 2L_1b_1 = 2 \cdot 15 \cdot 5,7 = 171 \text{ см}^2 = 0,0171 \text{ м}^2;$$

– при износе в сечениях 2 и 3:

$$S_{н2} = 2L_2b_2 = 2 \cdot 17,5 \cdot 7,0 = 245 \text{ см}^2 = 0,0245 \text{ м}^2;$$

$$S_{н3} = 2L_3b_3 = 2 \cdot 18,0 \cdot 8 = 288 \text{ см}^2 = 0,0288 \text{ м}^2.$$

Фактически из-за наличия паза в теле колодки длина трущейся части также изменяется. Кроме того, у новой колодки радиус поверхности трения составляет 530 мм, и площадь трения меняется в зависимости от диаметра колеса, который варьируется в пределах от 964 до 854 мм – для грузовых вагонов и 870 мм – для пассажирских.

Оценим удельную тормозную силу, которую реализует тормозная колодка: новая и после износа разной степени. При этом не учитываем износ поверхности катания колес, что также влияет на величину площади поверхностного контакта. Очевидно, следует принять невыгодные условия работы фрикционного узла и максимально допускаемую осевую нагрузку, при которой могут работать тормоза.

Сила нажатия  $K = 26,1$  кН в процессе торможения как правило не меняется, поскольку зависит от давления в тормозном цилиндре и передаточного



числа рычажной передачи. Из уравнения (5) определим величину удельного нажатия (давления) во фрикционном узле при изменении площади трения колодки по мере износа:

$$p_1 = \frac{K}{10^3 S_{н1}} = \frac{26,1}{10^3 \cdot 0,0171} = 1,53 \text{ МПа}; \quad p_2 = \frac{K}{10^3 S_{н2}} = \frac{26,1}{10^3 \cdot 0,0245} = 1,065 \text{ МПа};$$

$$p_3 = \frac{K}{10^3 S_{н3}} = \frac{26,1}{10^3 \cdot 0,0288} = 0,906 \text{ МПа}.$$

Таким образом, при максимальном износе колодки площадь трения  $S_{н \max} = 0,029 \text{ м}^2$  и допускаемое давление  $p_{\max} = 0,9 \text{ МПа}$ . Именно такое значение давления принимают за максимальное при расчетах системы с композиционными колодками на скорости до 120 км/ч [17, 18].

Практически при любом износе колодки давление (удельное нажатие) во фрикционном узле превышает допускаемое значение в случае установки воздухораспределителя на груженный режим. Очевидно поэтому тормоза с композиционными колодками типа ТИИР, как правило, работают на среднем режиме воздухораспределителя, когда обеспечивается сила нажатия тормозной колодки  $K = 16\text{--}18 \text{ кН}$  и давление во фрикционном узле при максимальном износе колодки составляет

$$p_3^c = \frac{18}{10^3 \cdot 0,0288} \approx 0,63 \text{ МПа}.$$

Таким образом, даже на среднем режиме возможно увеличение удельной тормозной силы при нажатии неизношенной композиционной колодки, которое приводит к ненормальной работе фрикционного узла, особенно при частых торможениях, когда отмечается повышение температуры обода колесной пары.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Günay, M.** An investigation on braking systems used in railway vehicles / M. Günay, M. E. Korkmaz, R. Özmen // Engineering Science and Technology, an International Journal. – 2020. – Vol. 23, is. 2. – P. 421–431.

2 **Крагельский, И. В.** Трение и износ / И. В. Крагельский. – М. : Машиностроение, 1968. – 480 с.

3 **Богданович, П. Н.** Трение и износ в машинах / П. Н. Богданович. – Минск : Технология, 2011. – 527 с.

4 **Галай, Э. И.** Тармазы цягнікоў / Э. И. Галай. – Гомель : БелДУТ, 1999. – 100 с.

5 **Галай, Э. И.** Тормоза локомотивов и вагонов: проблемы и перспективы : учеб. пособие : в 2 ч. / Э. И. Галай. – Ч. 1 : Повышение эффективности фрикционных тормозов. – Гомель : БелИИЖТ, 1992. – 71 с. ; ч. 2 : Фрикционные узлы тормозов. – Гомель : БелИИЖТ, 1993. – 69 с.

6 **Казаринов, В. М.** Теоретические основы проектирования и эксплуатации автотормозов / В. М. Казаринов, В. Г. Иноземцев, В. Ф. Ясенцев. – М. : Транспорт, 1968. – 399 с.

7 **Галай, Э. И.** Тормозные системы железнодорожного транспорта. Расчет пневматических тормозов : учеб. пособие / Э. И. Галай. – Гомель : БелГУТ, 2014. – 271 с.

8 Фрикционные композиты на основе полимеров / А. К. Погосян [и др.]. – Минск : Информтрибо, 1992. – 218 с.

9 Балакин, В. А. Тепловые расчеты тормозов и узлов трения / В. А. Балакин, В. П. Сергиенко. – Гомель : ИММС НАНБ, 1999. – 220 с.

10 The Car and Locomotive Cyclopedia of American Practices. Section 8 Freight Car Brakes. – Omaha, NE : Simmons-Boardman Publishing Corp., 1997. – P. 839–916.

11 Podemski, J. Hamulce / J. Podemski, R. Marczewski. – Warszawa : Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1984. – 241 s.

12 Kalinkowski, A. Wagony kolejowe i hamulce / A. Kalinkowski, A. Orlik. – Warszawa : Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1981. – 267 s.

13 Orlik, A. Hamulce pociągów kolejowych : podstawy konstrukcji i działania / A. Orlik. – Warszawa : Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1978. – 326 s.

14 Вуколов, Л. А. Металлокерамические тормозные колодки для тягового подвижного состава / Л. А. Вуколов, С. А. Сапожников, В. Я. Берент // Вестник ВНИИЖТ. – 2009. – № 5. – С. 13–15.

15 Павлюков, А. Э. Тормозные оборудование грузовых вагонов: анализ повреждаемости и факторов, влияющих на создание тормозной силы / А. Э. Павлюков, О. В. Черепов, П. И. Шалупина // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. – 2017. – № 4 (36). – С. 4–11.

16 Галай, Э. И. Тепловой расчет фрикционных узлов тормоза грузовых вагонов / Э. И. Галай, Е. Э. Галай, П. К. Рудов // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 31–40.

17 Правила тяговых расчетов для поездной работы : утв. распоряжением ОАО «РЖД» № 867р от 12.05.2016 г. – М. : ОАО «РЖД», 2016. – 515 с.

18 Галай, Э. И. Испытания и тепловой расчет колодочных тормозов железнодорожного подвижного состава / Э. И. Галай, В. А. Балакин // Трение и износ. – 1999. – Т. 20, № 5. – С. 480–488.

*E. I. GALAI, A. A. YULDASHOV, E. E. GALAI, P. K. RUDOV*  
*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **EFFECTIVENESS OF COMPOSITE BRAKE PADS WITH VARYING DEGREES OF WEAR**

The technique and the calculation results of the brakes efficiency for various parameters of a worn brake pad are presented. It is established that at any composite pad wear, the pressure (specific pressure) in the friction unit exceeds the permissible value when the air distributor is set to the loaded mode. Even in the average mode, it is possible to increase the specific braking force in excess of the allowable rate when pressing unworn composite pads. The friction coefficient and the braking force depend on the diameter of the wheelset at other equal parameters. The temperature in the friction contact zone also significantly affects the friction coefficient of the pad. Therefore, for the normal operation of the brake unit with composite pads, it is recommended to turn on the air distributors in the medium mode, and at present time freight cars are operated with the reduced pressure in the brake cylinders.

**Keywords:** brake pad, coefficient of friction, braking force, wear, specific braking force, wheel diameter.

Получено 02.07.2022

УДК 629.4.015:625.032.42:004.94

*О. В. ДЕМЬЯНЧУК, А. О. ШИМАНОВСКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ПУТИ ВАГОНА С УЧЕТОМ ПОВОРОТА КУЗОВА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ**

Разработана компьютерная модель грузового вагона, изначально покоящегося на железнодорожном пути. Показано, что при смещении линии действия сдвигающей силы относительно центра тяжести вагона возникает поворот тележек. Проанализировано влияние величины сдвигающей силы и смещения линии ее действия на максимальную скорость вагона, величину его смещения и время до полной остановки.

**Ключевые слова:** грузовой вагон, сдвигающая сила, поворот тележек, компьютерное моделирование, силы трения.

Для удержания железнодорожных составов, расположенных на станционных путях, от самопроизвольного ухода находят применение различные средства закрепления, но до настоящего времени наиболее часто для этих целей как в странах СНГ, так и в дальнем зарубежье используются тормозные башмаки [1–4]. Потребное количество таких башмаков определяется в соответствии с Методическими рекомендациями [5], однако, как показывает опыт, достаточно часто количество тормозных башмаков оказывается избыточным, и, в то же время, имеют место случаи несанкционированного движения недостаточно закрепленного состава.

Авторами работ [6, 7] предложены методы решения проблемы отсутствия четких норм закрепления подвижного состава, состоящего из вагонов различной длины, сформулированы направления повышения надежности и эффективности закрепления на станционных путях поездов и отдельно стоящих вагонов с минимизацией человеческого фактора. В статьях [8, 9] на основе анализа методик расчета потребного количества тормозных башмаков предложен усовершенствованный подход для определения их необходимого числа. Потребность в пересмотре существующих норм также подтверждена результатами серии испытаний, описанными в работе [10].

Научно-исследовательской лабораторией «Управление перевозочным процессом» БелГУТа были проведены испытания соответствия удерживающих сил, возникающих при закреплении подвижного состава тормозными башмаками, с целью установления факторов и условий, определяющих возможность самопроизвольного ухода вагонов [11]. В ходе ряда экспериментов, которые заключались в определении сжимающей силы, необходимой для сдвига железнодорожного состава, были получены значения соответствующих сил в случаях различной массы и длины состава при разных погодных условиях. В некоторых случаях испытания привели к неожиданным

результатам. При закреплении одного и того же состава на участках с одинаковым уклоном сила, необходимая для сдвига при одинаковом количестве тормозных башмаков, отличалась в 2 раза и более, а в некоторых случаях при сдвиге состава, закрепленного только одним тормозным башмаком, приходилось прикладывать силы, большие, чем в случае использования двух или трех средств закрепления (таблица 1).

*Таблица 1 – Результаты натурных испытаний по сдвигу состава из 10 вагонов*

Количество тормозных башмаков	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1
Сдвигающая сила, кН	117	202	71	88	137	151	73	173	232	249

Возможную причину значительного изменения сдвигающей силы не удалось установить расчетом с помощью разработанных ранее одномерных аналитических и компьютерных моделей [12, 13]. В частности, было установлено, что коэффициенты жесткости поглощающих аппаратов автосцепок и величины зазоров в межвагонных связях оказывают незначительное влияние на силу, необходимую для сдвига состава. На основе выполненного анализа было высказано предположение, что значительные расхождения с результатами натурных испытаний, наблюдаемыми в некоторых случаях, могут быть связаны с увеличением сил сопротивления движения, возникающим вследствие возможного поворота кузова и тележек вагона вокруг вертикальной оси, который может наблюдаться при сжатии состава.

Анализ публикаций по динамике железнодорожного подвижного состава при его пуске в ход показал, что исследователями рассматривается начало движения при размещении локомотива в голове поезда, которое связано с растяжением поезда [14–18]. В таком случае продольные оси вагонов выстраиваются вдоль продольной оси пути, а эффекты, связанные с поворотом тележек и кузовов в горизонтальной плоскости, оказываются несущественными. Поэтому потребовалась разработка подхода, позволяющего адекватно описать динамику толкаемого локомотивом железнодорожного состава при выходе его из равновесия и движении при малых скоростях, что и стало целью данной работы.

Для анализа смещения изначально находящегося в покое железнодорожного вагона разработана его упрощенная модель в среде программного комплекса MSC.ADAMS, представленная на рисунке 1. В ней кузов взаимодействует с двумя тележками, представляющими собой прямоугольные параллелепипеды, через цилиндрические шарниры, оси которых вертикальны. Тележки установлены на прямолинейный горизонтальный участок железнодорожного пути. Связь между ними реализована через функцию «Contact». Чтобы учесть сопротивление качению при взаимодействии колес с рельсами, был задан коэффициент трения между нижними плоскостями моделей теле-

жек и горизонтальной поверхностью пути исходя из формул основного удельного сопротивления движению  $w_{oi}''$  грузовых вагонов [19]. Для имитации взаимодействия колес с рельсами в поперечном направлении принято, что между ними реализуется сухое трение стали по стали (коэффициент трения  $f = 0,3$ ). Несмотря на замену криволинейных поверхностей колесных пар плоскими, такая модель позволяет установить, насколько сильно взаимодействие колес с рельсами в поперечном направлении влияет на силы, препятствующие движению толкаемого вагона.

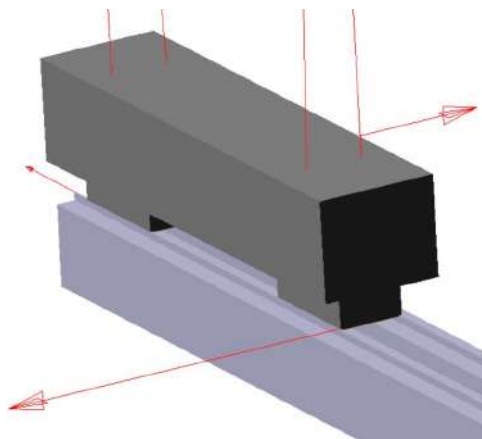


Рисунок 1 – Упрощенная модель железнодорожного вагона в среде MSC.ADAMS

По результатам аналитического расчета было установлено, что при массе вагона брутто 94 т и величине удельного сопротивления движению грузового вагона 8,28 Н/т в случае действия силы в 750 Н смещения вагона не происходит. Под действием сдвигающей силы 1000 Н, линия действия которой проходит через центр тяжести вагона, он через 1 с после начала движения приобретает постоянное ускорение (рисунок 2). Тележки и кузов не поворачиваются.

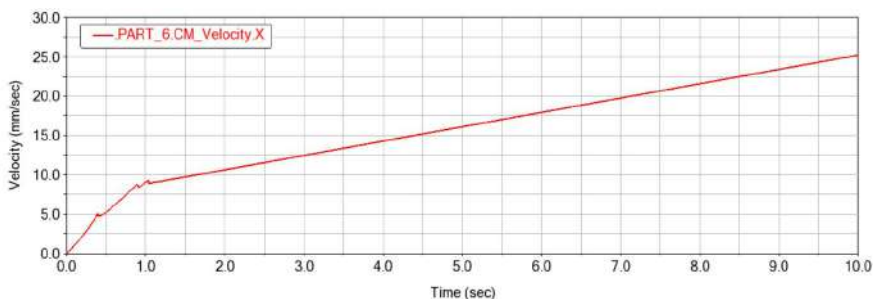


Рисунок 2 – Зависимость скорости вагона от времени при сдвигающей силе 1000 Н

Динамическое уравнение движения вагона в случае поступательного движения вагона имеет вид

$$m\ddot{x} = F_{\text{сдв}} - W,$$

где  $m$  – масса брутто вагона, кг;  $\ddot{x}$  – его ускорение,  $\text{м/с}^2$ ;  $F_{\text{сдв}}$  – сдвигающая сила, Н;  $W$  – сила сопротивления движению, Н.

Сила сопротивления движению  $W$  в соответствии с Правилами тяговых расчетов [19] определяется выражением

$$W = mgw_0'',$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ .

При сдвигающей силе 1000 Н расчет по приведенным формулам привел к значению ускорения 0,002  $\text{м/с}^2$ , что согласуется с результатами моделирования.

Далее было выполнено моделирование сдвига вагона под действием силы, линия действия которой смещена в поперечном направлении по отношению к продольной оси вагона. Такое смещение может быть вызвано, например, поворотом корпуса автосцепки [20].

В результате расчета, выполненного для случая смещения линии действия на 100 мм, оказалось, что через 1,1 с после начала действия сдвигающей силы, как это видно из рисунка 3, произошло значительное увеличение действующей на рельс поперечной силы. Данный факт свидетельствует о соприкосновении тележки с рельсом, сопровождающемся ударом. В дальнейшем значение этой силы уменьшается до 10 кН, что свидетельствует о сохранении контакта.

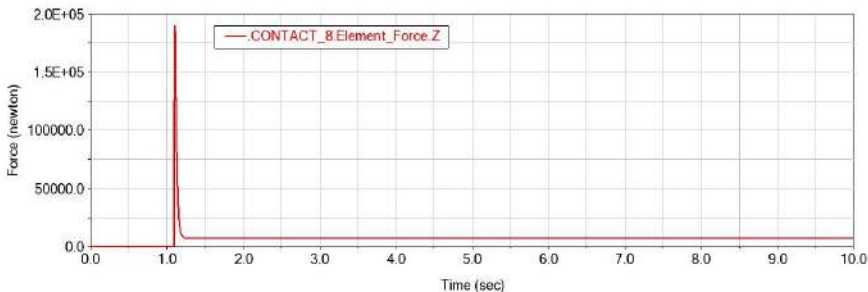


Рисунок 3 – Зависимость от времени поперечной силы, действующей на путь

Прижатие тележки к рельсу ведет к появлению дополнительных сил трения, которые ведут к остановке движущегося вагона, как это видно из рисунка 4, *а*. Увеличение сдвигающей силы до 5000 Н приводит к появлению на графике участка с медленно убывающей скоростью, однако и в этом случае вагон останавливается по истечении 9 с (рисунок 4, *б*). В случае смещения линии действия силы на большее расстояние вагон возвращается в состояние покоя быстрее (рисунок 4, *в*).

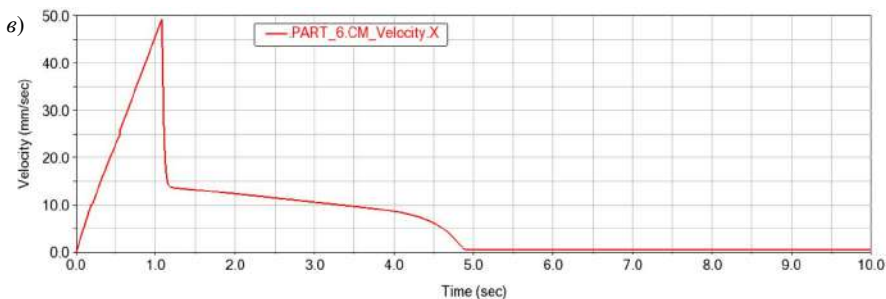
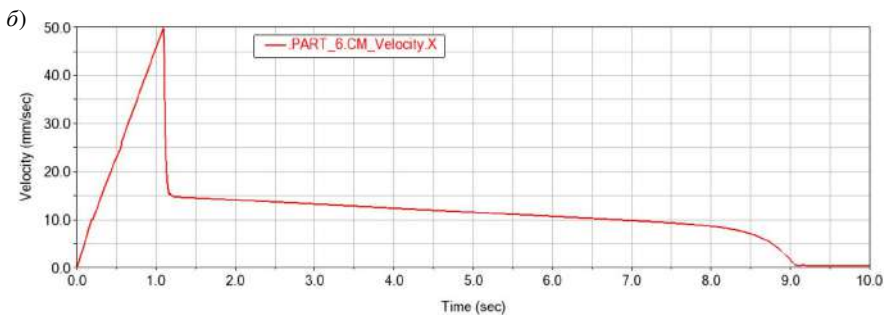
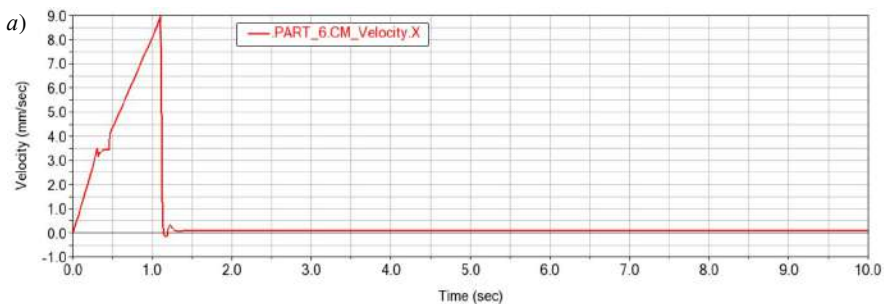


Рисунок 4 – Зависимости скорости вагона от времени при смещении сдвигающей силы от продольной оси поезда:

*a* – сила 1000 Н, смещение 100 мм; *б* – сила 5000 Н, смещение 100 мм; *в* – сила 5000 Н, смещение 400 мм

На рисунке 5 представлен график зависимости смещения вагона для случая, соответствующего рисунку 4, *в*. Он демонстрирует, что в течение 1,1 с изменение координаты центра масс кузова происходит по параболическому закону, это свидетельствует о равноускоренном движении. Затем рост перемещения значительно замедляется, а через 5 с вагон останавливается, переместившись приблизительно на 70 мм по отношению к начальному положению.

График зависимости максимальной скорости вагона от значения сдвигающей силы представлен на рисунке 6.

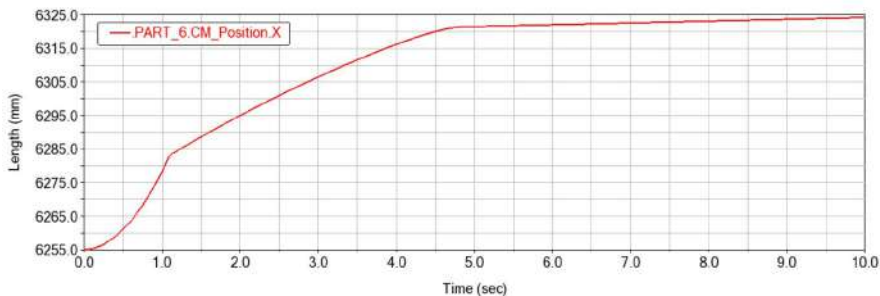


Рисунок 5 – Зависимость смещения вагона от времени при приложении сдвигающей силы 5000 Н, линия действия которой смещена на 400 мм

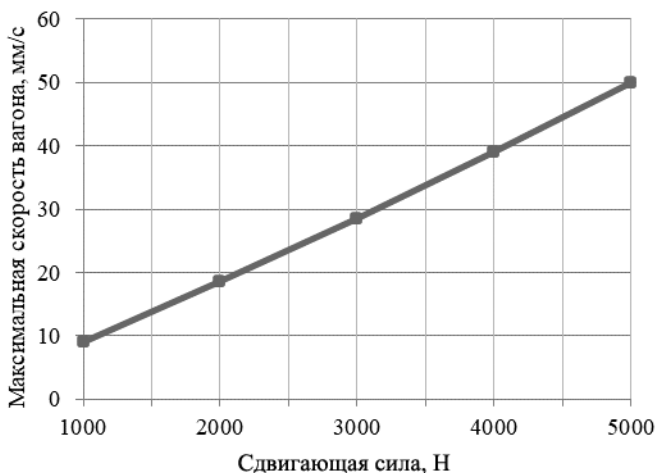


Рисунок 6 – Зависимость максимальной скорости вагона от сдвигающей силы

Максимальная скорость достигается до того момента, при котором появляется контакт между моделью тележки и рельсом в поперечном направлении, поэтому на нее не влияет смещение линии действия сдвигающей силы.

На рисунке 7 приведен график, иллюстрирующий зависимость продолжительности движения вагона до остановки от значения смещения линии действия сдвигающей силы 5000 Н. Он подтверждает, что увеличение плеча сдвигающей силы по отношению к центру масс кузова ведет к увеличению поперечной силы, действующей на рельс, а с ней – и соответствующей силы трения, что ведет к более быстрой остановке. С этим же эффектом связано и уменьшение продольного перемещения вагона, которое представлено на рисунке 8.



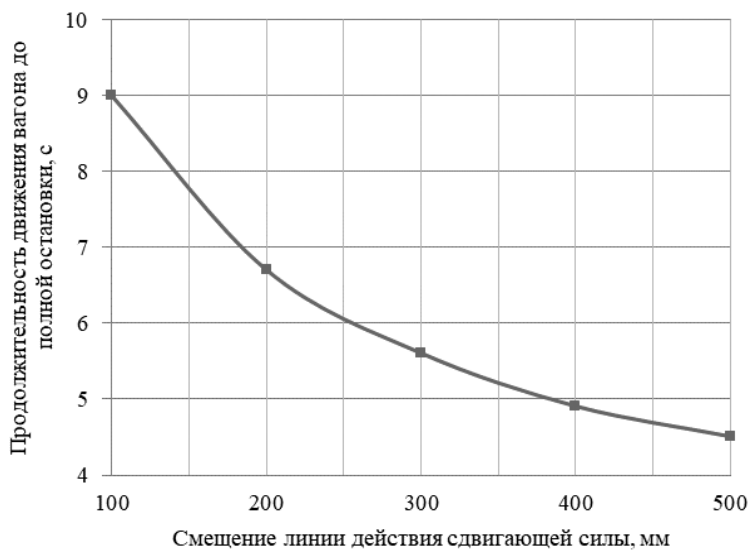


Рисунок 7 – Продолжительность движения вагона при разных значениях смещения линии действия сдвигающей силы 5000 Н

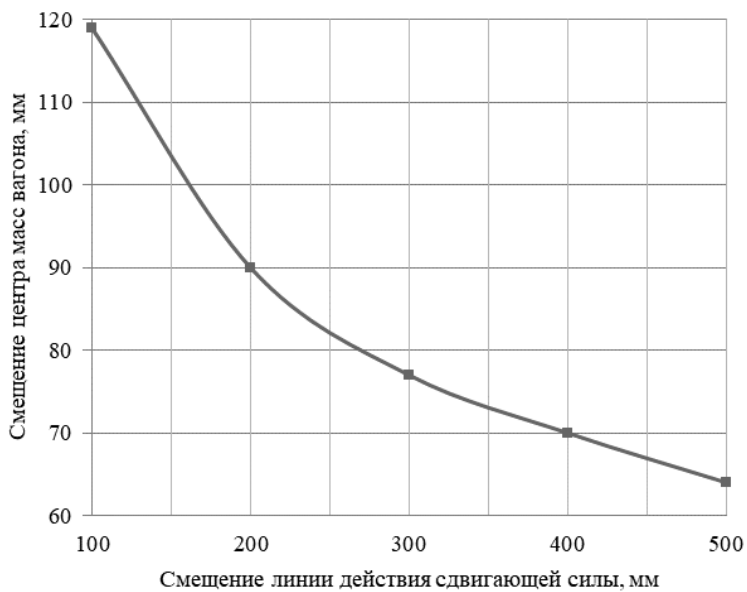


Рисунок 8 – Продольное перемещение вагона при поперечном смещении линии действия сдвигающей силы 5000 Н

Необходимо отметить, что при моделировании была использована упрощенная модель тележек. Если учесть реальную форму колес, то численные значения будут отличаться от полученных в данном случае. Однако эффект, связанный с увеличением силы трения из-за появления дополнительной поперечной силы между колесом и рельсом, будет себя проявлять.

Таким образом, разработанная компьютерная модель позволила проанализировать возможность поворота тележек, а с ним и кузова вагонов и объяснить значительный разброс сил сжатия, наблюдаемый по результатам натуральных испытаний. Установлено, что при действии на вагон сдвигающей силы, линия действия которой смещена относительно продольной оси кузова, значительно увеличивается прикладываемая сдвиговая сила, при которой вагон останавливается после начала движения. Величина смещения вагона и время до полной остановки при этом зависят от плеча приложения силы, а максимальная скорость вагона определяется только ее величиной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пасичный, А. Н.** Обзор современных технических средств для закрепления подвижного состава на станционных путях / А. Н. Пасичный // Труды Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2013. – № 2. – С. 80–85.

2 Canadian Rail Operating Rules [Электронный ресурс]. – 2021. – Режим доступа : <https://tc.canada.ca/en/rail-transportation/rules/canadian-rail-operating-rules>. – Дата доступа : 20.10.2022.

3 Technical Bulletin MP&E 10-01, Enforcement Guidance Regarding Securement of Equipment with Title 49 Code of Federal Regulations Section 232.103(n) [Electronic resource]. – Режим доступа : [https://railroads.dot.gov/sites/fra.dot.gov/files/fra\\_net/1052/MPE1001.pdf](https://railroads.dot.gov/sites/fra.dot.gov/files/fra_net/1052/MPE1001.pdf). – Дата доступа : 05.10.2022.

4 Katalog Rangiergeräte : Hemmschuhe, Radvorleger und mehr [Electronic resource]. – Saarbrücken : Knipper & Co. GmbH, 2019. – 20 s. – Режим доступа : [https://knipper.de/de/index.php?controller=attachment&id\\_attachment=526](https://knipper.de/de/index.php?controller=attachment&id_attachment=526). – Дата доступа : 05.10.2022.

5 Методические рекомендации по расчету норм закрепления подвижного состава тормозными башмаками на станционных путях станций Белорусской железной дороги. – Введ. 03.01.2006, приказ № ЗНЗ. – Минск : Белорусская железная дорога, 2021. – 59 с.

6 **Ильин, А. М.** Многовариантная верификационная методика расчета норм закрепления подвижного состава на железнодорожных путях станций / А. М. Ильин, О. Н. Числов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2020. – № 3. – С. 115–123.

7 **Числов, О. Н.** Развитие автоматизированной методики расчета норм закрепления подвижного состава на станционных железнодорожных путях / О. Н. Числов, А. М. Ильин // Транспорт и логистика: инновационная инфраструктура, интеллектуальные и ресурсосберегающие технологии, экономика и управление : сб. науч. тр. II Междунар. науч.-практ. конф. – Ростов н/Д : РГУПС, 2018. – С. 247–251.

8 **Шаталова, О. В.** Закрепление подвижного состава на железнодорожных путях станции / О. В. Шаталова, А. М. Вовк // Безопасность и охрана труда на железнодорожном транспорте. – 2017. – № 3. – С. 38–42.

9 Козаченко, Д. М. Удосконалення норм закріплення рухомого складу на станційних коліях / Д. М. Козаченко, О. М. Пасічний, Є. В. Іващенко // Збірник наукових праць ДонІЗТ. – 2013. – № 34. – С. 119–125.

10 Козаченко, Д. М. Проблеми закріплення рухомого складу на коліях залізничних станцій / Д. М. Козаченко // Залізничний транспорт України. – 2013. – № 3/4 (100/101). – С. 69–73.

11 Чаганова, О. С. Анализ результатов испытаний по определению сил, необходимых для сдвига вагонов, закрепленных тормозными башмаками / О. С. Чаганова, Ю. И. Кулаженко, М. Ю. Страдомский // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2021. – № 2 (43). – С. 51–53.

12 Шимановский, А. О. Динамика взаимодействия вагонов с тормозными башмаками / А. О. Шимановский, М. Г. Кузнецова, О. В. Демьянчук // Транспорт шелкового пути. – 2022. – № 2. – С. 38–45.

13 Шимановский, А. О. Моделирование сдвига локомотивом железнодорожного состава, размещенного на станционных путях / А. О. Шимановский, О. В. Демьянчук // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д. (Гомель, 24–25 ноября 2022 г.) : в 2 ч. Ч. 1. – Гомель: БелГУТ, 2022. – С. 192–194.

14 Попов, И. П. Математическая модель железнодорожного подвижного состава с упругодеформируемыми автосцепными устройствами в начальный момент движения / И. П. Попов // Транспорт Урала. – 2021. – № 1 (68). – С. 26–31.

15 Шимановский, А. О. Моделирование продольной динамики поезда в среде программного комплекса MSC.ADAMS / А. О. Шимановский, П. А. Сахаров, А. В. Коваленко // Актуальные вопросы машиноведения. – 2018. – Вып. 7. – С. 75–78.

16 Sharma, S. K. Impact of longitudinal train dynamics on train operations: A simulation-based study / S. K. Sharma, A. Kumar // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2018. – Vol. 6, is. 3. – P. 197–203.

17 Zboński, K. Nieliniowa dynamika pojazdów szynowych w łuku / K. Zboński. – Radom : Wydaw. Nauk. Instytutu Technologii Eksploatacji, 2012. – 371 s.

18 Modelling, simulation and applications of longitudinal train dynamics / C. Cole [et al.] // Vehicle System Dynamics. – 2017. – Vol. 55, is. 10. – P. 1498–1571.

19 Правила тяговых расчетов для поездной работы. – М. : Транспорт, 1985. – 287 с.

20 Shvets, A. O. Investigation of coupling strength at non-central interaction of railcars / A. O. Shvets // Strength of Materials. – 2022. – Vol. 54, is. 2. – P. 233–242.

*V. U. DZEMYANCHUK, A. O. SHIMANOVSKY*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **ANALYSIS OF A FIXED ON A TRACK CAR DYNAMICS CONSIDERING THE BODY ROTATION AROUND THE VERTICAL AXIS**

A computer model of a freight car, initially resting on a railway track, is developed. It is shown that when the shear force action line is shifted relative to the car's center of gravity, the bogies turn. There are analyzed the influence of the shear force magnitude and the displacement of its action line on the maximum velocity of the car, the magnitude of its displacement and the time to full stop.

**Keywords:** freight car, shear force, bogie rotation, computer simulation, friction forces.

Получено 31.10.2022

УДК 539.319

*Е. В. КОДНЯНКО<sup>1,2</sup>, Д. А. ЧЕРНОУС<sup>2</sup>**<sup>1</sup>ЗАО «Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь**<sup>2</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА ДЛЯ АНАЛИЗА КАЧЕНИЯ КОЛЕСА С ТОНКИМ УПРУГИМ ОБОДОМ**

Разработана методика решения контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра с тонким деформируемым ободом в ведомом режиме, которая основана на использовании обобщенной модели Винклера. Получены аналитические выражения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Результаты использования предлагаемой методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными на основе точного решения задачи теории упругости для полосы.

**Ключевые слова:** модель Винклера, контактное давление, контактное сдвиговое напряжение, момент сопротивления качению, зона сцепления, зона проскальзывания.

**Введение.** В настоящее время в конструкциях различных машин и механизмов широко используются детали с полимерными покрытиями. В частности, в конструкцию шахтных скипов входят стальные роликовые опоры с полиуретановыми обкладками [1]. При проектировании таких опор следует минимизировать износ обкладок и, главным образом, проводника скипо-клетевого ствола. Поэтому требуется расчетная методика, позволяющая достоверно прогнозировать напряжения и деформации в названных опорах на основе рассмотрения контактной задачи для тела качения с покрытием. Точное ее решение требует использования сложного математического аппарата (интегральные преобразования, системы интегральных уравнений и др.) [2, 3], что затрудняет непосредственное применение получаемых соотношений при практических расчетах деталей и узлов механизмов и машин.

Относительно малая (по сравнению с характерным размером области контакта) толщина полимерных покрытий и их пренебрежимо малая жесткость (по сравнению с жесткостью материала детали) позволяют при решении контактной задачи использовать для покрытия модель Винклера, которая в настоящее время достаточно широко используется для анализа деформирования тонких покрытий [4–7]. При отсутствии в зоне сцепления контактирующих тел горизонтальных (в плоскости области контакта) смещений данная модель не позволяет оценить уровень сдвиговых контактных напряжений. Вместе с тем до настоящего времени остается не решенным вопрос о возможности подобного расчета для подвижного контакта.

Ранее авторами был предложен вариант использования упрощенной модели основания для расчета сдвиговых напряжений [8]. Однако при этом изучался этап предварительного нагружения колеса, но не рассматривался процесс

его качения. Цель данного исследования, которое является развитием работы, представленной в [9], состоит в разработке расчетной методики, позволяющей в рамках модели Винклера определить контактные давления и сдвиговые контактные напряжения при качении колеса с тонким полимерным покрытием.

**Описание модели.** Опора качения с полимерным покрытием моделируется абсолютно жестким цилиндром с деформируемым ободом, который образован изотропным линейно упругим материалом и адгезионно связан с поверхностью жесткого цилиндра (рисунок 1). Модуль Юнга материала обода  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ . Общий радиус составного цилиндра  $R$ , длина образующей  $L$ , толщина обода  $h$ . Рассматривается стационарное качение составного цилиндра по недеформируемой горизонтальной опорной поверхности в ведомом режиме. К оси цилиндра приложены вертикальная сила  $P$ , нормальная к опорной поверхности, и горизонтальная сила  $F$ , параллельная этой поверхности. В области контакта выбирается координатная ось  $x$  по направлению действия силы  $F$  с началом координат на линии действия силы  $P$ .

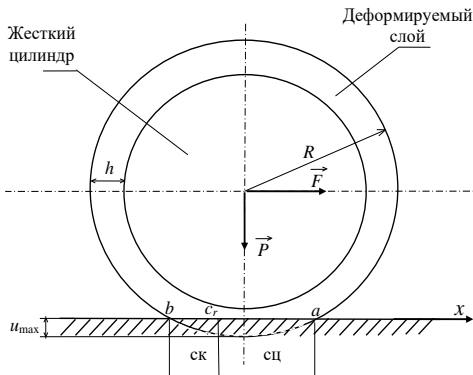


Рисунок 1 – Расчетная схема контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра, имеющего деформируемый обод

Следует установить распределения контактного давления  $p$  и сдвигового контактного напряжения  $\tau$  в области контакта при заданных силах  $P$  и  $F$ . Также требуется определить кинематические параметры подвижного контакта: вертикальное смещение (осадку) центра масс цилиндра  $u_{\max}$ , предварительное горизонтальное смещение  $w_0$  центра масс цилиндра и коэффициент проскальзывания (крипа)  $s$ .

Предположим, что деформирование обода описывается обобщенной моделью Винклера [7]. В соответствии с ней контактное давление  $p$  в окрестности некоторой точки обода, находящейся в области контакта, определяется относительным вертикальным смещением  $u$  данной точки, а сдвиговое контактное напряжение  $\tau$  – относительным горизонтальным смещением  $w$ :

$$p = k_n u, \quad \tau = k_\tau w. \quad (1)$$

Значения  $u$  и  $w$  задаются как разности между смещениями соответствующих (лежащих на одной вертикали и имеющих одну координату  $x$ ) точек внешней и внутренней поверхностей обода. Коэффициенты жесткости  $k_n$  и  $k_\tau$  определяются толщиной  $h$  и упругими характеристиками  $E$ ,  $\nu$ . Для жесткого соединения упругой полосы с недеформируемым основанием в работе [10] получено

$$k_n = \frac{E(1-\nu)}{h(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad k_\tau = \frac{E}{2h(1+\nu)}.$$

Под действием вертикальной силы  $P$  ось составного цилиндра вертикально смещается на некоторое расстояние  $u_{\max}$  к опорной поверхности. Принимаем, что зависимость смещения  $u$  точек обода в области контакта от координаты  $x$  описывается функцией

$$u = u_{\max} - \frac{x^2}{2R}. \quad (2)$$

Координаты  $a$  и  $b$ , определяющие границы области контакта (рисунок 1) определяются из условия равенства нулю контактного давления  $p(b) = p(a) = 0$ . Отсюда получаем

$$a = -b = \sqrt{2Ru_{\max}}. \quad (3)$$

Используем условие равновесия составного цилиндра в проекциях на ось, перпендикулярную опорной поверхности

$$P = L \int_b^a p dx. \quad (4)$$

Подставив в него выражение (1), с учетом (2) и (3) получаем уравнение для определения максимальной осадки, из которого находим

$$u_{\max} = \left( \frac{3P}{4k_n L \sqrt{2R}} \right)^{2/3}. \quad (5)$$

Отсюда полуширина области контакта

$$a = \left( \frac{3PR}{2k_n L} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Действие горизонтальной силы  $F$  приводит к качению цилиндра. При этом в области контакта выделяются зоны сцепления «сц» и проскальзывания «ск» (рисунок 1). В зоне сцепления выполняется условие неизменности продольной осевой компоненты тензора деформаций [11], то есть производная от смещения  $w$  по координате  $x$  равна нулю, поэтому для данной зоны

$$w = -w_0 + sx.$$

Здесь подлежат определению константы (не зависящие от координаты  $x$ ): предварительное смещение центра составного цилиндра  $w_0$ ;  $s$  – коэффициент проскальзывания [11]. Отрицательность  $w$  обусловлена тем, что горизонтальные смещения точек обода, находящихся в сцеплении с недеформируемой опорной поверхностью, равны нулю. Горизонтальные смещения точек внутренней грани обода (жесткого цилиндра) положительны.

В зоне проскальзывания выполняется закон Кулона

$$\tau = -fp,$$

где  $f$  – коэффициент трения между внешней поверхностью деформируемого обода и опорной поверхностью.

Условие равенства нулю сдвигового напряжения  $\tau$  на границе области контакта  $x = a$  будет выполняться при

$$s = \frac{w_0}{a}, \quad (7)$$

причем координата  $a$ , равная полуширине области контакта, определяется выражением (6). Условие неразрывности сдвигового контактного напряжения на границе зон сцепления и проскальзывания будет выполняться при

$$w_0 = fu_{\max} \frac{k_n}{k_\tau} \left(1 + \frac{c}{a}\right). \quad (8)$$

Условие равновесия цилиндра в проекциях на ось  $x$  дает

$$F = L \int_b^a \tau dx = L \left[ fk_n \int_{-a}^c \left( u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right) dx + k_\tau \int_c^a (w_0 - sx) dx \right]. \quad (9)$$

С учетом соотношений (5)–(8) последнее равенство приобретает вид

$$\left(\frac{c}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{c}{a}\right) + 7 - 8 \frac{F}{fP} = 0.$$

Получено кубическое уравнение для определения координаты  $c$ . Единственный его действительный корень может быть найден аналитически:

$$c = a - 2a \left(1 - \frac{F}{fP}\right)^{1/3}.$$

Теперь по формуле (8) можно найти предварительное смещение  $w_0$ , а затем по (7) – коэффициент  $s$ . Имея константы  $u_{\max}$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $w_0$ ,  $s$ , можно описать распределение контактного давления и сдвигового контактного напряжения

$$p = k_n \left( u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right), \quad \tau = \begin{cases} -fk_n \left( u_{\max} - \frac{x^2}{2R} \right), & x < c; \\ -k_\tau (w_0 - sx), & x \geq c. \end{cases} \quad (10)$$

В соответствии с критерием Мизеса [12] прочность материала определяется максимальным значением интенсивности тензора напряжений  $\sigma_u$ :

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}.$$

В рамках модели Винклера последнее выражение можно свести к виду

$$\sigma_u = \sqrt{p^2 \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^2 + 3\tau^2}.$$

Точное решение краевой задачи теории упругости для полосы произвольной толщины, жестко связанной с недеформируемым основанием, мо-

жет быть получено с использованием интегрального Фурье-преобразования [2]. Если на участке между точками с координатами  $b$  и  $a$  свободной от закрепления поверхности полосы действуют нормальное давление  $p$  и сдвиговое напряжение  $\tau$ , то таким решением нормальное  $u$  и сдвиговое  $w$  смещения точек поверхности будут определяться соотношениями

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\chi+1}{4G\pi} \int_b^a p(y) K_u^p \left( \frac{x-y}{h} \right) dy + \frac{1}{4G\pi} \int_b^a \tau(y) K_u^\tau \left( \frac{x-y}{h} \right) dy; \\ w(x) &= \frac{-1}{4G\pi} \int_b^a p(y) K_w^p \left( \frac{x-y}{h} \right) dy + \frac{\chi+1}{4G\pi} \int_b^a \tau(y) K_w^\tau \left( \frac{x-y}{h} \right) dy, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\chi = 3 - 4\nu$ .

Функции влияния задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} K_u^p(z) &= \int_0^\infty \frac{4\beta - 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi+1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\cos(z\beta)}{\beta} d\beta, \\ K_u^\tau(z) &= K_w^p(z) = \int_0^\infty \frac{2\chi(\chi-1)(\operatorname{ch}(2\beta)-1) - 8\beta^2}{(\chi+1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\sin(z\beta)}{\beta} d\beta, \\ K_w^\tau(z) &= \int_0^\infty \frac{4\beta + 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi+1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\cos(z\beta)}{\beta} d\beta. \end{aligned} \quad (12)$$

При использовании соотношений (11) для решения поставленной контактной задачи (рисунок 1) они рассматриваются как интегральные уравнения для определения контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Для нахождения констант  $u_{\max}$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $w_0$ ,  $s$  к этим уравнениям добавляются условия равновесия цилиндра (4) и (9), условия на границах области контакта  $p(b) = p(a) = \tau(a) = 0$  и выполнение на границе раздела зон сцепления и проскальзывания закона трения Кулона. Методика решения контактных задач на основе интегральных уравнений (11) подробно описана в монографиях [2, 3, 10]. В общем случае подобное решение может быть реализовано только численно. В нашем случае для этого использован программный комплекс MathCAD.

Интегрирование в (12) проводилось пошагово с оценкой сходимости. Решение интегральных уравнений (11) осуществлено методом конечных сумм [13]. После установления распределения контактного давления и сдвигового контактного напряжения интегрированием определялись Фурье-образы этих напряжений. Далее использовались приведенные в монографии [10] соотношения для компонент тензора напряжений в полосе произвольной толщины при заданных на свободной от закрепления границе нормальной и сдвиговой распределенных нагрузках. Затем устанавливалось распределение в ободе интенсивности тензора напряжений и определялось ее максимальное значение.



**Расчетный пример.** Для вычислений были использованы исходные данные, соответствующие ролику скипа, перемещающегося по проводникам скипо-клетевого ствола №2 1РУ ОАО «Беларуськалий» [1]. Радиус ролика без полиуретановой обкладки (радиус жесткого цилиндра)  $r = R - h = 85$  мм. Ширина ролика  $L = 80$  мм. Сила прижатия в рабочем режиме  $P = 3350$  Н. Сдвиговая сила принята равной  $F = 450$  Н. Значения характеристик материала обода (полиуретан с твердостью по Шору 85) заимствованы из работы [14]  $E = 21$  МПа;  $\nu = 0,38$ ; коэффициент трения по стали  $f = 0,4$ ; предел прочности на сжатие 4,8 МПа.

На рисунке 2 представлены расчетные эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения. Отметим приемлемую степень соответствия расчетных оценок, полученных на основе разработанной методики, результатам использования точного решения. Применение модели Винклера приводит к завышенным значениям ширины области контакта и, соответственно, к снижению максимальных контактных напряжений.

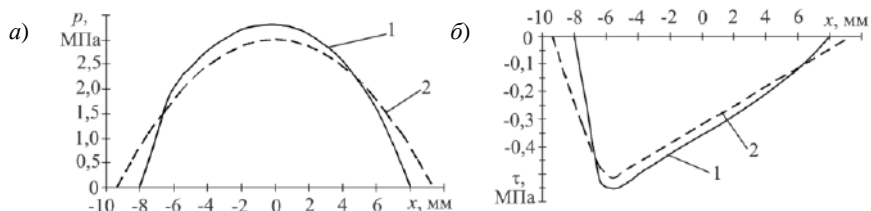


Рисунок 2 – Расчетные эпюры контактного давления (а) и сдвигового контактного напряжения (б) при толщине деформируемого обода  $h = 10$  мм:

- 1 – численное решение системы интегральных уравнений (12);  
2 – использование функций (10)

Погрешность расчета по разработанной методике возрастает с увеличением толщины деформируемого обода (рисунок 3), и при  $h = 30$  мм относительная погрешность расчета интенсивности тензора напряжений составляет 12,5%. При использовании модели Винклера значение  $\sigma_{ii}$  зависит только от координаты  $x$ . В случае точного решения [10]  $\sigma_{ii}$  зависит также от координаты, отсчитываемой по толщине обода, причем максимум достигается на некотором расстоянии от поверхности контакта.

Использование предлагаемых аналитических соотношений позволяет проводить многопараметрический анализ рассматриваемой контактной пары. В частности, при выборе материала деформируемого обода следует учитывать, что при прочих равных условиях в случае меньшего коэффициента Пуассона будут реализовываться большие значения интенсивности тензора напряжений (рисунок 4). В рассматриваемом примере снижение  $\nu$  от 0,4 до 0 сопровождается двукратным увеличением  $\sigma_{ii \max}$ . Увеличение значения коэффициента трения обода с опорной поверхностью приводит к незначительному снижению  $\sigma_{ii \max}$ .

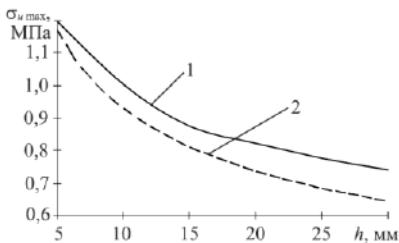


Рисунок 3 – Зависимость максимального значения интенсивности тензора напряжений в ободе от толщины деформируемого обода:

1 – решение системы интегральных уравнений (12), 2 – использование функций (10)

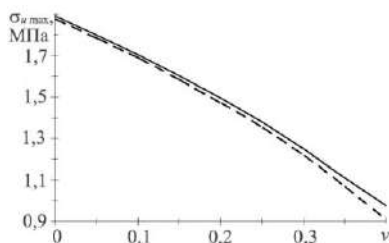


Рисунок 4 – Зависимость максимального значения интенсивности тензора напряжений в ободе от коэффициента Пуассона материала обода:

сплошная кривая – при  $f = 0,2$ , пунктирная – при  $f = 0,5$

Наряду с параметром  $\sigma_n \max$ , определяющим прочность элемента конструкции, для рассматриваемой контактной пары представляет практический интерес прогноз коэффициента проскальзывания, определяющего потери энергии при качении. Установлено (рисунок 5), что в диапазоне значений сдвиговой силы от 50 до 500 Н коэффициент  $s$  практически линейно возрастает с увеличением силы  $F$ . К росту значения коэффициента проскальзывания также приводит увеличение толщины деформируемого обода.

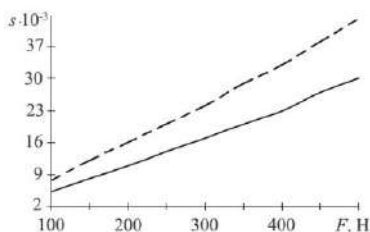


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента проскальзывания от горизонтальной силы  $F$ :

сплошная кривая –  $h = 10$  мм,  
пунктир – при  $h = 30$  мм

Показано, что погрешность результатов применения данной методики увеличивается с ростом толщины обода и в рассмотренном примере не превышает 12,5 % по сравнению с точным решением для полосы произвольной толщины. Установлено влияние коэффициента трения на максимальные значения сдвигового напряжения и интенсивности тензора напряжений. Продемонстрировано, что в материале обода с меньшим значением коэффициента Пуассона интенсивность тензора напряжений будет выше, а коэффициент проскальзывания возрастает как с увеличением сдвиговой силы, так и при увеличении толщины обода.

**Закключение.** В представленной работе на основе методики, основанной на модели Винклера, получены аналитические выражения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения при качении колеса с деформируемым ободом. Показано, что погрешность результатов

применения данной методики увеличивается с ростом толщины обода и в рассмотренном примере не превышает 12,5 % по сравнению с точным решением для полосы произвольной толщины. Установлено влияние коэффициента трения на максимальные значения сдвигового напряжения и интенсивности тензора напряжений. Продемонстрировано, что в материале обода с меньшим значением коэффициента Пуассона интенсивность тензора напряжений будет выше, а коэффициент проскальзывания возрастает как с увеличением сдвиговой силы, так и при увеличении толщины обода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Скип шахтный: пат. 11460 Респ. Беларусь, МПК В66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев ; заявитель Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством – № u 20170053 ; заявл. 22.02.2017.

- 2 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 320 с.
- 3 **Александров, В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 183 с.
- 4 **Горячева, И. Г.** Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения / И. Г. Горячева, М. М. Губенко, Ю. Ю. Маховская // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 99–107.
- 5 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg [et al.] // Tribology International. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.
- 6 **Christoforou, A. P.** On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate / A. P. Christoforou // Composite Structures. – 1993. – Vol. 26. – P. 77–82.
- 7 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стерневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 324 с.
- 8 **Коднянко, Е. В.** Расчет контактного сдвигового напряжения для колеса с деформируемой периферией / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 83–89.
- 9 **Коднянко, Е. В.** Контактная задача с трением в рамках модели Винклера основания для опоры качения / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Поликомтриб-2022 : Тезисы докладов междунар. науч.-техн. конф. – Гомель : ИММС НАН Беларуси, 2022. – С. 63.
- 10 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 245 с.
- 11 **Попов, В. Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М. : Физматлит, 2012. – 348 с.
- 12 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
- 13 **Бахвалов, Н. С.** Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987.
- 14 **Яковлев, С. Н.** Расчет полиуретановых деталей, работающих на сжатие при статической нагрузке / С. Н. Яковлев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Машиностроение. – 2014. – № 1 (190). – С. 137–142.

*E. V. KADNIANKA<sup>1,2</sup>, D. A. CHERNOUS<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>JSC “Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production”, Soligorsk, Belarus  
<sup>2</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

## **THE WINKLER MODEL APPLICATION TO THE ROLLING ANALYSIS FOR A WHEEL WITH A THIN ELASTIC RIM**

A technique for solving the stationary rolling contact problem for a rigid cylinder with a thin deformable rim in the driven mode is developed, it is based on the use of the generalized Winkler model. The analytical expressions for contact pressure and shear contact stress are obtained. The results of using the proposed method are compared with the calculated estimates obtained on the basis of the exact elasticity theory problem solution for the strip.

**Keywords:** Winkler model, contact pressure, contact shear stress, rolling resistance moment, sticking area, slip area.

Получено 06.11.2022

УДК 691-419:539.374

*А. Г. КОЗЕЛ**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ  
ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ  
НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Приведена постановка краевой задачи о термосиловом изгибе упругопластической трехслойной круговой пластины, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Учтено влияние температуры на напряженно-деформированное состояние пластины. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине легкокомплотном наполнителе – гипотеза Тимошенко. Наличие жесткой диафрагмы на контуре пластины препятствует относительному сдвигу слоев. Система дифференциальных уравнений равновесия выведена вариационным методом. Получено аналитическое решение краевой задачи методом упругих решений.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, изгиб, температура, пластичность, основание Пастернака.

**Введение.** В настоящее время при создании современных элементов конструкций стремятся добиться не только заданных показателей прочности и жесткости, но и обеспечить сопротивляемость тепловым, радиационным или некоторым другим негативным воздействиям. С этой точки зрения хорошо зарекомендовали себя многослойные элементы. Использование материалов слоев с разными физико-механическими свойствами позволяет достичь желаемых результатов.

Основы термоупругости и её основные уравнения, постановки и методы решения ряда задач квазистатики и динамики слоистых элементов конструкций изложены в монографиях [1–4]. Учтены реономные и физически нелинейные свойства материалов слоев при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Динамическое деформирование круговых трехслойных сплошных и ступенчатых пластин, в том числе на упругом основании, исследовалось в статьях [5, 6]. Точные решения для изгибных колебаний функционально-градиентных многослойных пластин, связанных с двухпараметрическим основанием, при различных граничных условиях получены в [7]. Нелинейные колебания многослойных цилиндрических оболочек, усиленных спиральными ребрами жесткости, окруженными демпфирующим и упругим основанием в термической среде исследованы в работе [8].

Сжимаемость наполнителя при изгибе сэндвич-пластин, в том числе с учетом температуры, изучена в публикациях [9, 10]. В работе [11] рассмотрено деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием неосесимметричных термосиловых нагрузок. Термосиловое деформирование прямоугольных функционально-градиентных пластин на двухпара-

метрическом основании исследовано в статье [12]. Термоупругое и термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин, скрепленных с упругим однопараметрическим основанием Винклера рассматривалось в статьях [13, 14]. Сравнение моделей основания Пастернака и Винклера при расчете напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин проведено в статье [15]. Показано, что при использовании двухпараметрической модели, учет сдвиговых свойств приводит к уменьшению значений параметров напряженно-деформированного состояния. Это позволяет прогнозировать увеличение ресурса конструкций. Изотермический изгиб физически линейных и нелинейных круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, изучен в работах [16, 17], термоупругий изгиб – в статье [18].

В предлагаемой работе, в отличие от исследований, рассмотренных ранее, анализируется физически нелинейный изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с двухпараметрическим упругим основанием Пастернака, вызванный термосиловым воздействием.

**Постановка краевой задачи в усилиях.** Постановка задачи и ее решение выполнены в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (рисунок 1). В изотропных несущих слоях толщиной  $h_1, h_2$  приняты гипотезы Кирхгофа. В лёгком несжимаемом по толщине заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ , радиальные перемещения линейно распределены по толщине, не учитывается работа касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  (3).

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. За искомые функции приняты: прогиб пластины  $w(r)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r)$ , радиальное перемещение координатной плоскости  $u(r)$ .

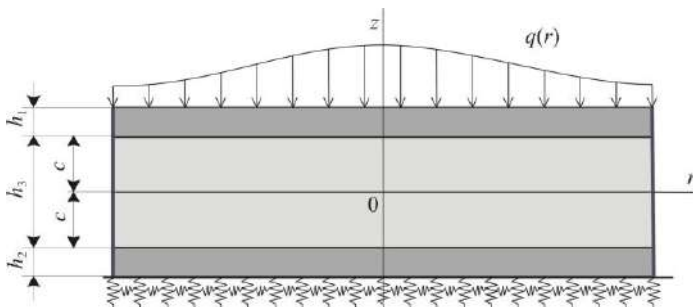


Рисунок 1 – Расчетная схема круговой трехслойной пластины на упругом основании

На нижнюю поверхность несущего слоя 2 пластины действует распределенная по ее площади реакция основания  $q_R$  согласно модели Пастернака [19]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент сжатия основания, Па/м;  $t_f$  – коэффициент сдвига основания, Па·м;  $w(r)$  – осадка (прогиб) поверхности основания, м;  $\Delta$  – оператор Лапласа

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \equiv w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, поэтому

$$u_{\varphi}^{(k)} = 0,$$

где  $k = 1, 2, 3$  – номер слоя.

Слои несжимаемы по толщине, поэтому в направлении оси  $z$  перемещения точек пластины равны прогибу срединной плоскости заполнителя

$$u_z^{(k)} = w(r).$$

Используем гипотезу прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{rz}^{(3)}$  – сдвиговые деформации в заполнителе.

Радиальные перемещения в слоях  $u_r^{(k)}$  получим, проинтегрировав выражение (2):

$$\begin{aligned} & \text{– в первом слое } (c \leq z \leq c + h_1) \quad u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r}; \\ & \text{– во втором слое } (-c - h_2 \leq z \leq -c) \quad u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}; \\ & \text{– в третьем слое } (-c \leq z \leq c) \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $(u + c\psi)$  – величина смещения первого несущего слоя за счет деформации заполнителя;  $(u - c\psi)$  – смещение для второго несущего слоя;  $z$  – координата рассматриваемого волокна.

Малые деформации в слоях следуют из (3) и соотношений Коши.

Пусть в процессе силового деформирования в температурном поле материалы несущих слоев пластины проявляют упругопластические свойства. Связь напряжений и деформаций в них принимается согласно теории малых упругопластических деформаций с учетом температуры:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(T_k)(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2), \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$  – девиаторная и шаровая часть тензора напряжений  $k$ -го слоя, Па;  $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций;  $G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материалов слоев, Па;  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$  – функции пластичности материалов несущих слоев,

которые зависят от интенсивности деформаций  $\varepsilon_u^{(k)}$  и температуры  $T_k$ ;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $\Delta T_k$  – приращение температуры в  $k$ -м слое, отсчитываемое от некоторого начального значения  $T_0$ , К.

В заполнителе проявляются нелинейно упругие свойства. В нем дополнительно учитывается влияние вида напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) s_{\alpha\beta}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3)) \vartheta_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3)) \vartheta_{rz}^{(3)}, \\ \varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) \sigma^{(3)} &= 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}\Delta T_3),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $G_3(T_3)$ ,  $K_3(T_3)$  – температурно-зависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материала заполнителя, Па;  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\vartheta_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе;  $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3)$  – универсальная функция физической нелинейности заполнителя, зависящая от интенсивности деформаций  $\varepsilon_u^{(3)}$  и температуры  $T_3$ ;  $\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3)$ ,  $\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3)$  – функции нелинейности, учитывающие влияние гидростатического напряжения  $\sigma^{(3)}$ .

Используя соотношения (4), (5), компоненты тензора напряжений в слоях представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций, выделив упругие (индекс «e») и температурно-нелинейные (индекс «ω») слагаемые:

$$\begin{aligned}T_\alpha^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{ae}^{(k)} = 2G_k(T_k) \vartheta_\alpha^{(k)} + 3K_k(T_k) \varepsilon^{(k)}, \\ \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) \vartheta_\alpha^{(k)} + 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k, \\ \sigma_\alpha^{(3)} &= \sigma_{ae}^{(3)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{ae}^{(3)} = 2G_3(T_3) \vartheta_\alpha^{(3)} + 3K_3(T_3) \varepsilon^{(3)}, \\ \sigma_{\alpha\omega}^{(3)} &= 2G_3(T_3) \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3) \vartheta_\alpha^{(3)} + 3K_3(T_3) \alpha_{03} \Delta T_3 + \\ &+ (\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) s_\alpha^{(3)} + (\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) \sigma^{(3)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «e») и температурно-нелинейной (индекс «ω») частей

$$T_\alpha^{(k)} = T_{ae}^{(k)} - T_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{\alpha\omega}^{(k)}.$$

Используя формулы (4), представим обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине

$$\begin{aligned}T_\alpha &= T_{ae} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{ae}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} dz, \\ M_\alpha &= M_{ae} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{ae}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} z dz, \\ H_{ae} &= M_{ae}^{(3)} + c(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)}), \quad H_{\alpha\omega} = M_{\alpha\omega}^{(3)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}).\end{aligned}\quad (7)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия была получена в статье [16] с помощью вариационного принципа возможных перемещений Лагранжа без использования физических уравнений связи напряжений с деформациями. Поэтому она будет справедлива и здесь. Используя выражения (1), (4)–(7), получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую деформирование физически нелинейной круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \quad (8)$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q + q_\omega.$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщённых внутренних усилий, причем нижний индекс « $e$ » в дальнейшем опущен для удобства. Температурно-нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемые с нижним индексом « $\omega$ »:

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}).$$

Постановку задачи завершаем учетом граничных условий в усилиях на контуре пластины

$$T_r = T_r^0 + T_\omega, \quad H_r = H_r^0 + H_\omega, \quad M_r = M_r^0 + M_\omega, \quad (9)$$

$$M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}),$$

где  $T_r^0$ ,  $Q^0$ ,  $H_r^0$ ,  $M_r^0$  – внешние погонные силы и моменты, приложенные на контуре пластины.

**Система уравнений равновесия в перемещениях.** Линейные составляющие обобщённых внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения по формулам, приведенным в [16], поэтому система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая уравнениям (8), принимает вид:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = p_\omega, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = h_\omega, \quad (10)$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q + q_\omega.$$

где  $L_2$ ,  $L_3$  – дифференциальные операторы;

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$



$a_i$  – коэффициенты учитывающие геометрические параметры, зависимость модулей упругости материалов слоев по толщине от температуры

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}),$$

$$a_5 = K_{32} + c(K_{11} - K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2},$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left( K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad m = 0, 1, 2.$$

При усреднении температурного поля по толщине  $k$ -го слоя пластины значения упругих параметров однородны внутри слоя в данный момент времени  $t$

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

Краевая задача по нахождению перемещений в круглой физически нелинейной пластине на основании Пастернака оказывается полностью определенной после присоединения к системе (10) силовых (9) или кинематических граничных условий. Помимо выражений (3) они включают соотношения для контура пластины (при  $r = R$ ):

- для жесткой заделки  $u = 0, \psi = 0, w = 0, w_{,r} = 0$ ;
- при шарнирном закреплении  $u = 0, \psi = 0, w = 0, M_r = 0$ ;
- в случае свободного опирания  $\psi = 0, T_r = 0, M_r = 0, Q = 0$ .

**Метод упругих решений.** Система дифференциальных уравнений равновесия (10), описывающая деформирование рассматриваемой пластины, является нелинейной, поэтому для ее решения применен метод упругих решений, предложенный А. А. Ильиушиным [20]. Система принимает следующий итерационный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) &= h_{\omega}^{(n-1)}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} = -q + q_{\omega}^{(n-1)},$$

где  $n$  – номер приближения;  $p_{\omega}^{(n-1)}$ ,  $h_{\omega}^{(n-1)}$ ,  $q_{\omega}^{(n-1)}$  – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения

$$p_{\omega}^{(n-1)} = T_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\phi\omega}^{(n-1)}), \quad h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}),$$

$$q_{\omega}^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)},_r - M_{\phi\omega}^{(n-1)},_r),$$

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k)(n-1)}, T_k)\vartheta_{\alpha}^{(k)(n-1)} dz + \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k dz + \\ + \int_{h_3} s_{\alpha}^{(3)}(\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) dz + \int_{h_3} \sigma^{(3)}(\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) dz ,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k)(n-1)}, T_k)\vartheta_{\alpha}^{(k)(n-1)} z dz + \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k z dz + \\ + \int_{h_3} s_{\alpha}^{(3)}(\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) z dz + \int_{h_3} \sigma^{(3)}(\varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3) - 1) z dz ,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3)(n-1)} + c \left( T_{\alpha\omega}^{(1)(n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n-1)} \right).$$

Используя этот метод, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками.

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (11) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями  $u^{(n)}$  и  $\psi^{(n)}$ . После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$u^{(n)} = b_1 w_{,r}^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r (a_2 h_{\omega}^{(n-1)} - a_4 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r + \frac{C_2^{(n)}}{r} ,$$

$$\psi^{(n)} = b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r (a_1 h_{\omega}^{(n-1)} - a_2 p_{\omega}^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r + \frac{C_4^{(n)}}{r} ,$$

$$\Delta \Delta w_{,r}^{(n)} - t_f D \Delta w^{(n)} + \kappa_0 D w^{(n)} = qD + f_{\omega}^{(n-1)} ,$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2} ,$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} ;$$

$f_{\omega}^{(n-1)}$  – функция нелинейности, включающая дополнительные «внешние» нагрузки.

$$f_{\omega}^{(n-1)} = -D q_{\omega}^{(n-1)} + D_1 \frac{1}{r} (r p_{\omega}^{(n-1)})_{,r} + D_2 \frac{1}{r} (r h_{\omega}^{(n-1)})_{,r} ,$$

$$D_1 = \frac{a_1 (a_3 a_4 - a_2 a_5)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} ,$$

$$D_2 = \frac{a_1 (a_1 a_5 - a_2 a_3)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} ;$$

$C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$  – константы интегрирования, определяемые на каждом шаге итерации из граничных условий.

**Заключение.** В работе получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающая термосиловой изгиб физически нелинейной круговой трехслойной пластины на основании Пастернака. Применение метода упругих решений позволяет получить итерационное аналитическое решение краевой задачи для численного исследования напряженно-деформированного состояния пластин при произвольных осесимметричных нагрузках.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22M-072).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Amsterdam : Academic Press, 2016. – 410 p.

3 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

4 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

5 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.

6 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании Пастернака // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2014. – Т. 11, № 1. – С. 59–63.

7 **Tossapanon, P.** Flexural vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundation with arbitrary boundary conditions: Chebyshev collocation technique / P. Tossapanon, N. Wattanasakulpong // Journal of Sandwich Structures & Materials. – 2020. – Vol. 22, no. 2. – P. 156–189.

8 **Ahmadi, H.** Nonlinear vibration of stiffened multilayer FG cylindrical shells with spiral stiffeners rested on damping and elastic foundation in thermal environment / H. Ahmadi, K. Foroutan // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 145. – Article 106388. – 26 p.

9 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

10 **Зеленая, А. С.** Термоупругий изгиб трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 93–100.

11 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

12 **Bouderba, B.** Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations / B. Bouderba, M. S. A. Houari, A. Tounsi // Steel and Composite Structures. – 2013. – Vol. 14 (1). – P. 85–104.

13 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, no. 2. – P. 206–213.

14 **Леоненко, Д. В.** Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 106–119.

15 **Козел, А. Г.** Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

16 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 392–406.

17 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

18 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 90–96.

19 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Гостройиздат, 1954. – 56 с.

20 **Ильюшин, А. А.** Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М.–Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

*A. G. KOZEL*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **THERMOELASTIC-PLASTIC BENDING OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE ON THE PASTERNAK FOUNDATION**

There is presented the formulation of the boundary value problem for the thermoforce bending of an elastic-plastic three-layer circular plate connected with a two-parameter Pasternak foundation. The state physical equations correspond the theory of small elastic-plastic deformations. The effect of temperature change on the plate stress-strain state is taken into account. In the thin bearing layers, the hypotheses of Kirchhoff are valid, in the light filler incompressible in thickness, Timoshenko's hypothesis is valid. The presence of a rigid diaphragm on the plate contour prevents the relative shift of the layers. The system of differential equilibrium equations was derived by the variational method. The analytical solution of the boundary value problem is obtained by the method of elastic solutions.

**Keywords:** three-layer circular plate, bending, temperature, plasticity, Pasternak foundation.

Получено 22.10.2022

УДК 539.41

*И. Е. КРАКОВА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПАКЕТА СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ ПРИ ЕГО ТРАНСПОРТИРОВКЕ**

С помощью программного комплекса ANSYS выполнено конечно-элементное моделирование деформирования наиболее нагруженной нижней сэндвич-панели, транспортируемой в составе пакета. Учитывается действие нагрузок, возникающих при вертикальных колебаниях автотранспортного средства. Рассмотрено влияние инерционных нагрузок на напряженно-деформированное состояние панели для случаев укладки пакетов в один и два яруса.

**Ключевые слова:** сэндвич-панель, транспортный пакет, напряжения, вертикальные перемещения.

В современном строительстве при возведении зданий разнообразного назначения широко используются сэндвич-панели. Они представляют собой трехслойную конструкцию, которая включает две обшивки из тонких металлических листов и располагающийся между ними наполнитель, обладающий малой жесткостью. Разработка конструкций таких панелей предполагает анализ прочности под действием эксплуатационных нагрузок. В то же время важно, чтобы при транспортировке их потребительские свойства также сохранялись.

Доставка сэндвич-панелей к местам строительства чаще осуществляется с использованием автомобильного транспорта. К перевозке они предоставляются упакованными заводом-изготовителем в транспортные пакеты из нескольких уложенных друг на друга панелей. Такой пакет имеет большие габаритные размеры при небольшой массе. При транспортировке они испытывают динамические нагрузки и силы от средств крепления к кузову автомобиля. При этом нередки ситуации, при которых вследствие деформаций средств крепления, упаковочного материала и груза в процессе транспортировки происходит разрушение транспортных пакетов и повреждение груза.

Существует большое количество публикаций, связанных с исследованием слоистых конструкций, находящихся под действием статических и динамических нагрузок.

В работах [1–4] рассматривается изгиб несимметричных трехслойных пластин различной геометрической формы со сжимаемым наполнителем. Все расчеты выполняются аналитически с применением различных методов теории упругости. В частности, авторы этих работ поведение обшивки моделируют с помощью теории Киргхофа, а поведение наполнителя – с помощью гипотез, учитывающих поперечные деформации пластины. В статье [5] рассмотрена симметричная сэндвич-панель, на лицевой слой которой действует

статическое равномерное давление. Авторы изучали влияние условий закрепления панели на ее напряженно-деформированное состояние. В [6] получено решение трехмерной задачи изгиба ламинированной пластины под действием равномерной и синусоидальной распределенной нагрузки для симметричного и несимметричного расположения слоев. Статьи [6, 7] посвящены исследованию влияния периодических и локальных ударных нагрузок на напряженно-деформированное состояние. Также известны работы, в которых авторы исследуют влияние дефектов слоистых панелей [8–10] на их напряженно-деформированное состояние.

В публикациях [11–14] представлены расчеты напряженно-деформированного состояния однопролетных и многопролетных панелей под действием статических нагрузок с учетом сдвиговых деформаций среднего слоя. В качестве материалов срединного слоя рассматриваются минеральная вата [11, 13], пенопласт [11], пенополистирол [13] и базальтовая вата [14]. Полученные результаты демонстрируют приемлемое соответствие данным натурных испытаний.

В то же время публикации, в которых исследуется крепление грузов при транспортировке [15, 16], как правило, не рассматривают возможность деформирования груза под действием силы тяжести и сил в элементах крепления.

В работах [17, 18] были проанализированы некоторые эффекты, которые проявляются при транспортировке груза, имеющего малую жесткость. Настоящая работа является продолжением этого исследования.

В качестве объекта исследования принят транспортный пакет, включающий семь кровельных трехслойных панелей с минераловатным утеплителем ПП 1200.100.0,5-С.П с размерами 4130×1200×100 мм, между которыми размещены пенопластовые подложки размером 100×40×4 см (рисунок 1).

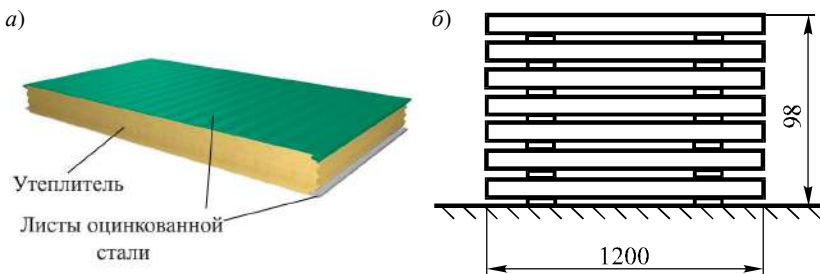


Рисунок 1 – Схемы одной сэндвич панели (а) и транспортного пакета (б)

В работе выполнен расчет для одного пакета, штабеля из двух пакетов, размещенных на платформе автотранспортного средства, крепление которых к полу транспортного средства обеспечивалось тремя прижимными ремнями, натяжение каждого принималось равным 3000 Н. В таблице 1 представлены значения параметров, принятые для расчетов.

Таблица 1 – Исходные данные для расчетов

Параметр	Один пакет	Штабель из двух пакетов
Суммарная масса панелей и пенопластовых прокладок, кг	674	1458
Динамическое давление, Па	627	3018,5
Статическое давление, Па	1345	2910
Равномерное вертикальное давление, Па	6356,5	9486

Для определения динамических нагрузок и сил, действующих на нижнюю наиболее нагруженную панель, ранее были разработаны расчетные схемы пакета и получены формулы, позволяющие рассчитать статические и динамические нагрузки, а также действие силы инерции при вертикальных колебаниях транспортного средства [19].

При разработке геометрической модели в программном комплексе ANSYS принято, что элементы рассматриваемого пакета панелей обладают следующими физико-механическими характеристиками:

– стальная обшивка – модуль Юнга  $E_1 = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0,3$ , плотность  $\rho_1 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;

– утеплитель (минеральная вата) –  $E_2 = 3$  МПа;  $\nu_2 = 0,12$ ;  $\rho_2 = 110$  кг/м<sup>3</sup>;

– пенопластовые подложки –  $E_3 = 10$  МПа;  $\nu_3 = 0,2$ ;  $\rho_3 = 15$  кг/м<sup>3</sup>.

Тонкие металлические обшивки моделировались оболочечным элементом SHELL181, внутренний слой (минеральная вата) и пенопластовые подложки – трехмерных элементом SOLID185. Для задания сил инерции использовался элемент SURF154. Конечноэлементная сетка была создана в автоматическом режиме. При задании граничных условий учтено отсутствие перемещений нижних поверхностей подложек, связанных с основанием. На рисунке 3 представлена конечноэлементная модель для одного из рассмотренных вариантов.

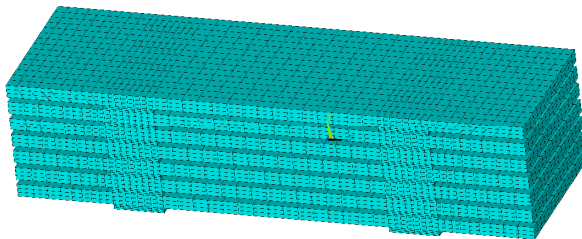


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель пакета из 7 одинаковых сэндвич-панелей

В результате расчетов определялись напряжения и перемещения точек наиболее нагруженной нижней панели. На рисунке 4 представлены схемы распределения напряжений в нижней панели от действия шести и тринадцати панелей, что соответствует одно- и двухъярусному расположению пакетов.

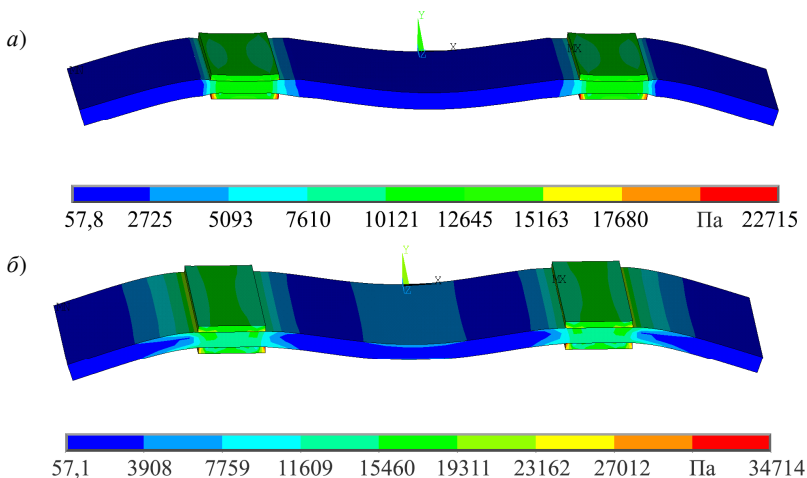


Рисунок 4 – Эквивалентные по Мизесу напряжения в нижней панели:  
 а – одноярусное; б – двухъярусное расположение пакетов

Результаты расчетов показывают, что максимальные напряжения возникают в зонах контакта пенопластовых подложек и облицовочных листов. Максимальные значения в срединном слое сэндвич-плиты при различном количестве панелей сверху находятся в пределах 23–88 кПа.

Результаты расчетов растягивающих напряжений  $\sigma_x$  от приложенных нагрузок представлены на рисунке 5.

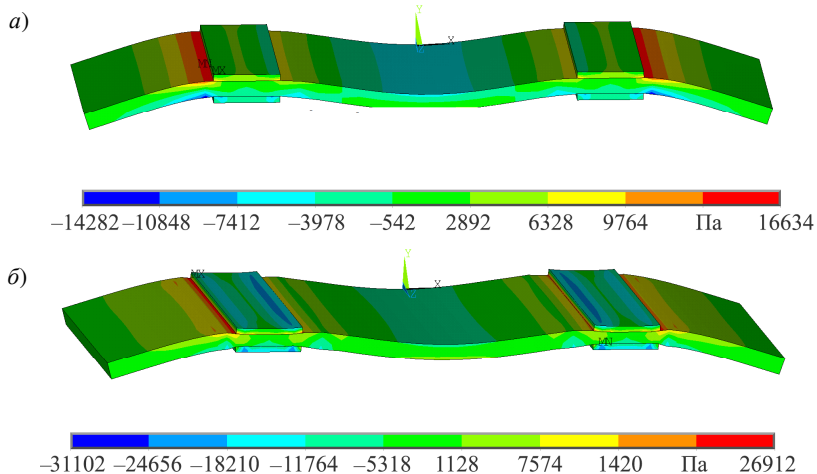


Рисунок 5 – Растягивающие напряжения  $\sigma_x$ :  
 а – одноярусное; б – двухъярусное расположение пакетов



Максимальные растягивающие напряжения возникают в верхнем металлическом облицовочном слое в зоне его контакта с пенопластовой прокладкой, через которую передается вся нагрузка со стороны панелей, расположенных выше. При двухъярусном расположении пакетов их значения достигают 26,9 кПа, что в 1,6 раза больше, чем при транспортировке одного пакета. Сжимающие напряжения достигают максимального значения в нижнем облицовочном слое и при двухъярусном расположении пакетов достигают 31,1 кПа. Максимальные значения растягивающих напряжений в минеральной вате не превышают предела ее прочности 100 кПа [20].

Также в ходе расчетов определялись вертикальные перемещения точек нижней панели, которая испытывает максимальную нагрузку (рисунок 6).

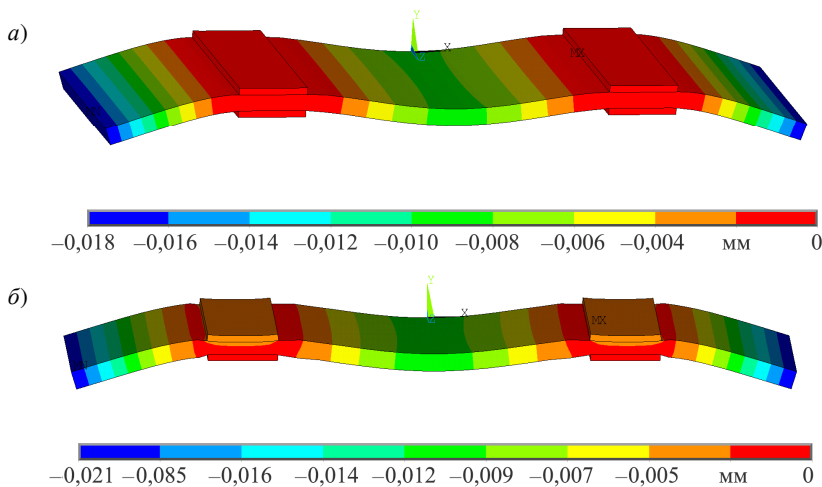


Рисунок 6 – Вертикальные перемещения точек нижней панели:  
*a* – одноярусное; *б* – двухъярусное расположение пакетов

Как видно из рисунка 6, *б*, при перевозке одного пакета части панели, расположенные вблизи пенопластовых прокладок, практически не перемещаются. Средняя часть панели смещается на величину, близкую к 0,008 мм. Наибольшие перемещения имеют место у точек, расположенных на концах панели и составляют около 0,018 мм. При двухъярусном расположении пакетов под действием давления верхней пенопластовой прокладки, перемещения под ней становятся заметными и достигают 0,003 мм. С учетом невысокой прочности минеральной ваты и малой толщины облицовочной панели под действием ударных нагрузок, связанных с движением автомобиля по неровному покрытию, может произойти смятие срединного слоя сэндвич-панели. При этом центральная часть панели прогибается на 0,009 мм, а ее концы смещаются на 0,021 мм.

Таким образом, результаты расчетов, выполненных для случая использования в качестве креплений шести прижимных ремней, показывают, что при вертикальных колебаниях транспортных пакетов в случаях одно- и двухъярусного размещения напряжения, возникающие в наиболее нагруженной нижней панели, не превышают предела прочности облицовочного листа и минеральной ваты.

Если после крепления груза либо в процессе его транспортировки натяжения ремней будут различными, например при повороте, то картина распределения напряжений станет несимметричной. Это может привести к смещению панелей в пакете относительно друг друга и, в конечном счете, стать причиной повреждения груза.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – № 10. – С. 55–66.
- 2 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.
- 3 **Леоненко, Д. В.** Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // *Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб.* – Вып. 33. – 2018. – С. 65–71.
- 4 **Осадчий, Н. В.** Аналитическое исследование поперечного изгиба трехслойной панели с жестким наполнителем / Н. В. Осадчий, В. Т. Шепель // *Механика и машиностроение.* – 2014. – № 5 (93). – С. 37–43.
- 5 **Шимановский, А. О.** Влияние условий закрепления контура сэндвич-панелей на их напряженно-деформированное состояние / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // *Механика. Исследования и инновации.* – 2020. – Вып. 13. – С. 183–188.
- 6 **Zenkour, A. M.** Three-dimensional elasticity solution for uniformly loaded cross-ply laminates and sandwich plates / A. M. Zenkour // *Journal of Sandwich Structures and Materials.* – 2007. – Vol. 9, is. 3. – P. 213–238.
- 7 **Mahesh, R.** Numerical study on the response of sandwich composite plates with foam core and different skin thicknesses to various impact energy levels / R. Mahesh, P. N. Rajesh // *International Journal of Mechanical Engineering.* – 2021. – Vol. 6, is. 1. – P. 17–23.
- 8 **Баранчик, А. В.** Моделирование деформирования и прочности трехслойных сэндвич-панелей с дефектами / А. В. Баранчик, В. Г. Баранчик // *Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сб. статей II Междунар. науч.-техн. конф.* – Брест : БрГТУ, 2018. – С. 3–7.
- 9 Экспериментальное исследование влияния дефектов на прочность композитных панелей методами корреляции цифровых изображений и инфракрасной термографии / Д. С. Лобанов [и др.] // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* – 2015. – № 4. – С. 159–170.
- 10 **Медведский, А. Л.** Численный анализ поведения слоистой композитной панели с межслоевыми дефектами под действием динамических нагрузок / А. Л. Медвед-

ский, М. И. Мартыросов, А. В. Хомченко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2019. – Т. 15, № 2. – С. 127–130.

11 **Левчук, А. А.** Статический расчет металлических трехслойных панелей с утеплителем из минераловатных плит и пенопласта / А. А. Левчук // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2008. – № 4. – С. 151–156.

12 **Драган, В. И.** Прочность и деформативность трехслойных металлических панелей с утеплителем / В. И. Драган, А. А. Левчук // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2011. – № 1. – С. 53–58.

13 **Петров, С. М.** Несущая способность и деформативность трёхслойных панелей с обшивками из металлических и композиционных материалов и легкими заполнителями : автореферат дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / С. М. Петров. – М. : Моск. гос. строит. ун-т, 2013. – 22 с.

14 Исследование напряженно-деформированного состояния кровельных панелей с утеплителем из базальтовой ваты / И. С. Холопов [и др.] // Металлические конструкции. – 2006. – Т. 12, № 4. – С. 255–262.

15 International Guidelines on Safe Load Securing for Road Transport. – Geneva : IRU Secretariat, 2014. – 76 p.

16 **Ramos, A. J. G.** Analysis of cargo stability in container transportation : Doctor of Philosophy Thesis / A. J. G. Ramos. – Porto : Universidade do Porto, 2015. – 164 p.

17 Cargo fastening on automobile transport considering its deformation / A. O. Shimanovsky [et al.] // Transport Means : Proceedings of the 22nd International Conference. – 2018. – Vol. 1. – P. 192–196.

18 **Шимановский, А. О.** Моделирование колебаний и напряженно-деформированного состояния пакетов сэндвич-панелей при их транспортировке / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 4. – С. 49–57.

19 Правила безопасного размещения и крепления грузов в кузове автомобильного транспортного средства : утв. М-вом трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь 10.10.2005. – Минск : Энергопресс, 2015. – 55 с.

20 ГОСТ 32603–2021. Панели металлические трехслойные с утеплителем из минеральной ваты. Технические условия. – Введ. 01.04.2022. – 49 с.

*I. E. KRAKAVA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **STRESS-STRAIN STATE OF A SANDWICH PANELS PACKAGE AT ITS TRANSPORTATION**

Using the ANSYS software package, there is performed the finite element modeling of the deformation of the most loaded bottom sandwich panel transported as a part of a package. The action of loads from the vehicle vertical oscillations is taken into account. The influence of inertial loads on the panel stress-strain state for the cases of stacking packages in one and two tiers is considered.

**Keywords:** sandwich panel, transport package, stresses, vertical displacements.

Получено 10.11.2022

УДК 691-419:534.1

*Е. А. ЛАЧУГИНА**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Рассмотрена постановка задачи о поперечных колебаниях упругой круговой симметричной по толщине пятислойной пластины. Нагрузка осесимметричная, равномерно распределенная по верхней плоскости пластины. Для тонких внешних и внутреннего несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. В слоях сравнительно толстого жесткого заполнителя деформированная нормаль считается прямолинейной. Она имеет постоянную длину и поворачивается на некоторый угол. Учтена работа поперечных сил инерции, а также касательных напряжений в заполнителе. Представлен вывод системы дифференциальных уравнений движения в перемещениях вариационным методом.

**Ключевые слова:** пятислойная круговая пластина, упругость, колебания, уравнения движения.

**Введение.** За последние годы применение слоистых элементов конструкций выросло и расширилось. Они нашли свое место и в строительстве, и в машиностроении. Это обуславливает требование по созданию расчетных математических моделей, в которых должен учитываться как статический, так и динамический характер нагрузок. В связи с этим исследование колебаний круговой пятислойной пластины является актуальным.

В монографиях [1–3] предлагаются общие подходы и различные кинематические гипотезы для слоистых конструкций при постановке краевых и начально-краевых задач. В статьях [4, 5] рассмотрены задачи динамики слоистых оболочек. В работах [6–8] содержатся результаты исследования колебаний неоднородных балок и круговых трехслойных пластин. Квазистатическое деформирование трехслойных пластин в случае линейно сжимаемого заполнителя представлено в работе [9], при учете взаимодействия с основанием Пастернака – в статье [10], при неосесимметричном растяжении-сжатии – в публикации [11]. Изгиб трехслойных пластин в нейтронном потоке исследован в статье [12].

Свободные колебания пятислойной прямоугольной пластины рассмотрены в [13], симметричной по толщине круговой – в [14]. В представленной работе для подобной пластины выведена система дифференциальных уравнений, описывающих ее вынужденные колебания.

**Постановка начально-краевой задачи.** Деформирование симметричной по толщине пятислойной круговой пластины рассматривается в цилиндрической системе координат, которая связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя ( $I$ ). В тонких жестких несущих слоях ( $I, 2, 4$ ) (рисунок 1) принимаются гипотезы Кирхгофа: нормаль прямолинейна, несжимаема и

перпендикулярна деформированной срединной плоскости своего слоя. В относительно толстых несжимаемых по толщине слоях заполнителя (3, 5), учитывается работа тангенциальных напряжений. Считаем, что толщины слоев: *внутреннего несущего* –  $h_1$ ; *внешних несущих* –  $h_2$ ; *заполнителя* –  $h_3$ . Нормаль к срединной плоскости несжимаема, остается прямолинейной и сдвигается на дополнительный угол  $\psi(r, t)$ .

Принимаем, что вертикальная нагрузка  $q = q(r, t)$  не зависит от окружной координаты  $\varphi$ . На контуре пластины ( $r = r_0$ ) сдвиговая деформация отсутствует ( $\psi = 0$ ) благодаря наличию жесткой диафрагмы. Прогиб пластины обозначим через  $w(r, t)$ . Продольные перемещения в слоях  $u^{(k)}(r, z)$ , благодаря принятым гипотезам, можно выразить через две искомые функции:  $w(r, t)$  и  $\psi(r, t)$ . В результате:

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$u_r^{(4)} = -zw_{,r} + h_3\psi, \quad 0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2;$$

$$u_r^{(1)} = -zw_{,r}, \quad -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1;$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi, \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3;$$

– в заполнителе 3, 5

$$u_r^{(5)} = -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi, \quad 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3;$$

$$u_r^{(3)} = -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi, \quad -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1,$$

где  $z$  – координата рассматриваемой точки слоя; запятая в нижнем индексе соответствует операции дифференцирования по следующей за ней координате.

Воспользовавшись соотношениями Коши [1], получим из (1) деформации в слоях:

$$\varepsilon_r^{(4)} = -zw_{,rr} + h_3\psi_{,r}; \quad \varepsilon_\varphi^{(4)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} + h_3\psi); \quad \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0;$$

$$\varepsilon_r^{(1)} = -zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0;$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = -zw_{,rr} - h_3\psi_{,r}; \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} - h_3\psi); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0;$$

$$\varepsilon_r^{(5)} = -zw_{,rr} + (z - 0,5h_1)\psi_{,r}; \quad \varepsilon_\varphi^{(5)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi); \quad \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{1}{2}\psi;$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = -zw_{,rr} + (z + 0,5h_1)\psi_{,r}; \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi); \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi.$$

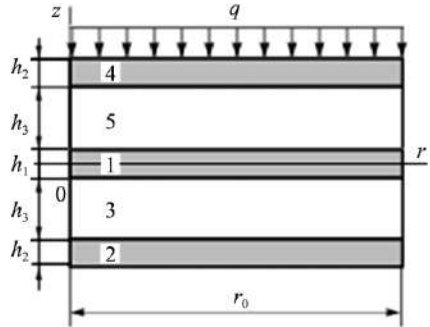


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3, 4, 5$ ), вводим внутренние усилия и моменты:

$$T_\alpha = \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha = \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int \sigma_\alpha^{(k)} z dz;$$

$$H_\alpha = (M_\alpha^{(3)} + M_\alpha^{(5)}) + h_3(T_\alpha^{(4)} - T_\alpha^{(2)}) + 0,5h_1(T_\alpha^{(3)} - T_\alpha^{(5)}); \quad (3)$$

$$Q = \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} dz + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(5)} dz.$$

Считается, что к контуру пластины приложены заданные силы и моменты  $T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0$ . Учитывается инерция движения пластины от поперечных колебаний. Инерция вращения нормали заполнителя не учитывается. Вариация работы внешней поверхностной нагрузки и сил инерции имеет вид

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w - M_0 \ddot{w}\delta w) r dr d\varphi. \quad (4)$$

Виртуальная работа контурных усилий

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi. \quad (5)$$

Виртуальная работа сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^5 \int (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} \delta \psi dz + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(5)} \delta \psi dz + \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Двойной интеграл здесь берется по площади срединной плоскости заполнителя  $S$ . Виртуальные перемещения определяются выражениями:

$$\delta u^{(4)} = -z\delta w_{,rr} + h_3\delta \psi_{,r}; \quad 0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2;$$

$$\delta u^{(1)} = -z\delta w_{,rr}; \quad -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1;$$

$$\delta u^{(2)} = -z\delta w_{,rr} - h_3\delta \psi_{,r}; \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3;$$

$$\delta u^{(5)} = -z\delta w_{,rr} + (z\delta \psi - 0,5h_1\delta \psi_{,r}); \quad 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3;$$

$$\delta u^{(3)} = -z\delta w_{,rr} + (z\delta \psi + 0,5h_1\delta \psi_{,r}); \quad -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1.$$

Вариации деформаций получим из (2):

$$\delta \varepsilon_r^{(4)} = -z\delta w_{,rr} + h_3\delta \psi_{,r}; \quad \delta \varepsilon_\varphi^{(4)} = \frac{1}{r}(-z\delta w_{,r} + h_3\delta \psi);$$

$$\delta \varepsilon_r^{(1)} = -z\delta w_{,rr}; \quad \delta \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(-z\delta w_{,r});$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_r^{(2)} &= -z\delta w_{,rr} - h_3\delta\psi_{,r}; \quad \delta\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(-z\delta w_{,r} - h_3\delta\psi); \\
\delta\varepsilon_r^{(5)} &= -z\delta w_{,rr} + (z\delta\psi_{,r} - 0,5h_1\delta\psi_{,r}); \quad \delta\varepsilon_\varphi^{(5)} = \frac{1}{r}(-z\delta w_{,r} + (z\delta\psi - 0,5h_1\delta\psi)); \\
\delta\varepsilon_r^{(3)} &= -z\delta w_{,rr} + (z\delta\psi_{,r} + 0,5h_1\delta\psi_{,r}); \quad \delta\varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(-z\delta w_{,r} + (z\delta\psi + 0,5h_1\delta\psi)); \\
\delta\varepsilon_{rz}^{(3)} &= \delta\varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{1}{2}\delta\psi.
\end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим входящую в (6) сумму интегралов по толщине слоев. Используя вариации радиальных составляющих деформаций (7) в первом слое, получим

$$\int_{h_1} (\sigma_r^{(1)}\delta\varepsilon_r^{(1)}) dz = \int_{h_1} \sigma_r^{(1)}(-z\delta w_{,rr}) dz = -M_r^{(1)}\delta w_{,rr}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\int_{h_2} \sigma_r^{(2)}\delta\varepsilon_r^{(2)} dz &= -M_r^{(2)}\delta w_{,rr} - h_3T_r^{(2)}\delta\psi_{,r}; \\
\int_{h_3} \sigma_r^{(3)}\delta\varepsilon_r^{(3)} dz &= -M_r^{(3)}\delta w_{,rr} + M_r^{(3)}\delta\psi_{,r} + 0,5h_1T_r^{(3)}\delta\psi_{,r}; \\
\int_{h_4} \sigma_r^{(4)}\delta\varepsilon_r^{(4)} dz &= -M_r^{(4)}\delta w_{,rr} + h_3T_r^{(4)}\delta\psi_{,r}; \\
\int_{h_5} \sigma_r^{(5)}\delta\varepsilon_r^{(5)} dz &= -M_r^{(5)}\delta w_{,rr} + M_r^{(5)}\delta\psi_{,r} - 0,5h_1T_r^{(5)}\delta\psi_{,r}; \\
\int_{h_1} \sigma_\varphi^{(1)}\delta\varepsilon_\varphi^{(1)} dz &= \int_{h_1} \sigma_\varphi^{(1)}\frac{1}{r}(-z\delta w_{,r}) dz = \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(1)}\delta w_{,r}); \\
\int_{h_2} \sigma_\varphi^{(2)}\delta\varepsilon_\varphi^{(2)} dz &= \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(2)}\delta w_{,r} - h_3T_\varphi^{(2)}\delta\psi); \\
\int_{h_3} \sigma_\varphi^{(3)}\delta\varepsilon_\varphi^{(3)} dz &= \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(3)}\delta w_{,r} + M_\varphi^{(3)}\delta\psi + 0,5h_1T_\varphi^{(3)}\delta\psi); \\
\int_{h_4} \sigma_\varphi^{(4)}\delta\varepsilon_\varphi^{(4)} dz &= \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(4)}\delta w_{,r} + h_3T_\varphi^{(4)}\delta\psi); \\
\int_{h_5} \sigma_\varphi^{(5)}\delta\varepsilon_\varphi^{(5)} dz &= \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(5)}\delta w_{,r} + M_\varphi^{(5)}\delta\psi - 0,5h_1T_\varphi^{(5)}\delta\psi).
\end{aligned}$$

Просуммировав полученные интегралы и подставив их в соотношение (5), для вариации энергии деформации имеем выражение

$$\delta W = \int_r \int_\varphi \left[ r(-M_r\delta w_{,rr} + H_r\delta\psi_{,r} + Q\delta\psi) + H_\varphi\delta\psi - M_\varphi\delta w_{,r} \right] d\varphi dr. \tag{8}$$

Слагаемые в подынтегральном выражении (8) представим в виде

$$\begin{aligned} rH_r \delta \psi_{,r} &= (rH_r \delta \psi)_{,r} - (rH_r)_{,r} r \delta \psi; \\ rM_r \delta w_{,r} &= (rM_r \delta w_{,r})_{,r} - [(rM_r)_{,r} \delta w]_{,r} + (rM_r)_{,rr} \delta w; \\ M_\varphi \delta w_{,r} &= (M_\varphi \delta w)_{,r} - M_{\varphi,r} \delta w. \end{aligned}$$

С учетом представленных выражений разобьем (8) на два интеграла. В первом выносим операцию дифференцирования за скобку, во втором – группируем слагаемые, содержащие одинаковые виртуальные перемещения:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \int_{r \varphi} \left\{ rH_r \delta \psi - rM_r \delta w_{,r} + [(rM_r)_{,r} - M_\varphi] \delta w \right\}_{,r} d\varphi dr - \\ &- \int \int_{r \varphi} \left\{ [(rH_r)_{,r} - H_\varphi] \delta \psi - [(rM_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}] \delta w \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \int_0 \left\{ rH_r \delta \psi - rM_r \delta w_{,r} + [(rM_r)_{,r} - M_\varphi] \delta w \right\} d\varphi - \\ &- \int \int_{r \varphi} \left\{ [(rH_r)_{,r} - H_\varphi - rQ] \delta \psi - [(rM_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}] \delta w \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение виртуальной работы внутренних усилий к работе внешних и контурных нагрузок (4), (5). Данное равенство справедливо при любых варьируемых перемещениях, если коэффициенты при независимых вариациях равны нулю. Отсюда получим систему дифференциальных уравнений движения в усилиях для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пятислойной пластины

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом для контура пластины  $r = r_0$  выполняются силовые граничные условия:

$$H_r = H_r^0; \quad M_r = M_r^0; \quad M_{r,rr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (10)$$

Используя закон Гука, деформации (2) и соотношения (3), получаем выражение обобщенных усилий через две неизвестные функции:  $w(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ . Подстановка полученных выражений в уравнения (9) дает систему дифференциальных уравнений движения в частных производных для определения перемещений

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2h_3 G_3 \psi &= 0, \\ L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (11)$$



где  $a_i$  – коэффициенты:

$$a_4 = \left[ 2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], a_5 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$a_6 = \left[ 2K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$a_7 = \left[ 2K_2^- h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-;$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования;  $L_2, L_3$  – операторы:

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Начальные условия движения принимаются однородные

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0. \quad (12)$$

Кинематические граничные условия в случае заделки контура пластины

$$\psi = 0, \quad w = w_{,r} = 0. \quad (13)$$

Для решения полученных уравнений предполагается использовать метод разложения искомым перемещений по системе собственных ортонормированных функций.

**Вывод.** В работе получена система (11) дифференциальных уравнений движения, которая совместно с начальными (12) и граничными (10), (13) условиями позволяет исследовать вынужденные поперечные колебания упругих круговых пятислойных пластин при осесимметричной нагрузке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 2 Aghalovyan, L. A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. A. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 3 Mikhasev, G. I. Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach. – Cham : Springer, 2019. – 280 p.
- 4 Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

5 **Kuznetsova, E. L.** Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenko, E. I. Starovoitov // *INCAS Bulletin*. – Vol. 12. – 2020. – P. 79–90.

6 **Fedotenko, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenko, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

7 **Могилевич, Л. И.** Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // *Наука и техника транспорта*. – 2006. – № 2. – С. 56–63.

8 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // *Journal of Applied Engineering Science*. – 2020. – 18 (4). – P. 699–704.

9 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках*. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

10 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

11 **Нестерович, А. В.** Напряжённое состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

12 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // *Periódico Tchê Química*. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.

13 **Kaplunov, J. D.** Low-frequency vibration modes of strongly inhomogeneous elastic laminates / J. D. Kaplunov, L. A. Prikazchikova // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. – 2018. – Т. 18, вып. 4. – С. 447–457.

14 **Лачугина, Е. А.** Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч., Гомель, 24–25 ноября 2022 г. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.*

*E. A. LACHUGINA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **TRANSVERSE VIBRATIONS OF THE FIVE-LAYER ELASTIC CIRCULAR PLATE WITH RIGID FILLERS**

The formulation of the transverse oscillations problem for an elastic circular five-layer plate symmetrical in thickness is considered. The load is axisymmetric, it is evenly distributed over the upper plane of the plate. For the thin outer and inner bearing layers, the kinematic hypotheses of Kirchhoff are fulfilled. In the layers of relatively thick rigid filler, the deformed normal remains rectilinear. It has the constant length and rotates by some additional angle. The work of transverse inertial forces, as well as the shear stresses in the filler, are taken into account. The derivation of the motion differential equations system in displacements by the variational method is presented.

**Keywords:** five-layer circular plate, elasticity, vibrations, equations of motion.

Получено 11.10.2022

УДК 691-419:539.377

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

**ИЗГИБ СТУПЕНЧАТОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ ПРИ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ**

Рассмотрен изгиб круглой ступенчатой сэндвич-пластины под действием термосиловых нагрузок. Принято, что для несжимаемого срединного слоя справедлива гипотеза Тимошенко, для наружных слоев – гипотезы Кирхгофа. Уравнения равновесия выведены на основе вариационного принципа с учетом соотношений термоупругости. Приведен пример численного расчета на основе полученного аналитического решения.

**Ключевые слова:** круговая сэндвич-пластина, ступенчато-переменная толщина, термоупругость.

**Введение.** Учет температуры при проектировании конструктивных элементов требует создания новых и уточнения существующих методов расчета. Механика многослойных конструкций рассмотрена в работе [1]. Монография [2] посвящена статическому и динамическому деформированию слоистых оболочек и пластин при различных моделях материалов слоев. В работе [3] рассмотрены типовые задачи термоупругости в квазистатической постановке для тонкостенных конструкций. В монографии [4] исследован изгиб трехслойного стержня при действии термосиловых нагрузок. Деформирование трехслойной балки со ступенчато-переменной границей в температурном поле представлено в работе [5]. Ряд статей [6–8] посвящен исследованию поведения круговых однослойных пластин при действии температурного поля. Целью представленной работы стало решение задачи об изгибе круговой сэндвич-пластины, имеющей ступенчато-переменную толщину, при совместном действии силовой и температурной нагрузок.

**Постановка задачи.** Круговая пластина включает три слоя. Обозначим через  $h_1$  толщины на участке  $l$  ( $h_1 \neq h_2$ ) внешних слоев (рисунок 1). Для них справедливы гипотезы Кирхгофа. Деформирование срединного внутреннего слоя (заполнителя) толщиной  $2c$  соответствует гипотезе Тимошенко. Перемещения на границах слоев неразрывны.

Для решения задачи вводим цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , связанную со срединной плоскостью симметричной по толщине пластины.

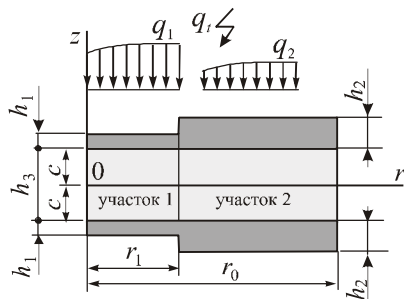


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины под термосиловой нагрузкой

По нормали к наружной поверхности верхнего слоя приложены осесимметричные распределенные нагрузки  $q_1(r)$ ,  $q_2(r)$ , а также подводится тепловой поток  $q_r$ . Распределение температуры в слоях считаем известным [2]. В качестве искомых величин принимаются прогиб пластины  $w_l(r)$  и относительный сдвиг  $\psi_l(r)$  в срединном слое на каждом участке  $l$ .

Для получения уравнений равновесия в перемещениях воспользуемся соотношениями закона Гука для термоупругих деформаций в девиаторно-сферовой форме [2]

$$s_{\alpha}^{(ex,f)} = 2G_{ex,f}(T_{ex,f})\vartheta_{\alpha}^{(ex,f)}, \quad \sigma^{(ex,f)} = 3K_{ex,f}(T_{ex,f})(\varepsilon^{(ex,f)} - \alpha_{0(ex,f)}T_{ex,f}),$$

$$s_{rz}^{(f)} = 2G_f(T_f)\vartheta_{rz}^{(f)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

где  $s_{\alpha}^{(ex,f)}$ ,  $\vartheta_{\alpha}^{(ex,f)}$  – девиаторы напряжений и деформаций, индекс  $ex$  здесь и далее соответствует внешним,  $f$  – внутреннему слою;  $\sigma^{(ex,f)}$ ,  $\varepsilon^{(ex,f)}$  – шаровые тензоры напряжений и деформаций;  $G_{ex,f}$ ,  $K_{ex,f}$  – зависящие от температуры модули сдвига и объемной деформации материала слоев;  $T_{ex,f}$  – известные температуры в слоях;  $\alpha_{0(ex,f)}$  – коэффициент линейного температурного расширения материала.

В работе [9] представлено решение задачи об изотермическом деформировании круговой ступенчатой пластины:

$$\psi(r) = \psi_1(r) + (\psi_2(r) - \psi_1(r))H_0(r - r_1),$$

$$w(r) = w_1(r) + (w_2(r) - w_1(r))H_0(r - r_1),$$

где  $H_0(r)$  – функция Хевисайда [10].

Система уравнений равновесия пластины на каждом участке не будет отличаться от аналогичной при изотермическом нагружении

$$L_2(b_{1l}\psi_l - b_{2l}w_{l,r}) = 0;$$

$$L_3(b_{2l}\psi_l - b_{3l}w_{l,r}) = -q_l. \quad (1)$$

где  $L_2$ ,  $L_3$  – дифференциальные операторы второго и третьего порядков соответственно [2].

Коэффициенты  $b_{il}$  в (1) зависят от температуры и характеристик жесткости слоев пластины:

$$b_{1l} = K_{f2}^l + 2c^2 K_{ex0}^l, \quad b_{2l} = K_{f2}^l + 2c K_{ex1}^l, \quad b_{3l} = 2K_{ex2}^l + K_{f2}^l,$$

$$K_{(ex,f)m}^l = \int_{h_{(ex,f)l}} \left[ K_{ex,f}(T_{ex,f}) + \frac{4}{3}G_{ex,f}(T_{ex,f}) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Решение системы (1) примем в виде [11]:

$$\Psi_l = \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l} r + \frac{C_{2l}}{r};$$

$$w_l = C_{3l} + C_{4l} r^2 + C_{5l} \ln(r) + C_{6l} r^2 \ln(r) + w_l^*; \quad (2)$$

$$w_l^* = \frac{1}{D_l} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_l r dr dr dr dr, \quad D_l = b_{3l} - \frac{b_{2l}^2}{b_{1l}},$$

где  $C_{il}$  – постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий на торцах участка  $l$  пластины ( $i = 1, \dots, 6$ ).

Кроме этого необходимо учесть условия конечности перемещений ( $w_l$ ,  $\Psi_l$ ,  $Q_r^l$ ) в центре пластины (при  $r = 0$ ) и условия на границе областей с разными толщинами при  $r = r_1$ :

– кинематические условия

$$w_1(r_1) = w_2(r_1), \quad w_{1,r}(r_1) = w_{2,r}(r_1), \quad \Psi_1(r_1) = \Psi_2(r_1); \quad (3)$$

– силовые граничные условия

$$M_r^1 = M_r^2, \quad H_r^1 = H_r^2, \quad Q_r^1 = Q_r^2. \quad (4)$$

Здесь обобщенные силы и моменты:

$$\begin{aligned} H_r^l &= b_{1l} \Psi_{l,r} + b_{1l}^- \frac{\Psi_l}{r} - b_{2l} w_{l,rr} - b_{2l}^- \frac{w_{l,r}}{r} - H_r^{lt}, \\ Q_r^l &= b_{2l} \left( \Psi_{l,rr} + \frac{\Psi_{l,r}}{r} - \frac{\Psi_l}{r^2} \right) - b_{3l} \left( w_{l,rrr} + \frac{w_{l,rr}}{r} - \frac{w_{l,r}}{r^2} \right), \\ M_r^l &= b_{2l} \Psi_{l,r} + b_{2l}^- \frac{\Psi_l}{r} - b_{3l} w_{l,rr} - b_{3l}^- \frac{w_{l,r}}{r} - M_r^{lt}, \end{aligned}$$

где  $H_r^{lt}$ ,  $M_r^{lt}$  – «температурные» составляющие моментов,

$$b_{1l}^- = K_{f2}^{l-} + 2c^2 K_{ex0}^{l-}, \quad b_{2l}^- = K_{f2}^{l-} + 2c K_{ex1}^{l-}, \quad b_{3l}^- = 2K_{ex2}^{l-} + K_{f2}^{l-},$$

$$K_{(ex,f)m}^{l-} = \int_{h_{(ex,f)l}} \left[ K_{ex,f}(T_{ex,f}) - \frac{2}{3} G_{ex,f}(T_{ex,f}) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Дополнительно предполагаем, что на торцевом контуре пластины расположена жесткая диафрагма. В случае шарнирного закрепления вдоль него должны выполняться следующие условия:

$$\Psi_2 = 0, \quad w_2 = 0, \quad M_r^2 = 0. \quad (5)$$

Последнее выражение (4) можно записать через перемещения:

$$\left( b_{22} \Psi_{2,r} + b_{22}^- \frac{\Psi_2}{r} - b_{32} w_{2,rr} - b_{32}^- \frac{w_{2,r}}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 6\alpha_{0ex} \int_{h_b} K_{ex} T_{ex} z dz + 3\alpha_{0f} \int_{h_f} K_f T_f z dz. \quad (6)$$

Выражения (3)–(6) образуют систему двенадцати линейных алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования  $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{26}$ .

Таким образом, решение (2) описывает термоупругие перемещения в круговой ступенчатой трехслойной пластине в случае шарнирного закрепления контура.

**Результаты расчета.** Для численной апробации решения была выбрана сэндвич-пластина с внешними слоями из сплава Д16Т и заполнителем из фторопласта-4, значения упругих констант для которых взяты из [2]. Толщины слоев пластины приведены к ее радиусу  $r_0$ :  $h_1 = 0,02, h_2 = 0,04, c = 0,15$ ; интенсивность нагрузки принята  $q_0 = 100$  кПа.

На рисунке 2 приведен график изменения напряжения  $\sigma_r$  по толщине в центре пластины ( $r = 0$ ) при различных температурах: 1 –  $T = 293$  К, 2 –  $T = 323$  К, 3 –  $T = 353$  К. Для удобства восприятия масштаб напряжений в срединном слое увеличен в 100 раз. При стандартной температуре 293 К (кривые 1) нижний слой сжат, верхний растянут, а в срединном слое возникают напряжения разных знаков. Увеличение температуры на 30 К (кривые 2) приводит к сжатию всех слоев. С увеличением температуры еще на 30 К происходит перераспределение напряжений в слоях пакета пластины. Напряжения на верхней стороне пластины растут медленнее, чем на нижней.

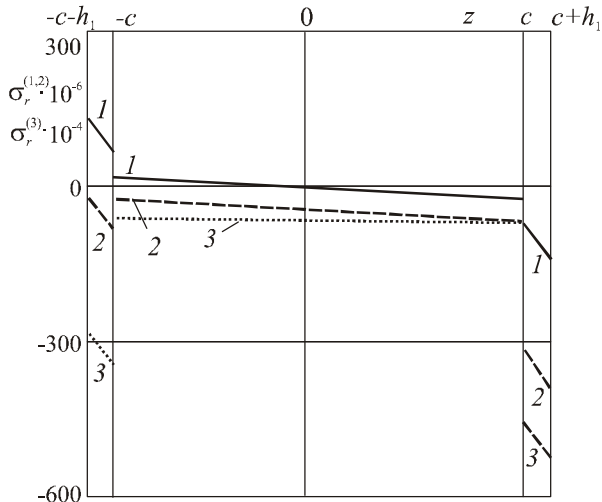


Рисунок 2 – Изменение напряжения  $\sigma_r$  по толщине в центре пластины

**Заключение.** Таким образом, в работе получены аналитические и числовые решения краевой задачи термосилового изгиба упругих круговых пластин ступенчато-переменной толщины.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22УЗБ-015).*

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- 1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
- 2 **Старовойтов, Э. И.** Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.
- 3 **Коваленко, А. Д.** Термоупругость / А. Д. Коваленко. – Киев : Вища школа, 1975. – 216 с.
- 4 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 183 с.
- 5 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.
- 6 **Iatan, R. I.** Thermal states of loading in the annular plates. Variable temperature along the radius. Outer edge fixed and inner edge free / R. I. Iatan, C. T. Popa, R. Mengher // Journal of Engineering Studies and Research. – 2012. – Vol. 18, is. 4. – P. 53–60.
- 7 **Ahire, Y. M.** Analysis of thermal stresses in thin circular plate due to moving heat source / Y. M. Ahire, A. A. Hamoud, K. P. Ghadle // International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development. – 2019. – Vol. 9, is. 3. – P. 1285–1292.
- 8 **Kaur, I.** Transversely isotropic thermoelastic thin circular plate with constant and periodically varying load and heat source / I. Kaur, P. Lata // International Journal of Mechanical and Materials Engineering. – 2019. – Vol. 14. – Article 10. – 13 p.
- 9 **Леоненко, Д. В.** Локальное нагружение ступенчатой круговой сэндвич-пластины / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 126–130.
- 10 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
- 11 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.

*D. V. LEONENKO*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

#### **BENDING OF A STEPED CIRCULAR SANDWICH PLATE UNDER THERMAL LOADING**

Bending of a round stepped sandwich plate under the action of thermal-force loads is considered. It is accepted that the hypothesis of Timoshenko is valid for the incompressible middle layer, and the hypothesis of Kirchhoff is valid for the outer layers. The equilibrium equations are derived on the basis of the variational principle, taking into account the thermoelasticity relations. An example of a numerical calculation based on the obtained analytical solution is given.

**Keywords:** circular sandwich plate, step-variable thickness, thermoelasticity.

Получено 19.10.2022

УДК 622.23.05:531.8:62-231.1

*А. В. ЛОКТИОНОВ*

*Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь*

## **КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРЕЛОВИДНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПРОДОЛЬНЫМИ И ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕЖУЩИМИ ГОЛОВКАМИ**

Предложена методика нахождения кинематических параметров стреловидных пространственных исполнительных механизмов, оснащённых как продольными, так и поперечными резовыми головками матричным методом. Получены формулы, позволяющие определять кинематические углы реза для общего случая движения исполнительного органа.

**Ключевые слова:** исполнительный механизм, кинематический анализ, матричный метод, режущая головка.

*Введение.* Для нахождения геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов используются различные методы расчетов. Наиболее простые из них, например, векторный, при котором определяются проекции звеньев на неподвижные оси координат, а затем дифференцированием находятся скорости и ускорения, целесообразно применять для механизмов, звенья которых расположены в одной плоскости [1].

Проходческие комбайны избирательного действия оснащаются продольно-осевыми [2–5] и поперечно-осевыми [6–8] резовыми коронками. В общем случае движение коронки с резами определяется угловой скоростью вращения коронки, скоростью перемещения ее центра масс в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а также скоростью поступательного движения комбайна. Следовательно, в соответствии с теорией сложного движения резец коронки имеет три переносных движения: два вращательных и одно поступательное прямолинейное, а также одно относительное вращательное движение.

Выполнение кинематического расчета режущего инструмента корончатого исполнительного механизма в случае координатного способа задания его движения при сложном движении реза связано с громоздким геометрическим анализом системы. При этом использование векторного метода расчёта параметров движения реза требует значительного числа промежуточных выкладок, чтобы учесть углы, определяющие установку резов на режущей головке [9, 10].

Работа резовых коронки проходческого комбайна связана с изменением положения режущего лезвия по отношению к обрабатываемому массиву, причем направление вектора скорости вершины реза оказывает влияние на геометрические параметры, которые определяют как процесс резания, так и износ инструмента.



Установлено, что определение скорости точки реза применительно к различным конструктивным схемам стреловидных корончатых исполнительных органов проходческого комбайна целесообразно осуществлять с использованием матричной методики расчёта [11, 12]. Знание составляющих вектора абсолютной скорости по отношению к подвижной системе координат даёт возможность нахождения кинематических углов резов [13].

Выполнение кинематического анализа исполнительного механизма матричным методом предполагает выражение координат точки в неподвижной системе отсчёта через ее координаты в подвижных системах. Проекция скорости на неподвижные оси находят путем дифференцирования текущих координат. Определение проекций скорости на подвижные оси координат осуществляется с использованием транспонированной матрицы [11]. Опыт показывает, что расчёт кинематических характеристик матричным методом оказывается более простым по сравнению с применением расчётных формул, описывающих сферическое движение исполнительного механизма [12, 13].

Целью представленной работы является развитие матричного метода кинематического анализа стреловидного исполнительного органа на общий случай его движения. Получающаяся при этом расчётная схема оказывается применимой в случае оснащения стреловидных исполнительных механизмов и продольными, и поперечными режущими головками.

*Определение кинематических параметров стреловидных исполнительных механизмов для общего случая движения.* Рассмотрим механизм (рисунок 1), в котором реализуются три переносных движения: два вращательных и одно поступательное. Получим проекции вектора абсолютной скорости точки  $M$  реза на оси  $X_6Y_6Z_6$ , которые совпадают с его осями симметрии. В данном случае  $x_6 = y_6 = z_6 = 0$ , но расчётные формулы будут справедливы как для корончатого, так и для дискового исполнительных органов.

Введём систему координат  $XYZ$ , начало которой  $O_1$  связано с точкой оси центральной цапфы. Положение начала отсчёта и ориентация данной системы координат сохраняются при любых перемещениях исполнительного органа, перемещающегося поступательно вдоль оси  $O_1Y$  (рисунок 1, *a*) со скоростью  $v_n$ . Головка с резами установлена на рукояти, состоящей из трёх звеньев длиной  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  (рисунок 1, *a*, *в*, *д*), и вращается относительно её продольной оси  $O_3X_3$  с угловой скоростью  $\dot{\alpha}_4 = \omega_2$  (рисунок 1, *з*). Рукоять перемещается в горизонтальной и вертикальной плоскостях с угловыми скоростями  $\dot{\alpha}_1 = \omega_1$  и  $\dot{\alpha}_2 = \omega_3$  (рисунок 1, *a*, *б*).

*Исходные данные для расчета:* углы поворотов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  исполнительного органа и соответствующие им угловые скорости  $\dot{\alpha}_1 = \omega_1$ ,  $\dot{\alpha}_2 = \omega_3$ ,  $\dot{\alpha}_4 = \omega_2$ ; длины  $r_1$  и  $r_2$  частей рукояти, причем отрезок  $r_1$  перемещается только с угловой скоростью  $\dot{\alpha}_1$ , а  $r_2$  двигается вместе с рукоятью  $r_3$  с угловыми скоростями

ми  $\dot{\alpha}_1$  и  $\dot{\alpha}_2$  в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рисунок 1, а, б, в); угол  $\alpha_3 = \text{const}$ , который учитывает наклон оси закрепления головки или диска с резами по отношению к продольной оси  $O_1Y_1$  (рисунок 1, а); угол установки реза  $\alpha_5$  и угол  $\alpha_6$ , учитывающий его тангенциальное размещение на корпусе головки органа (рисунок 1, д, е); координаты точки  $M$  в подвижной системе координат  $X_4Y_4Z_4$ , значения которых  $r_3, r_4, 0$ .

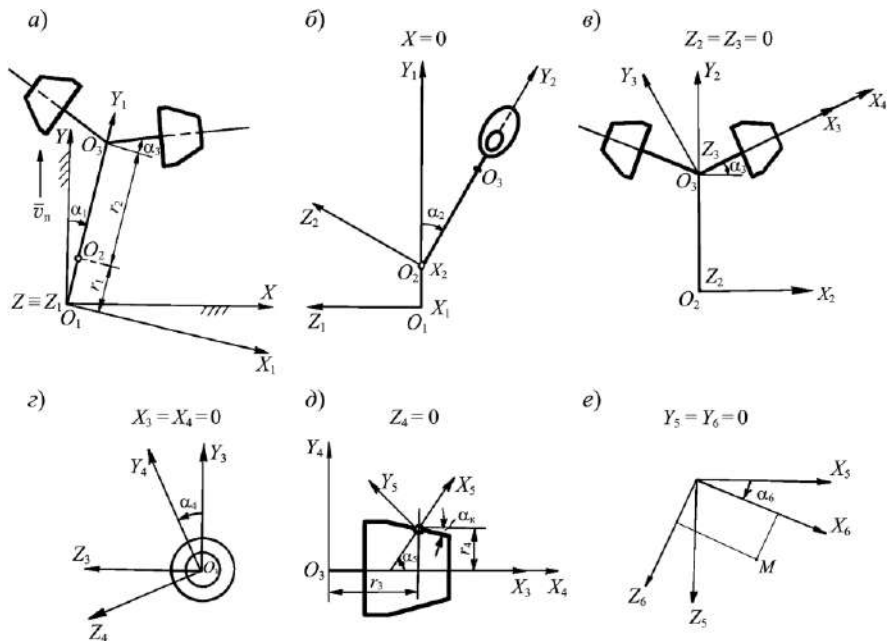


Рисунок 1 – Расчётные схемы для общего случая движения стреловидного исполнительного органа

Примем, что изображенные на рисунке 1 системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы  $A_1, \dots, A_6$ . Тогда координаты точки  $M$  в неподвижной системе отсчета  $XYZ$  связаны с ее координатами в системе  $X_6Y_6Z_6$  следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 A_2 A_3 A_4 \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Вектор скорости точки  $M$  в системе  $XYZ$  с учётом перемещения исполнительного органа вдоль оси  $OY_1$  со скоростью  $\bar{v}_n$  определяется дифференцированием равенства (1) из выражения

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\Pi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В свою очередь вектор скорости той же точки  $M$  в системе  $X_6Y_6Z_6$

$$\bar{v}_6 = \begin{pmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{y}_6 \\ \dot{z}_6 \end{pmatrix} + A' \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\Pi} \\ 0 \end{pmatrix} = A' \bar{v}. \quad (3)$$

где  $A' = A'_6 A'_5 A'_4 A'_3 A'_2 A'_1$  – транспонированная матрица, которая получается перемножением транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.

Выражения (2) и (3) представляют собой один и тот же вектор в базисах систем координат  $XYZ$  и  $X_6Y_6Z_6$ . С учётом (1) формула (3) записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_6 = & \dot{\alpha}_1 \left[ A' \frac{dA_1}{d\alpha_1} \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A' \frac{dA_1}{d\alpha_1} A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A' \frac{dA_1}{d\alpha_1} A_2 A_3 A_4 \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix} + A' \frac{dA_1}{d\alpha_1} A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \dot{\alpha}_2 \left[ A'_6 A'_5 A'_4 A'_3 A'_2 \frac{dA_2}{d\alpha_2} \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A'_6 A'_5 A'_4 A'_3 A'_2 \frac{dA_2}{d\alpha_2} A_3 A_4 \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & + A'_6 A'_5 A'_4 A'_3 A'_2 \frac{dA_2}{d\alpha_2} A_3 A_4 A_5 A_6 \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} \left. \right] + \dot{\alpha}_4 \left[ A'_6 A'_5 A'_4 \frac{dA_4}{d\alpha_4} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + A'_6 A'_5 A'_4 \frac{dA_4}{d\alpha_4} A_5 A_6 \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} \right] + A' \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\Pi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\alpha_3 = \text{const}$ ,  $\alpha_5 = \text{const}$ ,  $\alpha_6 = \text{const}$ .

Из равенства (4) легко определяются проекции  $\dot{x}_6, \dot{y}_6, \dot{z}_6$  вектора  $\bar{v}_6$  абсолютной скорости точки  $M$  на оси координат  $x_6, y_6, z_6$ .

Из представленного выражения несложно получить значения кинематических углов реза (в точке  $M$ ) в процессе резания при общем случае движения исполнительного органа как для радиальной, так и тангенциальной установки резов. Формула (4) справедлива при любом сочетании кинематических и конструктивных параметров стреловидных исполнительных органов проходческих комбайнов  $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_4, \bar{v}_{\Pi}, r_1, r_2, r_3, r_4, \alpha_5, \alpha_6$ . Аналогично можно получить решение и для случая, при котором  $x_6 = y_6 = z_6 \neq 0$ .

Боковой  $\varphi$  и задний  $\tau$  углы заточки резца следует рассчитывать по формуле  $\operatorname{tg} \varphi = \dot{y}_6 / \dot{x}_6$ ,  $\operatorname{tg} \tau = \dot{y}_6 / \dot{z}_6$ . Кинематический угол  $\xi$  для передней грани [12] можно выразить из равенства  $\operatorname{tg}(\xi/2) = \dot{y}_6 / \dot{x}_6$ .

Рассмотрим частные случаи определения  $\dot{x}_6$ ,  $\dot{y}_6$ ,  $\dot{z}_6$ , при которых расчётные формулы значительно упрощаются.

Если  $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$  и  $x_6 = y_6 = z_6 = 0$ , то формулы имеют вид:

$$\dot{x}_6 = \dot{x}_4 = \dot{\alpha}_1[r_1 + r_2 \cos \alpha_2 + r_4 \cos(\alpha_2 - \alpha_4)] - v_{\text{п}} \sin \alpha_1;$$

$$\dot{y}_6 = \dot{y}_4 = -\dot{\alpha}_2 r_2 \sin \alpha_4 + (v_{\text{п}} \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1 r_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_4);$$

$$\dot{z}_6 = \dot{z}_4 = \dot{\alpha}_4 r_4 - \dot{\alpha}_2 (r_2 \cos \alpha_4 + r_4) + (\dot{\alpha}_1 r_3 - v_{\text{п}} \cos \alpha_1) \sin(\alpha_4 - \alpha_2).$$

Они применимы для радиальных резцов дискового исполнительного органа комбайнов, аналогичных ГПК-2.

В случае  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \pi/2$ ,  $x_6 = y_6 = z_6 = 0$  получаем

$$\dot{x}_6 = \dot{x}_5 = (\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_4 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_4)(-r_3 \sin \alpha_5 + r_1 \cos \alpha_5) +$$

$$+ v_{\text{п}} [\sin \alpha_5 (\cos \alpha_4 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_4 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) + \cos \alpha_5 \cos \alpha_2 \cos \alpha_1];$$

$$\dot{y}_6 = \dot{y}_5 = -(\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_4 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_4)(r_3 \cos \alpha_5 + r_4 \sin \alpha_5) +$$

$$+ v_{\text{п}} [\cos \alpha_5 (\cos \alpha_4 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_4 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) - \sin \alpha_5 \cos \alpha_2 \cos \alpha_1];$$

$$\dot{z}_6 = \dot{z}_5 = \dot{\alpha}_4 r_4 + \dot{\alpha}_1 (r_3 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2 + r_4 \sin \alpha_2) - \dot{\alpha}_2 r_3 \cos \alpha_4 +$$

$$+ v_{\text{п}} (\cos \alpha_4 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_4 \sin \alpha_1).$$

Эти выражения справедливы для резцов корончатого исполнительного органа, используемого в комбайнах типа ПК-3р.

Полученные в работе [13] проекции на оси координат вектора абсолютной скорости точки  $M$  для корончатого исполнительного органа также являются частным случаем рассмотренного. При  $r_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ ,  $\alpha_3 = 0$  расчётная схема (см. рисунок 1) и формулы могут быть применены при кинематическом анализе движения резцов дискового планетарного исполнительного органа, которым оснащены комбайны типа «Урал-10КС» и «Урал-20КС».

**Выводы.** Представленный алгоритм кинематического анализа стреловидных исполнительных механизмов, основанный на использовании матричного метода, позволяет осуществлять расчеты в случаях сложных кинематических схем исполнительных органов горных машин. Таким образом, можно осуществить верификацию результатов расчетов, полученных путем компьютерного моделирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Локтионов, А. В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Современные методы проектирования машин. – 2004. – Вып. 2. – Т. 2. – С. 132–136.

2 Менцель, Б. Комбайны избирательного действия с продольными и поперечными режущими головками / Б. Менцель, П. Френьо // Глюкауф. – 1981. – № 5. – С. 25–29.

3 Automatic section cutting and forming control of longitudinal-axial-roadheaders / J. Tian [et al.] // Meitan Xuebao = Journal of the China Coal Society. – 2009. – Vol. 34, is. 1. – P. 111–115.

4 Совершенствование конструкции продольно-осевых коронок проходческого комбайна избирательного действия / А. А. Хорешок [и др.] // Горное оборудование и электромеханика. – 2010. – № 5. – С. 2–6.

5 New model for predicting instantaneous cutting rate of axial-type roadheaders / Q. Zhang [et al.] // KSCE Journal of Civil Engineering. – 2016. – Vol. 21, is. 1. – P. 168–177.

6 Семенов, В. В. Проходческие комбайны избирательного действия отечественного и зарубежного производства / В. В. Семенов, С. А. Калашников, А. С. Носенко. – Новочеркасск : ЮРГТУ (НПИ), 2012. – 124 с.

7 Мостаков, В. А. Анализ стреловидных исполнительных органов проходческих комбайнов с продольно-осевыми и поперечно-осевыми режущими коронками и барабанами / В. А. Мостаков // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2014. – Отдельный выпуск № 6. Горная механика и транспорт. – С. 200–205.

8 Disk rock cutting tool for the implementation of resource-saving technologies of mining of solid minerals / L. Mametyev [et al.] // E3S Web of Conferences. – 2017. – Vol. 21. – Article 03005. – 6 p.

9 Локтионов, А. В. Расчёт кинематических параметров режущего инструмента исполнительных органов проходческих комбайнов с продольной режущей головкой / А. В. Локтионов // Изв. вузов. Горный журнал. – 1990. – № 3. – С. 68–76.

10 Computer-aided efficient design and performance optimization of cutting head for roadheader / X. Jin [et al.] // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12. – Article 6788. – 16 p.

11 Локтионов, А. В. К матричной записи кинематических параметров режущего инструмента горных машин / А. В. Локтионов // Изв. вузов. Машиностроение. – 1979. – № 7. – С. 138–141.

12 Локтионов, А. В. Матричная методика расчёта кинематических параметров исполнительного механизма в общем случае его движения / А. В. Локтионов // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 176–184.

13 Локтионов, А. В. Кинематика режущего инструмента при сферическом движении исполнительного механизма проходческого комбайна / А. В. Локтионов, А. А. Сидорович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – Вып. 13. – С. 93–101.

*A. V. LOKTIONOV*

*Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus*

## **KINEMATICAL ANALYSIS OF ARROW-SHAPED ACTUATORS WITH LONGITUDINAL AND TRANSVERSAL CUTTING HEADS**

There is proposed a technique for finding the kinematic parameters of arrow-shaped spatial actuators equipped both with longitudinal and transverse cutting heads using the matrix method. The obtained formulas allow to determine the kinematic angles of the cutter for the general case of the executive body movement.

**Keywords:** actuator, kinematic analysis, matrix method, cutting head.

Получено 31.07.2020

УДК 691-419:534.1

*М. В. МАРКОВА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

В работе представлены уравнения движения для круглой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв. Модель деформирования пластины согласуется с гипотезой «ломаной линии». Вывод уравнений движения основан на вариационном принципе Гамильтона. Полученное для частного случая вынужденных колебаний решение предполагает деление рассматриваемой задачи на две составляющие: задачу о квазистатическом деформировании и задачу о собственных колебаниях пластины. Для апробации составленного решения для трёх различных пакетов пластин выполнены численные исследования по определению параметров напряжённо-деформированного состояния при восприятии линейного во времени внешнего воздействия.

**Ключевые слова:** трёхслойная круговая пластина, ступенчатая пластина, динамическое деформирование.

**Введение.** Трёхслойные пакеты материалов не являются новым инженерно-конструктивным решением и уже более полувека активно используются при возведении зданий и сооружений, проектировании элементов корпуса морских и воздушных судов, пассажирских и грузовых железнодорожных вагонов, транспортных цистерн и контейнеров, рефрижераторных фургонов, магистральных трубопроводов и т. д. С появлением новых материалов и развитием производственных технологий применение трёхслойных композитов в различных сферах только увеличивается. Сочетание физико-механических свойств разнородных материалов в одном пакете позволяет получить конструкцию, обладающую совокупностью параметров, обеспечивающих с экономической, функциональной, эксплуатационной и эстетической точек зрения наибольшую рациональность её применения.

Как правило, трёхслойный пакет представляет собой монолитный элемент, состоящий из тонких наружных слоёв, воспринимающих внешнее воздействие, и относительно толстого связующего срединного заполнителя, функция которого заключается в перераспределении напряжений между наружными слоями и наделении всего пакета требуемыми физическими параметрами: тепло- или электропроводностью, звуко- или магнитной проницаемостью и т. д.

Теория расчёта напряжённо-деформированного состояния трёхслойных пакетов естественным образом сформировалась из теории расчёта однослойных элементов [1], и на сегодняшний день насчитывается несколько тысяч публикаций, посвящённых исследованию работы трёхслойных конструкций.

Такое обилие разноплановых исследований обусловлено наличием различных подходов к решению поставленных задач [2, 3]. Однако следует отметить, что наибольшее развитие теория многослойных конструкций получила благодаря методу гипотез, основанному на некоторых предположениях об особенностях изменения искомых величин по толщине пакета. В работе [4] предложено деление метода гипотез на два основных подхода: непрерывно-структурный, основанный на единой для всего пакета гипотезе, и дискретно-структурный, рассматривающий работу каждого слоя в отдельности. Система гипотез дискретно-структурного подхода получила в литературе название «гипотеза ломаной линии» (англ. *Zig-Zag theory* [5, 6]).

Несмотря на явные преимущества трёхслойных конструкций над однослойными, стремление улучшить их работу привело к созданию пакетов с локальными утолщениями в наиболее напряжённых местах. Увеличение толщины элемента в критических областях позволяет повысить его прочность и жёсткость без существенного изменения массы.

В данной работе с применением дискретно-структурного метода гипотез рассматривается такой трёхслойный элемент со ступенчато-переменной толщиной. Для подтверждения актуальности предложенной темы рассмотрены выполненные за последние годы работы со схожей проблематикой.

Так, к примеру, в работе [7] представлен основанный на теории сдвига первого порядка вывод уравнений движения для круговой трёхслойной пластины со сквозным утолщением жёстких внешних слоёв в центре. В статье [8] рассмотрено исследование, основанное на гипотезе ломаной линии и вариационном принципе Лагранжа и направленное на изучение напряжённо-деформированного состояния трёхслойной прямоугольной пластины со ступенчатым увеличением толщины растянутого лицевого слоя.

Подобный способ улучшения несущей способности прямоугольной сэндвич-панели предложен в работах [9, 10]. Здесь ступенчатое изменение толщины имеют как наружные листы пакета, так и срединный наполнитель (утолщение наружного слоя обуславливает сужение внутреннего). Авторы исследования подчеркивают, что с точки зрения изгиба и устойчивости ступенчатые сэндвич-пластины доказали свою рациональность. Приведенные результаты расчетов продемонстрировали снижение значений основных частот собственных колебаний при ступенчатом варьировании толщин по сравнению со значениями для аналогов постоянной толщины. Отмечается, что такое изменение может быть недопустимым для некоторых конструкций и должно контролироваться.

Свободные колебания круговой пластины с линейно-переменной толщиной наполнителя и наружными слоями постоянной толщины, моделируемые как пологие оболочки, воспринимающие мембранные силы и изгибающие моменты, рассмотрены в исследовании Ч. Чанга и Х. Чена [11].

Динамическое деформирование круглых сэндвич-пластин с функциональным изменением толщины наполнителя достаточно широко рассмотрено в работах Р. Лала и Р. Рани. Уравнения движения здесь выводятся на основе

теории Миндлина и принципа Гамильтона, внешние слои, как и в предыдущем случае, моделируются как мембраны, а срединный наполнитель изменяет свою толщину вдоль радиального направления параболически [12, 13], экспоненциально [14] или линейно [15, 16].

Отметим, что интерес к исследованию потенциальных преимуществ пластин ступенчато-переменной толщины на сегодняшний день актуален и для однослойных элементов. В работе [17] для анализа собственных колебаний круговых пластин с многократным ступенчатым изменением толщины предложен усовершенствованный полуаналитический метод Фурье – Ритца, а в [18] на основе метода Якоби – Рэлея – Ритца описан подход, позволяющий получить отклик такой пластины при восприятии ударной нагрузки и проанализировать характеристики переходных процессов и установившихся колебаний.

**Постановка задачи.** На рисунке 1 представлена круглая трёхслойная пластина со ступенчатым изменением толщины наружных слоёв 1 и 2. Пластина рассматривается в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , привязанной к срединной плоскости наполнителя 3, который относительно наружных слоёв имеет большую толщину:  $h_3 = 2c = \text{const}$ . Толщина внешних слоёв задаётся с помощью кусочно-постоянной функции Хевисайда  $H_0(r)$  [19]:  $h_1(r) = h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) \cdot H_0(r - R_I)$ ;  $h_2(r) = h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) \cdot H_0(r - R_I)$ , здесь римскими цифрами I и II обозначены номера участков, разделяемых ступенью,  $R_I$  – радиус центрального участка I. Изменение толщины на центральном участке пластины может быть как положительным (уширение), так и отрицательным (сужение).

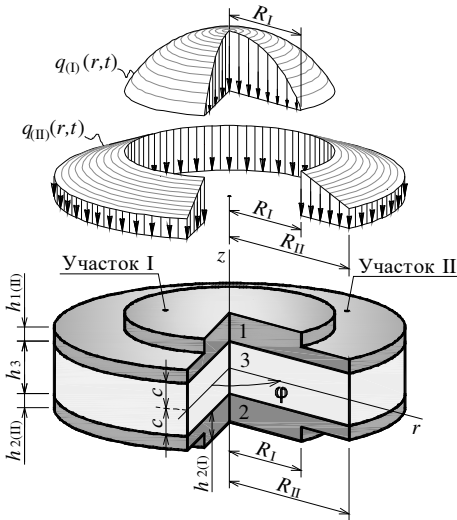


Рисунок 1 – Круговая трёхслойная ступенчатая пластина

В момент времени  $t_0$  пластина воспринимает действие внешней осесимметричной нагрузки, выводящей её из состояния равновесия:  $q = q_{(I,II)}(r, t)$ . В результате чего, в пластине возникает прогиб  $w(r, t)$ , радиальное перемещение координатной поверхности  $u(r, t)$  и сдвиг в наполнителе  $\psi(r, t)$ . Модель деформирования пластины согласуется с гипотезой ломаной линии: изгиб тонких внешних слоёв описывается классической гипотезой Кирхгофа [20] о прямолинейности и перпендикулярности нормали, деформирование относительно толстого срединного наполнителя подчиняется сдвиговой гипотезе Тимошенко [21].



**Уравнения движения.** На основе вариационного принципа Гамильтона [22] в работе [23] был представлен вывод уравнений движения круговой трёхслойной пластины с функционально-переменной толщиной наружных слоёв:

$$\begin{aligned}
& a_3^+ L_3(u) + 2a_{3,r}^+ L_2(u) + a_5^+ L_3(\Psi) + 2a_{5,r}^+ L_2(\Psi) - a_6^+ L_3(w,r) - 2a_{6,r}^+ L_2(w,r) + \\
& + \left( a_{3,rr}^+ + \frac{a_{3,r}^-}{r} \right) u_{,r} + \left( a_{5,rr}^+ + \frac{a_{5,r}^-}{r} \right) \Psi_{,r} - \left( a_{6,rr}^+ + \frac{a_{6,r}^-}{r} \right) w_{,rr} + \\
& + \left( a_{3,rr}^- - \frac{a_{3,r}^+}{r} \right) \frac{u}{r} + \left( a_{5,rr}^- - \frac{a_{5,r}^+}{r} \right) \frac{\Psi}{r} - \left( a_{6,rr}^- - \frac{a_{6,r}^+}{r} \right) \frac{w_{,r}}{r} - \\
& - \left[ M_{3,r} + \frac{M_3}{r} \right] \ddot{u} - \left[ M_{5,r} + \frac{M_5}{r} \right] \ddot{\Psi} + \left[ M_{6,r} + \frac{M_6}{r} \right] \ddot{w}_{,r} - \\
& - M_3 \ddot{u}_{,r} - M_5 \ddot{\Psi}_{,r} + M_6 \ddot{w}_{,rr} - M_1 \ddot{w} = -q; \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\Psi) - a_3^+ L_2(w,r) + a_{1,r}^+ u_{,r} + a_{2,r}^+ \Psi_{,r} - a_{3,r}^+ w_{,rr} + \\
& + a_{1,r}^- \frac{u}{r} + a_{2,r}^- \frac{\Psi}{r} - a_{3,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_1 \ddot{u} - M_2 \ddot{\Psi} + M_3 \ddot{w}_{,r} = 0, \\
& a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\Psi) - a_5^+ L_2(w,r) + a_{2,r}^+ u_{,r} + a_{4,r}^+ \Psi_{,r} - a_{5,r}^+ w_{,rr} + \\
& + a_{2,r}^- \frac{u}{r} + a_{4,r}^- \frac{\Psi}{r} - a_{5,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_2 \ddot{u} - M_4 \ddot{\Psi} + M_5 \ddot{w}_{,r} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по указанной координате;  $M_k$  и  $a_k^\pm$  – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины;  $L_2(g)$  и  $L_3(g)$  – дифференциальные операторы:

$$L_2(g) = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) = g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Используя метод декомпозиции, в работах [24, 25] система (1) была адаптирована для описания колебаний пластины со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв:

$$\begin{aligned}
w &= w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1); \quad u = u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1); \\
\Psi &= \Psi_{(I)} + (\Psi_{(II)} - \Psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1),
\end{aligned}$$

$$\Delta \Delta w_{(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \dot{w}_{(I,II)} + D_{(I,II)} M_{(I,II)} \dot{w}_{(I,II)} = D_{(I,II)} q_{(I,II)}; \tag{2}$$

$$u_{(I,II)} = b_{1(I,II)} w_{(I,II),r} + r C_{1(I,II)} + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I,II)} dr;$$

$$\Psi_{(I,II)} = b_{2(I,II)} w_{(I,II),r} + r C_{3(I,II)} + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I,II)} dr.$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $D_{(i)}$ ,  $b_{k(i)}$ ,  $m_{k(i)}$  – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв на  $i$ -м участке пластины;  $C_{k(i)}$  – константы интегрирования, определяемые из условий ограниченности решения в точках  $r = 0$ ,  $r = R_1$  и  $r = R_{II}$ .

Решение системы (2) строилось путём разделения искомых перемещений на квазистатические ( $w_s$ ,  $u_s$ ,  $\Psi_s$ ) и динамические ( $w_d$ ,  $u_d$ ,  $\Psi_d$ ) составляющие [26]:

$$w_{(I, II)} = w_{s(I, II)} + w_{d(I, II)}, \quad u_{(I, II)} = u_{s(I, II)} + u_{d(I, II)}, \quad \Psi_{(I, II)} = \Psi_{s(I, II)} + \Psi_{d(I, II)},$$

и в конечном виде для линейного по времени внешнего воздействия было представлено выражениями:

$$\begin{aligned} w_{s(I, II)} &= C_{s5(I, II)} + C_{s6(I, II)} r^2 + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)} r^2 \ln r + \\ &\quad + D_{(I, II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I, II)}) \, dr dr dr dr; \\ w_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d5n(I, II)} I_0 \left( r \gamma_{(I, II)n}^+ \right) + C_{d6n(II)} K_0 \left( r \gamma_{(II)n}^+ \right) + C_{d7n(I, II)} J_0 \left( r \gamma_{(I, II)n}^- \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_{d8n(II)} Y_0 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \right] \left( A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right); \\ u_{s(I, II)} &= C_{s1(I, II)} r + \frac{C_{s2(II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)} b_{1(I, II)} r + C_{s7(II)} \frac{b_{1(II)}}{r} + C_{s8(II)} b_{1(II)} r (2 \ln r + 1) + \\ &\quad + \frac{D_{(I, II)} b_{1(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I, II)}) \, dr dr dr, \\ u_{d(I, II)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d1n(I, II)} r + \frac{C_{d2n(II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^+ b_{1(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^+} \right) - \right. \\ &\quad \left. - C_{d6n(II)} K_1 \left( r \gamma_{(II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(II)n}^+ b_{1(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - \right. \\ &\quad \left. - C_{d7n(I, II)} J_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^- \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^- b_{1(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^-} \right) - \right. \\ &\quad \left. - C_{d8n(II)} Y_1 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \left( \gamma_{(II)n}^- b_{1(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \right] \left( A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right), \\ \Psi_{s(I, II)} &= C_{s3(I, II)} r + \frac{C_{s4(II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)} b_{2(I, II)} r + C_{s7(II)} \frac{b_{2(II)}}{r} + C_{s8(II)} b_{2(II)} r (2 \ln r + 1) + \\ &\quad + \frac{D_{(I, II)} b_{2(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I, II)}) \, dr dr dr; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{d(I, II)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d3n(I, II)} r + \frac{C_{d4n(II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^+ b_{2(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^+} \right) - \right. \\
& - C_{d6n(II)} K_1 \left( r \gamma_{(II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(II)n}^+ b_{2(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - \\
& - C_{d7n(I, II)} J_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^- \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^- b_{2(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^-} \right) - \\
& \left. - C_{d8n(II)} Y_1 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \left( \gamma_{(II)n}^- b_{2(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \right] \left( A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_{(i)n}^{\pm}$  – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины  $\omega_n$ ;  $I_0(r\gamma_{(i)n}^+)$ ,  $K_0(r\gamma_{(i)n}^+)$ ,  $J_0(r\gamma_{(i)n}^-)$ ,  $Y_0(r\gamma_{(i)n}^-)$  – функции Бесселя от действительного и мнимого аргумента [27, 28];  $A_n$  и  $B_n$  – константы, определяемые из начальных условий колебаний пластины.

Ввиду конечности значений перемещений, возникающих в центральной точке  $r = 0$ , требуется принять, что константы интегрирования:

$$C_{s2(I)} = C_{s4(I)} = C_{s7(I)} = C_{s8(I)} = C_{d2n(I)} = C_{d4n(I)} = C_{d6n(I)} = C_{d8n(I)} = 0.$$

Условия опирания внешнего контура пластины формируют граничные условия, служащие для определения оставшихся констант интегрирования. Так, в точке  $r = R_{II}$  при шарнирном опирании и наличии в торце пластины жёсткой диафрагмы, препятствующей сдвиговым деформациям:

$$u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad w_{(II)} = 0, \quad M_{r(II)} = 0.$$

При заделке наружного контура:

$$u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad w_{(II)} = 0, \quad w_{,r(II)} = 0.$$

Здесь  $M_r$  – изгибающий момент;  $w_{,r}$  – угол поворота нормали при изгибе пластины.

Кроме того, метод декомпозиции предполагает наложение между отдельными участками пластины условий непрерывности перемещений и усилий, т. е. в точке  $r = R_I$  необходимо потребовать выполнения условий:

$$\begin{aligned}
u_{(I)} = u_{(II)}, \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}, \quad w_{(I)} = w_{(II)}, \quad w_{,r(I)} = w_{,r(II)}, \\
T_{r(I)} = T_{r(II)}, \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}, \quad H_{r(I)} = H_{r(II)}, \quad Q_{(I)} = Q_{(II)}.
\end{aligned}$$

Здесь  $T_r$ ,  $H_r$ ,  $Q$  – продольная сила, момент на границе контакта слоёв и поперечная сила соответственно. Выражения для определения внутренних усилий представлены в статье [23].

Рассматриваемая задача предполагает, что до восприятия внешнего воздействия пластина находилась в покое и не обладала начальной деформацией, поэтому константы интегрирования по времени  $A_n$  и  $B_n$  могут быть определены из условия:

$$w(r, 0) = w_s(r, 0) + w_d(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = \dot{w}_s(r, 0) + \dot{w}_d(r, 0) = 0,$$

или 
$$w_d(r, 0) = -w_s(r, 0), \quad \dot{w}_d(r, 0) = -\dot{w}_s(r, 0).$$

Предполагая, что связь деформаций и напряжений, возникающих в пластине, соответствует линейной теории упругости, получаем выражения для определения напряжений в слоях:

– в зоне контакта срединного заполнителя и внешних слоёв

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(3)}(r, t) &= \varepsilon_r^{(3)}(r, t)K_3^+ + \varepsilon_\phi^{(3)}(r, t)K_3^- = \\ &= K_3^+ (u_{,r}(r, t) + c\Psi_{,r}(r, t) - cw_{,rr}(r, t)) + \frac{K_3^-}{r} (u(r, t) + c\Psi(r, t) - cw_{,r}(r, t)); \end{aligned}$$

– по наружной поверхности пластины

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, t) &= \varepsilon_r^{(1)}(r, t)K_1^+ + \varepsilon_\phi^{(1)}(r, t)K_1^- = \\ &= K_1^+ (u_{,r}(r, t) + c\Psi_{,r}(r, t)) + \frac{K_1^-}{r} (u(r, t) + c\Psi(r, t)) - \\ &- \left( K_1^+ w_{,rr}(r, t) + \frac{K_1^-}{r} w_{,r}(r, t) \right) \left( c + h_{1(\text{I})} + (h_{1(\text{II})} - h_{1(\text{I})}) H_0(r - R_1) \right); \\ \sigma_r^{(2)}(r, t) &= \varepsilon_r^{(2)}(r, t)K_2^+ + \varepsilon_\phi^{(2)}(r, t)K_2^- = \\ &= K_2^+ (u_{,r}(r, t) - c\Psi_{,r}(r, t)) + \frac{K_2^-}{r} (u(r, t) - c\Psi(r, t)) + \\ &+ \left( K_2^+ w_{,rr}(r, t) + \frac{K_2^-}{r} w_{,r}(r, t) \right) \left( c + h_{2(\text{I})} + (h_{2(\text{II})} - h_{2(\text{I})}) H_0(r - R_1) \right). \end{aligned}$$

Здесь 
$$K_k^+ = K_k + 4/3G_k, \quad K_k^- = K_k - 2/3G_k,$$

где  $K_k$  и  $G_k$  – модуль объёмной деформации и модуль сдвига материала слоёв.

**Численные исследования.** Для апробации полученного решения определены параметры напряжённно-деформированного состояния зацементированных по внешнему контуру круговых трёхслойных пластин радиусом  $R_{\text{II}} = 1$  м со ступенчатым изменением толщины наружных слоёв при их вынужденных колебаниях, побуждаемых восприятием внешнего воздействия в виде равномерно распределённой по всей площади нагрузки интенсивностью  $q_{(0)} = q_{(\text{II})} = -100$  кПа. Пакеты пластин представлены материалами: «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т», «сталь–фторопласт-4–сталь» и «сталь–ПС-1–сталь», со следующими физико-механи-

ческими характеристиками [29–31]: дюралюминий (Д16Т) –  $\rho_{1,2}=2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_{1,2}=0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G_{1,2}=0,267 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; фторопласт-4 –  $\rho_3=2150 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_3=345 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $G_3=90 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; сталь –  $\rho_{1,2}=7850 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_{1,2}=1,913 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G_{1,2}=0,78 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; полистирольный пенопласт (ПС-1) –  $\rho_3=60 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_3=10 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $G_3=15 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Значения толщин наружных слоёв:  $h_{1(\text{I})}=h_{2(\text{I})}=0,04 \text{ м}$ ,  $h_{1(\text{II})}=h_{2(\text{II})}=0,02 \text{ м}$  (пластины имеют уширение в центральной части). Толщина срединного заполнителя –  $h_3=0,3 \text{ м}$ .

На рисунке 2 представлен график изменения прогиба в центральной точке пластины ( $r=0$ ) с течением времени вынужденных колебаний.

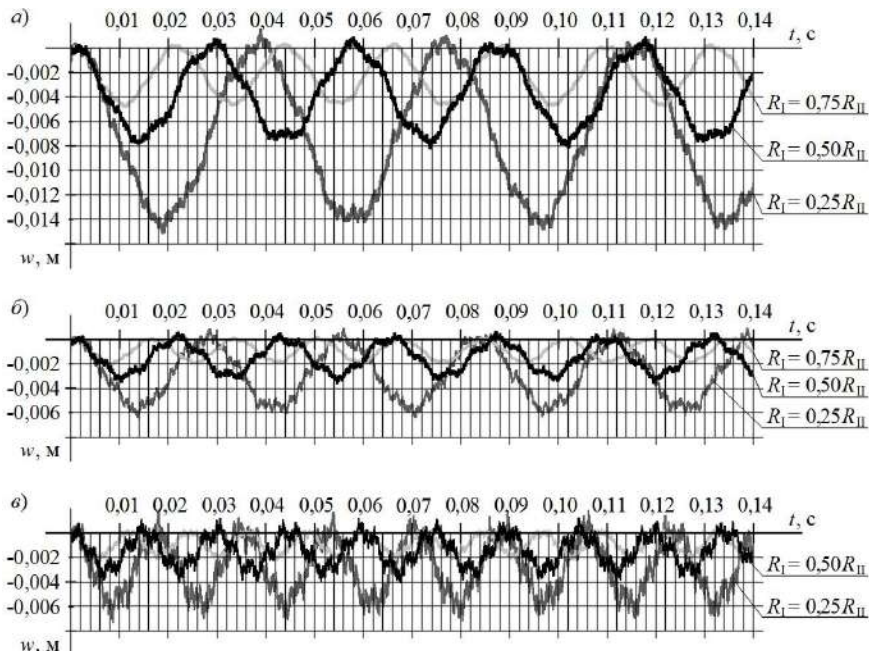


Рисунок 2 – Изменение прогиба в центральной точке пластины в процессе колебаний:

*a* – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т», *б* – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»,  
*в* – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Изменение значений максимальных прогибов и периода колебаний пластин обусловлено изменением жёсткости при варьировании геометрии и физико-механических характеристик слоёв. В рамках рассмотренных пакетов наблюдается, что наибольшее влияние на деформативность трёхслойного элемента оказывает материал внешних слоёв.

На рисунке 3 представлены графики изменения прогиба пластины вдоль её радиуса при квазистатическом и динамическом (в момент первого максимального прогиба) деформировании. Материалы пакетов – прежние, радиус изменения толщины пластины –  $R_1=0,5R_{II}$ .

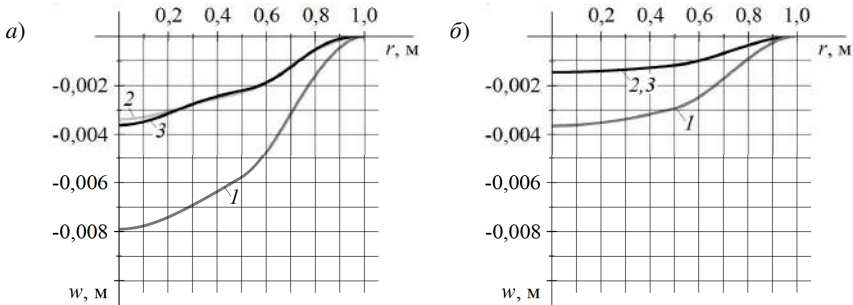


Рисунок 3 – Изменение прогиба вдоль радиуса пластины при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании:

1 – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Замена материала наружных слоёв пакета с Д16Т на сталь приводит к увеличению модуля объёмной деформации внешних слоёв в 2,4 раза. При этом прогиб в центре пластины при динамическом деформировании уменьшается в 2,35, а при квазистатическом – в 2,50 раза. Замена материала срединного заполнителя пакета с фторопласт-4 на ПС-1 приводит к уменьшению модуля объёмной деформации срединного слоя в 34,5 раза. При этом динамический прогиб в центре пластины увеличивается в 1,07, а квазистатический – в 1,01 раза. Из приведенных на рисунке 3 графиков также видно, что динамическое нагружение конструкции (рисунок 3, а) вызывает существенное увеличение прогиба элемента в сравнении с квазистатическим воздействием (рисунок 3, б) с той же интенсивностью нагрузки. Для исследованных пакетов в рассматриваемый момент времени прогиб в центральной точке пластины при динамическом деформировании в среднем составил 230% от статического.

Схожие закономерности справедливы и для сдвига, возникающего в заполнителе пластины при её изгибе (рисунок 4).

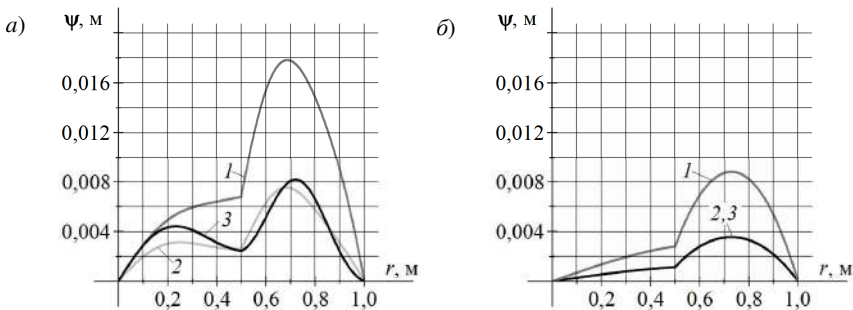


Рисунок 4 – Изменение сдвига в заполнителе вдоль радиуса пластины при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании:

1 – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

На рисунке 5 представлены графики изменения напряжений на растянутой грани пластины вдоль её радиуса при квазистатическом и динамическом деформировании. Материалы пакетов – прежние, радиус изменения толщины пластины –  $R_1 = 0,5R_{II}$ .

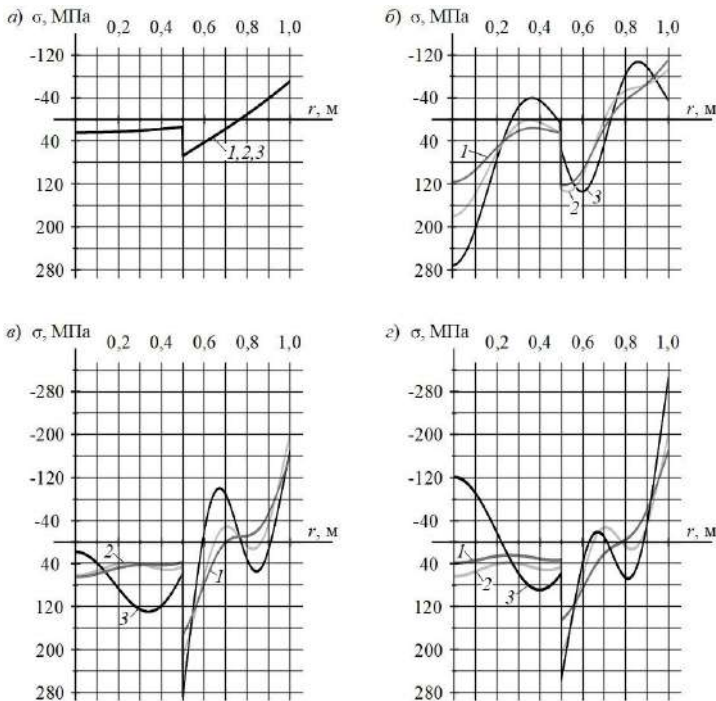


Рисунок 5 – Изменение напряжений вдоль радиуса пластины при квазистатическом деформировании (а) и в случаях динамического деформирования при достижении максимального напряжения в точках  $r = 0$  (б),  $r = R_1$  (в) и  $r = R_{II}$  (г):

1 – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Из приведенных на рисунке 5 графиков видно, что характер распределения напряжений вдоль радиуса пластины при её динамическом деформировании существенно зависит от составляющих пакет материалов. Кроме того, при динамическом деформировании физико-механические характеристики материалов оказывают более весомое влияние на значения возникающих в слоях напряжений нежели при квазистатическом деформировании.

На рисунке 6 представлены графики изменения максимальных напряжений в точках оси пластины ( $r = 0$ ). Ступенчатое изменение толщины располагается при  $R_1 = 0,5R_{II}$ . Для наглядности графического отображения масштаб напряжений в пределах срединного заполнителя (от  $-0,30$  до  $+0,30$  м) увеличен в 100 раз.

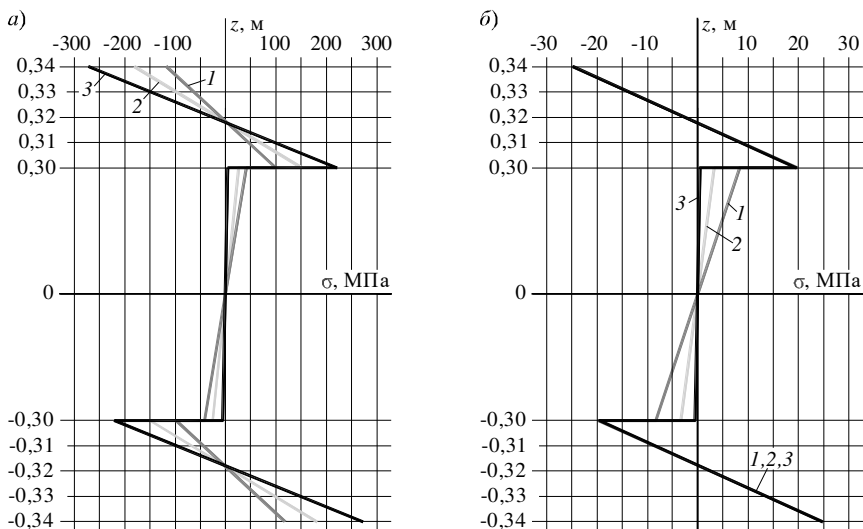


Рисунок 6 – Изменение напряжений по толщине пакета в центре пластины для случаев динамического (а) и квазистатического (б) деформирования:

1 – пакет «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт–4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Скачок напряжений на границе контакта слоёв обусловлен изменением механических характеристик пакета.

**Заключение.** В рамках рассмотренных пакетов пластин было выявлено, что динамическое приложение внешнего воздействия приводит к увеличению прогиба элемента более чем в два раза в сравнении с квазистатическим приложением нагрузки той же величины. Напряжения, возникающие в пластине при её динамическом деформировании, более чувствительны к составу пакета, чем при работе элемента в статике.

*Работа выполнена в рамках задания 1.08 Государственной программы научных исследований «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Leissa, A. W. Vibration of plates / A. W. Leissa. – Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1969. – 353 p.

2 Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.

3 Гольденвейзер, А. Л. Теория тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

4 Григолюк, Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 5–17.

5 Carrera, E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56, is. 3. – P. 287–308.



6 **Carrera, E.** An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered, orthotropic plates / E. Carrera // *Composite Structures*. – 2000. – Vol. 50, is. 2. – P. 183–198.

7 **Al-Jumaily, A. M.** Influence of the Poisson ratio on the natural frequencies of stepped-thickness circular plate / A. M. Al-Jumaily, K. Jameel // *Journal of Sound and Vibration*. – 2000. – Vol. 234, is. 5. – P. 881–894.

8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной ортотропной пластины ступенчато-переменной толщины / Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2014. – № 2 (304). – С. 38–43.

9 Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings / C. H. Nguyen [et al.] // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2011. – Vol. 11, no. 4. – P. 697–716.

10 **Nguyen, C. H.** Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings / C. H. Nguyen, K. Chandrashekhara, V. Birman // *Journal of Sandwich Structures & Materials*. – 2011. – Vol. 13, is. 2. – P. 237–260.

11 **Chang, J. S.** Free vibrations of sandwich plates of variable thickness / J. S. Chang, H. C. Chen // *Journal of Sound and Vibration*. – 1992. – Vol. 155, is. 2. – P. 195–208.

12 **Lal, R.** On radially symmetric vibrations of circular sandwich plates of non-uniform thickness / R. Lal, R. Rani // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2015. – Vol. 99. – P. 29–39.

13 **Lal, R.** On the radially symmetric vibrations of circular sandwich plates with polar orthotropic facings and isotropic core of quadratically varying thickness by harmonic differential quadrature method / R. Lal, R. Rani // *Meccanica*. – 2016. – Vol. 51, is. 3. – P. 611–634.

14 **Rani, R.** Radially symmetric vibrations of exponentially tapered clamped circular sandwich plate using harmonic differential quadrature method / R. Rani, R. Lal // *Mathematical Analysis and its Applications : Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 143. – New Delhi : Springer, 2015. – P. 633–643.

15 **Lal, R.** On the use of differential quadrature method in the study of free axisymmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Lal, R. Rani // *Journal of Vibration and Control*. – 2016. – Vol. 22, is. 7. – P. 1729–1748.

16 **Rani, R.** Axially symmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Rani, R. Lal // *Soft Computing for Problem Solving : Proceedings of the Third International Conference : Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 258. – New Delhi : Springer, 2014. – P. 169–181.

17 **Hao, Q.** Free transverse vibration of circular plate of stepped thickness with general boundary conditions by an improved Fourier–Ritz method / Q. Hao, Zh. Chen, W. Zhai // *Shock and Vibration*. – 2022. – Vol. 2022. – Article ID 1643050. – 10 p.

18 **Gao, C.** Steady and transient vibration analysis of uniform and stepped annular/circular plates based on FSDT / C. Gao [et al.] // *Acta mechanica*. – 2022. – Vol. 233, no. 3. – P. 1061–1082.

19 **Зорич, В. А.** Математический анализ. Ч. I. / В. А. Зорич. – 6-е изд., доп. – М. : МЦНМО, 2012. – 710 с.

20 **Bauchau, O.** Kirchhoff plate theory / O. Bauchau, J. Craig // *Structural Analysis : Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 163. – Dordrecht : Springer, 2009. – P. 819–914.

21 **Timoshenko, S. P.** On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars / S. P. Timoshenko // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1921. – Vol. 41, is. 245. – P. 744–746.

22 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

23 **Маркова, М. В.** Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2022. – Вып. 36. – С. 3–10.

24 **Маркова, М. В.** Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины / М. В. Маркова // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки*. – 2022. – № 3 (132). – С. 121–127.

25 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2022. – № 3 (60). – С. 68–76.

26 **Тонг, К. Н.** Теория механических колебаний / К. Н. Тонг. – М. : Машгиз, 1963. – 351 с.

27 **Бейтман, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 296 с.

28 **Ватсон, Г. Н.** Теория Бесселевых функций. Ч. 1 / Г. Н. Ватсон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.

29 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием : [монография] / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.

30 СП 5.04.01-2021. Стальные конструкции. – Введ. 01.10.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2021. – 153 с.

31 Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета : учеб. пособие / А. М. Иванов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1968. – 220 с.

*M. V. MARKOVA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **STRESS-STRAIN BEHAVIOR OF A THREE-LAYER CIRCULAR STEPPED PLATE UNDER FORCED OSCILLATIONS**

The paper presents the motion equations for a circular three-layer plate with a step-variable thickness of the outer layers. The plate deformation is described by the «Zig-Zag theory». The motion equations are derived from Hamilton's variational principle. The solution for the special case of forced oscillations is obtained by dividing the problem into two components: the problem of quasi-static deformation and the problem of plate free oscillations. To test the formulated solution for three different plate packages, the numerical studies are performed to determine the parameters of the stress-strain state under the action of an external influence linear in time.

**Keywords:** three-layer plate, stepped plate, dynamic deformation.

Получено 28.10.2022

УДК 624.078:539.37:004.94

*Т. М. МАРТЫНЕНКО<sup>1</sup>, С. А. ПРОНКЕВИЧ<sup>2</sup>, И. М. МАРТЫНЕНКО<sup>2</sup>,  
В. А. МАКСИМОВИЧ<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Университет гражданской защиты МЧС Беларусь, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ИСПОЛНЕНИЯХ КОНСТРУКЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ В СРЕДЕ ANSYS**

Исследуется наиболее распространенный в практике строительства узел примыкания двух симметричных двутавров. Моделируется передача нагрузки через многоболтовое соединение и сварные соединения, выполненные встык и через накладку. Представлены особенности разработанных конечно-элементных моделей в среде ANSYS и результаты расчетов напряженно-деформированного состояния соединяемых деталей под действием приложенной силы.

**Ключевые слова:** многоболтовое соединение, соединение через накладку, соединение встык, околоузловые области, деформирование накладок соединения.

**Введение.** Тонкостенные стержни открытого профиля широко применяются при строительстве различных зданий и сооружений. Они воспринимают нагрузки от расположенных выше конструкций и передают их на колонну нижнего яруса или фундамент. В тонкостенном стержне открытого профиля, кроме продольной силы и изгибающих моментов, могут действовать крутящий момент и бимомент, причем напряжения в стержнях зависят от конструкций узлов примыкания балки к колоннам, связям, покрытиям и перекрытиям.

Соединение элементов может быть шарнирным, упругоподатливым или жестким. Оно может выполняться с использованием накладок и сварки или болтов, с применением фланцевых соединений [1]. В шарнирных узлах сечения соединяемых элементов имеют одинаковые линейные перемещения, углы поворота, и депланация соединяемых элементов независима друг от друга [2]. В жестких узлах линейные и угловые перемещения тел в месте сопряжения совпадают, депланация их сечений определяется конструкцией узла сопряжения [3]. Упругоподатливые узлы по характеру своей работы занимают промежуточное положение [4].

В большинстве стержневых конструкций узловые сопряжения выполняются так, что продольные оси, проходящие через центры тяжести стержней, пересекаются в одной точке, а продольные силы, действующие в стержнях, не вызывают появления в них изгибающих моментов. Наиболее просто такое сопряжение стержней осуществляется в плоских рамах из профилей одной высоты с двумя осями симметрии [5, 6]. Целью представленной работы является анализ напряженно-деформированного состояния узла соединения двух двутавровых профилей.

**Вычислительный эксперимент.** Для решения поставленной задачи была создана объемная модель Г-образной рамы, оси стержней которой перпендикулярны. Нижний и верхние концы стойки рамы жестко закреплены. Концы ригеля свободны, к нему приложена вертикальная сила 1 кН.

Трехмерные модели конструкции созданы в программном комплексе Autodesk Inventor Professional, который позволяет работать со сборкой твердых тел, находящихся в параметрических зависимостях между собой, что дает возможность варьировать геометрические параметры конструкции при проведении модельных экспериментов. Далее проведен экспорт в ANSYS [7] (рисунки 1, 2).

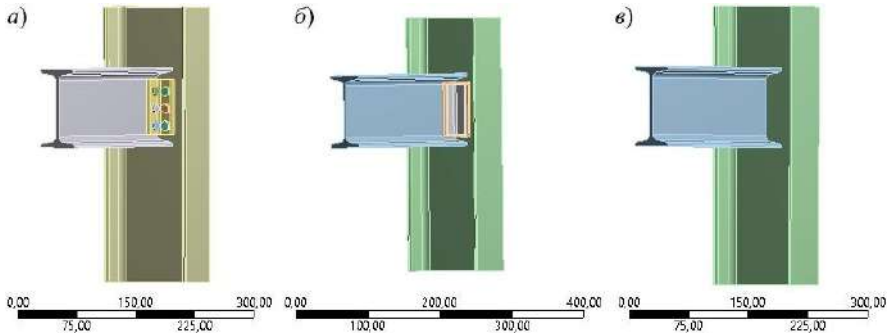


Рисунок 1 – Объемные модели соединений: многоболтового (а), через накладку (б), встык (в), размеры на шкалах указаны в мм

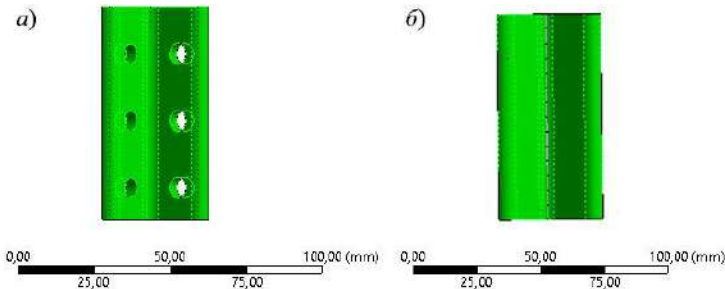


Рисунок 2 – Объемная модель накладок соединения

Каждая построенная модель включала около 37000 конечных элементов двух основных типов: SOLID 186 (трехмерный НДС призматической формы с двадцатью узлами) и SOLID 187 (трехмерный элемент объемного НДС с десятью узлами в форме тетраэдра) [8]. Длины ребер элементов в области соединения составляли около 1 мм, в стержне открытого профиля – 5 мм (рисунок 3). Также были заданы граничные условия, соответствующие жесткой заделке стойки в сечениях В и С и к точке А была приложена вертикальная сосредоточенная сила 1 кН (рисунок 4).

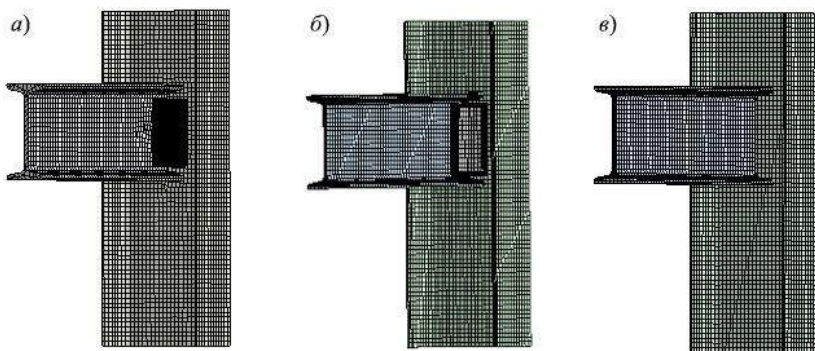


Рисунок 3 – Конечно-элементные модели соединений: многоболтового (а), через накладку (б), встык (в)

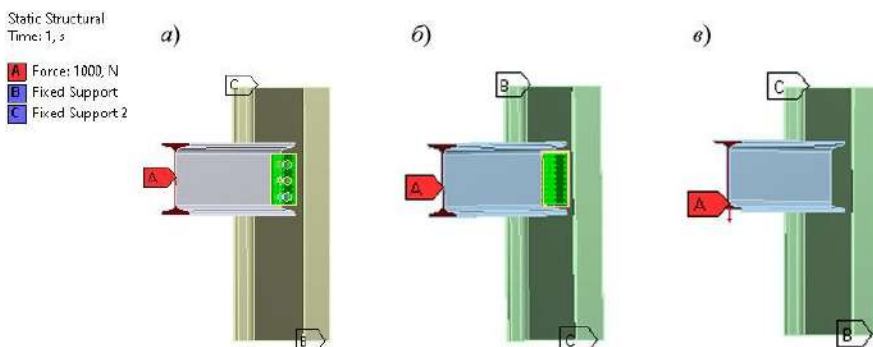


Рисунок 4 – Схемы задания граничных условий и приложения силы к соединениям: многоболтовому (а), через накладку (б), встык (в)

Для разработанных конечно-элементных моделей проведены статические расчеты. На рисунке 5 и 6 представлены результаты расчетов деформаций во всей конструкции и отдельно в накладках, а на рисунке 7 – эквивалентных по Мизесу напряжений.

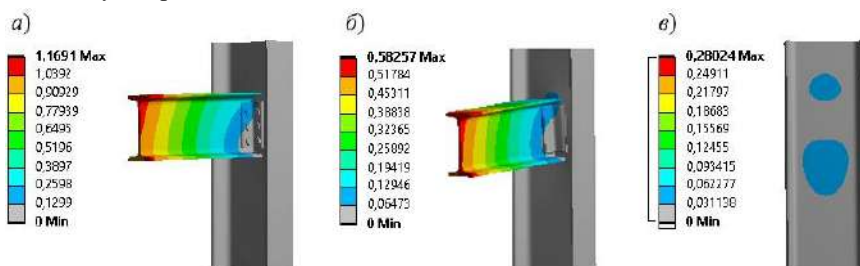


Рисунок 5 – Деформации, мм, полученные при расчетах соединений: многоболтового (а), через накладку (б), встык (в)

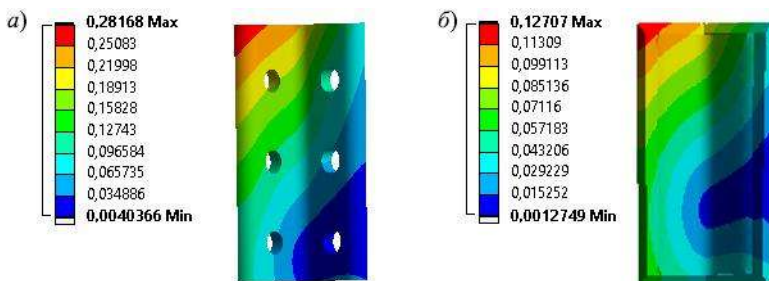


Рисунок 6 – Деформации накладок, мм, многоболтового (а) и сварного (б) соединений

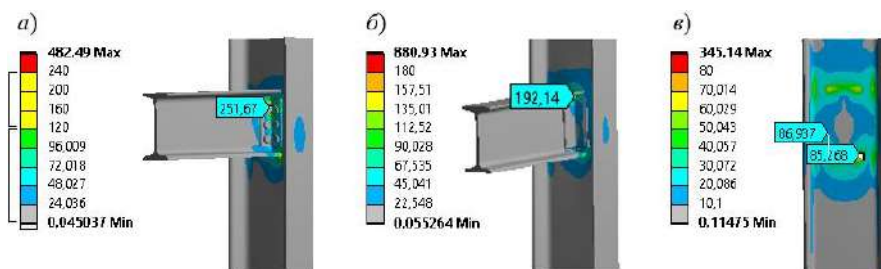


Рисунок 7 – Эквивалентные по Мизесу напряжения в околоузловых областях соединений: многоболтового (а), через накладку (б), встык (в)

Результаты проведенных расчетов показали, что наибольшие деформации под действием приложенной нагрузки имеют место в случае болтового соединения двух двутавров. Они оказываются почти в два раза меньшими при использовании сварки через накладку и еще меньшими при непосредственной сварке встык.

Эквивалентные напряжения, полученные по 4-й теории прочности (Хубера – Мизеса) не должны превышать 1,15 расчетного сопротивления стали [9]. Наличие значительных напряжений вблизи угловых точек мест соединения свидетельствует о необходимости учета возможности появления областей пластической деформации [10, 11].

**Заключение.** Исследована работа различных видов соединения двух двутавров под действием приложенной статической нагрузки. Установлено напряженно-деформированное состояние тонкостенных балок с открытым профилем и элементов, обеспечивающих их соединение в околоузловых областях от действия приложенной нагрузки, выявлены области упругой и пластической работы материала.

Установлено, что для сварного соединения встык жесткость в околоузловой зоне наибольшая, так как в передаче нагрузок задействована только стенка профиля. Проведенные численные эксперименты продемонстрировали достаточно высокую несущую способность многоболтового соединения,

возможность его работы в пластической стадии в отличие от сварных соединений. В то же время для обеспечения неизменяемости сечения в околоузловых областях целесообразно размещать поперечные ребра.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Вольмир, А. С.** Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М : Наука, 1967. – 984 с.

2 **Дарков, А. В.** Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.

3 **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – М. : ДМК Пресс, 2002. – 618 с.

4 **Prola, L. C.** On the distortional post-buckling behavior of cold-formed lipped channel steel columns / L. C. Prola, D. Camotim // Proceedings of SSRC 2002 Annual Stability Conference, 2002. – P. 233–234.

5 **Cheng, Y.** Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method / Y. Cheng, B. W. Schafer // Journal of Constructional Steel Research. – 2007. – Vol. 63, is. 5. – P. 581–590.

6 **Лещенко, А. П.** Фундаментальная строительная механика упругих систем / А. П. Лещенко. – М. : URSS, 2008. – 976 с.

7 **Дьяков, И. Ф.** К расчету оболочки, укрепленной тонкостенными стержнями / И. Ф. Дьяков, С. А. Чернов // Автоматизация и современные технологии. – 2008. – № 1. – С. 16–20.

8 **Басов, К. А.** ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов. – М. : Компьютер-Пресс, 2002. – 223 с.

9 Конструирование зданий и сооружений. Легкие стальные тонкостенные конструкции : учеб. руководство / Н. И. Ватин [и др.]. – СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2012. – 266 с.

10 **Икрин, В. А.** Сопrotивление материалов с элементами теории упругости и пластичности / В. А. Икрин. – М : АСВ, 2004. – 424 с.

11 Residual stresses in welded high-strength steel I-Beams / T. Le [et al.] // Journal of Constructional Steel Research. – 2020. – Vol. 167. – Article 105849. – 14 p.

*T. M. MARTYNENKO<sup>1</sup>, S. A. PRONKEVICH<sup>2</sup>, I. M. MARTYNENKO<sup>2</sup>, V. A. MAXIMOVICH<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*The University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of Belarus,*

<sup>2</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

#### STRENGTH ANALYSIS OF JUNCTION JOINTS FOR DIFFERENT DESIGN PERFORMANCES ON THE BASIS OF SIMULATION IN THE ANSYS SOFTWARE

The most common in construction practice is the junction of two symmetrical I-beams. The load transfer is simulated through a multi-bolt connection and welded joints made end-to-end and through an overlay. The features of the developed finite element models in the ANSYS environment and the computational results of the stress-strain state of the joined parts under the applied force action are presented.

**Keywords:** multi-bolt connection, connection through the pad, butt joint, near-nodal areas, deformation of the connection pads.

Получено 21.11.2022

УДК 629.424.3:629.4.027.2

*Л. В. ОГОРОДНИКОВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

### **ДИНАМИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ РАМ ТЕЛЕЖЕК ДЛИТЕЛЬНО ЭКСПЛУАТИРОВАВШЕГОСЯ ВАГОНА ДИЗЕЛЬ-ПОЕЗДА ДРБ1**

Представлены результаты экспериментов по определению напряженно-деформированного состояния рамы тележки вагона дизель-поезда серии ДРБ1. Разработана индивидуальная схема наклейки датчиков деформаций на раму тележки и для различных вариантов нагружения конструкции получены массивы динамических напряжений. Установлено, что значения напряжений не превышают допустимого уровня и соответствуют нормативным требованиям. Полученный в ходе испытаний массив информации о прочности рамы тележки дизель-поезда ДРБ1 может быть использован при определении ее остаточного ресурса.

**Ключевые слова:** рама тележки, несущая конструкция, испытания, напряженно-деформированное состояние, остаточный ресурс.

Для обеспечения пассажирских перевозок в пригородном движении на Белорусской железной дороге широкое распространение получили дизель-поезда Рижского вагоностроительного завода серии ДРБ1. Срок службы таких электропоездов, эксплуатирующихся в настоящее время, в большей своей части существенно выше установленного заводом-изготовителем. Осуществляется поэтапная их замена на современные электропоезда PESA. Однако вывод из эксплуатации старого подвижного состава требует существенных затрат и поэтому растянут на определенный период. Поэтому обоснование дальнейшей безопасной эксплуатации дизель-поездов, срок службы которых уже истек либо подходит к концу, является актуальной задачей.

Сложившаяся ситуация требует определения технического состояния рам тележек после длительной эксплуатации для установления соответствия их прочностных характеристик требованиям современной нормативной документации и последующей численной оценки остаточного ресурса конструкции, что и стало целью настоящей работы.

Фундаментальной основой работ, посвященных прогнозированию ресурса элементов машин и конструкций, являются публикации, в основе которых лежат положения теории надежности. К ним относятся труды Болотина В. В. [1], Когаева В. П. [2], Колмогорова В. Л. [3], Серенсена С. В. [4], Гусева А. С. [5], Костенко Н. А. [6], Черепанова Г. П. [7], в которых представлена теория, позволяющая решать задачи по определению остаточного ресурса металлоконструкций для различных отраслей машиностроения.

Проблема продления срока службы с оценкой остаточного ресурса весьма актуальна для тягового подвижного состава, о чем свидетельствует достаточно



большое количество научных работ. Анализ исследований в этой области показал, что подходы, используемые при определении остаточного ресурса узлов и деталей конструкций, в целом аналогичны. Существенные отличия связаны с моделированием конкретного спектра эксплуатационных нагрузений [8, 9].

Так, в работах [10, 11] представлена методика расчетов напряженного состояния и экспериментальных испытаний по определению уровня напряжений, которые создаются в условиях эксплуатации в несущих конструкциях пригородного и маневрового подвижного состава на основе критерия многоциклового усталостной прочности.

Исследования [12] представляют результаты стендовых испытаний при вибрационном нагружении рам тележек электропоездов серии ЭР1, ЭР2, имеющих длительный срок эксплуатации. На их основе разработаны технические решения, при реализации которых появляется возможность дальнейшей эксплуатации ходовых частей (рам тележек) электропоездов серии ЭР1 и ЭР2, срок службы которых составляет более 50 лет.

В работах ученых АО «ВНИКТИ» [13–15] отмечается актуальность работ по выявлению безопасного ресурса дальнейшей эксплуатации локомотивов с истекшим сроком службы, который изначально назначен заводом-изготовителем, на основе установления фактического технического состояния базовых частей расчетно-экспериментальными методами. Рассматривается целесообразность проведения работ по усовершенствованию и модернизации локомотивов, предусматривающих установление нового назначенного срока службы по критериям его предельного состояния. В статье [16] приведены методы прогнозирования и расчета долговечности несущих конструкций локомотива, в частности рам тележек, при их случайной динамической нагруженности в эксплуатации. За основу принята гипотеза о линейном накоплении повреждений в материале конструкции при напряжениях ниже предела выносливости.

В работе [17] предложена технология нахождения ресурса несущих конструкций вагонов специального подвижного состава, позволяющая учесть наряду с изменением значений физико-механических характеристик металла при длительной эксплуатации сезонность использования вагонов, что дало возможность спрогнозировать их срок службы.

Выполненный анализ публикаций, в которых освещается проблема определения остаточного ресурса подвижного состава, выработавшего нормативный срок службы, показывает, что решение данной задачи должно включать следующие этапы:

- проверку конструкторской документации, анализ условий эксплуатации, особенностей проведения технических освидетельствований и ремонтов вагонов;
- структуризацию результатов обследования технического состояния, при котором данные визуального контроля, информация об измерении остаточных толщин и контроле сварных швов и основного металла заносятся в разработанные диагностические карты;

- разработку конечно-элементных моделей и последующий анализ напряженно-деформированного состояния конструкций для определения соответствия актуальной нормативной документации;
- определение физико-механических характеристик металла несущих конструкций на момент оценки ресурса;
- осуществление динамико-прочностных испытаний вагонов в условиях характерных режимов нагружения;
- расчет на основе теоретических и экспериментальных данных обоснованного ресурса дальнейшей безопасной эксплуатации вагонов.

Рама тележки главным образом работает в условиях переменных циклических нагрузок, которые способствуют снижению сопротивления усталости конструкции в результате накопления повреждений и деградации свойств материала. Для определения характеристик усталости требуется экспериментальная оценка напряженного состояния металлоконструкции.

Экспериментальные исследования рамы тележки вагонов дизель-поезда серии ДРБ1 выполнялись на базе испытательного центра железнодорожного транспорта Белорусского государственного университета транспорта (БелГУТ), сотрудниками которого с учетом технического состояния и условий эксплуатации дизель-поездов было принято решение о проведении двух этапов испытаний: соударения вагонов (для имитации маневровой работы) и сброса с клиньев (моделирование движения в составе поезда).

Для проведения исследований были отобраны образцы тележек с наихудшим техническим состоянием. Затем был проведен анализ напряженно-деформированного состояния металлоконструкций их рам методом конечных элементов, при котором в качестве исходных данных приняты фактические значения толщин элементов, установленные по результатам технического диагностирования вагонов. Проведенный расчет на прочность продемонстрировал, что прочность рам тележек вагонов дизель-поездов при всех расчетных режимах удовлетворяет требованиям Норм, то есть критерий перехода к натурным испытаниям типовых представителей оказался выполненным.

На основе полученных результатов расчетов далее были выбраны контрольные точки, следуя рекомендациям [18], и разработаны схемы наклеек тензометрических датчиков (рисунок 1).

С целью проверки металлоконструкции вагона на прочность проведены ресурсные испытания в режиме многократных соударений, которые осуществляются на прямом участке пути в светлое время суток. Выполняется серия соударений вагона-бойка в вагон дизель-поезда, сцепленный с вагонами подпора (рисунок 2). Таким образом имитируются ударные нагрузки, которые возникают при осаживании состава или роспуске с сортировочных горок. В ходе экспериментов регистрировались сила удара в автосцепку, скорость набегания на испытуемый вагон вагона-бойка, количество ударов, а также возникающие повреждения. При испытаниях использовались средства измерений и оборудование, приведённые в таблице 1.

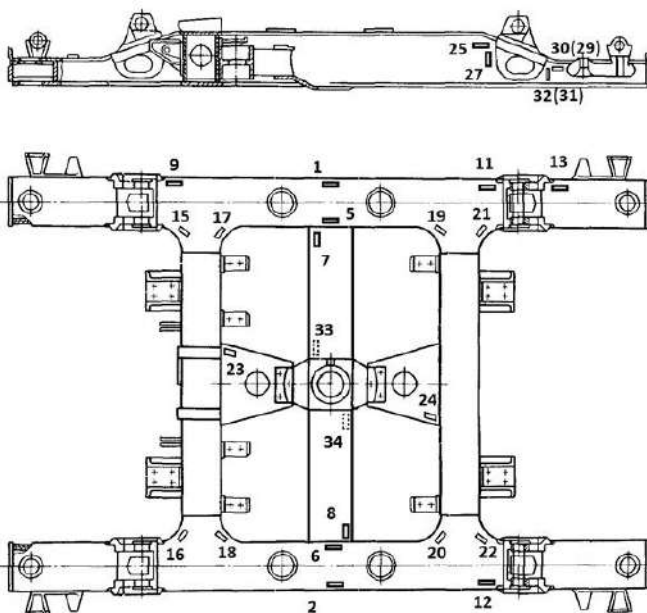


Рисунок 1 – Схема наклейки тензодатчиков на немоторной тележке поезда ДРБ1

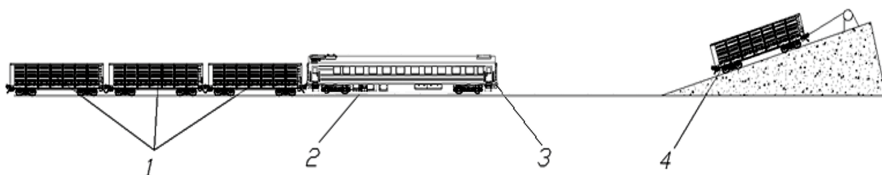


Рисунок 2 – Схема расположения вагонов при испытаниях путем соударения:  
1 – подпоры; 2 – вагон дизель-поезда; 3 – автосцепка-динамометр; 4 – вагон-бойк

Таблица 1 – Средства измерения и оборудование

Измеряемый параметр	Наименование средства испытаний (оборудования)
Сила, действующая на испытуемый вагон; напряжения в объекте испытаний	Автосцепка-динамометр СА-3
	Вагон-бойк (полувагон)
Скорость движения вагона-бойка	Усилитель измерительный MGCplus RU
	Секундомер механический СОС пр. 26-2-000
Температура окружающей среды	Комбинированный прибор Testo 610

Для нахождения значений сил соударения вагонов использовалась динамометрическая автосцепка, а скорости соударений вычислялись через время прохождения вагоном-бойком известного расстояния.

Перед началом испытаний выполнялась наклейка тензорезисторов согласно представленной схеме (см. рисунок 1). Они размещались на расстоянии 25–30 мм от сварного шва и 15–20 мм от кромки сопрягаемых деталей (рисунок 3). Также осуществлялась проверка кабелей измерительных схем и разъемов аппаратуры, работы приборов, а также тарировка динамометрической автосцепки. Результаты отражались в журнале испытаний.



Рисунок 3 – Установленные на раме тележки датчики деформаций

В результате проведенных экспериментов, которые выполнялись путем соударения вагона-бойка с испытываемым вагоном дизель-поезда, удерживаемым тремя вагонами подпора, с применением тензодатчиков получены амплитуды напряжений в элементах рамы тележки. От высоты, на которой расположен изначально вагон-боек на горке, зависит скорость соударения и, как следствие, сила удара и амплитудные напряжения в раме тележки. Таким образом испытания проводились, начиная с минимальных значений силы удара и заканчивая ее максимально-допустимой величиной. На рисунке 4 представлены графики, демонстрирующие изменение амплитудных значений напряжений в зависимости от силы удара для точек рамы тележки, которые соответствуют номерам датчиков, указанным на рисунке 1. Максимальные значения напряжений при действии ударной нагрузки 2000 кН приведены на рисунке 5.

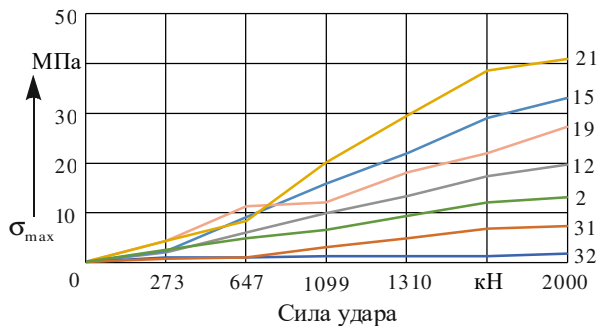


Рисунок 4 – Зависимости максимальных напряжений от силы удара для контрольных точек рамы тележки

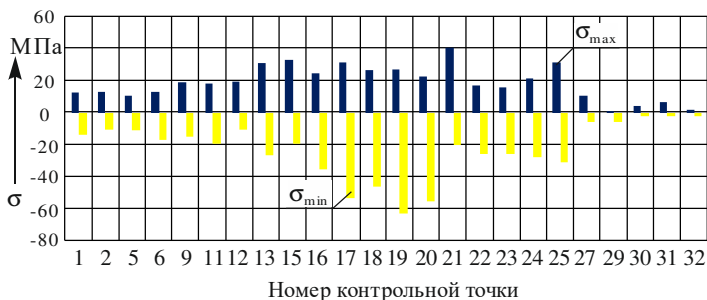


Рисунок 5 – Максимальные напряжения в контрольных точках рамы тележки при силе удара 2000 кН

Отметим, что полученные результаты представляют собой превышение напряжениями значений, которые возникают от загрузки вагона. Фактически возникающие напряжения могут быть получены путем суммирования двух названных видов напряжений.

В результате ударных испытаний в раме тележки было выявлено слабое место. Установлено, что при различных силах соударения до максимального значения, равного 2000 кН, наибольшие напряжения наблюдаются в области сочленения продольной и поперечной балок, где располагается контрольная точка номер 19. Максимальное значение таких напряжений составило 62,9 МПа, что не превышает величину, допускаемую по Нормам.

Заключительный осмотр тележки, который был проведен после окончания испытаний, неисправностей и повреждений не выявил.

Кроме испытаний вагонов при их соударениях для оценки напряжений, которые возникают при режиме движения в составе поезда, также были проведены эксперименты по сбросу вагонов с клиньев. Такие испытания проводились для установленного значения коэффициента вертикальной динамики поддрессоренных частей вагонов  $K_{дв} = 0,3$ . На рисунке 6 представлена диаграмма амплитудных динамических напряжений для режима «сброс с клиньев» для контрольных точек рамы тележки.

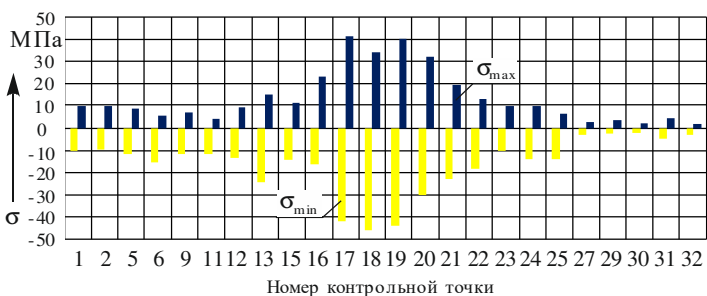


Рисунок 6 – Напряжения, полученные при испытаниях по сбросу вагона с клиньев

Проведенные испытания, в которых исследовался сброс вагонов с клиньев, показали, что наибольшие амплитудные значения напряжений в раме тележки составляют 46,3 МПа (контрольная точка 18, область соединения продольной и поперечной балок).

Как и при испытаниях на соударения после цикла натуральных испытаний был произведен заключительный осмотр рам тележек, который не выявил неисправностей или повреждений.

**Заключение.** В ходе выполнения работ по проведению испытаний тележек вагона дизель-поезда получены следующие результаты:

1 Предложена последовательность действий, позволяющая оценить остаточный ресурс рам тележек вагонов дизель-поезда ДРБ1, которая включает шесть этапов.

2 Разработаны схемы установки тензометрических датчиков, которые основывались на результатах технического обследования и расчетного анализа напряженно-деформированного состояния.

3 Для выбранного образца вагона дизель-поезда выполнен комплекс испытаний по соударению с исследуемым вагоном и сбросу его с клиньев для определения прочности рамы тележки.

4 Установлено, что значения напряжений, возникающих при двух рассмотренных видах испытаний, соответствуют действующим нормативным требованиям и не превышают допускаемого уровня.

5 Полученный в ходе испытаний массив информации о характеристиках прочности рамы тележки дизель-поезда ДРБ1 является основой для проведения расчетов по определению остаточного ресурса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Болотин, В. В.** Ресурс машин и конструкций / В. В. Болотин. – М. : Машиностроение, 1990. – 448 с.

2 **Когаев, В. М.** Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени / В. М. Когаев. – М. : Машиностроение, 1977. – 231 с.

3 **Колмогоров, В. Л.** Напряжения, деформации, разрушение / В. Л. Колмогоров. – М. : Metallurgy, 1970. – 229 с.

4 **Серенсен, С. В.** Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность / С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. – М. : Машиностроение, 1975. – 488 с.

5 **Гусев, А. С.** Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках / А. С. Гусев. – М. : Машиностроение, 1989. – 248 с.

6 **Костенко, Н. А.** Прогнозирование надежности транспортных машин : производственно-практическое издание / Н. А. Костенко. – М. : Машиностроение, 1989. – 240 с.

7 **Черепанов, Г. П.** Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

8 **Antipin, D.Y.** Forecasting of life service of hopper car body load-bearing structure on basis of mathematical modeling methods / D. Y. Antipin, V. V. Kobishanov, A. S. Mitrakov // Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2019) : Serie Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Cham : Springer, 2020. – P. 677–685.

9 Evaluation of railway vehicle car body fatigue life and durability using a multi-disciplinary analysis method / B. Miao [et al.] // International Journal of Vehicle Structures and Systems. – 2009. – Vol. 1, is. 4. – P. 85–92.

10 **Бондарев, О. М.** Методи та дослідження з подовження терміну служби несучих конструкцій тягового рухомого складу для промислового транспорту / О. М. Бондарев, В. Л. Горобець, С. В. Мямлін // Наука та прогрес транспорту. – 2014. – № 2 (50). – С. 130–151.

11 **Горобец, В. Л.** Анализ эксплуатационной наработки несущих конструкций подвижного состава в задачах продления сроков его эксплуатации / В. Л. Горобец, А. М. Бондарев, В. М. Скобленко // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2010. – Вип. 35. – С. 10–16.

12 Оценка ресурса несущих конструкций подвижного состава и разработка мероприятий по продлению его срока службы / А. М. Бондарев [и др.] // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2009. – Вип. 30. – С. 92–102.

13 Безопасная эксплуатация локомотивов по ресурсу их базовых частей / Э. С. Оганьян [и др.] // Безопасность труда в промышленности. – 2017. – № 6. – С. 54–58.

14 Модернизация маневровых тепловозов с продлением срока службы / Г. М. Волохов [и др.] // Локомотив. – 2019. – № 4 (748). – С. 32–34.

15 **Оганьян, Э. С.** О порядке обновления парка и продления сроков службы локомотивов и их основного оборудования / Э. С. Оганьян, Г. М. Волохов, Г. И. Гаджиметов // Железнодорожный транспорт. – 2018. – № 3. – С. 69–71.

16 Методы определения ресурса нерезервируемых несущих элементов подвижного состава и пути / Н. А. Махутов [и др.] // Бюллетень объединенного ученого совета ОАО РЖД. – 2017. – № 3. – С. 19–39.

17 **Коновалов, Е. Н.** Прогнозирование ресурса несущих конструкций вагонов специального подвижного состава при длительной эксплуатации: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Е. Н. Коновалов. – Гомель : БелГУТ, 2020 – 28 с.

18 Вагоны грузовые и пассажирские. Методы испытаний на прочность и ходовые качества: РД 24.050.37-95. – Введ. 02.02.1995. – М. : ГосНИИВ, 1995. – 101 с.

*L. V. OGORODNIKOV*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **DYNAMIC TESTING OF CARS BOGIE FRAMES OF LONG-OPERATED DRB1 DIESEL TRAIN**

The results of experiments on the DRB1 series diesel train cars bogie frame stress-strain state determination are presented. These is developed the individual scheme for sticking deformation sensors onto the bogie frame, and the arrays of dynamic stresses are obtained for various loading options of the structure. It is established that the stress values do not exceed the permissible level and comply with the regulatory requirements. The array of information obtained during the tests on the strength of the DRB1 diesel train bogie frame can be used to determine its residual life.

**Keywords:** bogie frame, load-bearing structure, stress-strain state, tests, residual life.

Получено 11.11.2022

УДК 620.179.141:629.4.027

*А. Г. ОТОКА<sup>1</sup>, А. М. ЛЯХ<sup>2</sup>, П. А. ДАШУК<sup>3</sup>, О. В. ХОЛОДИЛОВ<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>Гомельское вагонное депо, РУП «Гомельское отделение Белорусской железной дороги», Гомель, Беларусь*

*<sup>2</sup>Могилевское вагонное депо РУП «Могилевское отделение Белорусской железной дороги», Могилев, Беларусь*

*<sup>3</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ТЕХНОЛОГИЯ МАГНИТОПОРОШКОВОГО КОНТРОЛЯ ЦЕЛЬНОКАТАНЫХ КОЛЕС НА АВТОМАТИЗИРОВАННОМ СТЕНДЕ**

Предлагается технология автоматизированного магнитопорошкового контроля цельнокатанных колес при текущем и среднем ремонте колесных пар вагонов. В качестве оборудования проведения автоматизированного контроля рассматривается специально разработанный стенд на примере макета СМДКП-01.300588.121192.АА.

**Ключевые слова:** неразрушающий контроль, магнитопорошковый метод, колесная пара, колесо цельнокатаное, способ приложенного магнитного поля.

Безопасность эксплуатации механических систем железнодорожного подвижного состава обеспечивается путем регулярного проведения неразрушающего контроля деталей и узлов. Еще в 1946 г. термин дефектоскопия на железной дороге означал метод магнитного и электромагнитного анализа, применяемый при контроле качества стальных и чугунных изделий в целях обнаружения внутренних и внешних дефектов [1, с. 137]. В зависимости от их характера применяются различные способы магнитной дефектоскопии [2], которые реализованы в приборах, называемых дефектоскопами.

В настоящее время на железной дороге наибольшее распространение получил магнитопорошковый метод, с помощью которого проверяют наличие поверхностных (а при определенных условиях подповерхностных) дефектов практически во всех деталях вагонов и локомотивов. Масштабность применения магнитопорошкового контроля (далее – МПК) объясняется высокой производительностью, наглядностью результатов контроля и высокой чувствительностью. При правильной технологии контроля деталей этим методом обнаруживаются трещины и другие дефекты на начальной стадии их появления, когда установить их наличие без использования специальных методов трудно или невозможно.

Магнитопорошковый контроль цельнокатаного колеса также возможен, но только при тщательном выполнении операций или переходов технологического процесса (рисунок 1). Достоверность результатов неавтоматизированного «ручного» магнитопорошкового метода контроля во многом определяется квалификацией, навыками и сосредоточенностью дефектоскописта в процессе работы [3].





Рисунок 1 – Магнитопорошковый контроль цельнокатаного колеса («ручной» способ):  
*а* – контроль приободной части и диска колеса при помощи электромагнита МЭД-120;  
*б* – контроль диска колеса при помощи электромагнита Magnaflux Y1

Дефектоскопист осуществляет намагничивание определенной зоны контроля с одновременной подачей суспензии, после чего следит за скоплением валика магнитного порошка. Полусное намагничивание цельнокатаного колеса проводится при помощи электромагнита по участкам контролируемой поверхности с шагом, не превышающим размер области эффективной намагниченности. При этом должны соблюдаться требования к размерам и качеству частиц магнитного индикатора, расположению объекта контроля по отношению к намагничивающему полю, параметрам электрического тока в намагничивающем устройстве (далее – НУ) и т. д. Также при проведении МПК необходимо учесть характер труда дефектоскописта: помимо ручных монотонных манипуляций они требуют напряженного внимания, ответственности в принимаемых решениях и добросовестного выполнения всех технологических переходов. Очевидно, что вследствие накопления усталости вероятность влияния субъективного фактора на действия дефектоскописта увеличивается, а достоверность контроля уменьшается. Работник, проводящий ручной МПК, должен иметь высокую квалификацию, чтобы не пропустить или не выявить дефект по тем или иным причинам. Кроме того, дефектоскопист наряду с хорошими теоретическими знаниями о методе должен быть обеспечен качественными материалами и современным оборудованием для проведения контроля [4].

Повышение производительности контроля с обеспечением высокого уровня его достоверности является актуальной проблемой, и ее решение возможно лишь путем автоматизации процесса контроля [5]. Оно может быть реализовано путем создания стенда проведения автоматизированного МПК, при котором перед дефектоскопистом ставится задача только осмотра поверхности колеса [6]. Наличие такого стенда дает возможность не только увеличения производительности, но и повышения качества «ручного» контроля, улучшения условий труда дефектоскописта и др.

Для проведения неразрушающего контроля люминесцентным магнитно-порошковым методом цельнокатанных колес, напрессованных на оси типа РУ-1, РУ1Ш, РВ2Ш, разработан макет стенда СМДКП-01.300588.121192.АА (далее – стенд), принцип работы которого представлен в статье [7]. Его предполагается использовать при текущем и среднем ремонте колесных пар (КП) вагонов для обнаружения дефектов любой ориентации, имеющих выход на поверхность, к которым в соответствии с руководящим документом [8] относят, как правило, трещины (код дефекта 411, 511, 513, 514, 515, 516, 517).

Конструктивно стенд (рисунок 2) включает:

- пульт управления 1;
- подъемно-поворотное устройство 2 с приводом вращения КП через ролики-опоры, на которых удерживается ось;
- две ванны 3, которые служат для размещения намагничивающих устройств и резервуаров слива магнитной суспензии;
- системы циркуляции магнитопорошковой суспензии 4 с насосами, питающим резервуаром и распылителями из нержавеющей и коррозионно-стойких материалов;
- электрический шкаф 5 с источником тока и схемой управления;
- ультрафиолетовый (далее УФ) излучатель 6 или источник синего света;
- намагничивающие устройства в виде параллельно располагаемого проводника 7 для левой ванны (витки силового кабеля размещены параллельно радиусу колеса) и соленоида (катушки) 8 продольного намагничивания, образованного витками гибкого силового кабеля для правой ванны.

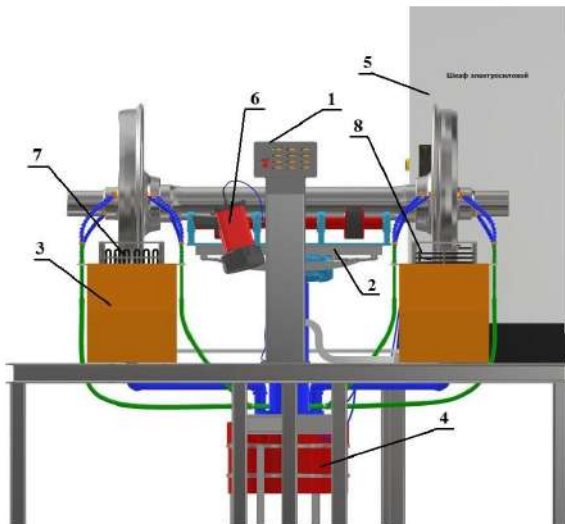


Рисунок 2 – Макет стенда автоматизированного МПК

Габаритные размеры стенда составляют (не более): длина – 4200 мм, ширина – 1950 мм, высота при установленной колесной паре – 2000 мм.

Основная задача стенда состоит в обеспечении выполнения условия, чтобы цельнокатаное колесо намагничивалось одновременно с поливом магнитной суспензией (способ приложенного поля).

В качестве НУ используется гибкий медный изолированный кабель диаметром 15–20 мм, который намотан внутри каркаса, изготовленного из материалов с наименьшей магнитной проницаемостью. В одной из ванн кабель наматывается продольно каркасу, образуя соленоид, а во второй – поперечно, что обеспечивает размещение проводника параллельно проверяемой поверхности. Такое расположение позволяет выявлять разнонаправленные дефекты при совпадении ориентации трещины и направления намотки кабеля. Исключением является выявление трещин в радиальном направлении на основном сечении обода, при котором намагничивание осуществляется соленоидом.

Суспензия используется многократно благодаря наличию насоса, который возвращает ее к цельнокатаному колесу. В резервуаре суспензия перемешивается, что не дает магнитным частицам оседать на дно.

Электроснабжение НУ обеспечивается источником тока (генератором). Требуемое значение силы тока выставляется исходя из расчета или на основе эксперимента, при котором после подачи тока измеряется тангенциальная составляющая напряженности поля на поверхности участка колеса (для выявления дефектов измеренное значение должно быть не менее 25 А/см [9]). Проверку качества магнитных индикаторов выполняют по настроенному образцу с искусственными поверхностными дефектами, выполненному в виде вставки с узким плоским пазом, имеющим ширину раскрытия от 20 до 30 мкм. При нанесении магнитного индикатора может образовываться рисунок, повторяющий контуры вставки полностью или частично, однако оценку работоспособности стенда проводят только по наличию порошка над пазом [10]. В случае неудовлетворительного качества рисунка дефектоскопист производит замену магнитной суспензии, в качестве которой используется люминесцентный порошок яркого цвета (зеленый, красный и т. п.).

Перед установкой на стенд колесной пары она должна пройти мойку в моечной машине. Целесообразно, чтобы мойка соответствовала современным требованиям и была бесконтактной. Если после мойки поверхность колес оказывается непригодной к МПК, то они должны пройти через моечную машину повторно.

*Технология автоматизированного магнитопорошкового контроля цельнокатаных колес на макете стенда* предполагает выполнение следующих операций:

1 КП подается по технологическим рельсам или краном на установочную позицию подъемно-поворотного устройства.

2 Подъемно-поворотным устройством КП устанавливается таким образом, чтобы обеспечить опускание цельнокатаных колес к резервуарам с НУ.

3 При помощи пневматического привода (ВР1) КП опускается вниз к НУ (рисунок 3). В нижнем положении КП фиксируется (рисунок 4).

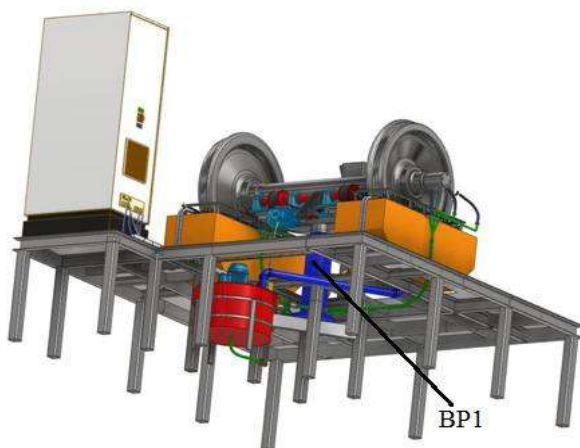


Рисунок 3 – Пневматический привод (ВР1) подъема и опускания КП

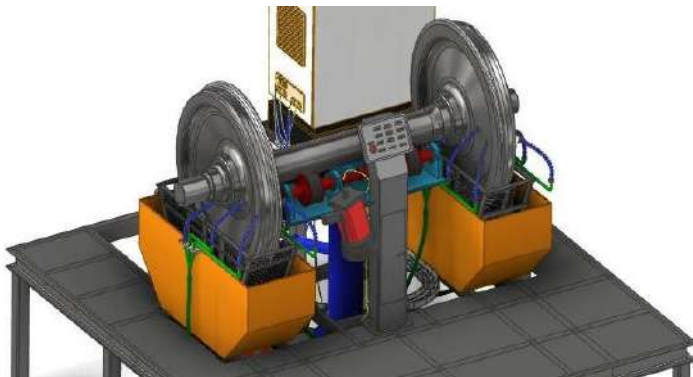


Рисунок 4 – Колесная пара в нижнем положении

4 При нажатии кнопки «вращение» на пульте управления запускается вращение КП, которое осуществляется двигателем М1 (рисунок 5). Кнопка «намагничивание поперечное» приводит в действие намагничивание левой ванны (для выявления поперечных трещин), кнопка «намагничивание продольное» – правой (обнаружение продольных трещин).

5 Насосной станцией осуществляется подача магнитной суспензии в зону контроля. Электродвигатель М2 отвечает за перемешивание суспензии, а электродвигатель М3 – за ее подачу в зону контроля (см. рисунок 5). Для направленной равномерной подачи суспензии с каждой стороны колеса подводятся гибкие шланги с наконечниками (рисунок 6).

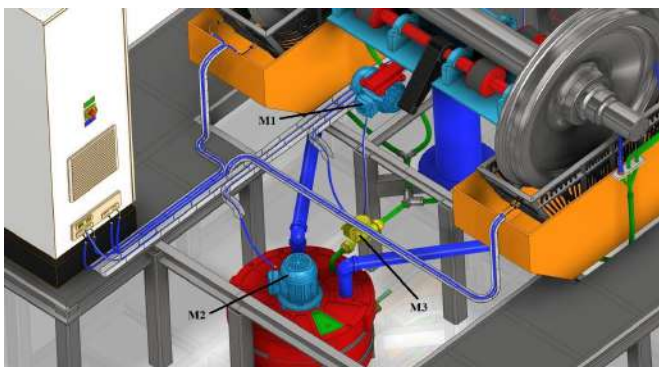


Рисунок 5 – Электродвигатели, входящие в состав стэнда:  
 М1 – электродвигатель вращения КП; М2 – электродвигатель мешалки;  
 М3 – электродвигатель насоса

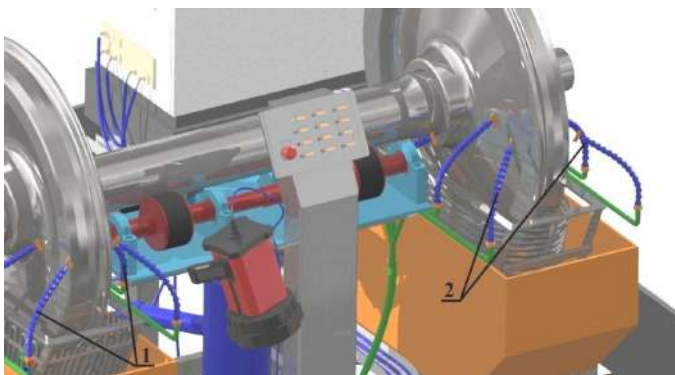


Рисунок 6 – Подводка гибких шлангов с наконечниками в зону контроля колеса  
 1 – гибкие шланги для левой ванны; 2 – гибкие шланги для правой ванны

6 Для начала контроля дефектоскопист подносит УФ-фонарь или источник синего цвета к намагничиваемому в данный момент левому цельнокатаному колесу и проводит визуальный осмотр на наличие скопления валиков магнитного порошка. После осмотра левого колеса дефектоскопист прекращает его намагничивание и переходит к намагничиванию и осмотру правого. При этом дефектоскопист должен понимать, какие трещины при данной схеме намагничивания он ищет, так как зная направление их развития, дефектоскопист быстрее и увереннее распознает все индикации.

*Примечания:*

Применяемый тип магнитного порошка должен быть согласован с используемым источником освещения, например, при использовании источника синего света магнитный индикатор должен быть предназначен для данного света с определенной длиной волны в соответствии с паспортом.

При осмотре контролируемой поверхности в УФ-излучении следует применять защитные очки.

7 При обнаружении места скопления магнитного порошка на поверхности цельнокатаного колеса дефектоскопист должен внимательно изучить эту зону и принять решение о пригодности КП для дальнейшего использования. В случае нахождения недопустимого дефекта КП бракуется.

8 После осмотра правого цельнокатаного колеса отводятся гибкие шланги для двух ванн в положение, не препятствующее подъему КП.

9 КП при помощи пневматического привода ВР1 поднимается на максимальное расстояние (рисунок 7), после чего поворачивается вручную на 180°. Далее повторяются операции, описанные в п. 2–8, что позволяет для левого колеса использовать продольное намагничивание (ранее было поперечное), а для правого – поперечное (было продольное).

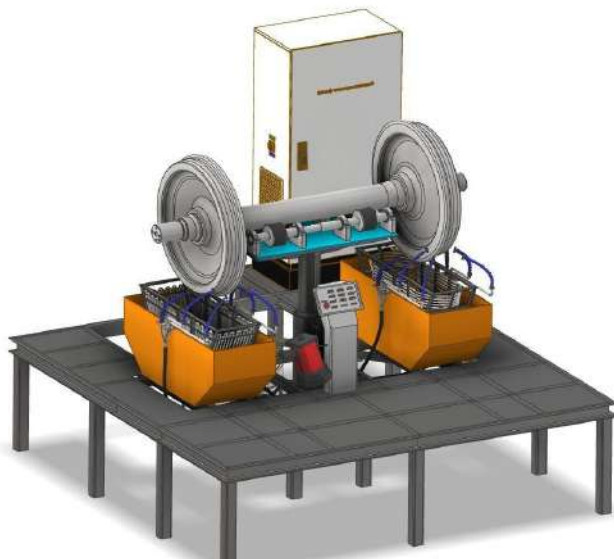


Рисунок 7 – Верхнее положение КП после подъема

10 Операции размагничивания, как правило, не требуется [9]. При возникновении необходимости ее проведения используется переменный ток частотой 50 Гц путем плавного уменьшения амплитудного значения тока до нуля.

11 По окончании контроля колесная пара поднимается максимально вверх (см. рисунок 7) и поворачивается на 90° с дальнейшим опусканием ее на технологический путь.

12 Запись о результатах контроля цельнокатаных колес отражается в журнале учета контроля магнитопорошковым методом деталей и составных частей КП. В случае браковки КП на нее дополнительно составляется прото-

кол контроля, форма которого утверждена на ремонтном предприятии и соответствует действующим технологическим нормативным правовым актам.

Время контроля цельнокатаных колес колесной пары на предлагаемом стенде составляет не более 15 мин, в то время как сейчас на Белорусской железной дороге норма времени контроля магнитопорошковым методом составляет 38,56 мин при текущем ремонте и 42,06 мин при среднем [11].

С целью обеспечения качественной работы стенда в начале смены дефектоскопист должен провести проверку его работоспособности с помощью настроечного образца (типа МП 32.20 ЦК, МП 32.20.100), представляющего собой КП с напрессованными цельнокатаными колесами, которые имеют искусственные разноориентированные дефекты.

Если в процессе работы стенда возникают сомнения о качестве магнитного порошка, выявляющую способность суспензии проверяют отдельно вне зоны стенда с помощью настроечного образца, намагничивание которого осуществляют любым НУ, что позволяет не тратить время на установку настроечного образца на стенд.

В случае недостаточного УФ-освещения при большой освещенности видимым светом следует использовать затемняющие экраны или черную непрозрачную ткань, которая навешивается на металлический каркас. Такая ткань должна легко убираться после проведения МПК [12].

**Выводы.** Разработанная технология автоматизированного контроля цельнокатаных колес позволяет уйти от «штатной» деповской технологии ручного вихретокового или магнитопорошкового метода, существенным недостатком которой является значительное количество случаев недоборковки изделий больших габаритов. Она позволяет проконтролировать все открытые участки цельнокатаного колеса, в том числе, зоны, которые не относят к основным. Использование предлагаемого стенда позволит повысить производительность МПК при значительном снижении субъективного фактора, который проявляется при больших объемах ремонта колесных пар.

Технология контроля на примере макета СМДКП дает возможность значительного улучшения качества дефектоскопии и увеличения производительности МПК при среднем и текущем ремонте в условиях вагонных депо и других ремонтных предприятий в 3–5 раз.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Краткий технический железнодорожный словарь / под общ. ред. Б. Н. Веденисова [и др.]. – М. : Трансжелдориздат, 1946. – 606 с.

2 Advances in applications of Non-Destructive Testing (NDT): A review / M. Gupta [et al.] // Advances in Materials and Processing Technologies. – 2022. – Vol. 8, is. 2. – P. 2286–2307.

3 Феноменология автоматизации магнитопорошкового метода контроля / К. А. Багаев [и др.] // В мире неразрушающего контроля. – 2008. – № 1 (39). – С. 10–13.

4 **Леднев, И. С.** Сравнение требований российских (ГОСТ) и международных стандартов (ISO) при проведении магнитопорошкового метода неразрушающего

контроля / И. С. Леднев, А. С. Генералов // Труды ВИАМ. – 2021. – № 10 (104). – С. 117–123.

5 Štarmar, S. Automated system for magnetic particle inspection of railway wheels // S. Štarmar, V. Matz // 10th European Conference on Non-Destructive Testing. – Moscow, 2010. – P. 7–11.

6 Отока, А. Г. Автоматизация магнитопорошкового контроля при текущем и среднем ремонте колесных пар / А. Г. Отока, А. М. Лях, О. В. Холодилов // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XI междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 25–26 ноября 2021 г. : в 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2021. – С. 128–129.

7 Отока, А. Г. Стенд автоматизированного магнитопорошкового контроля цельнокатаных колес / А. Г. Отока, А. М. Лях, О. В. Холодилов // Неразрушающий контроль и диагностика. – 2022. – № 1. – С. 38–44.

8 РД ВНИИЖТ 27.05.01. Руководящий документ по ремонту и техническому обслуживанию колесных пар вагонов с буксовыми узлами грузовых вагонов магистральных железных дорог колеи 1520 (1524 мм). – Утв. Советом по железнодорожному транспорту государств – участников Содружества (протокол от 19–20.10.2017, № 67). – 166 с.

9 ПР НК В.2 Правила неразрушающего контроля деталей и составных частей колесных пар вагонов при ремонте. Специальные требования. – Утв. Советом по железнодорожному транспорту государств – участников Содружества (протокол от 19–20.11.2013, № 59). – Введ. 01.01.2015. – 90 с.

10 Контрольные образцы для определения работоспособности магнитопорошковых дефектоскопов и магнитных индикаторов (обзор) / А. Д. Кадосов [и др.] // Труды ВИАМ. – 2019. – № 5 (77). – С. 76–84.

11 Типовые нормы времени по неразрушающему контролю деталей и составных частей колесных пар грузовых вагонов при ремонте. Магнитопорошковый метод (утверждены приказом начальника Белорусской железной дороги от 11.08.2020 № 273Н). – 2020. – 24 с.

12 PTS Josef Solnar / Дефектоскопы и столы для магнитного контроля [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.ptsndt.com/en/sale/mt-magnetic-testing/mt-crack-detectors-sources>. – Дата доступа : 30.06.2022 г.

A. G. OTOKA<sup>1</sup>, A. M. LYAKH<sup>2</sup>, P. A. DASHUK<sup>3</sup>, O. V. KHOLODILOV<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Gomel car depot, RUE "Gomel branch Belarusian Railway", Gomel, Belarus

<sup>2</sup>Mogilev wagon depot RUE "Mogilev branch Belarusian Railway", Mogilev, Belarus

<sup>3</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

## TECHNOLOGY OF MAGNETIC POWDER CONTROL OF SOLID-ROLLED WHEELS AT THE AUTOMATED STAND

The article proposes the technology of automated magnetic powder control of solid-rolled wheels during the current and average repair of railway car wheel sets. The specially designed stand on the base of the SMDKP-01.300588.121192.AA layout is used as an equipment for the automated control.

**Keywords:** non-destructive testing, magnetic powder control method, wheelset, solid-rolled wheel, method of applied magnetic field.

Получено 13.08.2022



УДК 620.1:621.762

*В. Н. ПАСОВЕЦ<sup>1,2</sup>, В. А. КОВТУН<sup>1</sup>, Й. МИРЧЕВ<sup>3</sup>, В. А. ЛОДНЯ<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>*Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*ГНПО порошковой металлургии, Минск, Беларусь*

<sup>3</sup>*Институт механики Болгарской академии наук, София, Болгария*

<sup>4</sup>*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ВЛИЯНИЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК НА ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МЕДИ**

Представлено влияние углеродного наноструктурного наполнителя на прочностные свойства композиционных материалов на основе медной матрицы. Установлено, что введение 0,06–0,07 мас. % УНТ в медную матрицу позволяет повысить предел прочности при сжатии композита на 6–8% по сравнению с материалами на основе спеченной меди, не содержащими в своем составе наноразмерного наполнителя. Показано, что к механизмам упрочнения при введении УНТ в металлическую матрицу относятся: механизм передачи нагрузки от матрицы к упрочняющим элементам, механизм образования дислокаций за счет различия коэффициентов теплового расширения матрицы и упрочняющей фазы, механизм образования петель Орована.

**Ключевые слова:** углеродные нанотрубки, металлическая матрица, композиционные материалы, медь, предел прочности при сжатии.

**Введение.** Композиты на основе медной матрицы применяются в различных отраслях экономики, однако дальнейшее развитие техники предъявляет все более высокие требования к их характеристикам [1]. Одним из перспективных путей улучшения физико-механических характеристик композиционных материалов на основе медной матрицы является введение в их состав наноразмерных наполнителей [2].

К наиболее изученным наноразмерным наполнителям металлических матриц относятся наноструктуры углерода: фуллерены, углеродные нанотрубки (УНТ) и луковичные наноструктуры. При этом высокие прочностные характеристики наноструктур углерода обуславливают возможность создания композитов с повышенными характеристиками прочности по сравнению с существующими материалами [3], а технологии порошковой металлургии позволяют получать указанные композиты.

Повышение прочностных характеристик порошковых композитов на основе порошковых систем «медь – УНТ» по сравнению с медной спеченной матрицей связано как с высокими механическими свойствами наноструктур углерода, так и с особенностями взаимодействия таких наноструктур с материалом матрицы при их контактном взаимодействии [4].

Обзор литературных источников свидетельствует о постоянном росте интереса к работам по введению УНТ в металлические матрицы. Так, поисковый запрос «Carbon nanotube copper composite», сформированный на поиско-

вой платформе Web of Science, которая объединяет реферативные базы данных публикаций в научных журналах и патентных изданиях, в 2010 году выдавал около 100 публикаций, а в 2020 году – 850.

Таким образом, композиционные материалы, получаемые с использованием УНТ, представляют значительный теоретический интерес, а их практическое применение требует проведения дальнейших исследований их прочностных свойств, что и стало предметом данной работы.

**Основная часть.** К механизмам упрочнения при введении УНТ в медную матрицу относятся следующие механизмы:

1 Передачи нагрузки от матрицы к упрочняющим элементам, основанный на модели сдвигового «запаздывания» [5], которая предполагает идеальное сопряжение упрочняющей фазы и матрицы, что обеспечивает передачу напряжений от матрицы к упрочняющим компонентам только через сдвиговые напряжения [6].

2 Образования дислокаций за счет различия коэффициентов теплового расширения матрицы и упрочняющей фазы, основанный на локальном образовании дислокаций из-за различия параметров кристаллических решеток УНТ и медной матрицы. В опубликованных работах указывается на увеличение прочности композитов из-за несоответствия коэффициентов термического расширения исходных компонентов, например [8]. При этом можно сделать вывод о том, что чем выше разница коэффициентов теплового расширения матрицы и упрочняющей фазы, тем большее увеличение прочности может быть получено.

3 Образования петель Орована, основанный на формировании дислокационных петель. Реализация данного механизма обеспечивается различием кристаллических решеток упрочняющей наноразмерной фазы и металлической матрицы, а также невозможностью пересечения УНТ дислокациями, что в свою очередь препятствуют движению дислокаций в матрице [9] и повышает прочностные свойства композитов с металлической матрицей, наполненных УНТ [10]. Расчеты предела прочности при сжатии порошковых композиционных материалов на основе систем «медь – УНТ» были опубликованы в [11]. В работе [12] впервые предложена аналитическая модель для прогнозирования предела прочности нанокompозитов с металлической матрицей. В рассматриваемой работе также отмечается хорошая согласованность прогнозируемых характеристик с экспериментальными данными [13, 14].

Для достижения цели работы композиционные порошковые материалы получали методом электроконтактного спекания с использованием опытно-промышленной установки на базе машины шовной сварки МШ-3207 (давление прессования 500 МПа, плотность тока 400 А/мм<sup>2</sup>, время спекания 1,4–1,5 с). В работе использовались медный порошок ПМС-1 ГОСТ 4960-2009 и многослойные УНТ со средним наружным диаметром 10–20 нм и средней длиной 850–950 нм. Диспергирование УНТ в металлической медной матрице осуществлялись в процессе механоактивации в течение 60 мин. [15].

На рисунке 1 представлены значения предела прочности при сжатии композитов «медь – УНТ», определенные экспериментальным путем. Предел прочности при сжатии определяли по ГОСТ 25.503-97 на универсальной испытательной машине типа Instron 5567 (США). Испытания проводили при скорости нагружения 5 мм/с. В качестве результата измерения принимали среднее значение, полученное при пяти параллельных испытаниях.

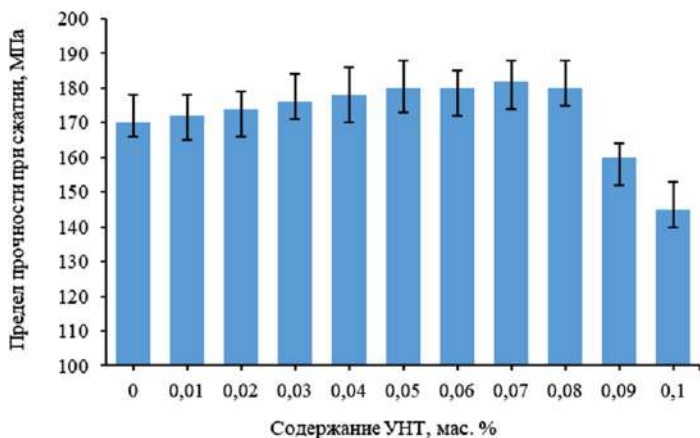


Рисунок 1 – Зависимость предела прочности при сжатии композитов «медь – УНТ» от содержания УНТ

Значительное снижение предела прочности при сжатии при содержании УНТ свыше 0,07 мас. % связано с разупрочнением металлической матрицы, которое объясняется ухудшением консолидации металлических частиц матрицы вследствие увеличения количества УНТ по границам частиц и образования агломератов УНТ.

На реализацию указанных механизмов упрочнения композиционных материалов при введении нанотрубок в металлическую матрицу указывается в работах [16–19]. Наибольший рост предела прочности при сжатии композиционного материала «медь – УНТ» обеспечивается за счет реализации механизма образования петель Орована [11]. Для подтверждения данного утверждения проведены микроструктурные исследования порошковых композиционных материалов «медь – УНТ» при содержании УНТ 0,07 мас. %.

Межфазное взаимодействие компонентов композиционных материалов «медь – УНТ» оказывает значительное влияние на прочностные свойства композитов. На рисунке 2 представлено ТЭМ-изображение границы раздела исходных компонентов данных композитов, полученное с использованием «JEOL JEM-1011» (Япония). Его анализ показывает, что УНТ механически связаны с медной матрицей без значительных физических зазоров и образования промежуточных соединений. Также просматриваются искажения по-

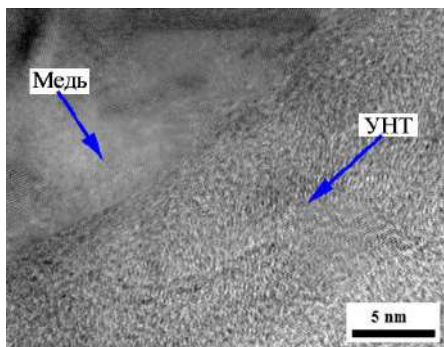


Рисунок 2 – Морфология композиционного материала «медь – УНТ»

муаровых полос на изображениях, полученных с использованием электронных микроскопов.

Для подтверждения представленных результатов повышения предела прочности за счет механизма образования петель Орована были проведены дополнительные микроструктурные исследования, которые показали наличие четких муаровых полос, указывающих на распределение дислокаций в виде петель Орована, образующихся за счет значительных сжимающих напряжений и деформаций сдвига, которые создаются в местах взаимодействия медной матрицы и УНТ при деформировании в процессе приложения давления при электроконтактном спекании (рисунок 3). Также необходимо обратить внимание на расстояние между муаровыми полосами, которое составляет  $\approx 1,13$  нм, что согласуется с расчетными значениями расстояний между муаровыми полосами, представленными в работе [20].

**Заключение.** Таким образом, показано влияние углеродного наноструктурного наполнителя на прочностные свойства композиционных материалов на основе медной матрицы. На основании анализа результатов исследований установлено, что введение 0,06–0,07 мас. % УНТ в медную матрицу позволяет повысить предел прочности при сжатии композита, определенный экспериментальным путем, на 6–8 % по сравнению с материалами на основе спеченной меди, не содержащими в своем составе наноразмерного наполнителя [8, 21, 22].

Авторы выражают признательность коллегам из Института механики Болгарской академии наук за помощь, оказанную при проведении исследований.

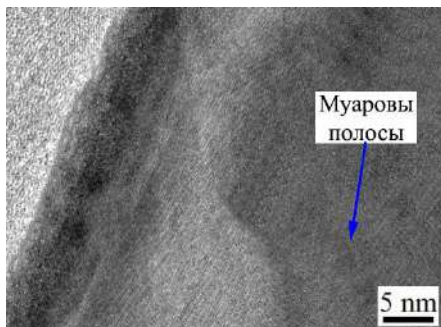


Рисунок 3 – Изображение области межфазного взаимодействия, полученное с использованием ТЭМ высокого разрешения

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Investigation on microstructure, mechanical, and tribological performance of Cu base hybrid composite materials / S. Sap [et al.] // *Journal of Materials Research and Technology*. – 2021. – Vol. 15. – P. 6990–7003.

2 Potential and challenges of metal-matrix-composites reinforced with carbon nanofibers and carbon nanotubes / E. Neubauer [et al.] // *Composites Science and Technology*. – 2010. – Vol. 70, is. 16. – P. 2228–2236.

3 **Perez-Aranda, C.** Electromechanical properties of carbon-nanostructured elastomeric composites measured by digital image correlation / C. Perez-Aranda, F. Aviles // *Composites Part C: Open Access*. – 2021. – Vol. 5. – Article 100161. – 10 p.

4 Thermal properties of composite materials based on the powder systems «copper-CNTs» / V. N. Pasovets [et al.] // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2019. – Vol. 92, is. 5. – P. 1267–1275.

5 **Kelly, A.** Tensile properties of fibre-reinforced metals: Copper/tungsten and copper/molybdenum / A. Kelly, W. R. Tyson, J. Mech // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1965. – Vol. 13, is. 6. – P. 329–350.

6 Microstructure and mechanical properties of AZ91 alloy reinforced by carbon nanotubes coated with MgO / Q. H. Yuan [et al.] // *Carbon*. – 2016. – Vol. 96. – P. 843–855.

7 The effects of carbon nanotubes on the mechanical and wear properties of AZ31 alloy / Zh. Mingyang [et al.] // *Materials*. – 2017. – Vol. 10, is. 12. – Article 1385. – 17 p.

8 **Miller, W. S.** Strengthening mechanisms in particulate metal-matrix composites: Reply to comments by Arsenault / W. S. Miller, F. J. Humphreys // *Scripta Metallurgica et Materialia*. – 1991. – Vol. 25, is. 11. – P. 2623–2626.

9 **Губенко, С. И.** Неметаллические включения в стали / С. И. Губенко, С. П. Ошкадеров. – Киев : Наукова думка, 2016. – 528 с.

10 **Li, Q .Q.** CNT reinforced light metal composites produced by melt stirring and by high pressure die casting / Q. Q. Li, C. A. Rottmair, R. F. Singer // *Composites Science and Technology*. – 2010. – Vol. 70, is. 16. – P. 2242–2247.

11 **Пасовец, В. Н.** Упрочнение композиционных материалов на основе металлической матрицы и углеродных нанотрубок / В. Н. Пасовец, В. А. Ковтун // *Весті Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук*. – 2019. – Т. 64, № 2. – С. 166–174.

12 **Zhang, Z.** Consideration of Orowan strengthening effect in particulate-reinforced metal matrix nanocomposites: A model for predicting their yield strength / Z. Zhang, D. L. Chen // *Scripta Materialia*. – 2006. – Vol. 54, is. 7. – P. 1321–1326.

13 Microstructure and strengthening mechanism of carbon nanotubes reinforced magnesium matrix composite / C. D. Li [et al.] // *Materials Science and Engineering: A*. – 2014. – Vol. 597. – P. 264–269.

14 Deformation and strengthening mechanisms of a carbon nanotube reinforced aluminum composite / F. Mokdad [et al.] // *Carbon*. – 2016. – Vol. 104. – P. 64–77.

15 Research of the interaction energy of carbon nanotubes in the agglomeration process / V. Kovtun [et al.] // *International Journal «NDT Days»*. – 2020. – Vol. 3, is. 2. – P. 72–79.

16 **Vencl, A.** Friction and wear properties of copper-based composites reinforced with micro- and nano-sized Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> particles / A. Vencl, V. Rajkovic, F. Zivic // *Balkantrib'2014 : Proceedings of 8<sup>th</sup> International conference on tribology, Sinaia, Romania, 30 October –*

1 November 2014. – Ploiesti : Petroleum-Gas University of Ploiesti Publishing House, 2014. – P. 357–364.

17 Strength and failure mechanisms of CNT-reinforced copper nanocomposite / B. Faria [et al.] // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Vol. 145. – P. 108–120.

18 Effect of CNTs in copper matrix on mechanical characteristics and tribological behavior under dry sliding and boundary lubrication conditions / L. Zhao [et al.] // Materials. – 2019. – Vol. 12, is. 13. – Article 2203. – P. 1–13.

19 **Mirza, F. A.** A unified model for the prediction of yield strength in particulate-reinforced metal matrix nanocomposites / F. A. Mirza, D. L. Chen // Materials. – 2015. – Vol. 8, is. 8. – P. 5138–5153.

20 **Лукьянович, В. М.** Электронная микроскопия в физико-химических исследованиях. Методика и применение / В. М. Лукьянович. – М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1960. – 274 с.

21 **Пасовец, В. Н.** Механизмы формирования структуры и свойств металлополимерных нанонаполненных износостойких композитов при высокоскоростном электроконтактном спекании / В. Н. Пасовец, В. А. Ковтун // Порошковая металлургия. – 2017. – Вып. 40. – С. 104–112.

22 **Пасовец, В. Н.** Исследование механизма повышения физико-механических характеристик композиционных материалов на основе порошковых систем медь – углеродные нанотрубки / В. Н. Пасовец, В. А. Ковтун, Ю. М. Плескачевский // Наноструктуры в конденсированных средах : сб. науч. ст. – Минск : Институт тепло- и массообмена, 2016. – С. 264–269.

V. N. PASOVETS<sup>1,2</sup>, V. A. KOVTUN<sup>1</sup>, Y. MIRCHEV<sup>3</sup>, V. A. LODNYA<sup>4</sup>

<sup>1</sup>University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>State research and production powder metallurgy association, Minsk, Belarus

<sup>3</sup>Institute of Mechanics of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria

<sup>4</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

## INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF CARBON NANOTUBES ON THE STRENGTH PROPERTIES OF COPPER-BASED COMPOSITE MATERIALS

This paper shows the effect of a carbon nanostructured filler on the strength properties of composite materials based on a copper matrix. Introduction 0.06–0.07 wt. % CNTs in a copper matrix makes it possible to increase the ultimate compressive strength of the composite by 6–8 % compared to materials based on sintered copper that do not contain a nano-sized filler in their composition. The mechanism of load transfer from the matrix to the strengthening elements, the mechanism of formation of dislocations due to the difference in the coefficients of thermal expansion of the matrix and the strengthening phase, the mechanism of the formation of Orowan loops constitute the general mechanism of strengthening when CNTs are introduced into the metal matrix.

**Keywords:** carbon nanotubes, metal matrix, composite materials, copper, ultimate compressive strength.

Получено 09.11.2022

УДК 629.463.62.01

*А. В. ПИГУНОВ, В. В. ПИГУНОВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ РАМ ПЛАТФОРМ ПРИ РАЗЛИЧНОМ КОНСТРУКТИВНОМ ИСПОЛНЕНИИ СРЕДНЕЙ ЧАСТИ**

Приведен анализ конструкций рам платформ Европейских производителей, которые имеют уменьшенную массу металлоконструкции. Разработана конструкция унифицированной концевой части рамы платформы. С ее применением разработаны конечно-элементные модели металлоконструкции платформ, отличающиеся конструктивным исполнением средней части. Произведена оценка их прочности с учетом современных нормативных требований.

**Ключевые слова:** вагон-платформа, концевая часть рамы, конструкция, масса тары, напряженно-деформированное состояние, конечно-элементная модель.

В последние десятилетия существенно возросла доля грузов, перевозимых в контейнерах, которые устанавливаются на специализированные платформы и закрепляются на раме с применением контейнерных упоров. В то же время размеры типовых контейнеров не обеспечивают максимально полное использование габаритных возможностей вагонов.

В Евросоюзе реализовано ряд проектов, предполагающих применение съемных и сменных кузовов. Установлено, что наиболее эффективное их использование достигается совместно со специализированными платформами. Для перевозки кузовов производства “Innofreight” разработано семейство платформ “InnoWaggon”, которые представляют собой сцеп из двух платформ с суммарной погрузочной длиной 60, 80 и 90 футов [1].

Рамы платформ выполнены из сварных профилей. Концевые части рамы унифицированы, а средние различаются длиной, что позволяет изготавливать платформы нужного размера в зависимости от потребности. Отсутствие в средней части рамы хребтовой балки позволяет получить свободное пространство, ограниченное боковыми продольными балками и раскосами, что позволяет разместить необходимые устройства сменных кузовов, которые предназначены для транспортировки жидких и сыпучих грузов.

Концевая унифицированная часть платформ “InnoWaggon” состоит из трех поперечных балок (концевой, шкворневой и средней поперечной) и боковых продольных [1]. Боковые продольные балки рамы имеют переменное по высоте сечение, которое максимально в средней части вагона. На верхних горизонтальных листах боковых балок располагаются откидные контейнерные упоры. Отрезки хребтовых балок в консольных частях частично перекрыты листом сверху и усилены вертикальными ребрами, а на промежутке

между шкворневой и средней поперечной балкой разделяются на два профиля. Затем они переходят в раскосы, обладающие переменной высотой по длине, для передачи продольных сил на боковые балки.

В рамках проекта “TransANT” [2] было спроектировано семейство платформ для перевозки съемных и сменных кузовов. Разработанные платформы имеют погрузочную длину 33, 40, 45, 48, 52, 60 и 70 футов. Они изготавливаются с применением унифицированных комплектующих. Рамы независимо от длины вагона собираются из трех модулей – двух концевых и среднего, который и определяет окончательную длину рамы, необходимую для потребителя.

Концевые модули рамы состоят из концевой 1, шкворневой 2 и хребтовой 3 балок (рисунок 1). Шкворневая и концевая балка по краям соединены при помощи отрезков боковых продольных балок 4. Дополнительно передача продольных сил с отрезков боковых балок на хребтовую осуществляется через верхний горизонтальный лист, который после шкворневой балки сужается до ширины хребтовой балки. Снизу он подкреплен вертикальными листами 5, расположенными по диагонали. Хребтовая балка концевой части рамы имеет замкнутое коробчатое сечение, которое увеличивается как по ширине, так и по высоте по мере удаления от шкворневой балки. Поперечные балки рамы сварные.

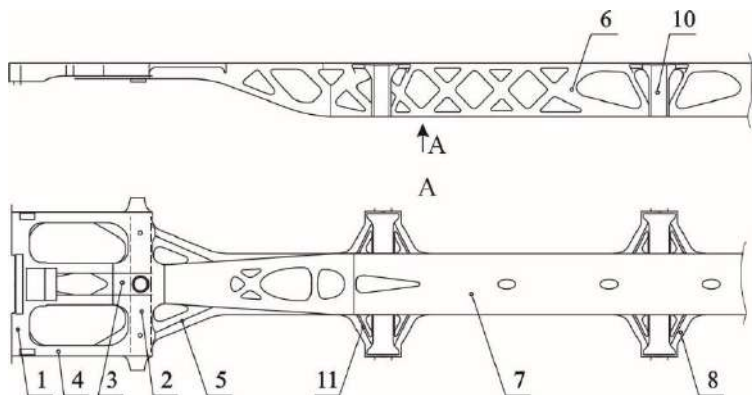


Рисунок 1 – Рама платформы с погрузочной длиной 70 футов (TransANT)

Верхний горизонтальный лист 8 хребтовой балки имеет форму трапеции с треугольным вырезом. Далее он переходит в прямоугольную площадку для установки откидных контейнерных упоров 9. Площадку снизу подкрепляет лист 10, расположенный под углом к горизонтальной плоскости таким образом, чтобы обеспечить связь с нижним горизонтальным листом хребтовой балки. Верхний и наклонный листы образуют треугольник, внутри по периметру которого приварены вертикальные усиливающие полосы 11 с треугольным вырезом.



На железных дорогах стран СНГ подавляющее большинство платформ имеют конструкцию рамы с хребтовой балкой, проходящей по всей длине кузова, с увеличенным сечением в средней части на участке между шкворневыми балками. Изготавливается хребтовая балка из двутавров, как правило, прокатных. Боковые балки могут быть выполнены из двутавра постоянного на всей длине сечения или по аналогии с хребтовой балкой иметь переменное сечение [3–5].

Для перевозки съемных или сменных кузовов требуются облегченные платформы-носители. Резервы по снижению массы можно выявить только в конструкции рамы, поскольку ходовые части, автосцепное устройство и тормозное оборудование состоят из набора стандартных элементов, доля каждого из которых в общей массе вагона значительно меньше, чем металлоконструкция рамы [6, 7].

Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что конструкция концевого модуля рамы платформы должна быть унифицированной. Она должна включать в себя концевую, шкворневую, хребтовую и боковые продольные балки. Далее, изменяя конструкцию модуля средней части рамы, требуется определить, какая из них обладает наилучшими технико-экономическими показателями.

Разработана унифицированная концевая часть рамы (рисунок 2), состоящая из концевой 1, шкворневой 2, двух боковых продольных 3 и хребтовой 4 балок. Максимальная высота у хребтовой балки (300 мм), а минимальная – у боковой (200 мм). Концевая и шкворневая балки имеют переменную высоту. Верхние листы расположены по горизонтали, а нижние – под углом, чтобы обеспечить соединение нижних горизонтальных листов боковых и хребтовой балок. Они привариваются к вертикальному листу, образуя в поперечном сечении швеллер с толщиной стенок 10 мм.

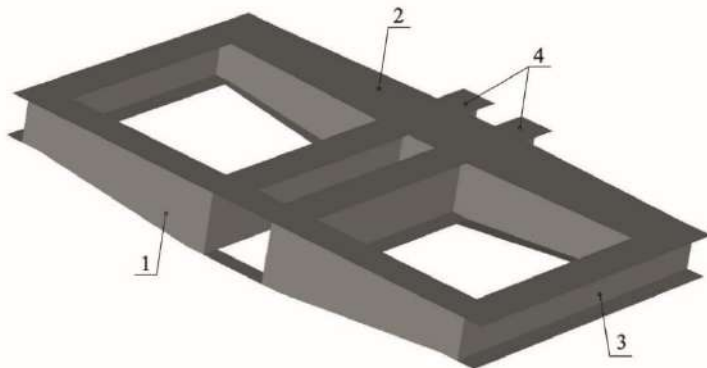


Рисунок 2 – Концевая унифицированная часть рамы платформы

Шкворневая балка имеет замкнутое коробчатое сечение. Толщина вертикальных листов – 8 мм, а верхнего и нижнего – 10 мм. Внутри балки в месте установки скользунов предусмотрены усиливающие диафрагмы.

Боковые балки имеют сечение в форме двутавров высотой 200 мм с толщиной вертикальной стенки 11 мм и горизонтальных полок 16 мм.

Хребтовая балка образована двумя двутаврами высотой 300 мм с толщиной элементов, такой же как у боковых балок.

Для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) рам платформ были разработаны их конечно-элементные модели, отличающиеся конструкцией средней части [8, 9].

*Первый вариант* конструктивного исполнения средней части (рисунок 3, а) состоит из хребтовой балки, высота сечения которой увеличивается с 300 до 600 мм в средней части. Боковые балки в средней части имеют конструкцию, аналогичную хребтовой. Поперечное сечение всех продольных балок образовано двутаврами с толщиной вертикальных стенок 11 мм и горизонтальных полок 16 мм. В середине предусмотрена основная поперечная балка, представляющая собой сварной двутавр постоянной высоты. Толщина горизонтальных элементов 16 мм, а вертикального листа 10 мм.

*Второй вариант* конструктивного исполнения средней части (рисунок 3, б) отличается от первого конструкцией боковых и основной поперечной балок. В этом случае боковые балки выполнены в виде двутавра высотой 200 мм на всей длине. Основная поперечная балка представляет собой сварной двутавр переменной высоты. Толщины элементов сечений всех балок аналогичны первому варианту конструкции.

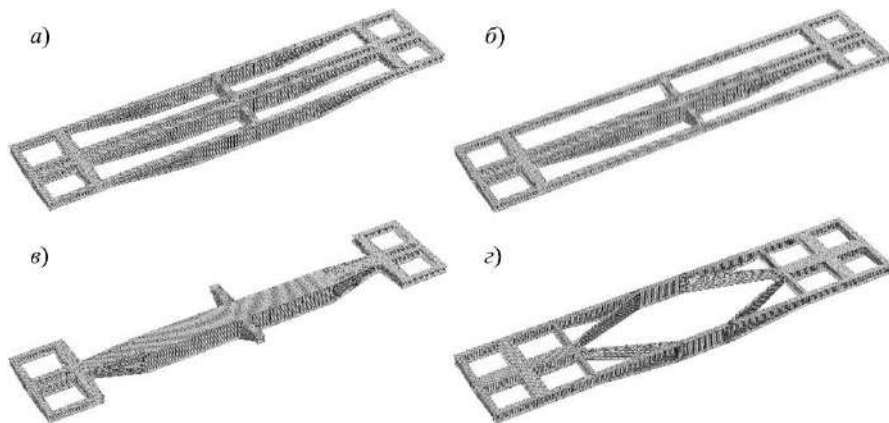


Рисунок 3 – Конечно-элементные модели рам платформ различного конструктивного исполнения

В *третьем варианте* конструктивного исполнения средней части (рисунок 3, в) за основу взята конструкция платформ проекта “TransANT”. Хребтовая балка в средней части имеет замкнутое коробчатое сечение с одинаковой высотой и шириной 700 мм, которое уменьшается до высоты 300 мм и ширины 350 мм по мере приближения к шкворневым балкам на участках длиной 1580 мм с обеих сторон. Толщина вертикальных листов 11 мм, горизонтальных – 16 мм. Основная поперечная балка, расположенная по середине рамы, в отличие от приведенных выше вариантов имеет замкнутое коробчатое сечение переменной высоты. У хребтовой балки она максимальная и уменьшается до 200 мм к краю рамы. Толщина вертикальных листов 10 мм, горизонтальных – 16 мм.

*Четвертый вариант* конструктивного исполнения (рисунок 3, г) выполнен по аналогии с вагонами проекта “InnoWaggon”. Хребтовая балка продолжается на участке за шкворневой на длине 1470 мм, где она стыкуется с поперечной балкой, имеющей поперечное сечение в виде двутавра (толщина горизонтальных и вертикальных листов 10 мм), а в дальнейшем переходит в раскосы, которые соединяют ее с боковыми продольными балками рамы. В средней части боковая балка увеличивает свое сечение до 700 мм, причем имеет толщину вертикальных элементов 11 мм, горизонтальных – 16 мм.

Наибольшая масса металлоконструкции рамы соответствует первому рассмотренному варианту. Второй легче на 9 %, третий и четвертый – на 7,4 и 10,5 % соответственно.

Приведенные на рисунке 3 конечно-элементные модели, при построении которых использовались пластинчатые трех- и четырехугольные конечные элементы, позволяют осуществлять расчеты для любого вида и сочетания эксплуатационных нагрузок. Кинематические граничные условия в них включают в себя ограничение степеней свободы в местах размещения упоров автосцепного устройства и пятников.

Расчеты выполнялись для случая совместного действия продольной (сжимающей и растягивающей) сил величиной 2 МН и 2,5 МН с учетом собственного веса и вертикальной нагрузки от перевозимого груза в виде двух контейнеров (масса одного 36 т), которая составила 72 т [10]. Материал – сталь 09Г2С, предел текучести которой равен 345 МПа.

В таблице 1 представлены максимальные значения расчетных напряжений для четырех рассмотренных вариантов конструктивного исполнения металлоконструкции рамы при действии продольной растягивающей нагрузки. Анализ приведенных данных показывает, что расчетные напряжения для первых трех вариантов конструктивного исполнения рам платформ не превышают допускаемой величины 327 МПа. При конструктивном исполнении, соответствующем четвертому варианту, для значительного числа элементов расчетные напряжения превысили допускаемые, а также предел текучести стали 345 МПа. В частности, максимальный уровень расчетных напряжений наблюдается

в средней части боковой продольной балки (нижний горизонтальный лист) и на 39 % превышает допускаемые напряжения. Кроме того, расчетные напряжения оказались больше допускаемых в местах соединения верхнего листа шкворневой и хребтовой балок, а также нижнего листа боковой балки с раскосом. Отметим, что полученный результат не означает, что вагоны проекта “InnoWaggon” изначально не соответствуют требованиям прочности, поскольку они рассчитаны исходя из иных требований [11, 12].

**Таблица 1 – Максимальные значения напряжений по конструктивным группам при действии продольной растягивающей нагрузки**

В мегапаскалях

Конструктивная группа	Варианты конструктивного исполнения			
	1	2	3	4
Хребтовая балка:				
– концевая часть	200	190	200	271
– средняя часть	170	232	193	219
Шкворневая балка	278	265	258	435
Боковая балка:				
– концевая часть	209	203	186	196
– средняя часть	95	92	–	454
Концевая балка	258	232	164	262
Поперечная балка	105	154	95	222
Раскосы	–	–	–	389
Поперечные балки вспомогательные	–	–	–	265

Таким образом, в результате проведенных расчетов установлено, что четвертый вариант конструктивного исполнения рамы обладает недостаточной прочностью средней части. Предлагаемая конструкция нуждается в усилении и в дальнейших расчетах на действие продольной сжимающей силы не рассматривалась. Вместо нее рассчитывалась конструкция рамы, аналогичная второму варианту, но отличающаяся от него наличием в средней части хребтовой балки замкнутого коробчатого сечения с толщиной вертикальных и горизонтальных листов 12 мм. При таком конструктивном исполнении масса конструкции не возросла.

Расчет на продольную сжимающую нагрузку показал, что значения максимальных напряжений по всем конструктивным группам в основном ниже, чем у второго варианта конструкции на 1–2 % за исключением поперечной балки рамы, где они выросли на 10 % и составили 186 МПа.

Результаты выполнения прочностных расчетов, в ходе которых были получены расчетные значения напряжений для всех конструктивных вариантов рам, представлены в таблице 2. Приведенные значения максимальных напряжений демонстрируют, что третий вариант конструкции не соответствует существующим требованиям прочности. Уровень напряжений в нижнем листе

хребтовой балки превышает допускаемые значения 327 МПа в зоне перехода к увеличенному сечению хребтовой балки. В остальных элементах конструкции платформ расчетные напряжения находятся в допускаемых пределах.

*Таблица 2 – Максимальные напряжения при продольной сжимающей нагрузке*  
В мегапаскалях

Конструктивная группа	Варианты конструктивного исполнения			
	1	2	3	4
Хребтовая балка:				
– концевая часть	209	209	343	245
– средняя часть	232	307	468	304
Шкворневая балка	321	321	278	321
Боковая балка				
– концевая часть	190	206	180	206
– средняя часть	167	144	–	144
Концевая балка	258	314	167	307
Поперечная балка	140	190	229	249

Для большинства конструктивных групп минимальный уровень напряжений наблюдается при первом варианте конструктивного исполнения рамы. Второй вариант отличается более высоким уровнем напряжений в элементах концевой, поперечной и боковой балок в концевой части, а для средней части боковой балки, наоборот, наблюдается их снижение с 167 до 144 МПа. Напряженное состояние рамы для четвертого варианта по большинству конструктивных групп изменилось незначительно. Наибольший рост напряжений наблюдается в элементах поперечной балки – с 190 до 249 МПа.

Таким образом, результаты выполненного анализа показывают, что наибольшую массу тары имеет конструкция рамы с боковыми продольными балками переменного сечения. Остальные модификации имеют меньшие массы, отличие которых находится в пределах  $\pm 1,5\%$ .

На основании выполненных исследований по оценке напряженно-деформированного состояния рам платформ с различным конструктивным исполнением средней части установлено, что рамы платформ, имеющих конструктивное построение по аналогии с проектами “TransANT” и “InnoWaggon” не соответствуют актуальным требованиям прочности. Данные конструкции нуждаются в усилении средней части рамы.

Наиболее приемлемым по уровню максимальных расчетных напряжений и массе тары является второй вариант конструктивного исполнения средней части рамы (вариант с боковыми балками постоянного сечения).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пигунов, А. В.** Европейские разработки в области реализации концепции применения съёмных кузовов / А. В. Пигунов, В. В. Пигунов, П. А. Дашук // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 183–189.

2 Superstructures industry-specific modular superstructures for optimized logistics solutions [Электронный ресурс]: Интернет-портал. Австрия – Линц. – Режим доступа : <https://www.transant.com/en/The-TransANT/Superstructures/>. – Дата доступа : 12.09.2022.

3 **Пигунов, В. В.** Конструкция, теория и расчет вагонов : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В. В. Пигунов, А. В. Пигунов. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 466 с.

4 **Пастухов, И. Ф.** Вагоны : учеб. для техникумов ж.-д. трансп. / И. Ф. Пастухов, В. В. Лукин, Н. И. Жуков. – М. : Транспорт, 1988. – 280 с.

5 **Бубнов, В. М.** Совершенствование конструкции подвижного состава для перевозки контейнеров / В. М. Бубнов, С. В. Мямлин, Н. Л. Гуржи // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – 2009. – № 26. – С. 11–14.

6 **Бороненко, Ю. П.** Перспективы внедрения вагонов со съёмными кузовами увеличенной грузоподъёмности / Ю. П. Бороненко, А. С. Даукша // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2017. – Т. 14, № 3. – С. 437–451.

7 **Бороненко, Ю. П.** Выбор конструктивных решений устройств крепления контейнеров и съёмных кузовов на железнодорожных платформах / Ю. П. Бороненко, А. С. Даукша // Транспорт Российской Федерации. – 2017. – № 3 (70). – С. 29–32.

8 **Троицкий, П. С.** Обоснование снижения массы рамы вагона-платформы для перевозки контейнеров в модульных грузовых электропоездах / П. С. Троицкий // Транспортные системы и технологии. – 2020. – Т. 6, № 2. – С. 70–84.

9 **Chlus, K.** Numerical standard tests of railway carriage platform / K. Chlus, W. Krasoń // Journal of KONES. – 2012. – Vol. 19, no. 3. – С. 59–64.

10 Вагоны грузовые. Требования к прочности и динамическим качествам : ГОСТ 33211–2014. – Введ. 01.07.2016. – М. : Стандартинформ, 2016. – 54 с.

11 Numerical static and dynamic stress analysis on railway passenger and freight car models / С. Baykasoglu [et al.] // International Iron & Steel Symposium, 02-04 April 2012, Karabük, Türkiye. – Karabük, 2012. – P. 579–586.

12 **Sepe, R.** Static and modal numerical analyses for the roof structure of a railway freight refrigerated car / R. Sepe, A. Pozzi // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2015. – Vol. 9, no. 33. – P. 451–462.

*A. V. PIHUNOU, V. V. PIHUNOU*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **STRENGTH ANALYSIS OF FLATCAR FRAMES WITH DIFFERENT STRUCTURAL PERFORMANCE OF THE MIDDLE PART**

The analysis of the frame structures of flatcars of European manufacturers with a reduced mass of metal structures is presented. The design of the flatcar frame unified end part is developed. With the use of this design the finite element models of the flatcar metal structures are developed and they differ in the middle part design. Their strength is evaluated corresponding to the modern regulatory requirements.

**Keywords:** flatcar, frame end part, structure, tare weight, stress-strain state, finite element model.

Получено 10.11.2022

УДК 629.463.66

*А. В. ПИГУНОВ, В. В. ПИГУНОВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **КОНСТРУКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ОБЪЕМА КУЗОВА ВАГОНА-ХОППЕРА**

Выполнен анализ конструктивных решений, которые позволяют увеличить погрузочный объем кузовов вагонов-хопперов, предназначенных для перевозки зерна. Предложен вариант исполнения торцевой стены, позволяющий получить дополнительный объем без изменения угла наклона торцевой стены. Выполненные предварительные расчеты кузова вагона-хоппера с учетом предлагаемого технического решения показали соответствие конструкции современным требованиям прочности.

**Ключевые слова:** вагон-хоппер, конструкция кузова, прочность, объем кузова, метод конечных элементов.

Увеличение объема кузова грузового вагона – один из путей повышения его грузоподъемности. В частности, эта задача является актуальной для вагонов-зерновозов. До недавнего времени на железных дорогах были наиболее распространены вагоны-хопперы для перевозки зерна моделей 11-739 и 19-752 производства Крюковского вагоностроительного завода, которые имеют схожую конструкцию и одинаковые линейные размеры. Основные их отличия заключаются в конструктивном исполнении крыши и загрузочных люков (в модели 19-752 они увеличенного размера) [1].

Цельнометаллический кузов вагона-хоппера модели 19-752 состоит из крыши, двух вертикальных боковых и двух наклонных торцевых стен, рамы и шести разгрузочных бункеров (по три на сторону) [2]. Каркас крыши вагона образован поперечными дугами, выполненными из уголка 75×50×5 мм, к которым сверху приваривается металлическая гофрированная обшивка, состоящая из среднего листа толщиной 3 мм и двух крайних – 1,8 мм. На среднем листе имеется четыре прямоугольных выреза, в которых расположены горловины загрузочных люков с крышками. Крышу с торцевыми стенами соединяют фрамуги, установленные по торцам кузова.

Торцевая стена включает верхнюю вертикальную и нижнюю наклонную части, основу которых составляет гладкая обшивка толщиной 4 мм. Верхняя часть вертикального листа содержит отбортовку, выполняющую роль верхней обвязки, а нижняя – загиб, образующий с нижним наклонным листом поперечный замкнутый профиль. Боковые обвязки торцевой стены, связывающие ее с боковыми стенами, выполнены из гнутого уголка 60×60×6 мм. Наклонный лист подкрепляется снаружи двумя наклонными и горизонтальным поясом, расположенным между ними, из гнутого швеллера толщиной 4 мм. Усиливающие пояса образуют с обшивкой замкнутое сечение. Для придания

торцевой стене необходимой прочности листы ее обшивки соединены с верхним горизонтальным листом шкворневой балки раскосами. Вертикальный лист усилен двумя стойками-раскосами из прокатного швеллера № 14, а нижний наклонный – тремя подкосами, связывающими горизонтальный усиливающий пояс со шкворневой балкой рамы.

Боковая стена включает верхнюю обвязку, десять вертикальных стоек из двутавра № 10, два раскоса (швеллер № 14) и стальную обшивку, которая на участке размещения вертикальных стоек выполнена гофрированной из листа толщиной 3 мм, а в концевых частях – из гладкого листа толщиной 4 мм. Верхняя обвязка имеет специальный профиль незамкнутого сечения (толщина металла 6 мм).

Рама вагона состоит из хребтовой, двух боковых продольных, двух основных поперечных, двух шкворневых и двух концевых балок. Дополнительно в консольных частях для связи концевых и шкворневых балок по бокам устанавливают четыре продольные концевые обвязки из уголка. Хребтовая балка сварена из двух зетовых профилей № 31 и внутри кузова сверху усилена коньком. Боковые продольные балки, выполненные из уголка 125×80×10 мм, расположены выше уровня хребтовой балки на участке расположения вертикальных стоек боковой стены. Далее они изогнуты вниз и привариваются к верхнему листу шкворневой балки, имеющей замкнутое коробчатое сечение, которое уменьшается к боковым балкам. Она образована верхним горизонтальным, вертикальными и нижним листами, на которых располагаются опорные скользуны. Основные поперечные балки, служащие опорой для бункеров, – сварные, имеют тавровое поперечное сечение.

Нижнюю часть кузова замыкают шесть бункеров, выполненных из гладкого листового металла толщиной 5 мм. Наклонные стенки бункеров дополнительно усилены подкрепляющими элементами в виде швеллера.

Описанная конструкция кузова объемом 94 м<sup>3</sup> проектировалась для осевой нагрузки 222,5 кН и отвечала требованиям того времени.

Большую работу по уточнению параметров типоразмерного ряда вагонов-хопперов с учетом повышения осевых нагрузок и применения более емких габаритов провели совместно специалисты ВНИИВа и МИИТа. Целью исследования было определение таких параметров вагонов, при которых были бы минимальными приведенные эксплуатационные затраты [3]. Было установлено, что для осевой нагрузки 226 кН и габарита 1–ВМ оптимальный объем кузова составляет 100 м<sup>3</sup>, при осевой нагрузке 245 кН и габарите 1–Т – 111 м<sup>3</sup>. Также было показано, что для всех перспективных конструкций вагонов длина рамы должна быть 13500 мм.

Руководствуясь результатами указанных исследований, для реализации осевой нагрузки 245 кН, на базе кузова модели 19-752 была разработана перспективная модель 19-756, объем кузова которой составил 111 м<sup>3</sup> при грузоподъемности до 76,5 т. Увеличение объема кузова было достигнуто, в основном, путем уменьшения угла наклона торцевых стен до 45° [4].



Дальнейшее развитие модельный ряд вагонов-хопперов для перевозки зерна получил в двух типах кузовов:

- каплевидной формы как с хребтовой балкой в консольных частях, так и со сквозной хребтовой балкой;
- традиционной конструкции с вертикальными боковыми стенами и сквозной хребтовой балкой.

В последнее десятилетие конструкции вагонов-хопперов для перевозки зерна проектировались с учетом осевых нагрузок 230,5 и 245 кН. Технические характеристики вагонов разных моделей приведены в таблице 1. Представленные данные показывают, что все вагоны имеют увеличенный объем кузова при одинаковой длине рамы и базе вагона, как и у модели 19-752. Увеличение объема кузова достигнуто в основном за счет уменьшения угла наклона торцевых стен и у моделей 19-1259 и 19-4152 он составляет 127 и 133 м<sup>3</sup> соответственно.

Таблица 1 – Техничко-экономические показатели крытых вагонов-хопперов

Показатель	Модель					
	11-739	19-752	19-756	19-9549	19-1259	19-4152
Завод-производитель	КВСЗ	КВСЗ	КВСЗ	ТВСЗ	РМ рейл	ДВЗ
Грузоподъемность, т	65	70	76,5	76	76	71,5
Масса тары вагона, т	22	22	23,5	23,5	24	22,5
Осевая нагрузка, кН (тс)	213,15 (21,75)	225,5 (23)	245 (25)	245 (25)	245 (25)	230,5 (23,5)
Объем кузова, м <sup>3</sup>	93	94	111	120	127	133
База вагона, мм	10500	10500	10500	1050	1050	1050
Длина по осям сцепления авто-сцепок, мм	14720	14720	14720	14720	14720	14720
Длина по концевым балкам рамы, мм	13500	13500	13500	13500	13500	13500
Ширина максимальная, мм	3250	3240	3280	3220	3250	3244
Высота от уровня головок рельсов максимальная, мм	4653	4565	4873	4840	4900	–
Углы наклона конструктивных элементов кузова, град:						
– торцевая стена	55	65	45	35	45	30
– стены бункера	55	55	55	50	40	–
Кол-во загрузочных люков, шт.	4	4	4	4	5	5
Кол-во разгрузочных люков, шт.	6	6	6	6	3	6
Габарит	1-ВМ	1-ВМ	1-Т	1-Т	1-Т	1-Т

Конструкция кузова вагона модели 19-1259, разработанного АО «РМ Рейл Инжиниринг» (рисунок 1), имеет вертикальные боковые стены с обшивкой 1, расположенной с внешней стороны кузова, а вертикальные стойки 2 примыкают к обшивке с внутренней стороны на длине расположения бункеров, что увеличивает полезный погрузочный объем. Торцевые стены кузова распо-

жены под углом  $45^\circ$ , что на  $20^\circ$  меньше, чем у модели 19-752. Это дает возможность увеличения объема кузова путем рационального заполнения пространства консольной части на участке между шкворневой и концевой балками рамы. В таком случае крыша кузова становится по длине практически равной раме вагона. Кузов оснащен тремя бункерами специальной конструкции 3 вместо шести, хотя конструкция рамы предусматривает хребтовую балку 4 на всей длине кузова. Каждый из бункеров имеет форму усеченной пирамиды с разгрузочным люком, расположенным по центру кузова, что позволяет получить дополнительный объем за счет пространства под хребтовой балкой [5].

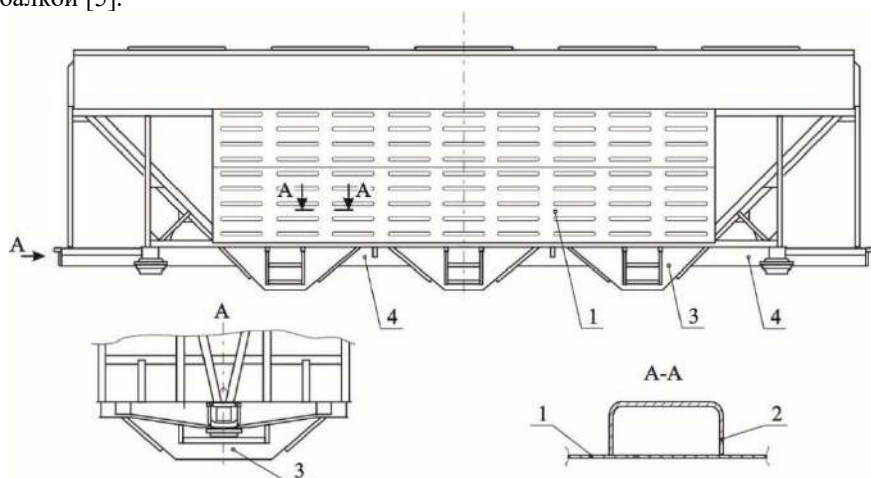


Рисунок 1 – Кузов вагона модели 19-1259

Вагон модели 19-4152 производства «Днепровагонмаш» (рисунок 2) имеет наибольший объем кузова, который составляет  $133 \text{ м}^3$ , что, несомненно, расширяет его функциональные возможности. Погрузочный объем удалось увеличить за счет использования полезного пространства между стойками 1, изготовленными из гнутого швеллера  $180 \times 70 \times 6 \text{ мм}$ . Для этого к швеллеру приваривается омегаобразный профиль 2 высотой 70 мм, образуя замкнутое коробчатое сечение стойки, к отогнутым концам которого крепятся гофрированные листы обшивки 3, образуя карман трапецевидной формы [6].

С учетом увеличения объема кузова также изменена конструкция хребтовой балки. Она имеет замкнутое коробчатое сечение и включает три части: две концевые 4 и среднюю 5. Толщина листов концевых частей хребтовой балки составляет 8 и 12 мм для вертикальных стенок, 12 и 16 мм для верхних и нижних листов соответственно. Хребтовая балка сразу после шкворневой занижается. Изгибы переходной зоны 6, расположенной между шкворневой балкой и бункером, выполнены плавными с определенными радиусами. Она

также имеет замкнутое коробчатое сечение, образованное вертикальными (8 мм) и горизонтальными листами (12 мм). Торцевая стена кузова имеет уменьшенный угол наклона, который составляет  $30^\circ$ , что также позволяет повысить объем кузова.

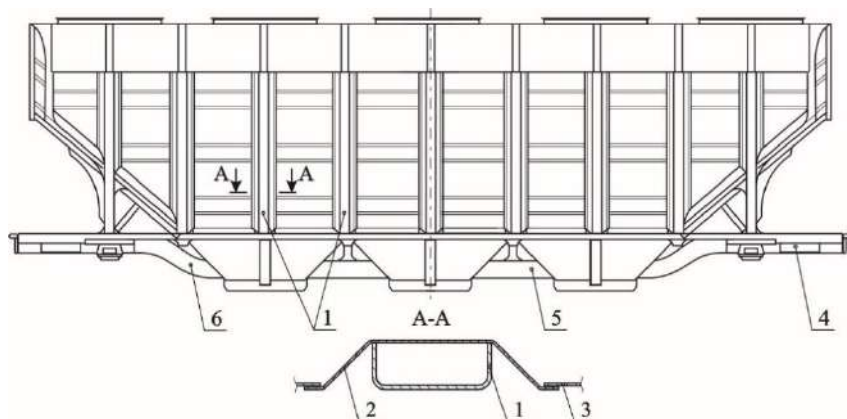


Рисунок 2 – Кузов вагона модели 19-4152

Таким образом, повышение полезного объема кузова в рамках неизменной длины рамы (13500 мм) достигнуто за счет применения следующих конструктивных решений:

- использования дополнительного пространства между стойками боковых стен;
- объединения двух соседних бункеров в единую конструкцию, что позволяет получить дополнительный объем под хребтовой балкой кузова;
- занижения уровня хребтовой балки в средней части кузова;
- уменьшения угла наклона торцевой стены.

При проектировании вагонов-хопперов должно выполняться условие, при котором угол наклона как торцевых стен, так и стен бункеров должен быть больше угла естественного откоса транспортируемого сыпучего груза. По результатам проведенных исследований для максимально лучшей выгрузки перевозимого груза разница должна составлять не менее  $10^\circ$  [7]. Эта рекомендация в модели 19-4152 производства «Днепровагонмаш» не выполняется, так как угол наклона торцевых стен в ней составляет  $30^\circ$  при угле естественного откоса зерна  $25^\circ$  [8].

Во всех представленных выше конструкциях кузовов торцевая стена образована двумя плоскостями: вертикальной сверху, наклонной снизу. Соединение с боковой стеной осуществляется под прямым углом.

Возможен вариант конструктивного исполнения торцевой стены, при котором каждая из ее частей (наклонная и вертикальная) образуется двумя плос-

костями, расположенными под углом друг к другу. В таком случае угол между плоскостями, образующими торцевую стену, может быть от  $179$  до  $90^\circ$  и угол между боковой и торцевой стеной – от  $91$  до  $135^\circ$ .

Практическую реализацию данного решения рассмотрим на примере кузова вагона-хоппера модели 19-752 постройки Крюковского ВЗ, хорошо зарекомендовавшего себя в эксплуатации. Наклонная и верхняя вертикальная части торцевой стены кузова образуются двумя плоскостями, стыкующимися посередине вагона, в результате чего получаем клиновидный выступ ( $500$  мм), который дает возможность увеличения полезного объема кузова. Помимо этого, он является дополнительным силовым элементом металлоконструкции торцевой стены. Геометрические характеристики сечений всех остальных ее подкрепляющих элементов остались неизменными, лишь незначительно изменилось их расположение.

Для сравнительной оценки прочности базовой конструкции и кузова, в схему которого внесены предлагаемые изменения, были разработаны их расчетные конечно-элементные пространственные модели. В них использовались два типа пластинчатых конечных элементов: плоские трех- и четырехугольные. В качестве кинематических граничных условий принимались ограничения степеней свободы в местах крепления упоров автосцепного устройства и пятников.

Полученные конечно-элементные модели конструкций: существующей кузова и с предлагаемыми конструктивными изменениями торцевой стены, представлены на рисунке 3.

При расчетах учитывались следующие сочетания нагрузок.

При квазистатическом сжатии продольная сила  $T = 2,5$  МН прикладывалась к задним упорам автосцепного устройства, в случае растяжения – к передним упорам ( $T = 2,0$  МН). Одновременно учитывалась сила тяжести кузова и груза, а также принималось во внимание давление сыпучего груза, которое прикладывалось к наклонным торцевым стенам, стенкам бункеров и вертикальным боковым стенам [9, 10].

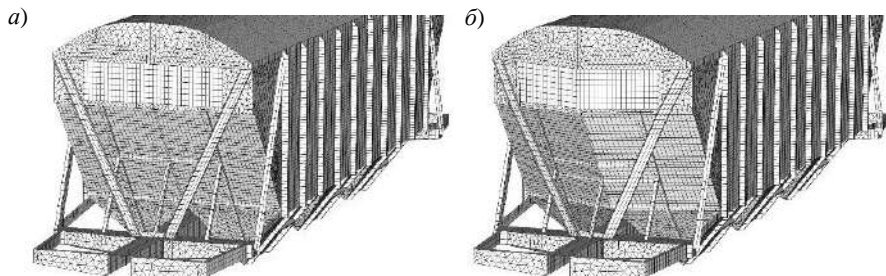


Рисунок 3 – Конечно-элементные модели вагонов-хопперов:  
а – базовой модели 19-752; б – модернизированного кузова

Проведенные расчеты конструкции кузова вагона базовой модели позволили определить значения расчетных напряжений для всех конечных элементов модели. Их максимумы при действии сжимающей нагрузки в зависимости от конструктивной группы составляют от 10 до 92 % от допускаемых напряжений. В случае действия растягивающей нагрузки они составляют 19–95 % от допускаемых значений и также их не превышают.

Результаты вычислений для кузова с измененной конструкцией торцевой стены показали, что максимальный уровень напряжений в некоторых конструктивных элементах, которых коснулись изменения, возрос, хотя и не превысил допускаемого значения 327 МПа. В частности, увеличились значения максимальных напряжений в верхнем горизонтальном листе шкворневой балки в месте опирания раскоса торцевой стены, что связано со смещением места его расположения. В остальных конструктивных группах произошло перераспределение напряжений. В одних случаях они возросли, в других – остались на том же уровне, а в третьих – снизились.

По результатам проведенных исследований можно сформулировать следующие выводы.

Увеличение погрузочного объема достигается путем уменьшения угла наклона торцевых стен, рационального расположения обшивки боковых стен, позволяющего использовать дополнительный объем между стойками, и занижения уровня хребтовой балки в средней части кузова, а также увеличения объема бункеров. Возможности уменьшения угла наклона торцевых стен ограничены, поскольку этот угол не должен быть меньше угла естественного откоса груза, увеличенного на 10°.

Предложенное техническое решение, связанное с использованием клиновидной формы торцевой стены, позволяет увеличить вместимость кузова без изменения угла наклона данной стены при незначительном уменьшении угла наклона стенки бункера. Проведенные прочностные расчеты кузова с учетом предлагаемых изменений подтвердили соответствие модернизированной конструкции современным требованиям прочности.

Полученные в работе результаты также могут быть полезны при усовершенствовании конструкций вагонов-хопперов, которые предназначены для транспортировки иных видов грузов [11–13].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Пастухов, И. Ф. Вагоны : учеб. для техникумов ж.-д. трансп. / И. Ф. Пастухов, В. В. Лукин, Н. И. Жуков. – М. : Транспорт, 1988. – 280 с.
- 2 Вагон для зерна. Модель 19-752. Техническое описание и инструкция по эксплуатации 752.00.000-1ТО. – Кременчуг : КВСЗ, 1981. – 31 с.
- 3 Созданию специализированных вагонов – системный подход / Г. И. Осадчук [и др.] // Железнодорожный транспорт. – 1982. – № 5. – С. 51–54.

4 **Пигунов, В. В.** Конструкция, теория и расчет вагонов : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В. В. Пигунов, А. В. Пигунов. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 466 с.

5 Вагоны-хопперы для перевозки зерна и других сыпучих грузов модели 19-1259, 19-1259-01. Руководство по эксплуатации 1259.00.00.000 РЭ. – Саранск : АО «РМ Рейл Инжиниринг», 2017. – 78 с.

6 Вагон-хоппер крытый для зерна и других пищевых грузов модели 19-4152. Руководство по эксплуатации 4152.00.000 РЭ. – Каменское : Днепровагонмаш, 2017. – 51 с.

7 Расчет вагонов на прочность : учеб. пособие для вузов ж.-д. трансп. / С. В. Вершинский [и др.]. – М. : Машиностроение, 1971. – 432 с.

8 ГОСТ 33211–2014 Вагоны грузовые. Требования к прочности и динамическим качествам. – Введ. 2016–07–01. – М. : Стандартинформ, 2016. – 54 с.

9 Analysis of the strength of the supporting structure of a TwoSection hopper wagon under operating loading conditions / G. Vatulia [et al.] // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13, is. 2. – Article 859. – 17 p.

10 **Senko, B.** Evaluation of stress-strain state bodies of the hopper cars, taking into account the impact of bulk cargo / B. Senko, A. Pihunou, P. Afanaskou // Mechanika 2017 : Proceedings of the 22<sup>nd</sup> International Scientific Conference. – Kaunas : Kaunas University of Technology, 2017. – P. 331–335.

11 Substantiating the optimization of the load-bearing structure of a hopper car for transporting pellets and hot agglomerate / O. Fomin [et al.] // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2020. – Vol. 1, no. 7 (103). – P. 65–74.

12 **Molavitabrizi, D.** Methodology for multiscale design and optimization of lattice core sandwich structures for lightweight hopper railcars / D. Molavitabrizi, J. Laliberte // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2020. – Vol. 234, is. 21. – P. 4224–4238.

13 **Rahimov, R. V.** Scientific substantiation of technical solutions for the improvement of the construction of the body of a hopper car for transportation of cement produced in the Republic of Uzbekistan / R. V. Rahimov, S. A. Khatamov, Z. X. Rakhmatov // European Science Review. – 2017. – No. 3–4. – P. 13–17.

*A. V. PIHUNOU, V. V. PIHUNOU*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **STRUCTURAL SOLUTIONS FOR INCREASING THE HOPPER CAR BODY VOLUME**

The analysis of design solutions for increasing the loading volume of the hopper car bodies for the grain transportation is carried out. There is proposed a variant of the end wall design, that makes it possible to obtain an additional volume without changing the angle of inclination of the end wall. The preliminary calculations of the hopper car body take into account the proposed technical solution and show that the design corresponds to the modern strength requirements.

**Keywords:** hopper car, car body design, strength, body volume, finite element method.

Получено 10.11.2022

УДК 629.322.2:629.015

*И. И. ПРОНЕВИЧ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ОБОДА КОЛЕСА НА ХОДОВЫЕ КАЧЕСТВА ВЕЛОСИПЕДА**

На основе модели велосипедного колеса как жесткого диска, к ободу которого на одинаковых расстояниях друг от друга присоединены пружины, выполнен анализ сил сопротивления качению. Приведены результаты сравнения мощности этих сил для случаев двустенного и одностенного обода.

**Ключевые слова:** велосипед, сопротивление качению, обод колеса.

В настоящее время велосипед является одним из основных средств индивидуального передвижения людей. Его использование дает возможность достаточно быстро добраться в необходимую точку, и в то же время он не загрязняет окружающую среду и позволяет улучшить состояние здоровья человека. Очевидно, что при поездках на велосипеде человек не должен испытывать чрезмерных нагрузок. Поэтому практический интерес представляет анализ сил сопротивления, возникающих при движении велосипеда.

В работах [1, 2] представлены различные конструкции шин транспортных средств, предложен вариант их классификации.

Большинство исследований механики движения велосипеда осуществлялось экспериментальными методами. Так, в статье [3] описаны результаты испытаний, которые показали, что преобразование крутящего момента, приложенного к эластичному колесу, в действующую на его обод окружную силу определяется радиусом качения без скольжения и не зависит от динамического радиуса колеса.

Анализ влияния на сопротивление качению шин горных велосипедов диаметра колеса, типа местности, массы велосипедиста, давления в шинах и типа подвески приведен в публикации [4]. Аналогичные исследования представлены в работе [5], где показано, что сопротивление качению шин диаметром 26 дюймов больше, чем у 29-дюймовых шин. Результаты испытаний, проведенных для четырех пневматических велосипедных колес разного размера, которые описаны в работе [6], также продемонстрировали, что сопротивление качению уменьшается при увеличении диаметра.

Выполненный в статье [7] анализ показал, что при движении маунтинбайка аэродинамическое сопротивление составляет от 8 до 35 % от суммарных сил сопротивления. В свою очередь сопротивление качению гладких шин оказалось на 20 % меньше, чем у шипованных. В работе [8] описаны эксперименты по сравнению характеристик пяти разных модификаций шин

для маунтинбайка. Показано, что существующие их расчетные модели приводят к некорректной оценке параметров, определяющих сопротивление качению. В статье [9] предложен экспериментальный метод оценки сил сопротивления качению на специальном тренажере, который позволил установить влияние на эти силы давления в шинах.

В работе [10] предложена методика математического моделирования деформирования велосипедного колеса, в которой его обод рассматривается как изгибаемый криволинейный стержень замкнутого профиля и которая, несмотря на введенные упрощения, позволяет получать результаты, близкие к экспериментальным.

В [11] обобщены теоретические и экспериментальные результаты, связанные с изучением сопротивления качению велосипедных колес, и представлены графики, описывающие влияние некоторых параметров на коэффициент сопротивления качению. Здесь также приведен анализ возможных путей снижения затрат энергии на движение велосипеда, включающих, в том числе, изменение формы и размеров поперечного сечения обода и шины.

Целью представленной работы является анализ влияния формы обода велосипеда на сопротивление качению колес велосипеда. Рассматриваются дополнительные аспекты к материалам, изложенным в блоге автора статьи [12].

При движении велосипеда по ровной твердой поверхности на его ходовые свойства значительное влияние оказывает геометрия покрышек – в случаях, если их поверхность не имеет выступов, и при более высоком давлении воздуха в них, деформации оказываются меньшими, что приводит к уменьшению работы сил сопротивления качению и, соответственно, более легкому ходу велосипеда.

Выполненный анализ показывает, что работа сил сопротивления качению также зависит от формы ободов велосипеда – он при прочих равных условиях существенно лучше катит, если ободы колес не одностенные, а двустенные. Такой результат связан с тем, что при меньшем объеме и высоте (расстоянии между поверхностями камеры в радиальном направлении) полости, занимаемой воздухом в камере, увеличиваются показатели ее упругости (способность противостоять уменьшению объема, деформациям). Рассматривая воздух в камере как набор множества пружин, расположенных по окружности обода в радиальном направлении, как это показано на рисунке 1, можно предположить, что в одностенном ободе, где высота полости с воздухом больше, последовательно соединены пружины двустенного, в котором высота полости меньше. Жесткость системы при этом понижается. Снижение жесткости также имеет место при увеличении объема воздуха. При изотермическом процессе увеличение давления в некоторое число раз приводит к уменьшению в такое же число раз объема. В случае большего объема абсолютная величина его изменения увеличивается, как и значение деформации. Работа сил упругости, а следовательно, и сил сопротивления качению будет большей, поскольку она пропорциональна коэффициенту упругости (жесткости) и квадрату деформации.



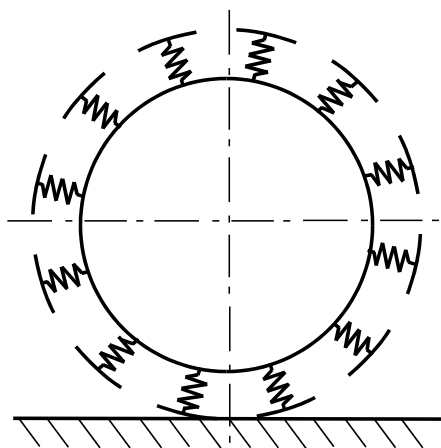


Рисунок 1 – Модель велосипедного колеса, в которой шина представляется набором пружин

Таким образом, чтобы обеспечить уменьшение работы диссипативных сил сопротивления качению следует использовать ободы, способствующие уменьшению объема и высоты воздуха в камере; велосипед в целом при этом станет более жестким (как и при увеличении давления воздуха в шинах) и будет лучше катить по ровной дороге.

Потери энергии в системе «колесо – дорожное полотно» в значительной степени определяются работой диссипативных сил сопротивления качению: чем больше величина этих сил, тем существеннее и потери.

Значения сил сопротивления качению зависят от упругих свойств материалов, из которых изготовлены колеса и дорожное полотно (предполагается, что оно ровное). При увеличении модуля упругости этих материалов упругие деформации сжатия оказываются меньшими, соответственно уменьшаются силы сопротивления качению.

Проведенный анализ показывает, что в зависимости от соотношения между жесткостями колеса и дорожного полотна можно выделить две основные ситуации.

1 Жесткость колеса меньше жесткости дорожного полотна. В таком случае воздух в шине можно рассматривать как совокупность распределенных по поверхности обода (диска) пружин, которые при движении колеса деформируются в радиальном направлении. В соответствии с законом Гука величина деформации обратно пропорциональна коэффициенту жесткости. Как отмечалось выше, увеличение давления воздуха в шине и уменьшение его объема приводят к росту жесткости системы, что, в свою очередь, становится причиной уменьшения работы упругих сил сопротивления качению, а с ней – и снижения потерь энергии.

2 Колесо обладает большей жесткостью по сравнению с дорожным полотном. При такой ситуации уже дорогу можно представить как совокупность пружин, расположенных вдоль линии пути. Наезд колеса на пружину вызывает ее деформацию. Величина суммарной работы сил сопротивления качению, обусловленных деформированием основания, как и в предыдущем случае, оказывается обратно пропорциональной коэффициенту жесткости пружины. На преодоление этой работы затрачивается кинетическая энергия транспортного средства. Следовательно, при ужесточении дорожного покрытия достигается уменьшение потерь энергии.

Таким образом, уменьшению энергетических потерь способствует увеличение жесткости обоих компонентов системы «колесо – дорожное полотно».

Оценим потери энергии, приводящие к дополнительным энергозатратам велосипедиста, в случаях использования колес с одностенным и двустенным ободами.

Для сравнения используем два типа клинчерных ободов примерно одинаковой внутренней ширины (19–20 мм):

1 – двустенный, неглубокий, имеющий сечение, близкое к трубчатому;

2 – одностенный, глубокий, коробчатого сечения.

Радиус колеса  $r = 0,34$  м. Принимаем, что в практически сликовых шинах 622–32 мм давление воздуха составляет 620 кПа. Также предполагаем, что на заднее колесо приходится  $n_1 = 0,6$ , а на переднее –  $n_2 = 0,4$  веса велосипеда с велосипедистом.

Значения сил, нагружающих заднее и переднее колеса, соответственно

$$F_1 = mgn_1 = 80 \cdot 9,8 \cdot 0,6 = 470 \text{ Н}; F_2 = mgn_2 = 80 \cdot 9,8 \cdot 0,4 = 314 \text{ Н},$$

где  $m$  – масса велосипеда с велосипедистом,  $m = 80$  кг;  $g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

В качестве расчетной схемы принимаем модель, представленную на рисунке 1. Считаем, что шина моделируется пружинами, которые располагаются между ободом (диском) и покрышкой. Соответственно их длина равна высоте области, занимаемой в шине воздухом. При принятом значении радиуса колеса длине его окружности  $l = 2,16$  м. Продольный размер пятна контакта при массе велосипедиста с велосипедом  $m = 80$  кг составляет  $x = 0,06$  м. Принимая, что ширина пружины, моделирующей шину, равна  $x$ , получаем, что общее число пружин

$$N = l/x = 2,16/0,06 = 36.$$

Перемещению колеса на расстояние 1 м соответствует его поворот, при котором колесо совершает часть оборота  $f = 1/l = 0,46$  м<sup>-1</sup>. Учитывая, что за один оборот колеса цикл деформирования совершают все пружины, определим среднюю мощность сил сопротивления качению. Результаты расчета для случая движения велосипеда со скоростью  $v = 5,56$  м/с (20 км/ч) сведены

в таблицу 1. Отметим, что в ней в формулах мощности силы сопротивления фигурирует средняя тормозящая сила, которая определяется отношением работы  $A_{ij}N$ , соответствующей однократному деформированию всех пружин колеса, и пройденного за это время пути  $l = 1/f$ .

Таблица 1 – Сравнение характеристик двустенного и одностенного ободов

Характеристика	Формула	Двустенный обод	Одностенный обод
Статический прогиб шины заднего колеса, мм	$h_{1i}$	1,7	2,8
Коэффициент жесткости пружины, кН/м	$k_i = F_1/h_{1i}$	276	168
Статический прогиб шины переднего колеса, мм	$h_{2i}$	1,1	1,9
Работа, затрачиваемая на деформацию пружины заднего колеса, Дж	$A_{1i} = \frac{k_i h_{1i}^2}{2}$	0,40	0,66
Работа, затрачиваемая на деформацию пружины переднего колеса, Дж	$A_{2i} = \frac{k_i h_{2i}^2}{2}$	0,17	0,30
Мощность силы сопротивления заднего колеса, Вт	$P_{1i} = A_{1i} N f \cdot v$	37	61
Мощность силы сопротивления переднего колеса, Вт	$P_{2i} = A_{2i} N f \cdot v$	16	27
Суммарная потеря мощности, Вт	$P_i = P_{1i} + P_{2i}$	53	88
Коэффициент трения качения заднего колеса, мм	$\eta_{1i} = \frac{P_{1i} r}{F_1 v}$	4,8	7,9
Коэффициент трения качения переднего колеса, мм	$\eta_{2i} = \frac{P_{2i} r}{F_2 v}$	3,1	5,3

Представленный расчет показывает, что затраты мощности на качение колеса с одностенным ободом в 1,66 раза больше по сравнению с двустенным. Увеличение скорости движения в рамках рассмотренной модели ведет к прямо пропорциональному увеличению мощности потерь.

Таким образом, оптимальный подбор шины и обода позволяет существенно уменьшить величину сил сопротивления качению при движении по ровной дороге с твердым покрытием. Для снижения потерь энергии движения необходимо повышать жесткость системы «шина – воздух», чему могут способствовать использование обода с неглубоким внутренним профилем, ободных лент большей толщины для уменьшения высоты воздушного промежутка; применение сликовых шин с более упругими боковыми стенками; увеличение давления в шине. При заданной ширине колеса наименьший коэффициент трения качения будет достигаться при использовании самой узкой шины из рекомендуемого диапазона размеров, что соответствует ободу, имеющему наибольшую внутреннюю ширину.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Эволюция колеса / З. А. Кострова [и др.] // Машиностроение и транспорт: теория, технологии, производство. – 2016. – № 2 (113). – С. 121–135.
- 2 Автомобильные шины / В. Л. Бидерман [и др.] – М. : Госхимиздат, 1963. – 384 с.
- 3 **Пожидаев, С. П.** Экспериментальное исследование механической модели эластичного колеса / С. П. Пожидаев, Г. В. Шкаровский // Автомобильный транспорт. – 2019. – Вып. 44. – С. 21–29.
- 4 **Брылев, И. С.** Исследование сопротивления качению двухколесных транспортных средств / И. С. Брылев, С. С. Евтюков // Вестник гражданских инженеров. – 2020. – № 2 (79). – С. 161–167.
- 5 **Steyn, W. J. vdM.** Comparison of tyre rolling resistance for different mountain tyre diameters and surface conditions / W. J. vdM. Steyn, J. Warnich // South African Journal for Research in Sport, Physical Education and Recreation. – 2014. – Vol. 36, is. 2. – P. 179–193.
- 6 Empirical determination of the motion resistance of pneumatic bicycle wheels for on and off-road performance / F. B. Akande [et al.] // African Journal of Agricultural Research. – 2010. – Vol. 5, is. 23. – P. 3322–3332.
- 7 **Bertucci, W. M.** Evaluation of aerodynamic and rolling resistances in mountain-bikes field conditions / W. M. Bertucci, S. Rogier, R. F. Reiser II // Journal of Sports Sciences. – 2013. – Vol. 31, is. 14. – P. 1606–1613.
- 8 **Macdermid, P. W.** The influence of tyre characteristics on measures of rolling performance during cross-country mountain biking conditions / P. W. Macdermid, P. W. Fink, S. R. Stannard // Journal of Sports Sciences. – 2014. – Vol. 33, is. 3. – P. 1–9.
- 9 A new method to measure rolling resistance in treadmill cycling / Y. Henchoz [et al.] // Journal of Sports Sciences. – 2010. – Vol. 28, is. 10. – P. 1043–1046.
- 10 **MontyPythagoras.** Calculation of rim deflection and spoke tension on a bicycle wheel conditions / MontyPythagoras // Matroids Matheplanet [Electronic resource]. – Mode of access : <https://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=1663>. – Date of access : 05.09.2022.
- 11 **Wilson, D. G.** *Bicycling Science, Fourth Edition* / D. G. Wilson, T. Schmidt. – Cambridge, MA : MIT Press, 2020. – 568 p.
- 12 **Pranevich, I.** Оценка потерь энергии в системах «колесо – дорожное полотно» [Электронный ресурс] / I. Pranevich. – Режим доступа : <https://forum.velomania.ru/blog.php?b=11252>. – Дата доступа : 05.09.2022.
- 13 **Селифонов, В. В.** Теория автомобиля : учеб. пособие / В. В. Селифонов, А. Ш. Хусаинов, В. В. Ломакин. – М. : МГТУ «МАМИ», 2007. – 102 с.

*I. I. PRANEVICH*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## INFLUENCE OF WHEEL RIM SHAPE ON BICYCLE DRIVING PERFORMANCE

An analysis of the rolling resistance forces acting a bicycle wheel is performed considering it as a hard disk with springs attached to its rim at equal distances from each other. The results of comparing the values of these forces for the cases of double-walled and single-walled rims are presented.

**Keywords:** bicycle, rolling resistance, wheel rim.

Получено 08.10.2022

УДК 534.113:517.95

*Е. В. РОЖКОВА*

*Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент,  
Узбекистан*

## **ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ В ОБОБЩЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ**

Рассмотрено полное уравнение второго порядка колебаний стержней, учитывающее внутреннее сопротивление, возникающее вследствие диссипации внутренней энергии, и внешнее сопротивление упругой среды, ведущее к появлению сил трения. Решение выполнено с применением нового рекуррентно-операторного метода, позволяющего решать дифференциальные уравнения любых типов, имеющие произвольную длину и произвольный порядок. Вместо корней характеристических уравнений решение сводится к получению рекуррентного соотношения. Представлены примеры получаемых выражений для общего и некоторых частных случаев.

**Ключевые слова:** рекуррентно-операторный метод, диссипация, внешнее сопротивление, упругое основание, уравнение Лапласа, обобщенное уравнение.

В литературе с целью учета особенностей внешних воздействий и механических характеристик материала при анализе колебаний стержней в уравнения вводятся дополнительные члены, учитывающие влияние таких факторов, как диссипация внутренней энергии, внешнее сопротивление среды, демпфирование, инерция поворота и сдвига, упругое основание и др. Однако комплексный учет всех факторов еще не проводился в связи со сложностью решения такой задачи. В монографии [1] приводится оценка относительного веса отдельных членов уравнения колебаний и показана необходимость аккуратного подхода к упрощениям при анализе динамического поведения стержневых систем. В связи с этим проблема получения решений полных уравнений колебаний стержней остается актуальной.

Обычно при решении усложненных дифференциальных уравнений колебаний стержней используются такие классические методы, как операционное исчисление, косинус-преобразование Фурье, вариационные методы [2]. Проведенные исследования показали, что в таком случае оказывается эффективным сравнительно новый рекуррентно-операторный метод решения произвольных линейных дифференциальных уравнений, основанный на забытом и не до конца разработанном методе неопределенных коэффициентов, который расширен на уравнения в частных производных [3–5]. В настоящее время с применением рекуррентно-операторного метода получены решения ряда задач гидромеханики и колебаний упругих тел [6–9]. В данной статье обобщаются результаты, полученные ранее в работах [5, 10–12].

Рассмотрим уравнение продольных колебаний стержня постоянного поперечного сечения в обобщенной сопротивляющейся среде:

$$(\partial_x^2 + a_{21}\partial_x^2\partial_t + a_{02}\partial_t^2 + a_{10}\partial_x + a_{01}\partial_t + a_{00})u(x,t) = 0, \quad (1)$$

где  $\partial_s^k = \partial^k / \partial s^k$ ,  $a_{ij}$  – постоянные коэффициенты, у которых первый индекс показывает порядок производной по переменной  $x$ , второй – по переменной  $t$ .

Здесь полагается, что все слагаемые уравнения разделены на коэффициент при старшей производной  $a_{20}$ . В представленной форме оно включает в себя все классические и обобщенные уравнения теплопроводности, диффузии, Лапласа и волновые уравнения.

Обычно для получения решения дифференциальных уравнений вначале предлагается предполагаемый вид решения, в котором содержатся элементарные аналитические (представимые в виде степенных рядов) функции и содержатся неизвестные параметры, определяемые из условия удовлетворения уравнению и свободные элементы, предназначенные для обеспечения граничных условий. В этом случае очень важно предугадать, в каком виде следует искать решение, которое способно удовлетворить данному уравнению. В рекуррентно-операторном методе для решения линейных дифференциальных уравнений также предлагается искать решение сразу в виде рядов особого вида. Например, для уравнения (1) имеем

$$u_r(g_r(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{i,j} x^{i+r} \partial_t^j(g_r(t)), \quad r = 0, 1, \quad (2)$$

где  $Q_{i,j}$  – постоянные коэффициенты, определяемые из уравнения (1);  $g_r(t)$  – аналитические функции, выбираемые по виду задаваемых граничных условий;  $r$  – параметр, связанный с количеством частных решений, совпадающим с порядком уравнения. Здесь и далее используется обозначение  $x^{k!} = x^k / k!$ , называемое «факториальной степенью».

Выражение (2) можно считать дифференциальным оператором бесконечно высокого порядка, действующим на функцию  $g_r(t)$  и преобразующим ее в решение уравнения. Подстановка (2) в (1) приводит к рекуррентному соотношению для определения постоянных коэффициентов  $Q(i, j)$ :

$$Q_{i,j} = -a_{21}Q_{i,j-1} - a_{02}Q_{i-2,j-2} - a_{10}Q_{i-1,j} - a_{01}Q_{i-2,j-1} - a_{00}Q_{i-2,j}$$

при начальных условиях  $Q_{00} = 1$ ,  $Q_{i,j} = 0$  при  $i < 0$  или при  $j < 0$ .

Общее решение этого рекуррентного соотношения, полученное методом полной математической индукции, принимает вид

$$Q_{i,j} = \sum_{l_{22}=0}^{\alpha_{22}} \sum_{l_{21}=0}^{\alpha_{21}} \sum_{l_{20}=0}^{\alpha_{20}} (-1)^\beta \beta! \frac{a_{02}^{l_{22}} a_{01}^{l_{21}} a_{00}^{l_{20}}}{l_{22}! l_{21}! l_{20}!} \frac{a_{10}^{i-\gamma_{10}}}{(i-\gamma_{10})!} \frac{a_{21}^{j-\gamma_{01}}}{(j-\gamma_{01})!};$$

$$\beta = i + j - (3l_{22} + 2l_{21} + l_{20}); \quad \gamma_{10} = 2(l_{22} + l_{21} + l_{20}); \quad \gamma_{01} = 2l_{22} + l_{21};$$

$$\alpha_{22} = \min \left( \left[ \frac{i}{2} \right], \left[ \frac{j}{2} \right] \right); \alpha_{21} = \min \left( \left[ \frac{i-2l_{22}}{2} \right], \left[ \frac{j-2l_{22}}{1} \right] \right); \alpha_{20} = \left[ \frac{i-2(l_{22}+l_{21})}{2} \right].$$

Подставляя  $Q_{i,j}$  в (1), получим

$$\begin{aligned} u(g_r) = & x^{r!} [g_r - a_{21}g'_r + a_{21}^2g''_r - a_{21}^3g'''_r + a_{21}^4g^{IV}_r - \dots] + \\ & + x^{1+r!} a_{10} [-g_r + 2a_{21}g'_r - 3a_{21}^2g''_r + 4a_{21}^3g'''_r - \dots] + \\ & + x^{2+r} [(a_{10}^2 - a_{00})g_r + (-3a_{21}a_{10}^2 + 2a_{21}a_{00} - a_{01})g'_r + (6a_{21}^2a_{10}^2 - 3a_{21}^2a_{00} + 2a_{21}a_{01} - \\ & - a_{02})g''_r + (-10a_{21}^3a_{10}^2 + 4a_{21}^3a_{00} - 3a_{21}^2a_{01} + 2a_{21}a_{02})g'''_r + (15a_{21}^4a_{10}^2 - 5a_{21}^4a_{00} + \\ & + 4a_{21}^3a_{01} - 3a_{21}^2a_{02})g^{IV}_r + (-21a_{21}^5a_{10}^2 + 6a_{21}^5a_{00} - 5a_{21}^4a_{01} + 4a_{21}^3a_{02})g^V_r + \dots] + \quad (3) \\ & + x^{3+r} [(-a_{10}^3 + 2a_{10}a_{00})g_r + (4a_{21}a_{10}^3 - 6a_{21}a_{10}a_{00} + 2a_{10}a_{01})g'_r + \\ & + (12a_{21}^2a_{10}a_{00} - 10a_{21}^2a_{10}^3 - 6a_{21}a_{10}a_{01} + 2a_{10}a_{02})g''_r + \dots] + \\ & + x^{4+r} [(a_{10}^4 - 3a_{10}^2a_{00} + a_{00}^2)g_r + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Для частного случая, полагая  $a_{10} = a_{00} = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} u(g_r) = & x^{r!} [g_r - a_{21}g'_r + a_{21}^2g''_r - a_{21}^3g'''_r + a_{21}^4g^{IV}_r - a_{21}^5g^V_r + \dots] + \\ & + x^{2+r!} [-a_{01}g'_r + (2a_{21}a_{01} - a_{02})g''_r + (-3a_{21}^2a_{01} + 2a_{21}a_{02})g'''_r + \\ & + (4a_{21}^3a_{01} - 3a_{21}^2a_{02})g^{IV}_r + \dots] + \\ & + x^{4+r!} [a_{01}^2g''_r + (-3a_{21}a_{01}^2 + 2a_{02}a_{01})g'''_r + (6a_{21}^2a_{01}^2 - 6a_{21}a_{02}a_{01} + a_{02}^2)g^{IV}_r + \dots] + \\ & + x^{6+r!} [-a_{01}^3g'''_r + (4a_{21}a_{01}^3 - 3a_{02}a_{01}^2)g^{IV}_r + \dots] + \\ & + x^{8+r!} [a_{01}^4g^{IV}_r + \dots] + \dots, \quad r = 0, 1 \end{aligned}$$

Если формально вместо функций  $g_r(t)$  принять  $g_r = t^s / s!$ ,  $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то ряд будет обрываться на  $(s+1)$ -й производной от функции  $g_r(t)$ , и получим точные полиномиальные решения однородного уравнения (1).

В частном случае однородного уравнения

$$(\partial_x^2 + a_{21}\partial_x^2\partial_t + a_{02}\partial_t^2)u(x,t) = 0 \quad (a_{21} = h = \alpha / EF; \quad a_{02} = -\mu = -\rho / E),$$

где  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий внутреннее трение в материале;  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала;  $F$  – площадь поперечного сечения стержня, решение удобно искать в виде

$$\begin{aligned} u_r(g_r) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{i,j} x^{2i+r!} \partial_t^{i+j} g_r(t), \quad r = 0, 1; \\ Q_{i,j} = & -hQ_{i,j-1} + \mu Q_{i-1,j-1} = (-1)^{i+j} \binom{j}{i} h^{j-i} \mu^i. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$u_r(g_r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \sum_{i=0}^j (-1)^i \frac{j}{i!(j-i)!} h^{j-i} \mu^i x^{2i+r} \partial_t^{i+j} g_r(t), \quad r = 0, 1.$$

Так, при  $g_r(t) = t^{4!}$  имеем полиномиальное решение

$$u_r(x, t^{4!}) = x^{r!} (t^{4!} - h t^{3!} + h^2 t^{2!} - h^3 t + h^4) + x^{2+r!} (-\mu t^{2!} - 2h\mu t + 3h^2\mu) + x^{4+r!} (\mu^2).$$

Рассмотрим простейшие уравнения, решения которых могут быть представлены в виде одной суммы. Так, в случае волнового уравнения

$$(\partial_x^2 - a_{02} \partial_t^2) u(x, t) = -f(x, t), \quad (4)$$

где  $a_{02} = 1/a_{20}^*$ , решение однородного уравнения (4)

$$u_r(x, g_r) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{2i} x^{2i+r} \partial_t^{2i} (g_r); \quad r = 0, 1,$$

где  $Q_{2i} = a_{02} Q_{2i-2} = a_{02}^i$ .

Если положить  $g_0(t) = \cos \omega t$ ;  $g_1(t) = \sin \omega t$ , то получим решение с разделяющимися переменными:

$$u_0(x, g_0) = g_0(t) \cos(\omega \sqrt{a_{02}} x), \quad u_1(x, g_1) = g_1(t) \sin(\omega \sqrt{a_{02}} x).$$

Линейными комбинациями этих стоячих волн получаем бегущие волны:

$$u_0(x, g_0) \pm u_1(x, g_1) = \cos \omega(t \pm \sqrt{a_{02}} x), \quad u_1(x, g_0) \pm u_0(x, g_1) = \sin \omega(t \pm \sqrt{a_{02}} x).$$

Частным решением уравнения (1) будет

$$\tilde{u}(-f) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{2i} \partial_x^{-(2i+2)} \partial_t^{2i} (-f).$$

Например, при  $f = x^{2!} t^{5!}$  получаем

$$\begin{aligned} \tilde{u}(-f) &= - \left[ Q_0 \int_0^x \int_0^x f(x, t) dx^2 + Q_2 \int_0^x \int_0^x \partial_t^2 (f(x, t)) dx^4 + \dots \right] = \\ &= - \left[ x^{4!} t^{5!} + a_{02} x^{6!} t^{3!} + a_{02}^2 x^{8!} t \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим классическое уравнение диффузии и теплопроводности:

$$(a \partial_x^2 - \partial_t) T(x, t) = 0,$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Его решение ищем в виде

$$T_r(x, g_r(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \frac{t^{i+r}}{(i+r)!} \partial_x^{2i} g(x), \quad r = 0, 1. \quad (5)$$



Здесь коэффициенты  $Q_i$  определяются из рекуррентного соотношения

$$Q_i = aQ_{i-1} = a^i.$$

Полагая в (5)  $g_1 = \sin bx$ ;  $g_2 = \cos bx$ , находим

$$T_0(g_1) = \exp(-ab^2t) \sin bx; \quad T_0(g_2) = \exp(-ab^2t) \cos bx;$$

$$T_1(g_1) = (1 - \exp(-ab^2t)) \cos bx; \quad T_1(g_2) = (1 - \exp(-ab^2t)) \sin bx.$$

Принимая далее  $g_3 = e^{-at}$ ,  $g_4 = e^{at}$ , получим

$$T_0(g_3) = e^{at-bx}, \quad T_1(g_4) = e^{at+bx}$$

(бегущие тепловые волны в прямом и обратном направлении). А если принять  $g(x) = x^4 / 4!$ , то найдем полиномиальное решение

$$T = \frac{x^4}{4!} + a \frac{t x^2}{2!} + a^2 \frac{t^2}{2!}$$

уравнения теплопроводности.

**Заключение.** Представлены решения обобщенного уравнения продольных колебаний стержня с учетом большого количества факторов. Полученные выражения включают только коэффициенты уравнения и не требуют определения корней характеристического уравнения, что очень важно для исследования влияния каждого слагаемого уравнения колебаний.

Общие решения, полученные рекуррентно-операторным методом, выражаются через произвольные функции, число которых совпадает с числом граничных и начальных условий, из которых они определяются. Выбор произвольных функций из различных классов элементарных и специальных функций позволяет получить полный набор частных решений в тех же классах функций. Коэффициенты в выражениях, полученных линейной комбинацией частных решений, определяются из системы алгебраических уравнений, которая записывается на основе граничных условий.

Частные решения неоднородных уравнений строятся на основе нулевых начальных условий по выделенной переменной и не влияют на определение названных выше произвольных функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Филиппов, А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.

2 Xu, D. An accurate and efficient series solution for the longitudinal vibration of elastically restrained rods with arbitrarily variable cross sections / D. Xu, J. Du, Z. Liu // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. – 2019. – Vol. 38, no. 2. – P. 403–414.

3 Фролов, В. Н. Специальные классы функций в анизотропной теории упругости / В. Н. Фролов. – Ташкент : Фан, 1981. – 221 с.

4 **Спиваков, Ю. Л.** Специальные классы решений линейных дифференциальных уравнений и их приложения к анизотропной теории упругости / Ю. Л. Спиваков. – Ташкент : Фан, 1986. – 186 с.

5 **Рожкова, Е. В.** Рекуррентно-операторный метод в задачах о колебании стержневых систем / Е. В. Рожкова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 6. – С. 124–138.

6 **Pirniyazova, P. M.** Analytical solution of diffusion problems in the simulation of impurity diffusion and obtaining an exact solution / P. M. Pirniyazova // Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. – 2018. – No. 1–2. – P. 32–36.

7 **Окбоева, Н. У.** О решении уравнений температурно-стратифицированных течений рекуррентно операторным методом / Н. У. Окбоева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международ. конф. им. А. Ф. Терпугова. Ч. 1. – Томск : Изд-во науч.-техн. литературы, 2019. – С. 295–300.

8 **Pirniyazova, P. M.** Modelling of a three-dimensional problem of distribution of harmful impurity in the river a recurrently-operational method / P. M. Pirniyazova // Евразийский союз ученых. – 2020. – № 6–1 (75). – С. 8–12.

9 **Abjalilov, S. X.** On modeling of mechanical vibrations of orthotropic boards in electronic devices / S. X. Abjalilov, D. N. Ashurova, O. A. Begmurodov // *Academia: An International Multidisciplinary Research Journal*. – 2021. – Vol. 11, is. 4. – P. 1263–1270.

10 **Рожкова, Е. В.** Решение обобщённого уравнения колебания стержней рекуррентно-операторным методом / Е. В. Рожкова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2018. – № 5. – С. 90–105.

11 **Рожкова, Е. В.** Расчет колебаний вязкоупругих балок рекуррентно-операторным методом / Е. В. Рожкова // *Узбекский журнал «Проблемы механики»*, 2013. – № 3–4. – С. 20–23.

12 **Рожкова, Е. В.** Решение уравнений поперечных и продольных колебаний стержня с учетом диссипации внутренней энергии рекуррентно-операторным методом / Е. В. Рожкова, Н. Б. Рузиева // *Austria Science*. – 2018. – № 13. – С. 33–35.

*E. V. ROJKOVA*

*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

## **ROD LONGITUDINAL OSCILLATIONS IN THE GENERALIZED ELASTIC MEDIUM**

The complete equation of the second order of the rods oscillations is considered, it takes into account the internal resistance arising due to the internal energy dissipation and the elastic medium external resistance, leading to the appearance of friction forces. The solution is performed using a new recurrent-operator method, it allows to solve differential equations of any type with arbitrary length and order. Instead of the roots of the characteristic equations, the solution is reduced to a recurrent relation obtaining. Examples of obtained expressions for the general and some particular cases are presented.

**Keywords:** recurrent operator method, dissipation, external resistance, elastic foundation, Laplace equation, generalized equation.

Получено 15.11.2022

УДК 629.4.017

П. К. РУДОВ, А. В. ВОРОЖУН

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОРМОЗНОГО ПУТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОЕЗДА ПО ПЕРЕМЕННОМУ ПРОФИЛЮ**

Рассматривается процесс торможения поезда на участках пути с переменным профилем. Выполнена оценка длины тормозного пути пассажирского поезда, полученного путем суммирования по интервалам времени и скорости, западноевропейской методике и на основе модели поезда как системы твердых тел – вагонов, взаимодействующих между собой.

**Ключевые слова:** экстренное торможение, модель поезда, тормозной путь, переменный уклон.

Наличие высокоэффективных тормозов поезда является определяющим фактором для обеспечения безопасности движения на железнодорожном транспорте. Одним из показателей их качества является длина тормозного пути, то есть расстояние, проходимое поездом до полной его остановки с момента перевода ручки крана машиниста в тормозное положение. Время торможения поезда в соответствии с [1–3] условно разбивается на два интервала: подготовки тормозов к действию (считают, что в это время тормозные силы не действуют) и собственно торможения (при полной силе нажатия тормозных колодок на колесные пары). Для организации движения поездов требуется знать длину тормозного пути, которая может быть обеспечена существующим тормозным оборудованием поезда на рассматриваемом участке пути.

Тормозные расчеты, принятые на железных дорогах СНГ, основаны на применении уравнения движения поезда для тормозного режима

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\zeta}{1+\gamma}(b_{\tau} + w_0 \pm w_i + w_r), \quad (1)$$

где  $a$  – ускорение поезда,  $m/c^2$ ;  $\zeta$  – ускорение (замедление) поезда,  $m/c^2$ , при действии удельной силы, равной 1 Н/т;  $\gamma$  – коэффициент, который учитывает инерцию вращающихся масс, для локомотива  $\gamma_{\text{л}} = 0,115$ , для пассажирских вагонов –  $\gamma_{\text{в}} = 0,042$  [4, 5];  $b_{\tau}$  – удельная тормозная сила, Н/т;  $w_0$ ,  $w_i$ ,  $w_r$  – удельные силы сопротивления: основного, от уклона и кривизны пути, Н/т.

Знак «+» как перед силой сопротивления от уклона, так и перед уклоном  $i$  принимается в случае движения поезда на подъем, «–» – на спуск.

Поезд при расчетах по формуле (1) принимается за материальную точку. При этом вычисления проводятся путем рассмотрения интервалов времени или скорости [3, 6].

*Расчет тормозного пути по интервалам времени.* В этом случае время торможения поезда условно разбивается на интервалы времени  $\Delta t$ . Изменение скорости  $\Delta v$  за этот промежуток времени определяется выражением

$$\Delta v = -\frac{\zeta}{1+\gamma}(b_r + w_o \pm w_i)\Delta t.$$

Если в начале интервала скорость равна  $v_n$ , то путь, пройденный за время  $\Delta t$ ,

$$\Delta s = (v_n + 0,5\Delta v)\Delta t.$$

Данный подход позволяет легко учесть нарастание тормозной силы за период наполнения тормозных цилиндров, для чего используются эмпирические формулы, приведенные в [1, 2].

*Расчет тормозного пути по интервалам скорости.* Он выполняется путем преобразования уравнения (1) к виду

$$v dv = -\frac{\zeta}{1+\gamma}(b_r + w_o \pm w_i + w_r) ds,$$

где  $ds$  – приращение пути, м.

Тормозной путь определяют численным интегрированием по формуле

$$s_d = \frac{0,5}{\zeta_1} \sum_{n=1}^N \frac{v_n^2 - v_{n+1}^2}{b_r + w_r \pm w_i + w_r}.$$

Здесь  $\zeta_1$  – ускорение при действии единичной тормозной силы, определенное с учетом инерции вращающихся масс;  $N$  – число интервалов скорости.

Чтобы получить достаточную точность расчета, рекомендуется принимать интервалы изменения скорости  $(v_n - v_{n+1}) = 2 \dots 3$  м/с.

*Расчет по методике, применяемой в Западной Европе.* На западноевропейских железных дорогах эффективность тормозов определяется так называемой тормозной массой, выраженной в тоннах, значение которой для используемого режима торможения указывается на щитках рукоятки режимного переключателя [7, с. 132; 8]. Длина тормозного пути пассажирских поездов в таком случае определяется по формуле

$$s = \frac{\varphi v^2}{1,09375 \cdot \lambda + 0,127 - 0,235 \cdot i \cdot \varphi},$$

где  $\varphi$  – эмпирический коэффициент, который зависит от скорости и типа тормоза;  $\lambda$  – коэффициент, учитывающий режим торможения в соответствии с процентом тормозной массы поезда;  $i$  – расчетная величина уклона пути, которая зависит как от фактического уклона пути, так и от скорости [9, 10].

Поезд при торможении может находиться на участках с различным уклоном (рисунок 1). В таких случаях для упрощения расчетов длины тормозного пути профиль спрямляют, а уклон спрямленного участка [3]

$$i_c = (\sum i_{nj} l_{nj}) / l,$$

где  $i_{nj}$ ,  $l_{nj}$  – соответственно уклон и длина  $j$ -го элемента профиля, входящего в спрямленный участок пути;  $l$  – длина спрямленного участка.

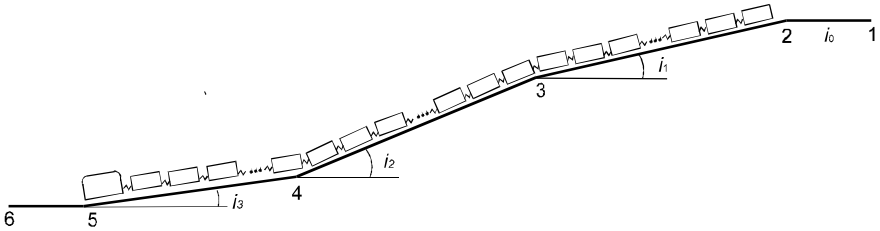


Рисунок 1 – Схема расположения поезда на пути с заданным профилем

Авторами работы [4] поезд также рассматривается в виде непрерывного и нерастяжимого гибкого стержня с сосредоточенными массами, движущийся по участку пути с переменным профилем. В работах [11, 12] анализируется процесс торможения поезда, модель которого представляет собой систему твердых тел, соединенных в продольном направлении упругими связями.

Целью представленной работы является сравнение результатов определения тормозного пути с помощью представленных выше традиционных подходов и на основе моделирования поезда системой твердых тел.

*Модель поезда, как механической системы со многими степенями свободы.* Система дифференциальных уравнений, отражающая движение локомотива и  $n$  вагонов поезда (см. рисунок 1) вдоль направляющего пути имеет вид

$$\left. \begin{aligned} m_{\text{л}} \ddot{x}_{\text{л}} - R_{\text{л}} + B_{\text{л}} + W_{\text{ол}} + W_{\text{ил}} &= 0; \\ m_{\text{в}_1} \ddot{x}_{\text{в}_1} + R_{\text{л}} - R_{\text{в}_1} + B_{\text{в}_1} + W_{\text{ов}_1} + W_{\text{ив}_1} &= 0; \\ \dots & \\ m_{\text{в}_j} \ddot{x}_{\text{в}_j} - R_{\text{в}_j} + R_{\text{в}_{j+1}} + B_{\text{в}_j} + W_{\text{ов}_j} + W_{\text{ив}_j} &= 0; \\ \dots & \\ m_{\text{в}_n} \ddot{x}_{\text{в}_n} + R_{\text{в}_n} + B_{\text{в}_n} + W_{\text{ов}_n} + W_{\text{ив}_n} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $m_{\text{л}}$ ,  $m_{\text{в}_j}$  – масса;  $\ddot{x}_{\text{л}}$ ,  $\ddot{x}_{\text{в}_j}$  – продольное ускорение;  $R_{\text{л}}$ ,  $R_{\text{в}_j}$  – силы в междувагонных связях локомотива и хвоста  $j$ -го вагона;  $B_{\text{л}}$ ,  $B_{\text{в}_j}$  – сила торможения;  $W_{\text{ол}}$ ,  $W_{\text{ов}_j}$  – сила основного сопротивления движению;  $W_{\text{ил}}$ ,  $W_{\text{ив}_j}$  – силы от уклона пути. Индекс «л» относится к локомотиву, «в $j$ » –  $j$ -му вагону.

Сила торможения определяется выражением

$$B = zP\varphi_{\text{кр}},$$

где  $z$  – число тормозных осей локомотива (вагона);  $P$  – расчетное нажатие тормозных колодок на ось, которое для локомотива принимается 120 кН, а

для пассажирских вагонов зависит от массы тары и составляет 80–100 кН [4] (его увеличивают на 30 % в случае применения композиционных колодок при скоростях до 160 км/ч);  $\varphi_{кр}$  – расчетный коэффициент трения, который для чугунных тормозных колодок определяется выражением

$$\varphi_{кр} = 0,27 \frac{v + 100}{5v + 100} .$$

Здесь скорость движения  $v$  в км/ч.

Сила основного сопротивления движению локомотива (вагона):

$$W = mgw ,$$

где  $m$  – масса, т;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $w$  – удельная сила сопротивления движению локомотива (вагона), Н/т, которую принимают:

– для локомотива на холостом ходу

$$w = 24 + 0,11v + 0,0035v^2 ;$$

– для пассажирских вагонов

$$w = 12 + 0,12v + 0,002v^2 .$$

Сила локомотива (вагона) от уклона пути

$$W_i = mgi ,$$

Если процесс торможения поезда начинается на участке с изменяющимся уклоном  $i(x)$  (см. рисунок 1), то логическое выражение, определяющее его зависимость от пройденного пути, имеет вид

$$i(x) = \text{if} \left[ x < l_{1-2}, i_1, \text{if} \left[ x < (l_{1-2} + l_{2-3}), i_2, \text{if} \left[ x < (l_{1-2} + l_{2-3} + l_{3-4}), i_3, \text{if} \left[ x < (l_{1-2} + l_{2-3} + l_{3-4} + l_{4-5}), i_4, i_5 \right] \right] \right] \right],$$

где  $l_{1-2}, l_{2-3}, \dots, l_{4-5}$  – длина соответствующего участка пути;  $i_1, i_2, \dots, i_5$  – его уклон.

*Пример расчета.* Рассмотрено экстренное торможение поезда на тепловозной тяге, включающего 20 четырехосных пассажирских вагонов. Исползованы следующие исходные данные:  $m_{л} = 136$  т;  $m_{в1} = \dots = m_{в12} = 58$  т;  $m_{в13} = \dots = m_{в14} = 57$  т;  $m_{в15} = \dots = m_{в18} = 55$  т;  $m_{в19} = m_{в20} = 60$  т;  $i_0 = 0$ ;  $i_1 = 0,006$ ;  $i_2 = 0,010$ ;  $i_3 = 0,002$ ;  $l_{1-2} = l_{2-3} = l_{3-4} = l_{4-5} = 2$  км; начальная скорость  $v_0 = 160$  км/ч.

Результаты определения тормозного пути поезда рассмотренными выше способами в пределах участков с постоянным уклоном представлены в таблице 1. Они показывают, что значения, полученные с применением модели поезда как системы твердых тел незначительно отличаются от результатов расчетов по методам интервалов времени ( $\Delta t = 1$  с) и интервалов скорости ( $\Delta v = 10$  км/ч). В то же время тормозной путь, найденный по западноевропейской методике, оказался значительно меньшим. Самое значительное различие (почти 6 %) проявилось при наибольшем уклоне пути.

Таблица 1 – Длина тормозного пути поезда

Уча- сток пути	Длина участка, м	Уклон	Тормозной путь, м			
			по интервалам времени	по интервалам скорости	по модели системы тел	по западно- европейской методике
1 – 2	2000	0	1321	1315	1316	1292
2 – 3	2000	0,006	1429	1423	1424	1391
3 – 4	2000	0,010	1512	1506	1506	1422
4 – 5	2000	0,002	1355	1349	1350	1326
5 – 6	2000	0	1321	1315	1316	1292

Отметим, что при экстренном торможении со скорости 160 км/ч на уклоне до  $-0,006$  по нормативам тормозной путь должен составлять не более 1600 м.

Результаты расчетов показали, что на длину тормозного пути поезда оказывает существенное влияние расстояние  $L$  от головы локомотива до точек 3, 4, 5 в момент начала торможения. Соответствующие графики представлены на рисунке 2. Наиболее существенно это влияние при значительном изменении уклона пути (кривые  $a$  и  $b$ ). На участках с малыми уклонами (кривая  $в$ ) такое изменение не столь велико.

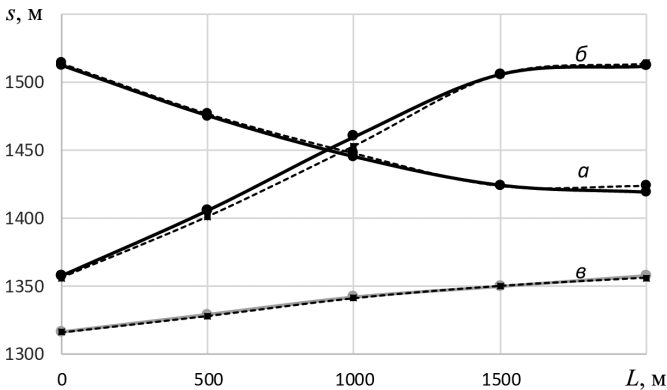


Рисунок 2 – Зависимости тормозного пути  $s$  от расстояния  $L$  до места изменения профиля пути:

$a$  – торможение осуществляется перед точкой 3;  $b$  – перед точкой 4;  $в$  – перед точкой 5

Таким образом, результаты определения тормозного пути поезда, рассчитанные по интервалам скорости и времени при использовании спрямления профиля участков дороги, а также методом, предполагающим рассмотрение поезда как системы твердых тел, оказались примерно одинаковыми. Расхождение значений, как правило, не превышает 10 м. При необходимости получения результатов с высокой точностью целесообразно вести расчет, рассматривая поезд как систему твердых тел.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Методические указания по выполнению тяговых расчетов. – Введ. 11.11.2021, приказ № 949НЗ. – Минск : Белорусская железная дорога, 2021. – 265 с.

2 **Гребенюк, П. Т.** Правила тормозных расчетов / П. Т. Гребенюк. – М. : Интекст, 2004. – 112 с.

3 **Галай, Э. И.** Тормозные системы железнодорожного транспорта. Расчет пневматических тормозов / Э. И. Галай, Е. Э. Галай, П. К. Рудов. – Гомель : БелГУТ, 2014. – 271 с.

4 **Вершинский, С. В.** Динамика вагонов / С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, В. Д. Хусидов. – М. : Транспорт, 1991. – 360 с.

5 ГОСТ 33597–2015. Тормозные системы железнодорожного подвижного состава. Методы испытаний. – Введ. 2016–09–01. – Изд. офиц. – М. : Стандартиформ, 2019. – 28 с.

6 **Рудов, П. К.** Расчет тормозов вагонов : уч.- метод. пособие по курсовому проектированию / П. К. Рудов. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 90 с.

7 **Гребенюк, П. Т.** Тяговые расчеты: справочник / П. Т. Гребенюк, А. Н. Долганов, А. И. Скворцова. – М. : Транспорт, 1987. – 272 с.

8 **Галай, Е. Э.** Анализ метода оценки обеспеченности грузового поезда тормозами на западноевропейских железных дорогах / Е. Э. Галай // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2020. – № 2. – С. 49–51.

9 **Bureika, G.** Research on the compatibility of the calculation methods of rolling-stock brakes / G. Bureika, S. Mikalunas // Transport. – 2008. – Vol. 23, is. 4. – P. 351–355.

10 **Mickoski, H.** Estimation and analysis of various influential factors in the braking process of rail vehicles / H. Mickoski, M. Djidrov, I. Mickoski // Vehicle System Dynamics. – 2021. – Vol. 59, is. 1. – P. 1–16.

11 **Ворожун, И. А.** Моделирование взаимодействия ярусов груза и платформы при торможении поезда / И. А. Ворожун, А. В. Шилович // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 2. – С. 52–58.

12 **Varazhun, I.** Determination of Longitudinal Forces in the Cars Automatic Couplers at Train Electrodynamic Braking / I. Varazhun, A. Shimanovsky, A. Zavarotny // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 134. – P. 415–421.

13 **Shimanovsky, A. O.** Research of the modern absorbing apparatus power characteristics influence on the freight train inter-car forces / A. O. Shimanovsky, P. A. Sakharau, M. G. Kuzniatsova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 985. – Article 012027. – 7 p.

*P. K. RUDAU, A. U. VARAZHUN*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## COMPARISON OF METHODS FOR THE BRAKE DISTANCE DETERMINING AT TRAIN MOVEMENT ALONG A VARIABLE PROFILE

The process of train braking on the track sections with a variable profile is considered. There is estimated the braking distance length for a passenger train, obtained by summing up over time and speed intervals, using the Western European method and based on the model of the train as a system of solid bodies – cars interacting with each other.

**Keywords:** emergency braking, train model, stopping distance, variable slope.

Получено 15.09.2022



УДК 691-419:539.371

В. С. САЛИЦКИЙ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИЗГИБ ЗАЩЕМЛЁННОЙ ПО КОНТУРУ  
КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Рассмотрено деформирование круговой симметричной по толщине пятислойной пластины в случае действия равномерно распределенной нагрузки. Предполагается, что для тонких внешних и внутренних несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. Сравнительно толстый заполнитель деформируется в соответствии с гипотезой Тимошенко. При выводе уравнений равновесия вариационным методом Лагранжа принята во внимание работа тангенциальных напряжений в заполнителе. Проведена численная апробация полученного аналитического решения.

**Ключевые слова:** пятислойная круговая пластина, изгиб, аналитическое решение.

**Введение.** Разработка методов решения новых краевых задач о деформировании неоднородных элементов конструкций представляет значительную актуальность в связи с их широким применением в практике строительства и технике. В книгах [1–4] представлены теория и механико-математические модели, описывающие деформирование трехслойных стержней, пластин и оболочек. Публикации [5, 6] посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных круглых пластин с легким сжимаемым заполнителем. В статьях [7, 8] рассмотрен изгиб трехслойных пластин, расположенных на основании Пастернака. Неосесимметричное деформирование трехслойных пластин исследовано в работе [9]. Изгиб трехслойных пластин в тепловом и нейтронном потоках анализируется в статьях [10, 11].

В статьях [12, 13] представлены обзоры литературных источников о деформировании многослойных панелей, в которых использованы различные аналитические и конечно-элементные модели. В работах [14–18] приведены результаты исследований статики и колебаний прямоугольных пятислойных пластин. Имеется лишь несколько зарубежных публикаций об анализе напряженно-деформированного состояния пятислойных пластин круговой и кольцеобразной формы, выполненном с применением различных асимптотических теорий [19–21].

Постановка краевой задачи о динамическом деформировании пятислойной круговой пластины приведена в [22]. Здесь на основе аналогичных кинематических гипотез рассмотрен изгиб упругой симметричной по толщине пластины с жесткими заполнителями, защемленной по контуру.

**Постановка и решение краевой задачи.** Изгиб круговой пластины, пять слоев которой расположены симметрично по толщине (рисунок 1), рассматривается в цилиндрической системе координат, которая связана с плоско-

стью симметрии центрального несущего слоя 1. Для описания деформирования тонких несущих слоев 1, 2, 4 приняты гипотезы Кирхгофа, жестких несжимаемых по толщине заполнителей 3, 5 – гипотеза Тимошенко, предполагающая прямолинейность и несжимаемость деформированной нормали, которая при этом поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ .

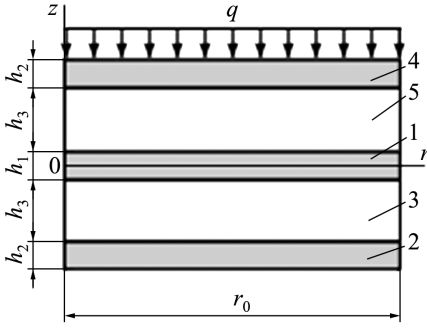


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$u_r^{(4)} = -zw_{,r} + h_3\psi \quad (0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2);$$

$$u_r^{(1)} = -zw_{,r} \quad (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1);$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi \quad (-0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3);$$

– в заполнителях 3, 5

$$u_r^{(5)} = -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi \quad (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3);$$

$$u_r^{(3)} = -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi \quad (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1),$$

(1)

где  $z$  – координата точки рассматриваемого слоя; расположенная в нижнем индексе запятая соответствует операции дифференцирования по следующей за ней координате.

Зная перемещения (1), деформации получим из соотношения Коши [1], напряжения – из закона Гука. Соответствующая система дифференциальных уравнений, описывающая равновесие рассматриваемой пластины, получена в [23]:

$$L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2h_3G_3\psi = 0; \quad L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q, \quad (2)$$

где  $a_i$  – коэффициенты:

$$a_4 = \left[ 2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; \quad a_5 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_6 = \left[ 2K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_7 = \left[ 2K_2^- h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-;$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования;  $L_2, L_3$  – операторы

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg) \right)_{,r}, \quad ,_r \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r}, \quad ,_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

На контуре пластины должны выполняться граничные условия:

$$\psi = 0, \quad w = w_{,r} = 0. \quad (3)$$

Относительный сдвиг и прогиб пластины, удовлетворяющие системе уравнений (2) и граничным условиям (3), получены в виде

$$\psi = \frac{a_5 q}{4a_6 h_3 G_3} \left( r_0 \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta r_0)} - r \right);$$

$$w = \frac{a_5^2 q}{4a_6^2 h_3 G_3} \left( r_0 \frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta r_0)}{\beta I_1(\beta r_0)} - \frac{r^2 - r_0^2}{2} \right) + \frac{q}{64a_6} (r^2 - r_0^2)^2,$$

где  $I_0(r), I_1(r)$  – функции Бесселя.

**Численные результаты.** Исследованы перемещения в защемлённой по контуру пятислойной пластине, материал несущих слоев которой – дюралюминий, заполнителя – фторопласт-4 (их упругие характеристики приведены в [1]). Значение нагрузки принималось  $q_0 = 10$  МПа. Толщины слоев и радиальная координата задавались в долях радиуса  $r_0$ .

Рисунок 2 показывает, как изменяются относительный сдвиг (а) и прогиб (б) в зависимости от распределения материала между наружными и внутренним несущим слоем при постоянной толщине заполнителей  $h_3 = h_5 = 0,2$ .

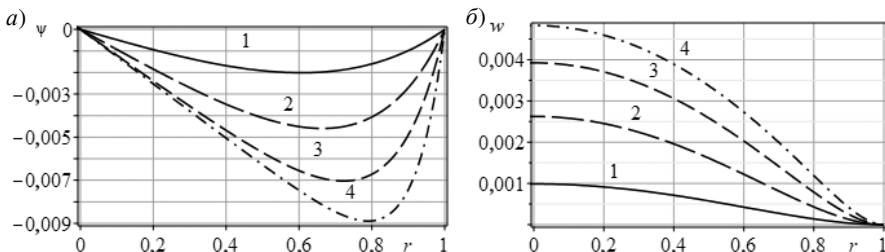


Рисунок 2 – Сдвиг в заполнителе (а), прогиб пластины (б) в случаях:

1 –  $h_1 = 0, h_2 = 0,03$  (трехслойная пластина); 2 –  $h_1 = 0,02, h_2 = 0,02$ ;

3 –  $h_1 = 0,04, h_2 = 0,01$ ; 4 –  $h_1 = 0,06, h_2 = 0$

Результаты расчетов показывают, что увеличение толщины центрального несущего слоя за счет материала внешних слоев приводит к уменьшению жесткости пластины и росту относительного сдвига и прогиба. Перемещения увеличиваются в 2,5; 4; 5 раз соответственно.

**Вывод.** Построенная механико-математическая модель изгиба пятислойной упругой пластины и предложенное аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать ее перемещения не только при постоянной, но и при любой осесимметричной нагрузке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.

2 **Aghalovyan, L.** Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

3 **Reddy, J. N.** Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / J. N. Reddy. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.

4 **Altenbach, H.** Mechanics of Composite Structural Elements / H. Altenbach, J. Altenbach, W. Kissing. – Singapore : Springer Nature, 2018. – 503 p.

5 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

6 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

7 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

8 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

9 **Нестерович, А. В.** Напряжённое состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

10 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

11 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины нейтронным потоком / Э. И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 221–225.

12 **Sayyad, A. S.** Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature / A. S. Sayyad, Y. M. Ghugal // Composite Structures. – 2017. – Vol. 171. – P. 486–504.

13 **Kreja, I.** A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels / I. Kreja // Central European Journal of Engineering. – 2011. – Vol. 1, is. 1. – P. 59–80.

14 **Осадчий, Н. В.** Модель деформации пятислойной панели с жестким заполнителем / Н. В. Осадчий, В. А. Мальшев, В. Т. Шепель // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 154–162.

15 **Морозов, Н. Ф.** Континуальная модель изгиба и колебаний многослойной нанопластины / Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 6. – С. 27–33.

16 **Савенкова, М. И.** Применение метода осреднения к материалам с физически нелинейными свойствами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / М. И. Савенкова. – М. : Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2013. – 26 с.

17 Non-polynomial framework for bending responses of the multi-scale hybrid laminated nanocomposite reinforced circular/annular plate / X. He [et al.] // Thin-Walled Structures. – 2021. – Vol. 166. – Article 108019. – 20 p.

18 **Khatua, T. P.** Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates / T. P. Khatua, Y. K. Cheung // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – Vol. 6, is. 1. – P. 11–24.

19 **Shishehsaz, M.** Stress distribution in a five-layer circular sandwich composite plate based on the third and hyperbolic shear deformation theories / M. Shishehsaz, H. Raissi, S. Moradi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2020. – Vol. 27, is. 11. – P. 927–940.

20 **Raissi, H.** Stress analysis of the five layer circular sandwich plate subjected to uniform distributed load by layerwise theory along with second order shear deformation theory / H. Raissi, M. Shishehsaz, S. Moradi // Australian Journal of Mechanical Engineering. – 2022. – Vol. 20, is. 3. – P. 625–636.

21 **Abdulhadi, F.** Symmetrical bending of multicore circular sandwich plates / F. Abdulhadi // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9, no. 11. – P. 2278–2280.

22 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 116–122.

23 **Салицкий, В. С.** Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 1. – М. : ООО «ТРП», 2021. – С. 199–201.

*V. S. SALICKY*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **BENDING OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE CLAMPED ON THE CONTOUR**

Deformation of a circular five-layer plate symmetrical in thickness under the action of a uniformly distributed load is considered. It is assumed that the kinematic hypotheses of Kirchhoff are fulfilled for the thin outer and inner carrier layers. A relatively thick core is deformed in accordance with the hypothesis of Timoshenko. At the equilibrium equations deriving by the variational Lagrange method, the work of tangential stresses in the filler is taken into account. The obtained analytical solution is numerically tested.

**Keywords:** five-layer circular plate, bending, analytical solution.

Получено 20.09.2022

УДК 539.3

*Н. М. СИМАНОВИЧ<sup>1</sup>, О. М. ОСТРИКОВ<sup>2</sup>, М. П. КУЛЬГЕЙКО<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь*

*<sup>2</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ РАСПОЛОЖЕННОГО У ПОВЕРХНОСТИ СЕРПОВИДНОГО ДВОЙНИКА, К КОТОРОМУ ПРИЛОЖЕНА РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА**

Представлен анализ конфигурации полей напряжений в области серповидного двойника, находящегося у поверхности твердого тела, для случая действия на него распределенной нагрузки. Дана сравнительная оценка напряженного состояния для двойника серповидной формы и клиновидного двойника. Рассмотрены особенности полей напряжений вдоль искривленных границ двойниковой прослойки.

**Ключевые слова:** механическое двойникование, клиновидный двойник, серповидный двойник, граница двойника, напряженно-деформированное состояние.

**Введение.** Двойникование, как один из механизмов пластического деформирования, наблюдается при различных способах нагружения двойникующихся материалов [1–3] как при низких температурах и больших скоростях деформирования, так и в процессе скольжения при статическом или динамическом нагружении [2]. Наличие двойников приводит к появлению значительных внутренних напряжений, в результате чего создается микроструктура, склонная к хрупкому разрушению [4–6]. При расположении двойника у поверхности твердого тела, находящейся под действием механической нагрузки, в материале создается сложнапряженное состояние, которое определяется как особенностями приложения нагрузки, так и характером образования двойниковых границ [3].

Генерация двойникующих дислокаций, реализующаяся в соответствии с кристаллографическими направлениями кристаллической решетки, приводит к образованию двойников с прямолинейными границами. Существующие дефекты кристаллической структуры представляют собой препятствия для движения дислокаций и их тормозят. Неравномерное распределение двойникующих дислокаций на границах двойника приводит к искривленной форме этих границ [3].

Одна из особенностей двойникования при скрайбировании поверхности индентором связана с образованием серповидных двойников [7]. При экспериментальных исследованиях наблюдались следующие варианты формы границ двойников: выпуклая и вогнутая с изломом; вогнутая и прямая; вогнутая и выпуклая – дугообразные; две вогнутые границы (с минимальным углом раствора при вершине) и т. п.

В работах [8, 9] получено распределение напряжений вблизи поверхности, к которой приложена распределенная нормальная и тангенциальная нагрузка, при наличии двойника с прямолинейными границами. В статье [10] определены поля напряжений в областях расположения двойников с криволинейными границами, а также рассмотрены варианты, при которых одна из границ двойника остается прямолинейной, а внешнее воздействие на твердое тело отсутствует.

В реальных условиях при скрайбировании поверхности кристалла индентором Виккерса в произвольном направлении образуются двойники серповидной формы с двумя криволинейными границами, одна из которых выпуклая, а другая – вогнутая. Интерес представляют поля напряжений вблизи такого двойника, находящегося у поверхности кристалла, для случая действия внешней распределенной нагрузки, определение которых стало целью настоящей работы.

**Постановка задачи.** Анализ полей напряжений в области серповидного двойника выполнялся путем сравнения с распределением напряжений для клиновидного двойника, имеющего прямолинейные границы. На рисунке 1 представлены схемы двойников, имеющих одинаковую длину  $L$  и ширину  $H$  у устья. На участке поверхности  $-m \leq x \leq n$  приложено равномерно распределённое нормальное давление  $p(x)$ .

Принято, что выпуклая и вогнутая границы серповидного двойника описываются соответственно функциями:

$$y = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right); \quad y = -\frac{H}{2} \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2.$$

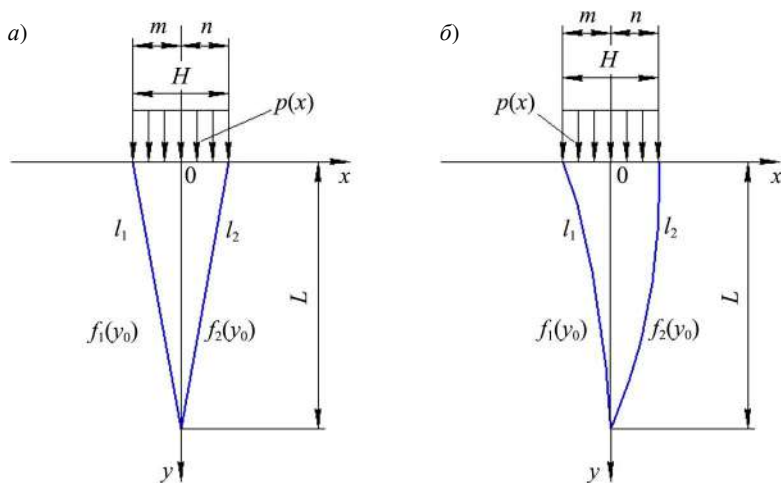


Рисунок 1 – Схема деформирования двойника:  
 а – с прямолинейными границами; б – серповидной формы

Результирующие напряжения определяются как сумма напряжений от двойника  $\sigma_{ij}^{дв}(x, y)$  и внешних сил  $\sigma_{ij}^p(x, y)$  [3, 10]:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{дв}(x, y) + \sigma_{ij}^p(x, y),$$

причем напряжения, создаваемые двойником, в соответствии с [10]

$$\sigma_{ij}^{дв}(x, y) = \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(2)}(x, y),$$

где  $\sigma_{ij}^{(1)}(x, y)$ ,  $\sigma_{ij}^{(2)}(x, y)$  – напряжения, создаваемые каждой из границ.

Определение напряженного состояния в зоне двойника осуществлялось по аналогии с распределением сдвиговых напряжений  $\sigma_{xy}$  согласно методике, приведенной в [10, 11]. При расчетах по аналогии с работами [8, 9] принято  $H = 20$  мкм и  $L = 80$  мкм.

**Результаты и их обсуждение.** Предварительно сравним напряжения, создаваемые двойниками с прямолинейными границами и серповидным при отсутствии внешнего воздействия. На рисунках 2, 3 представлены соответствующие картины распределения напряжений  $\sigma_{xy}$ .

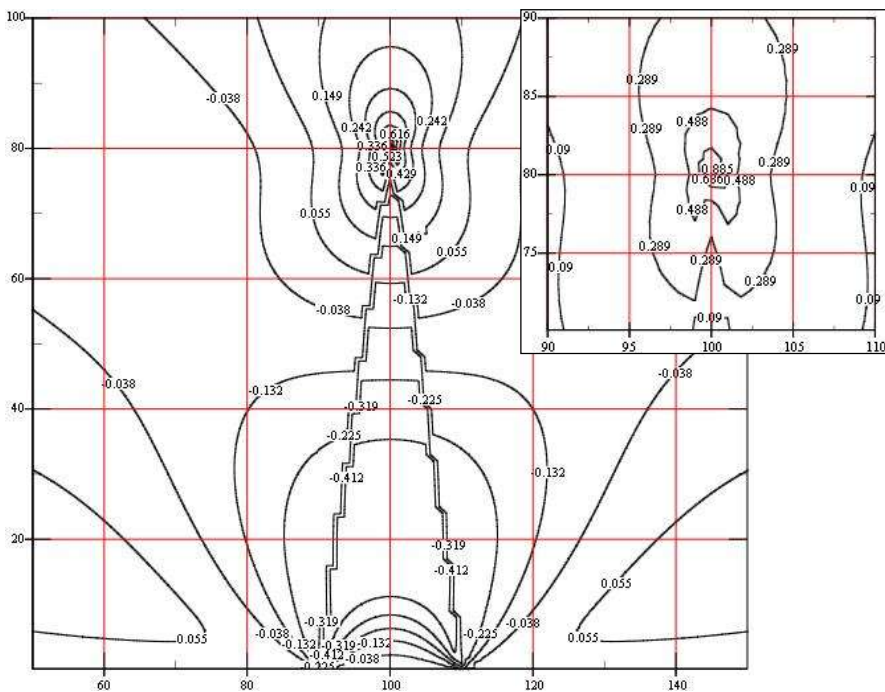


Рисунок 2 – Напряжения  $\sigma_{xy}$  (МПа) для двойника с прямолинейными границами при отсутствии нагрузки



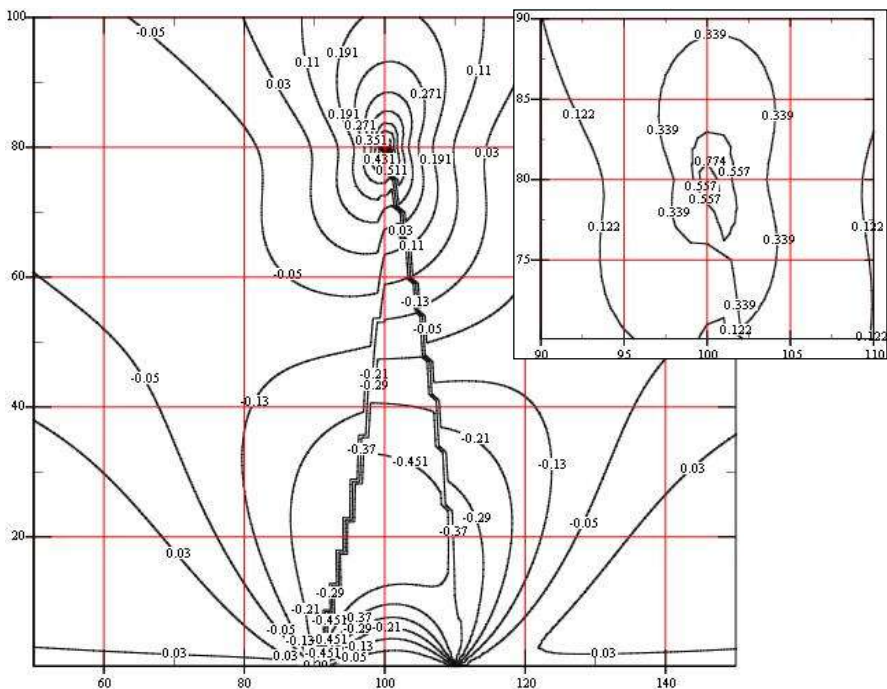


Рисунок 3 – Напряжения  $\sigma_{xy}$  (МПа) для двойника с криволинейными границами при отсутствии внешней нагрузки

Конфигурация полей напряжений в области двойника с прямолинейными границами закономерно симметрична относительно плоскости двойникова-ния. Наблюдается концентрация напряжений вдоль двойниковых границ, причем на расстоянии около  $3/4$  длины двойника от поверхности знак напряжений изменяется. Возле устья двойника в приповерхностном слое наблюдается концентрация напряжений, в том числе в середине двойнико-вой прослойки на расстоянии  $1/4$  длины двойника (около 20 мкм) от поверх-ности. Напряжения максимальны у вершины двойника, где их абсолютные значения в 2 раза больше, чем у основания двойника на его границах.

Конфигурация поля напряжения для двойника серповидной формы отлича-ется некоторой асимметрией относительно плоскости двойникова-ния (см. рисунок 3). Несимметричность напряжений наблюдается по границам двой-ника, внутри двойниковой прослойки и с наружной стороны двойника вблизи его границ. У вогнутой границы наблюдаются несколько меньшие значе-ния напряжений, а справа от выпуклой – большие. При удалении от двойни-ковых границ схемы полей напряжений приобретают симметричность, а численные значения напряжений соответствуют случаю прямолинейного двойника. Максимальная концентрация напряжений, как и у прямолинейно-

го двойника, наблюдается на границах в области устья, вблизи поверхности внутри двойниковой прослойки и у вершины двойника.

На рисунке 4 представлена картина распределения полей напряжений для клиновидного двойника с прямолинейными границами в случае действия на его поверхность равномерно распределенной нагрузки  $p(x) = 6 \text{ Н/м}$ .

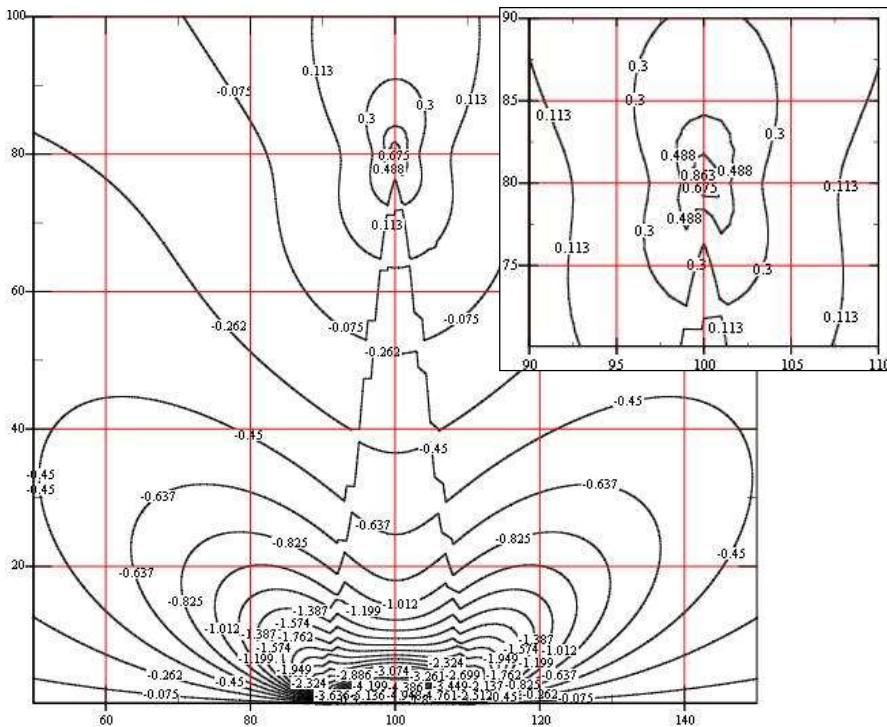
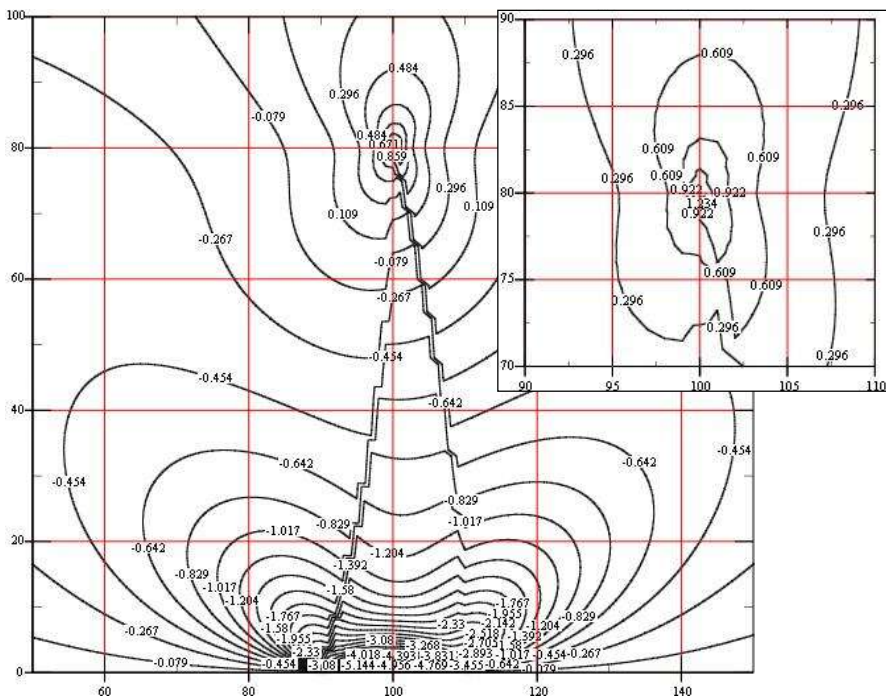


Рисунок 4 – Напряжения  $\sigma_{xy}$  (МПа) для двойника с прямолинейными границами при действии на его поверхность распределенной нагрузки

Как и при отсутствии внешней нагрузки, схема симметрична относительно плоскости двойникования. При этом напряжения вблизи поверхности, а также на границах двойника в области устья возрастают более чем в 10 раз. Значительный уровень напряжений сохраняется на глубине до 1/4 длины двойника (до 20 мкм от поверхности). Далее значения напряжений достаточно быстро убывают, однако на глубине 3/4 длины двойника они в 3 раза превышают напряжения, возникающие при отсутствии внешней нагрузки. Смена знака напряжений происходит ближе к вершине двойника. В результате наложения напряжений разного знака от нагрузки и двойника их значения у вершины двойника меньше, чем при отсутствии внешней нагрузки. Таким образом, в области вершины двойника имеет место компенсация напряжений.

Аналогичная ситуация наблюдается в области серповидных двойников как при действии нормальной распределенной нагрузки (рисунок 5) и при ее отсутствии (см. рисунок 3).



никовых границ и практически симметричному в удалении от них. Вблизи границ двойника серповидной формы наблюдается более интенсивный градиент напряжений по сравнению с двойником с прямолинейными границами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Бойко, В. С.** Обратимая пластичность кристаллов / В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, А. М. Косевич. – М. : Наука, 1991. – 279 с.
- 2 **Федоров, В. А.** Дислокационные механизмы разрушения двойникообразующихся металлов / В. А. Федоров, Ю. И. Тялин, В. А. Тялина. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 336 с.
- 3 **Остриков, О. М.** Механика двойникообразования твердых тел / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
- 4 **Финкель, В. М.** Разрушение кристаллов при механическом двойникообразовании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев. – Ростов н/Д, 1990. – 172 с.
- 5 **Cerv, J.** Transonic twinning from the crack tip / J. Cerv, M. Landa, A. Machova // Scripta Materialia. – 2000. – Vol. 43, is. 5. – P. 423–428.
- 6 Mechanism of twinning induced plasticity in austenitic lightweight steel driven by compositional complexity / Z. H. Lai [et al.] // Acta Materialia. – 2021. – Vol. 210. – Article 116814. – 12 p.
- 7 **Кульгейко, Н. М.** Особенности двойникообразования монокристалла висмута при скрайбировании его поверхности (111) индентором Виккерса / Н. М. Кульгейко, О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2015. – № 2 (61). – С. 42–50.
- 8 **Симанович, Н. М.** Определение полей напряжений от действия распределенной нагрузки при наличии у поверхности клиновидного двойника / Н. М. Симанович, О. М. Остриков, М. П. Кульгейко // Вестник БрГТУ. – 2021. – № 2 (125). – С. 66–69.
- 9 **Симанович, Н. М.** Определение полей напряжений от действия нормальной и касательной распределенной нагрузки при наличии у поверхности клиновидного двойника / Н. М. Симанович, О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2021. – № 3. – С. 5–12.
- 10 **Остриков, О. М.** Методика прогнозирования распределения полей напряжений в реальных кристаллах с остаточными некогерентными двойниками / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 278 с.
- 11 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

*N. M. SIMANOVICH<sup>1</sup>, O. M. OSTRIKOV<sup>2</sup>, M. P. KULGEYKO<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*P. O. Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

#### STRESS FIELDS IN THE REGION LOCATED NEAR THE SURFACE OF A CRUCLE-SHAPED TWIN UNDER AN APPLIED DISTRIBUTED LOAD

An analysis of the stress fields configuration in the region of a crescent-shaped twin located near a solid body surface is presented for the case of a distributed load acting on it. A comparative assessment of the stress state for a crescent-shaped twin and a wedge-shaped twin is given. The features of stress fields along the curved boundaries of the twin layer are considered.

**Keywords:** mechanical twinning, wedge-shaped twin, sickle-shaped twin, twin boundary, stress-strain state.

Получено 12.10.2022

УДК 691-419:539.377

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ НАГРУЗКОЙ, ПРИЛОЖЕННОЙ К ЛИНИИ**

Рассмотрена задача термоупругости об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины поперечной силой, приложенной вдоль окружности к несущему слою. Для описания деформирования тонких несущих слоев и относительно толстого заполнителя использованы гипотезы соответственно Кирхгофа и Тимошенко. С помощью вариационного метода получены уравнения равновесия, учитывающие работу касательных напряжений в заполнителе. Аналитическое решение краевой задачи представлено в конечном виде. При заданном законе распределения температуры по толщине численно исследовано влияние на перемещения в пластине радиуса приложения нагрузки в случае ее постоянной равнодействующей.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, погонная нагрузка, упругость, температура, рекуррентное решение.

**Введение.** Существующие требования к оценке прочности композитных конструкций, функционирующих в условиях комплексного нагружения, обуславливают необходимость создания подходов, позволяющих описать деформирование в физически нелинейной области для разных вариантов приложения нагрузок, в том числе тепловых. В монографиях [1–3] представлена постановка ряда задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций, рассмотрены пути их решения и представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния при термосиловых нагружениях. В работах [4, 5] приведены решения задач о гармонических и нестационарных колебаниях неоднородных сферических и цилиндрических оболочек. В статьях [6, 7] выполнен анализ влияния жесткости упругого основания на параметры свободных и вынужденных колебаний трехслойных круговых пластин, а также изучено действие на них локальных и резонансных нагрузок.

В ряде работ представлены исследования деформирования круговых трехслойных пластин. Так, в статьях [8, 9] построена математическая модель с учетом сжимаемости заполнителя, в [10, 11] анализируются напряжения и деформации в упругопластической пластине, взаимодействующей с основанием Пастернака. Деформирование в своей плоскости под действием неосесимметричных нагрузок рассмотрено в [12]. Термосиловое квазистатическое нагружение трехслойных цилиндрических пологих оболочек рассматривалось в работе [13]. В статье [14] исследован изгиб, вызываемый прохождением нейтронного потока через круглую трехслойную пластину.

**Постановка и решение задачи.** Исследуется несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина. К наружной поверхности ее первого несущего

слоя вдоль окружности  $r = a$  приложена погонная поперечная нагрузка с интенсивностью  $Q_0$ , а также подводится тепловой поток  $q_t$  (рисунок 1).

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , в которой срединная плоскость заполнителя принята за координатную, а ось  $z$  направлена перпендикулярно ей (к первому слою). Полагается, что для тонких внешних несущих слоев, имеющих толщины  $h_1 \neq h_2$  выполняются гипотезы Кирхгофа. Для относительно толстого жесткого заполнителя с толщиной  $h_3 = 2c$ , воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, работает гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Как поверхность  $z = -c - h_2$ , так и контур пластины теплоизолированы, поэтому параметры неоднородного температурного поля  $T(z)$  можно с достаточной точностью вычислить по формуле, приведенной в [1],

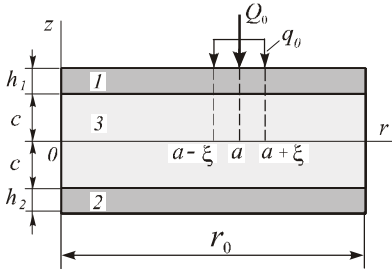


Рисунок 1 – Нагружение трехслойной пластины

где  $H$  – суммарная толщина пластины;  $\tau = at/H^2$ ;  $s = z/H$ ;  $a = \lambda/C$ ;  $t$  – время;

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где  $H = \sum_{k=1}^3 h_k$ ;  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$ ;  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k / H$ ;  $\lambda_k, C_k$  – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ ).

Так как нагрузка осесимметрична, то окружные перемещения в пластине отсутствуют  $u_{\varphi}^{(k)} = 0$ . Искомыми функциями при решении задачи являются: прогиб пластины  $w(r)$ , радиальное перемещение координатной плоскости  $u(r)$  и относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r)$ . Считаем, что на контуре пластины находится жесткая диафрагма, не допускающая относительный сдвиг слоев ( $\psi = 0$  при  $r = r_0$ ).

Решение задачи выполним, используя результаты, полученные для случая распределенной по кольцу  $a - \xi \leq r \leq a + \xi$  поверхностной равномерно распределенной нагрузки  $q_0$  при изотермическом нагружении [15]. Предположим, что кольцо тонкое  $\xi \ll 1$ . Тогда произведем в искомых функциях замену  $q_0 = Q_0/(2\xi)$  (см. рисунок 1) и устремим параметр  $\xi$  к нулю, оставляя  $Q_0$  постоянной. Для искомых перемещений получим выражения

$$\psi = A_2 I_1(\beta r) + A_3 K_1(\beta r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \left( \frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \frac{A_1 \gamma_1}{\beta^2 r};$$

$$w = \frac{1}{b_3} \left( b_2 \int \psi dr + \int L_3^{-1}(Q_0) dr - \frac{A_1}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{A_5 r^2}{4} \right) + A_6 \ln r + A_4;$$

$$u = \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{A_7 r}{2} + \frac{A_8}{r}, \quad (2)$$

где запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней координате;  $A_1, \dots, A_8$  – константы интегрирования;  $\psi_r(r)$  – частное решение уравнения Бесселя для функции сдвига в заполнителе;  $I_1(r)$ ,  $K_1(r)$  – функции Бесселя;  $H_0(r)$  – функция Хэвисайда;  $L_3^{-1}$  – линейный интегральный оператор:

$$\begin{aligned} L_3^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr; \\ \int L_3^{-1}(Q_0) \, dr &= \frac{Q_0 a}{4} \left( r^2 - a^2 - a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right) H_0(a-r); \\ \int \psi \, dr &= \frac{A_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{A_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{A_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta^2} H_0(a-r) \times \\ &\times \left( \ln\left(\frac{r}{a}\right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right). \end{aligned}$$

В случае усреднения температурного поля (1) по толщине  $k$ -го слоя значения упругих параметров внутри этого слоя постоянны:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) \, dz,$$

и они вычисляются в зависимости от температуры по известной формуле Белла [3]. В этом случае коэффициенты в (2) будут

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \quad a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \\ a_4 &= c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \quad a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}; \\ K_k + \frac{4}{3} G_k &\equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-. \end{aligned}$$

Константы интегрирования определяются из требования ограниченности решения в центре пластины и с учетом выполнения граничных условий:

– в случае заделки контура

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1;$$

– при шарнирном опирании

$$u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } M_r = & \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z \, dz = \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \\ & + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ & + \left[ cK_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ & + \left[ cK_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\ & - \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\ & - \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} + \\ & + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k z \, dz ; \end{aligned}$$

$\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Для случая заземленного контура получаем

$$\begin{aligned} A_1 = -Q_0 a ; \quad A_2 = \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta^2 I_1(\beta)} (1 - \beta K_1(\beta) I_0(\beta a)) ; \quad A_3 = \frac{\gamma_1 Q_0 a I_0(\beta a)}{\beta} ; \\ A_4 = -\frac{b_2 \gamma_1 Q_0 a}{b_3 \beta^3 I_1(\beta)} (I_0(\beta) - I_0(\beta a)) + \frac{Q_0 a (a^2 + 1)}{8b_3} ; \quad A_5 = \frac{Q_0 a}{2} (1 - a^2) ; \quad (4) \\ A_6 = \frac{Q_0 a^3}{4b_3} ; \quad A_7 = 0 ; \quad A_8 = 0. \end{aligned}$$

При шарнирно опертом контуре изменяются константы интегрирования

$$\begin{aligned} A_4 = \frac{b_2}{b_3} \left( -\frac{A_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{A_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (A_1 + A_5) ; \\ A_5 = \frac{Q_0 a}{2} (1 - a^2) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} - \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z \, dz ; \quad (5) \\ A_7 = \frac{2a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left( 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z \, dz + \frac{Q_0 a}{2} (1 - a^2) \right). \end{aligned}$$

Константы  $A_1, A_2, A_3, A_6, A_8$  сохраняют вид (4).



Следует отметить, что температура в явном виде в перемещения (2) не входит, она влияет на механические характеристики материалов слоев и содержится в последних трех константах интегрирования (5) в случае шарнирного опирания контура пластины.

**Численные результаты.** Исследована круговая трехслойная пластина, набранная из материалов Д16Т–фторопласт-4–Д16Т (их механические характеристики приведены в [1]). Толщины слоев и прогиб отнесены к радиусу пластины  $r_0$ :  $h_3 = 0,4$ ;  $h_2 = 0,04$ . Изменение максимального прогиба пластины в зависимости от радиуса окружности, вдоль которой прикладывались поперечные погонные нагрузки (их значения подбирались из условия постоянства равнодействующей), показано на рисунке 2. Максимум наблюдается при  $b = 0$ , что соответствует сосредоточенной силе, приложенной к центру пластины. При продвижении нагрузки к контуру прогиб уменьшается до нуля. При нагревании прогиб увеличивается пропорционально.

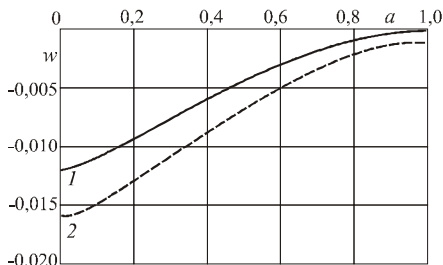


Рисунок 2 – Зависимости прогиба в центре трехслойной пластины от радиуса  $a$  силовой окружности ( $T_1 = 293$  К,  $T_2 = 323$  К)

**Заключение.** Полученное решение краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин при локальных погонных нагрузках в температурном поле. Численные результаты подтвердили, что температура существенно влияет на перемещения в пластине.

*Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Reddy, J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J. N. Reddy. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 3 Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 4 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.
- 5 Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
- 6 Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, no. 5. – P. 561–570.

7 Старовойтов, Э. И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34. – № 5. – С. 70–79.

8 Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

9 Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

10 Козел, А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

11 Козел, А. Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

12 Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

13 Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

14 Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойной пластины нейтронным потоком / Э. И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 221–225.

15 Плескачевский, Ю. М. Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках / Ю. М. Плескачевский, М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 3–9.

*E. I. STAROVOITOV*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### **A THREE-LAYER PLATE BENDING IN A TEMPERATURE FIELD BY A LOAD APPLIED TO A LINE**

The problem of thermoelasticity of a circular three-layer plate axisymmetric bending by a transverse force applied along the circumference to the carrier layer is considered. The hypotheses of Kirchhoff and Timoshenko, respectively, are used to describe the deformation of thin carrier layers and relatively thick filler. Using the variational method, equilibrium equations are obtained and they take into account the shear stresses work in the filler. The analytical solution of the boundary value problem is presented in the final form. For a given law of temperature distribution over the thickness, the load application radius influence on the displacements in the plate for the case of its constant resultant is numerically investigated.

**Keywords:** three-layer circular plate, linear load, elasticity, temperature, recursive solution.

Получено 05.11.2022

УДК 625.711:539.37

*О. И. ЦЫГАНOK, И. Е. КРАКОВА, А. О. ШИМАНОВСКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДОРОЖНОЙ ОДЕЖДЫ ПРИ РАЗНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ**

Исследуется напряженно-деформированное состояние слоев дорожного покрытия под действием нагрузки от проезжающих автомобилей с учетом изменения температуры по высоте. Решение получено путем конечноэлементного моделирования в среде программного комплекса ANSYS с использованием элемента, реализующего расчет механики связанных полей. Показано, что значительное изменение температуры поверхности дорожной одежды в течение короткого промежутка времени может стать причиной образования повреждений в ее слоях.

**Ключевые слова:** дорожное покрытие, асфальтобетон, конечно-элементное моделирование, напряженно-деформированное состояние.

Большие потоки автотранспорта различной тоннажности приводят к накоплению остаточных деформаций в различных слоях дорожной одежды, которые впоследствии становятся причиной ее повреждения. Кроме циклических нагрузок значительное влияние на прочность автодорог оказывают также климатические условия. Сезонные и кратковременные изменения температуры воздуха ведут к появлению градиента температур в слоях дорожного покрытия, что является причиной изменения его напряженно-деформированного состояния [1, 2]. В связи с этим существует необходимость учета распределения температуры по высоте при анализе напряжений и деформаций в слоях дорожной одежды.

В настоящее время выполнено значительное количество экспериментальных исследований, связанных с анализом распределения температур по высоте дорожного покрытия. Результаты измерения температуры и влажности верхнего слоя дорожного покрытия на острове Бали (Индонезия) представлены в работе [3]. Эксперименты по определению влажности, температуры, а также напряжений и деформаций для экспериментального участка дороги в Литве описаны в статье [4]. В публикации [5] представлен анализ влияния температуры окружающей среды в летний период на двухслойное асфальтобетонное дорожное покрытие с учетом транспортной нагрузки.

В статье [6] содержится обзор исследований по определению температур в дорожном покрытии, проанализированы различные эмпирические модели и аналитические зависимости, позволяющие устанавливать картину распределения температур при разных физико-механических и геометрических параметрах дорог и условиях окружающей среды.

Упрощенная модель для описания термовязкоупругого деформирования дорожного покрытия при действии на него подвижной нагрузки со стороны шин предложена в работе [7]. Закономерности распределения температуры, напряжений и деформаций в земляном полотне и слоях дорожной одежды автодороги, расположенной в северной части Казахстана, в течение разных периодов года рассмотрены в статье [8]. При расчетах использована математическая модель упругого многослойного полупространства. В работе [9] авторами разработаны математические модели, описывающие распределение температур и фильтрации жидкости в грунте, что позволило проанализировать влияние температуры и влажности грунта и дорожного покрытия на процесс его промерзания.

На данный момент существует значительное число работ, выполненных учеными разных стран, в которых изучается напряженно-деформируемое состояние покрытия дорог и образование дефектов в дорожном покрытии, однако принимается, что температура во всех его слоях одинакова [10, 11].

В работах [12–14] представлены результаты вычислений допустимых градиентов температур, при которых не образуются микротрещины на поверхности цементобетонного дорожного покрытия. В разработанных математических моделях использован критерий прочности, который характеризует процесс образования и развития микротрещин в бетоне. Однако здесь не учитывалось действие нагрузок от проезжающего автомобиля.

Целью данной работы является установление влияния распределения температур в дорожном покрытии на напряженно-деформированное состояние дорог с интенсивностью движения от 2 000 до 5 000 автомобилей в сутки.

Рассматривается участок дороги, схема которой представлена на рисунке 1. Предполагается, что дорожная одежда включает четыре слоя, которые сформированы из разных материалов. Их физико-механические и геометрические

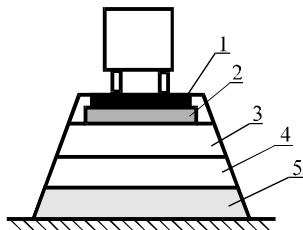


Рисунок 1 – Расчетная модель дорожного покрытия:

- 1 – плотный асфальтобетон;
- 2 – пористый асфальтобетон;
- 3 – высокопористый асфальтобетон;
- 4 – гравийная смесь; 5 – супесь пылеватая

характеристики, соответствующие рекомендациям [15], приведены в таблице 1. Как показали исследования, для получения требуемой точности результатов толщина основания (слой 5) в рассматриваемом случае должна быть не менее 70 см.

При расчетах дорожных покрытий, как правило, предполагается, что давление от шины на участок дороги равномерно распределяется по круговой площадке. При движении автомобиля на дорогу одновременно оказывают воздействие несколько шин. Наиболее неблагоприятным является случай, при котором рядом двигаются два

автомобиля, что соответствует периодичности приложения нагрузок по длине и ширине дорожного полотна [16]. Поэтому в качестве расчетной области выделен структурный элемент, содержащий участок, который включает  $\frac{1}{4}$  области приложения нагрузки. Он представляет собой параллелепипед, включающий несколько слоев дорожного покрытия с различными физико-механическими характеристиками (рисунок 2).

Таблица 1 – Характеристики слоев дорожной одежды

Но- мер слоя	Толщина слоя, см	Физико-механические характеристики					
		Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Модуль упругости, МПа	Коэффи- циент Пуассона	Коэффициент температурного расширения, 1/°С	Удельная теплоемкость, кДж/кг·К	Тепло- проводность, Вт/м·К
1	4	2300	3200	0,3	$10^{-5}$	1,65	1,4
2	4	2300	2000	0,25	$10^{-5}$	1,65	1,25
3	14	2000	2000	0,25	$10^{-5}$	1,65	1
4	48	1700	205	0,15	$10^{-5}$	1,00	0,64
5	–	1600	46	0,35	$1,18 \cdot 10^{-5}$	1,10	0,62

Конечноэлементная модель выделенного структурного элемента дорожного полотна создавалась в программном комплексе ANSYS. Для проведения связанного статического и температурного анализа слои дорожной одежды моделировались 20-узловым Brick-элементом SOLID226, который позволяет учесть особенности мультифизического анализа. Конечноэлементная сетка создавалась в полуавтоматическом режиме, при этом число конечных элементов модели составило около 7000.

В качестве нагрузки к четверти круга на поверхности модели, радиус которого принимался равным 17 см, прикладывалось равномерно распределенное давление 600 кПа, соответствующее действию шины. В качестве граничных условий применены наложение

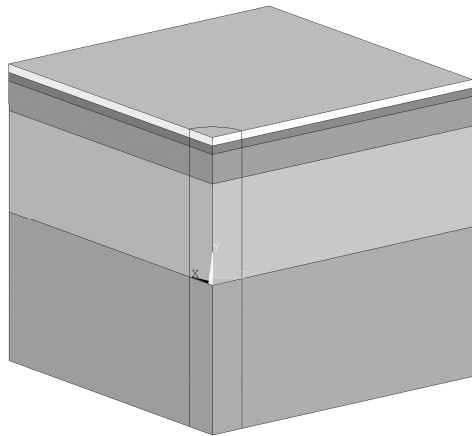


Рисунок 2 – Структурный элемент дорожного покрытия

условий симметрии на все боковые поверхности параллелепипеда и запрет перемещений по вертикали для нижней поверхности нижнего слоя. Также для поверхности слоя 1 задавались различные значения относительных температур  $T_{\text{н}}$  из диапазона от  $-20$  до  $+50$  °С по отношению к неизменяемой температуре нижней поверхности слоя 5, которая принималась равной  $0$  °С.

В ходе выполнения расчетов получены значения температур, напряжений и деформаций в слоях дорожного покрытия.

На рисунке 3 представлены графики, демонстрирующие изменение температур по высоте дороги при разных температурах ее поверхности. Их сравнение с экспериментальными зависимостями, представленными в работе [8], показывает достаточно хорошее соответствие. Из приведенных графиков видно, что наибольший градиент температуры по высоте дорожной одежды имеет место в верхних наиболее плотных и жестких ее слоях.

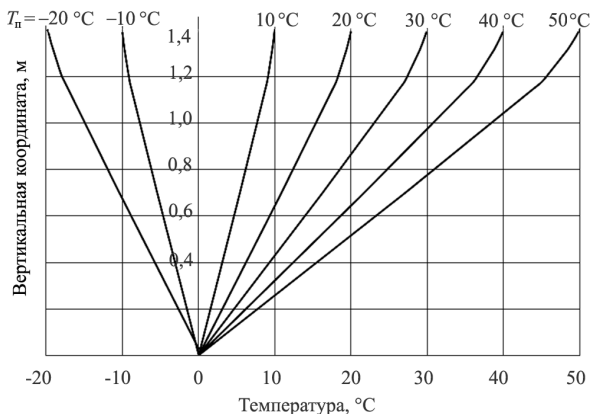


Рисунок 3 – Изменение температур по высоте дорожного покрытия при разных температурах  $T_n$  поверхности

На рисунке 4 представлены схемы распределения деформаций по поперечному сечению дороги вблизи места приложения нагрузки. При одинаковой температуре под действием силы давления шины все точки дорожного покрытия смещаются вниз, как это показано на рисунке 4, *а*. При больших значениях отрицательных температур поверхности материалы слоев сжимаются, а в области контакта наблюдаются максимальные смещения (рисунок 4, *б*). В случае нагрева дорожного покрытия вследствие температурного расширения его толщина увеличивается (рисунок 4, *в*). Приложение нагрузки от веса шины ведет к уменьшению деформаций, вызванных нагревом, причем полное перемещение четырех верхних слоев дороги остается положительным, т. е. они не возвращаются в исходное положение.

Отметим, что разница между наибольшими и наименьшими смещениями точек модели в случае охлаждения увеличивается по сравнению со случаем без нагрева и при  $T_n = -20$  °C отношение составляет 1,7 раза, при нагреве ( $T_n = 50$  °C) – 1,4 раза. Полученные результаты косвенно свидетельствуют об увеличении неравномерности распределения напряжений по объему.

Сравнение схем распределения эквивалентных по Мизесу напряжений (рисунок 5) подтверждает вывод, представленный ранее при анализе деформаций. При одинаковой температуре слоев дороги напряжения в трех верхних слоях распределяются достаточно равномерно, то есть можно считать, что эти слои работают как трехслойная пластина на упругом основании (рисунок 5, а). При отрицательном значении температуры поверхности наибольшие напряжения концентрируются на границах первого и второго слоев, а также третьего и четвертого (рисунок 5, б), достигая значений порядка 1,1 МПа. По сравнению со случаем без нагрева значения напряжений увеличиваются в 2 раза. Значительные температурные напряжения ведут к появлению трещин.

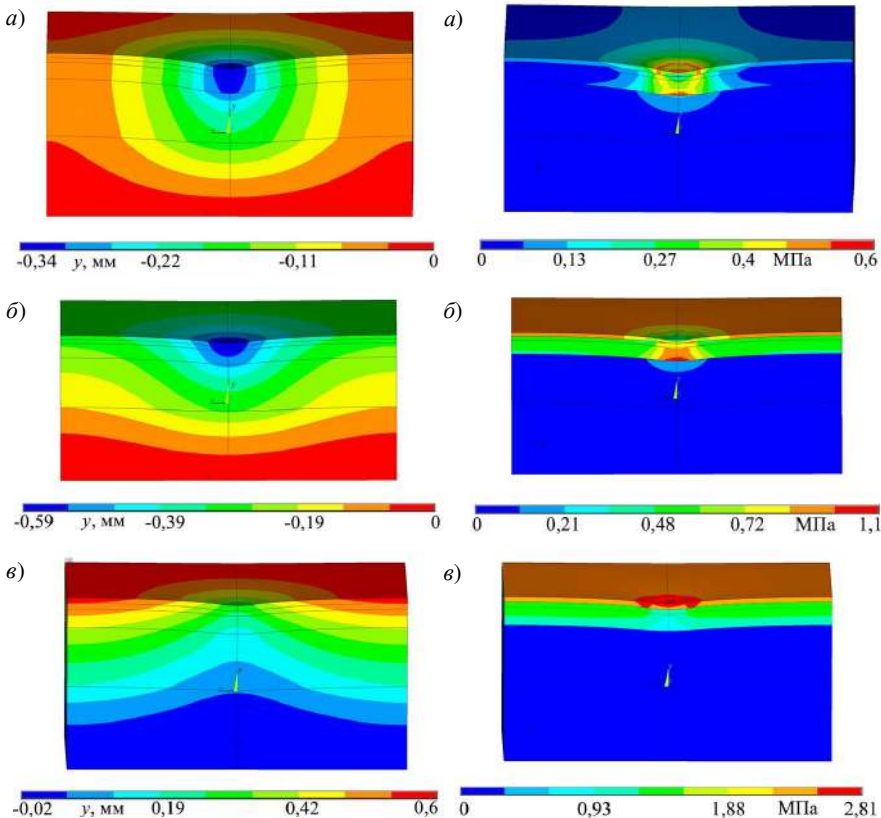


Рисунок 4 – Вертикальные перемещения точек дорожного покрытия:  
 а –  $T_n = 0^\circ\text{C}$ ; б –  $T_n = -20^\circ\text{C}$ ; в –  $T_n = +50^\circ\text{C}$

Рисунок 5 – Эквивалентные по Мизесу напряжения при температурах:  
 а –  $T_n = 0^\circ\text{C}$ ; б –  $T_n = -20^\circ\text{C}$ ; в –  $T_n = +50^\circ\text{C}$

В случае нагрева верхнего слоя дороги наибольшие напряжения концентрируются в верхнем слое дороги (рисунок 5, в). Максимальные значения напряжений увеличиваются в 4,7 раза по сравнению со случаем без нагрева (до 2,81 МПа). Это становится причиной образования колеи в местах проследования шин. Заметим, что в представленном расчете не учитывалось снижение жесткости асфальтобетона при увеличении температуры, которое наблюдается на практике. Следовательно, колея появляется на дороге не только вследствие изменения механических характеристик верхнего слоя дорожного покрытия, но и из-за перераспределения напряжений вследствие температурных деформаций.

На рисунках 6 и 7 показано, как изменяются перемещения и напряжения в слоях дорожного покрытия при изменении температуры нагрева его поверхности и учете силы давления шины автомобиля.

Представленные графики (см. рисунок 6) показывают, что наибольшие деформации наблюдаются в слоях 1 и 2 при температуре около 30 °С. В то же время при температурах, больших 20 °С, основание практически не деформируется. Однако наибольшие по модулю значения деформаций наблюдаются при снижении температуры воздуха.

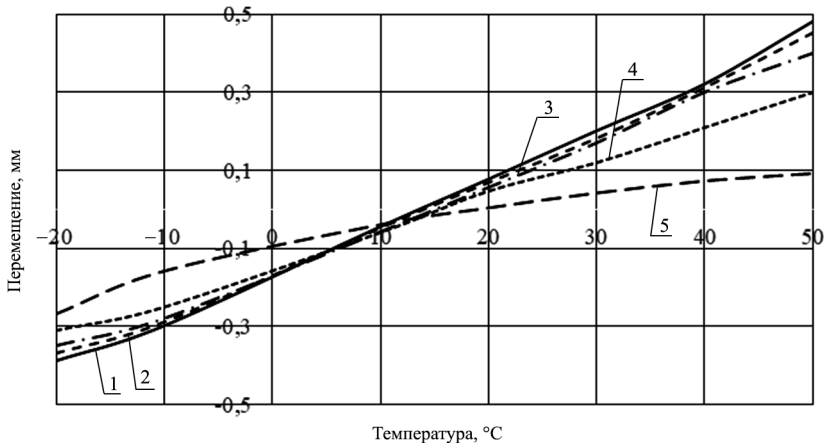


Рисунок 6 – Изменение максимальных перемещений точек слоев дороги под центром области контакта колеса с дорожным покрытием в зависимости от температуры поверхности дороги; цифра у линии соответствует номеру слоя

Графики изменения эквивалентных по Мизесу напряжений демонстрируют значительное увеличение их значений в материале слоя 1 как при повышении, так и при снижении температуры. В первом случае это может приводить к образованию колеи, а во втором – к растрескиванию дорожного покрытия.



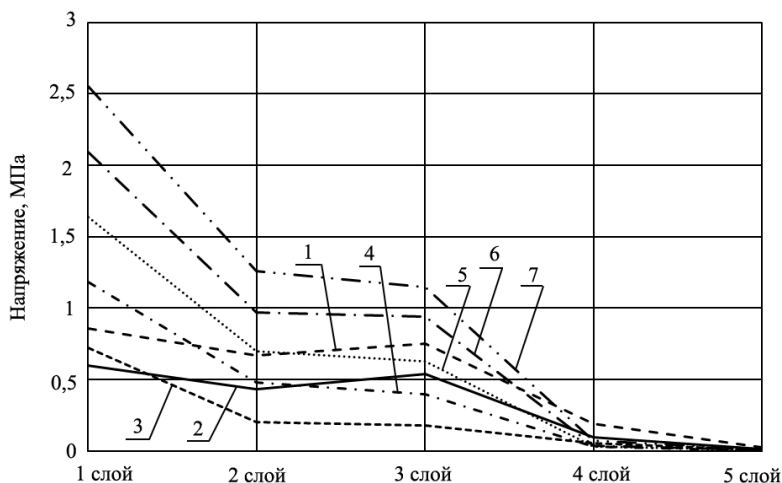


Рисунок 7 – Максимальные эквивалентные по Мизесу напряжения в слоях дорожной одежды при относительных температурах  $T_n$  поверхности ее верхнего слоя: 1 –  $T_n = -20^\circ\text{C}$ ; 2 –  $T_n = -10^\circ\text{C}$ ; 3 –  $T_n = 10^\circ\text{C}$ ; 4 –  $T_n = 20^\circ\text{C}$ ; 5 –  $T_n = 30^\circ\text{C}$ ; 6 –  $T_n = 40^\circ\text{C}$ ; 7 –  $T_n = 50^\circ\text{C}$

**Заключение.** В работе рассмотрена методика конечноэлементного моделирования термоупругого деформирования дорожного покрытия с использованием элемента, в котором реализована возможность анализа связанных полей. Учет реального распределения температур в дорожном полотне позволил установить, что наличие градиента температуры ведет к существенному увеличению напряжений в верхнем слое асфальтобетонного покрытия. Данный факт является одной из причин образования колеи на дороге при высоких температурах воздуха и растрескиванию дорожного полотна при низких.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Бочкарев, Д. И. Оценка влияния эксплуатационных характеристик асфальтобетонного покрытия на безопасность дорожного движения / Д. И. Бочкарев, В. В. Петрусевич // Чрезвычайные ситуации: образование и наука. – 2015. – № 10 (1) – С. 40–44.
- 2 Ефремов, С. В. Влияние температуры на долговечность в агрессивных средах асфальтобетона с гранитным и известняковым щебнем / С. В. Ефремов // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2017. – Вып. 79. – С. 123–127.
- 3 Ariawan, I. M. A. Development of asphalt pavement temperature model for tropical climate conditions in West Bali region / I. M. A. Ariawan, B. S. Subagio, B. H. Setiadji // Procedia Engineering, 2015. – Vol. 125. – P. 474–480.
- 4 Monitoring the mechanical and structural behavior of the pavement structure using electronic sensors / D. Ćygas [et al.] // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. – 2015. – Vol. 30, is. 4. – P. 317–328.
- 5 Li, Y Temperature predictions for asphalt pavement with thick asphalt layer / Y. Li, L. Liu, L. Sun // Construction and Building Materials. – 2018. – Vol. 160. – P. 802–809.

6 Asphalt pavement temperature prediction models: A review / I. Adwan [et al.] // *Applied Sciences*. – 2021. – Vol. 11, is. 9. – Article 3794. – 19 p.

7 Effect of temperature on asphalt pavement strain responses: APT data and thermo-viscoelastic pavement modelling / F. Homsî [et al.] // *Proceedings of 17<sup>th</sup> AAPA International Flexible Pavements Conference*. – Melbourne, 2017. – 12 p.

8 **Teltayev, B. B.** Distribution of temperature, moisture, stress and strain in the highway // *B. B. Teltayev, J. Liu, E. A. Suppes // Magazine of Civil Engineering*. – 2018. – Vol. 83, is. 7. – P. 102–113.

9 **Апталаев, М. Н.** Влияние водно-теплого режима основания автомобильной дороги на состояние дорожной одежды / М. Н. Апталаев, М. Е. Жалко // *Транспортные сооружения*. – 2016. – Т. 3, № 4. – 12 с.

10 **Афиногенов, А. О.** Анализ напряженно-деформированного состояния массива грунта земляного полотна автомобильных дорог / А. О. Афиногенов // *Вестник Кузбасского государственного технического университета*. – 2008. – № 3. – С. 109–111.

11 **Yastremskiy, D. A.** Numerical simulation of stress-strain state of road covering of the SMA with the use of stabilizing additives «Armide» / D. A. Yastremskiy, P. V. Chepur, T. N. Abaydullina // *Fundamental Research*. – 2016. – Vol. 7, is. 2. – P. 277–281.

12 **Пшембаев, М. К.** Анализ напряженного состояния поверхностного слоя дорожных бетонных покрытий при температурном воздействии / М. К. Пшембаев, Я. Н. Ковалев, Л. И. Шевчук // *Наука и техника*. – 2017. – Т. 16, № 4. – С. 282–288.

13 **Teltayev, B.** Modeling of temperature field in flexible pavement / B. Teltayev, K. Aitbayev // *Indian Geotechnical Journal*. – 2015. – Vol. 45, is. 4. – P. 371–377.

14 **Веренько, В. А.** Влияние параметров транспортной нагрузки на развитие деформаций дорожных покрытий / В. А. Веренько, В. В. Занкович, А. А. Макаревич // *Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета*. – 2006. – Вып. 34–35. – С. 102–110.

15 Теплопроводность строительных материалов, их плотность и теплоемкость [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://thermalinfo.ru/svoystva-materialov/strojmaterialy/teploprovodnost-stroitelnyh-materialov-ih-plotnost-i-teploemkost>. – Дата доступа : 10.08.2022.

16 Компьютерное моделирование деформирования слоистых конструкций с учетом изменения температур граничных поверхностей / А. О. Шимановский [и др.] // *Актуальные вопросы машиноведения*. – 2022. – Вып. 11. – С. 204–207.

*V. I. TSYHANOK, I. E. KRAKAVA, A. O. SHIMANOVSKY  
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **PAVEMENT DEFORMATION AT DIFFERENT TEMPERATURES OF ITS SURFACE**

The stress-strain state of the pavement layers under the passing cars load action is investigated, taking into account the change in temperature along the height. The solution is obtained by the finite element modeling in the ANSYS software package environment using an element that implements the coupled fields mechanics calculation. It is shown that a significant change in the pavement surface temperature over a short time period can cause damages in its layers.

**Keywords:** pavement surface, asphalt concrete, finite element modeling, stress-strain state.

Получено 30.10.2022

УДК 691-419:539.371

А. В. ЧЕРНЯК

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИЗГИБ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ С ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ,  
ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПО ТОЛЩИНЕ**

Рассмотрен осесимметричный изгиб круговой трехслойной сэндвич-пластины с внешними несущими слоями, линейно изменяющимися по толщине. Предполагается, что деформирование внешних слоев описывается кинематическими гипотезами Кирхгофа. Для относительно толстого заполнителя используется гипотеза Тимошенко. Получены уравнения равновесия, которые при учете приведенных граничных условий позволяют установить напряженно-деформированное состояние пластины.

**Ключевые слова:** изгиб, сэндвич-пластина, переменная толщина несущих слоев.

**Введение.** Широкое распространение трехслойных элементов конструкций в строительстве и машиностроении обуславливает актуальность создания новых математических моделей для их расчета. Методики построения подобных моделей изложены в книгах [1–4].

Колебания трехслойных пластин со слоями постоянной толщины рассматривались в статьях [5–7], а при переменной толщине слоев – в работах [8, 9]. Квазистатическому деформированию слоистых пластин со слоями постоянной толщины посвящены работы [10, 11], в том числе, связанных с упругим основанием – статьи [12, 13]. В публикациях [14, 15] представлены уравнения, позволяющие описать деформирование трехслойных оболочек со слоями переменной толщины. Цель представленной работы состоит в получении уравнений, позволяющих описать деформирование трехслойной пластины, в которой несущие слои изменяются по толщине в соответствии с заданным законом.

**Вывод уравнений равновесия в усилиях.** Объектом исследования является упругая трехслойная сэндвич-пластина круговой формы с жестким заполнителем и переменными по толщине внешними несущими слоями. Деформирование пластины рассматривается в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Для тонких жестких несущих слоев (1, 2) (рисунок 1) принимаются гипотезы Кирхгофа: нормаль прямолинейна, несжимаема и перпендикулярна к деформированной срединной плоскости своего слоя. Для относительно толстого несжимаемого по толщине заполнителя (3) учитывается работа тангенциальных напряжений. Нормаль к срединной плоскости несжимаема, остается прямолинейной и сдвигается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r, t)$  – относительный сдвиг. Через  $w(r)$  обозначен прогиб пластины. Внешняя распределенная нагрузка  $q = q(r)$  перпендикулярна первому слою. Благодаря наличию жесткой диафрагмы на контуре пластины сдвиговая деформация отсутствует.

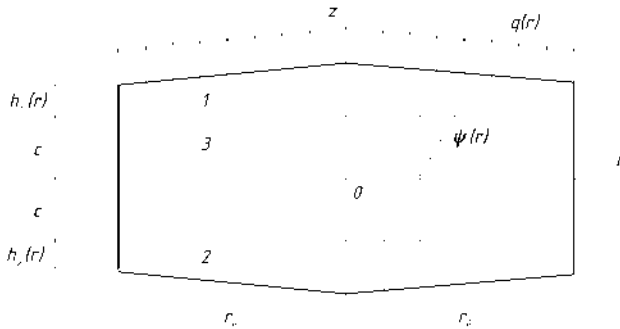


Рисунок 1 – Расчетная схема сэндвич-пластины

Принимается, что толщина несущих слоев изменяется линейно вдоль радиуса сэндвич-пластины

$$h_1(r) = h_2(r) = h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right). \quad (1)$$

Согласно принятой гипотезе нормаль заполнителя прямолинейна, а сдвиговая деформация в нем

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi$$

(запятая в индексе здесь и далее свидетельствует о дифференцировании по соответствующей координате). Используя результаты интегрирования этого выражения, получим радиальные перемещения  $u_r^{(k)}$  ( $k$  – номер слоя) в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= c\psi - zw_{,r}, \quad c \leq z \leq c + h_1; \\ u_r^{(3)} &= z\psi - zw_{,r}, \quad -c \leq z \leq c; \\ u_r^{(2)} &= c\psi - zw_{,r}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z$  – координата волокна.

Здесь принято во внимание, что у сэндвич-пластины при осесимметричной изгибной нагрузке отсутствует радиальное деформирование срединной поверхности. Деформации в слоях пластины получим из (2), воспользовавшись соотношениями Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= c\psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= z\psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}(z\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi; \\ \varepsilon_r^{(2)} &= c\psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С использованием напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) вводятся внутренние обобщенные усилия и моменты:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \quad (4)$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c \left( T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(1)} \right); \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz.$$

Виртуальная работа внешней нагрузки

$$\delta A = \iint_S (q \delta w) r dr d\varphi, \quad (5)$$

внутренних упругих сил –

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \psi dz \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Здесь интеграл берется по площади  $S$  срединной плоскости заполнителя.

Виртуальные перемещения следуют из (2), деформации представлены в (3). После подстановки их в (6) имеем

$$\delta W = \iint_{r \varphi} \left[ r(T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} + Q \delta \psi) + T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} \right] r dr d\varphi,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + \left[ (r M_r)_{,r} - M_\varphi \right] \delta w \right\} d\varphi - \\ & - \int_{r \varphi} \left\{ \left[ (r T_r)_{,r} - T_\varphi \right] \delta u + \left[ (r H_r)_{,r} - H_\varphi - r Q \right] \delta \psi + \left[ (r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r} \right] \delta w \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Приравниваем полученные выражения виртуальных работ внутренних сил и внешних нагрузок (5). Полученное равенство справедливо при любых варьируемых перемещениях, если коэффициенты при независимых вариациях равны нулю. Отсюда имеем систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях

$$\begin{cases} H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) - Q = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q. \end{cases} \quad (7)$$

**Постановка краевой задачи в перемещениях.** Чтобы связать напряжения с деформациями слоев, воспользуемся законом Гука в девиаторно-сферической форме:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = 3K_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad s_\alpha^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)},$$

где  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $K_k$ ,  $G_k$  – модули объемной деформации и сдвига материала  $k$ -го слоя, причем  $K_1 = K_2$ ,  $G_1 = G_2$ ;  $s_\alpha^{(k)}$ ,  $\vartheta_\alpha^{(k)}$  – девиаторы;  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\vartheta_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и деформация в заполнителе.

Подставив в формулы (4) деформации (3), с учетом (1) получим выражения внутренних силовых факторов через две искомые функции  $\psi(r)$ ,  $w(r)$ :

$$\begin{aligned}
 T_r &= \left[ 2K_0^+ h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^+ h_3 \right] u_{,r} + \left[ 2K_0^- h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^- h_3 \right] \frac{u}{r}; \\
 H_r &= c^2 \left[ 2K_0^+ h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c \right] \psi_{,r} + c^2 \left[ 2K_0^- h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) + K_3^- \frac{2}{3} c \right] \frac{\psi}{r} - \\
 &\quad - c \left[ 2K_0^+ h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left( c + \frac{1}{2} h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c^2 \right] w_{,rr} - \\
 &\quad - c \left[ 2K_0^- h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left( c + \frac{1}{2} h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^- \frac{2}{3} c^2 \right] \frac{w_{,r}}{r}; \\
 M_r &= c \left[ 2K_0^+ h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left( c + \frac{1}{2} h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c^2 \right] \psi_{,r} - \\
 &\quad - c \left[ 2K_0^- h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left( c + \frac{1}{2} h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^- \frac{2}{3} c^2 \right] \frac{\psi}{r} - \\
 &\quad - \left[ 2K_0^+ h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left( c^2 + c h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) + \frac{1}{3} h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^+ \frac{2}{3} c^3 \right] w_{,rr} - \\
 &\quad - \left[ 2K_0^- h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \left( c^2 + c h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) + \frac{1}{3} h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) h_0 \left( 1 - \frac{r}{2r_0} \right) \right) + K_3^- \frac{2}{3} c^3 \right] \frac{w_{,r}}{r}.
 \end{aligned}$$

Соотношения для  $T_\varphi$ ,  $H_\varphi$  и  $M_\varphi$  следуют из приведенных, если в них поменять местами коэффициенты  $K_k^+$  и  $K_k^-$ .

После подстановки выражений внутренних силовых факторов в систему (7), получим уравнения равновесия сэндвич-пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 a_4^+ \psi_{,rr} + \left[ \frac{a_4^+}{r} - \frac{c^2 K_0^+ h_0}{r_0} \right] \psi_{,r} - \left[ \frac{a_4^+}{r} + \frac{c^2 K_0^- h_0}{r_0} \right] \frac{\psi}{r} - a_5^+ w_{,rrr} - \left[ \frac{a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{2r_0^2} - \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\
 + \left[ \frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^- r}{2r_0^2} + \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^-}{r_0} \right] \frac{w_{,r}}{r} - 2cG_3 \psi = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_5^+ \Psi_{,rrr} + \left[ \frac{2a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] \Psi_{,rr} - \\
& - \left[ \frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ + K_0^-) + \left( \frac{2ch_0^2 + 2c^2 h_0}{r_0 r} \right) \left( K_0^+ + \frac{K_0^-}{2} \right) \right] \Psi_{,r} + \\
& + \left[ \frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ - K_0^-) + \frac{3(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{2r_0 r} \right] \frac{\Psi}{r} - a_6^+ w_{,rrr} - \\
& - \left[ \frac{2a_6^+}{r} - \frac{2h_0^3 K_0^+ r^2}{r_0^3} + \frac{(h_0^3 + ch_0^2) K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\
& + \left[ \frac{a_6^+}{r} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left( \frac{5}{2} K_0^+ + K_0^- \right) - \left( \frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (2K_0^+ + K_0^-) + \left( \frac{h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0}{r_0 r} \right) (K_0^+ + K_0^-) \right] w_{,r} - \\
& - \left[ \frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left( 3K_0^+ - \frac{K_0^-}{2} \right) - \left( \frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (K_0^+ - K_0^-) + \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0 r} \right] \frac{w_{,r}}{r} = -q, \quad (8)
\end{aligned}$$

где  $a_4^\pm = c^2 \left( K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3} K_3^\pm c \right)$ ;  $a_5^\pm = c \left( K_1^\pm h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^\pm h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^2 \right)$ ;

$$a_6^\pm = K_1^\pm h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^3;$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.$$

Граничные условия на контуре  $r = r_0$  предполагаются следующими:

- при заделке  $\Psi = w = w_{,r} = 0$ ;
- при шарнирном закреплении  $\Psi = w = M_r = 0$ .

**Выводы.** Представленная постановка краевой задачи (8), (9) является основой для дальнейшего изучения напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин с линейно изменяющимися по толщине несущими слоями.

*Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция».*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 3 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 4 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

5 Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, no. 4. – P. 699–704.

6 Маркова, М. В. Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.

7 Кракова, И. Е. Свободные колебания транспортных пакетов из сэндвич-панелей / И. Е. Кракова, О. И. Якубович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 150–154.

8 Awrejcewicz, J. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, T. Shmatko // Composite Structures. – 2015. – Vol. 125. – P. 575–585.

9 Vibration and nonlinear dynamic analysis of variable thickness sandwich laminated composite panel in thermal environment / D. D. Nguyen [et al.] // Journal of Sandwich Structures & Materials. – 2021. – Vol. 23, is. 5. – P. 1541–1570.

10 Захарчук, Ю. В. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.

11 Нестерович, А. В. Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.

12 Козел, А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

13 Старовойтов, Э. И. Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы прочности. – 2007. – № 5. – С. 68–80.

14 Муштари, Х. М. Теория пологих трехслойных оболочек с наполнителем и слоями переменной толщины / Х. М. Муштари // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 4. – С. 162–168.

15 Андреев, С. В. Соотношения нелинейной теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины / С. В. Андреев, В. Н. Паймушин // Прикладная механика и техническая физика. – 1993. – № 3. – С. 120–128.

A. V. CHERNYAK

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **BENDING OF A SANDWICH PLATE WITH OUTER LAYERS OF LINEARLY VARYING THICKNESS**

An axisymmetric bending of a circular three-layer sandwich plate with external bearing layers linearly varying in thickness is considered. It is assumed that the outer layers deformation is described by Kirchhoff's kinematic hypotheses. For a relatively thick filler, the hypothesis of Timoshenko is used. The equilibrium equations are obtained, they make it possible to establish the plate stress-strain state, taking into account the given boundary conditions.

**Keywords:** bending, sandwich plate, variable thickness of bearing layers.

Получено 19.09.2022



УДК 531/534:621.8:678

*А. О. ШИМАНОВСКИЙ, О. И. ЦЫГАНОК*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ АКАДЕМИКА В. А. БЕЛОГО**

Представлен анализ вклада, который внес в науку один из организаторов Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта (ныне БелГУТ) академик В. А. Белый. Приведен перечень его наиболее цитируемых публикаций.

**Ключевые слова:** история науки, трибология, металлополимерные системы.

8 июня 2022 года исполнилось 100 лет со дня рождения академика В. А. Белого – известного ученого, внесшего значительный вклад в развитие механики. Он родился в Краснодаре (Россия) в семье служащего. Среднюю школу он окончил в 1939 г., имея в аттестате по всем 18 предметам оценку «отлично», и получил право поступления в высшую школу без вступительных экзаменов. Затем поступил на работу в паровозное депо станции Краснодар, но благодаря дополнительному набору студентов, которым в отличие от других вузов платили стипендию, поступил на паровозный факультет института железнодорожного транспорта в Ростове-на-Дону (РИИЖТ). После начала Великой Отечественной войны вместе с институтом эвакуировался в Тбилиси, где совмещал учебу с работой. В 1945 г. получил диплом с отличием с квалификацией инженер-механик. Его как лучшего выпускника государственная комиссия оставила для работы в РИИЖТе, где сначала он работал заведующим учебной лабораторией кафедры физики, а затем ассистентом кафедры электротехники. В феврале 1946 г. был назначен заместителем декана энергетического факультета, а в 1949 г. переведен на место заместителя декана механического факультета.

В мае 1948 года В. А. Белый впервые выступил на научной конференции с докладом «Индуктивный метод измерения напряжения», а в 1951 г. поступил в аспирантуру при Московском электромеханическом институте инженеров транспорта, где в 1952 году защитил кандидатскую диссертацию [1]. В ней им получен ряд новых результатов, связанных с износом элементов цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания, и предложены рекомендации по оптимизации конструкции его узлов трения.

После защиты диссертации в 1952 г. В. А. Белый возвращается на преподавательскую работу в РИИЖТ, а в 1953 г. по направлению МПС СССР переезжает в организуемый в г. Гомеле Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта (БИИЖТ) в качестве начальника учебной части. В следующем году в июне он назначается доцентом кафедры «Теория механизмов и детали машин», а в сентябре становится первым деканом механического факультета. В 1955 г. ему присваивается ученое звание доцент. Од-

новременно с работой декана в 1956 г. В. А. Белый возглавил кафедру теории механизмов и деталей машин, а в 1957 г. некоторое время исполнял обязанности заместителя начальника института по учебной и научной работе.

Во время работы в БИИЖТе Владимир Алексеевич отбирает лучших студентов и создает из них группу для исследований физики и механики полимеров и трения неметаллических материалов. В 1959 г. доклад В. А. Белого на выездной сессии Отделения физико-технических наук АН БССР стал основанием для создания Гомельского филиала лаборатории прочности и долговечности деталей машин при Институте машиноведения и автоматизации, первыми сотрудниками которого стали выпускники механического факультета БИИЖТа А. И. Свириденко и В. Е. Старжинский, впоследствии ставшие докторами наук.

Через год филиал становится самостоятельной лабораторией технической механики. С 1961 г. В. А. Белый полностью переходит из БИИЖТа в штат АН БССР, а лаборатория входит в состав Гомельского отделения Института математики и вычислительной техники. Направлением деятельности лаборатории стала разработка основ расчета, конструирования и технологии изготовления деталей машин из пластмасс. Здесь были разработаны первые вертикальные литьевые машины, установленные на промышленных предприятиях республики. В феврале 1962 года В. А. Белый назначается заместителем директора Гомельского отделения института. В это время лабораторией впервые была проведена Республиканская научно-техническая конференция «Применение пластмасс в машиностроении и приборостроении» (1962 г.), создано первое изобретение «Комбинированное шевронное зубчатое колесо с зацеплением М. Л. Новикова» (1962 г., авторы В. А. Белый, А. И. Свириденко) [2].

С учетом достижений лаборатории в 1963 г. на ее базе было образовано самостоятельное научное учреждение – Отдел механики полимеров АН БССР (далее – ОМП), а основу коллектива составляли выпускники БИИЖТа. Руководитель отдела В. А. Белый в этот период значительное внимание уделял изучению трения и изнашивания полимеров и изделий из них. Изданы монографии [3, 4], под его руководством были защищены первые кандидатские диссертации, получен первый зарубежный патент [5]. В 1969 г. впервые в Гомеле проведен Международный симпозиум [6]. За научные результаты в области трибологии полимеров в 1968 г. В. А. Белый был награжден Французским научно-инженерным обществом медалью Ж. Вокансона, в 1970 г. – медалью М.-Ж. Жаккара, что подчеркивало прикладной характер его работ.

Развитие ОМП потребовало привлечения специалистов разной направленности. В 1968 г. В. А. Белый вместе с директором «Гомсельмаша» И. П. Котенком добился открытия Гомельского филиала Белорусского политехнического института (ныне Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого). В 1969 г. ОМП был преобразован в Институт

механики металлополимерных систем АН БССР (далее – ИММС), а его первого директора В. А. Белого избрали членом-корреспондентом академии наук. В том же 1969 году на базе пединститута создается Гомельский государственный университет и его первым ректором становится В. А. Белый. А в 1971 г. ему присуждается ученая степень доктора технических наук и присваивается ученое звание профессора. В 1972 году его избирают академиком АН БССР.

В 1973 году В. А. Белый был избран вице-президентом АН БССР и переехал в Минск. На этом посту он курировал Отделение физико-технических наук, причем основным направлением его деятельности стало внедрение научных разработок в производство. В этой должности он работал до 1987 г., причем в период с 1978 по 1983 г. одновременно исполнял обязанности ректора Белорусского государственного университета.

В 1992 г. Владимир Алексеевич Белый стал первым почетным профессором БИИЖТа. Ушел из жизни он 17 августа 1994 года.

Несмотря на новые назначения с 1969 по 1979 г., В. А. Белый являлся бессменным директором своего детища, которым является ИММС. И даже официально покинув пост директора, он до конца дней своих как мог помогал коллегам идеями, личным участием в решении конкретных проблем.

Работа В. А. Белого [7], благодаря которой он стал доктором наук, полностью отражала основные научные направления созданного им института. В то время, когда применение полимеров в технике только начиналось, В. А. Белый поставил задачу создания материалов и конструкций, в которых полимеры и металлы работают совместно. Выполняемый в ИММС комплекс работ включал вопросы от изучения триботехнических, коррозионных и прочностных свойств до научного обоснования методов конструирования, расчета, технологии изготовления и эксплуатации полимерных и металлополимерных материалов и конструкций. Перспективность данного научного направления подтверждена временем.

Широкий диапазон исследований В. А. Белого привел к развитию смежных областей науки: теории адгезии, теории трения и изнашивания, механики структур, производства композиционных материалов и изделий из них. Владимиром Алексеевичем и его учениками обнаружен ряд весьма важных эффектов в области механики металлополимеров: наследственное термоокисление, транскристаллизация, фотодеформационный эффект, способность расплавов полимеров растворять металлы в окислительной среде, изучен механизм фрикционного переноса, разработаны новые методы управления свойствами трения при взаимодействии твердых тел и др. [8–10].

О плодотворной работе В. А. Белого в ИММС свидетельствуют опубликованные в этот период монографии [11–18], которые не утратили актуальности до настоящего времени, а книга [13] переведена на английский язык [19]. В наукометрические базы Web of Science и Scopus, несмотря на то, что они

были созданы уже после смерти В. А. Белого, включены более 100 его статей. Наибольшее количество цитирований в них имеют работы [20–25]. В результате проведенных исследований совершено научное открытие [26].

Благодаря значительным достижениям белорусских ученых в области трибологии В. А. Белый добился начала издания в ИММС с 1980 г. научного журнала «Трение и износ» и на протяжении десяти лет был его главным редактором. Этот журнал помимо русского издается также на английском языке и включен в крупнейшие мировые наукометрические базы.

В 1994 г. ИММС присвоено имя В. А. Белого, на здании установлен его барельеф, а напротив находится сквер, также носящий его имя.

Научная школа академика В. А. Белого известна во всём мире. В настоящее время она включает более 40 докторов и 170 кандидатов наук. Среди них есть академики, члены-корреспонденты НАН Беларуси, заслуженные изобретатели, лауреаты различных государственных премий. Кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика», где работают авторы, в свое время руководили его ученики – члены-корреспонденты НАН Беларуси Юрий Михайлович Плескачевский и Александр Владимирович Рогачев, которые внесли значительный вклад в формирование современного вектора ее развития.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Белый, В. А.** Исследование трения колец о втулки паровозных золотников : дис. ... канд. техн. наук / В. А. Белый. – М. : Моск. электромех. ин-т инженеров ж.-д. транспорта, 1952. – 372 с.

2 ИММС НАН Беларуси. История [Электронный ресурс]. – 2022. – Режим доступа : <https://mpri.org.by/ob-institute/istoriya/>. – Дата доступа : 10.10.2022.

3 **Белый, В. А.** Зубчатые передачи из пластмасс / В. А. Белый, А. И. Свириденко, С. В. Щербаков. – Минск : Наука и техника, 1965. – 248 с.

4 Применение полимерных материалов в качестве покрытий / С. В. Генель [и др.]. – М. : Химия, 1968. – 238 с.

5 Procédé de fluidisation ou de filtrage de matières dispersées et dispositif pour le réalisé : Pat. 689200 Belgique : IPC B 01J / V. A. Bely, N. I. Egorenkov. – Demandé 03.11.66 ; Délivré 14.04.67. – 10 p.

6 О природе трения твердых тел : материалы Всесоюзного симпозиума, г. Гомель, 24–27 июня 1969 г. – Минск : Наука и техника, 1971. – 472 с.

7 **Белый, В. А.** Создание и исследование новых материалов и конструкций на основе полимеров и металлов : доклад-обзор опубликованных работ и изобретений, представленных на соискание ученой степени доктора техн. наук / В. А. Белый, Объедин. совет отд-ния физ. и техн. наук АН Латв. ССР. – Рига, 1970. – 63 с.

8 Трибология в работах В. А. Белого / Н. К. Мышкин [и др.] // Трение и износ. – 2002. – Т. 23, № 3. – С. 230–236.

9 **Шпилевский, Э. М.** Академик В. А. Белый / Э. М. Шпилевский. – Минск : Беларуская навука, 2012. – 123 с.

10 Академик В. А. Белый: Ученый. Учитель. Организатор: к 100-летию со дня рождения. – Минск : Беларуская навука, 2022. – 190 с.

- 11 **Белый, В. А.** Адгезия полимеров к металлам / В. А. Белый, Н. И. Егоренков, Ю. М. Плескачевский. – Минск : Наука и техника, 1971. – 286 с.
- 12 Трение полимеров / В. А. Белый [и др.]. – М. : Наука, 1972. – 204 с.
- 13 Трение и износ материалов на основе полимеров / В. А. Белый [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1976. – 431 с.
- 14 **Белый, В. А.** Полимерные покрытия / В. А. Белый, В. А. Довгяло, О. Р. Юркевич. – Минск : Наука и техника, 1976. – 415 с.
- 15 Металлополимерные материалы и изделия / В. А. Белый [и др.]. – М. : Химия, 1979. – 310 с.
- 16 **Белый, В. А.** Древесно-полимерные конструкционные материалы и изделия / В. А. Белый, В. И. Врублевская, Б. И. Купчинов. – Минск : Наука и техника, 1980. – 279 с.
- 17 **Белый, В. А.** Введение в материаловедение герметизирующих систем / В. А. Белый, Л. С. Пинчук. – Минск : Наука и техника, 1980. – 303 с.
- 18 **Белый, В. А.** Металлополимерные зубчатые передачи / В. А. Белый, В. Е. Старжинский, С. В. Щербаков. – Минск : Наука и техника, 1981. – 351 с.
- 19 Friction and Wear in Polymer-Based Materials / V. A. Bely [et al.]. – Oxford : Pergamon Press, 1982. – 415 p.
- 20 **Bely, V. A.** Effect of structure on polymer friction / V. A. Bely, V. G. Savkin, A. I. Sviridyonok // Wear. – 1971. – Vol. 18, is. 1. – P. 11–18.
- 21 A study of transfer in frictional interaction of polymers / A. I. Sviridyonok [et al.] // Wear. – 1973. – Vol. 25, is. 3. – P. 301–308.
- 22 **Egorenkov, N. I.** Effect of metals on melt oxidation of polyethylene / N. I. Egorenkov, D. G. Lin, V. A. Bely // Journal of Polymer Science: Polymer Chemistry Edition. – 1975. – Vol. 13, is. 7. – P. 1493–1498.
- 23 **Egorenkov, N. I.** DTA investigation of inhibited and catalyzed oxidation of polyethylene / N. I. Egorenkov, D. G. Lin, V. A. Bely // Journal of Thermal Analysis. – 1976. – Vol. 10, is. 3. – P. 357–362.
- 24 **Belyi, V. A.** Acoustic spectrometry as used for the evaluation of tribological systems / V. A. Belyi, O. V. Kholodilov, A. I. Sviridyonok // Wear. – 1981. – Vol. 69, is. 3. – P. 309–319.
- 25 **Белый, В. А.** Актуальные направления развития исследований в области трения и изнашивания / В. А. Белый, А. И. Свириденко // Трение и износ. – 1987. – Т. 8, № 1. – С. 5–24.
- 26 Свойство синовиальной среды обеспечивать высокую антифрикционность хрящей в суставах человека и животных : диплом № 65 на открытие / В. А. Белый [и др.]. – № А–083; заявл. 16.02.84; Опубл. 19.01.98. – 4 с.

*A. O. SHIMANOVSKY, V. I. TSYHANOK*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **SCIENTIFIC LEGACY OF ACADEMICIAN V. A. BELY**

An analysis of the contribution to science made by one of the creators of the Belarusian Institute of Railway Engineers (now BelSUT) academician V. A. Bely is presented. A list of his most cited publications is given.

**Keywords:** history of science, tribology, metal-polymer systems.

Получено 31.10.2022

УДК 539.3

С. М. ЮСУБОВА

*Лицей имени Гейдара Алиева, Баку, Азербайджан***ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ  
В ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРЫ**

Представлено решение задачи о кручении незамкнутой радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы, которая не содержит ни один из полюсов 0 и  $\pi$ . Модули упругости линейно связаны с радиусом сферы. Боковая поверхность предполагается свободной от напряжений, а для конических сечений задаются напряжения, обеспечивающие равновесие сферы. Учитывая выполнение на боковых поверхностях сферы однородных граничных условий, выведено характеристическое уравнение относительно спектрального параметра. Построены решения, соответствующие двум группам корней этого уравнения. Первой группе соответствует проникающее решение, при котором напряженное состояние соответствует действию крутящих моментов от напряжений, действующих в произвольном сечении, параллельном экватору сферы. Решения, определяемые счетным множеством второй группы корней, имеют характер краевого эффекта, локализованного в конических срезах. В случае существенной анизотропии некоторые такие решения затухают незначительно и могут охватывать всю область, занятую сферой.

**Ключевые слова:** кручение сферы, радиально-изотропная сфера, трансверсально-изотропная сфера, напряженно-деформированное состояние, краевой эффект.

**Введение.** Существует целый ряд прикладных теорий оболочек, которые основываются на различных гипотезах, однако их области применимости изучены недостаточно. Для установления области применимости существующих и с целью создания новых уточненных теорий неоднородных оболочек необходим анализ их напряженно-деформированного состояния, основанный на решении уравнений трехмерной теории упругости.

Установление напряжений и деформаций неоднородных тел на основе уравнений теории упругости сопряжено со значительными математическими трудностями. В то же время оно позволяет обнаруживать новые с физической точки зрения качественные и количественные эффекты.

Решение трехмерных задач теории упругости для сферы выполнено в ряде исследований [1]. Одна из первых таких работ опубликована Сен-Венаном [2]. В статье [3] построено общее решение уравнений теории упругости для сферы и выполнен анализ ее напряженно-деформированного состояния. Для толстой изотропной сферы в работе [4] получены однородные решения, которые зависят от корней трансцендентного уравнения. На основе решения трехмерных задач теории упругости в [5] для сферы малой толщины проанализирована точность существующих прикладных теорий. Трехмерная асимптотическая теория сферической оболочки малой толщины изложена в [6].

Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной сферы с мягким наполнителем представлено в статье [7]. В работе [8] решена задача о кручении радиально-слоистой сферы, имеющей произвольное число чередующихся жестких и мягких слоев. Температурные напряжения в электромагнитоупругих полых шарах из функционально-градиентного материала исследованы в [9]. В публикациях [10, 11] изучены термические и механические напряжения в полой толстой радиально-неоднородной сфере для случая изменения характеристик материала по радиусу в соответствии со степенным законом. Деформирование радиально-неоднородного полого шара исследовано в [12] с помощью методов конечных элементов и сплайн-коллокации, выполнено сравнение результатов, полученных разными методами. В статье [13] путем асимптотического интегрирования уравнений теории упругости выполнено решение осесимметричной задачи для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины, и определены особенности ее напряженно-деформированного состояния. Метод однородных решений применен в работе [14] к осесимметричной задаче, в которой получены асимптотические формулы, позволяющие рассчитать напряжения и деформации в радиально-неоднородной сфере малой толщины. Этот же метод использован в статье [15] для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины при решении осесимметричной задачи теории упругости. На основе проведенного асимптотического анализа проведена классификация решений.

Целью представленной работы стало построение аналитического решения уравнений, описывающих кручение радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы.

**Нахождение решения.** Рассмотрим задачу о кручении радиально-неоднородной трансверсально-изотропной незамкнутой полый сферы малой толщины, предполагая, что сфера не содержит ни один из полюсов  $0$  и  $\pi$  (рисунок 1). В сферической системе координат область, которая занята сферой,  $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0; 2\pi]\}$ .

Предполагаем, что изменение модуля упругости по радиусу происходит по линейному закону:

$$A_{22} = a_{22}^{(0)} r, \quad A_{23} = a_{23}^{(0)} r, \quad A_{44} = a_{44}^{(0)} r, \quad (1)$$

где  $a_{22}^{(0)}, a_{23}^{(0)}, a_{44}^{(0)}$  – некоторые постоянные величины.

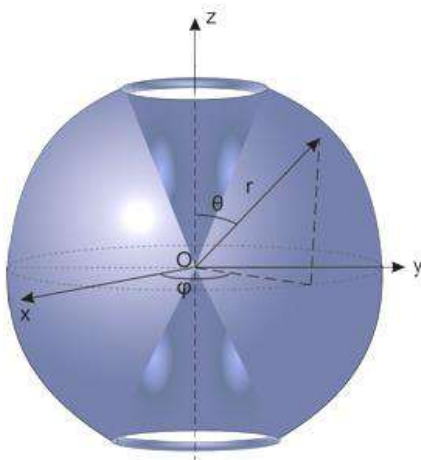


Рисунок 1 – Незамкнутая полая сфера, не содержащая ни один из полюсов  $0$  и  $\pi$

Уравнение равновесия в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  для случая отсутствия массовых сил имеет вид [16]

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\theta}$  – компоненты тензора напряжений, которые выражаются через векторы перемещений  $v_\varphi = v_\varphi(r, \theta)$  следующим образом [6]:

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{(A_{22} - A_{23})}{2} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - v_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right); \quad (3)$$

$$\sigma_{r\varphi} = A_{44} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right). \quad (4)$$

Подставляя выражения (3), (4) в (2), с учетом соотношений (1) получаем уравнение равновесия в перемещениях:

$$a_{44}^{(0)} \left( r \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{3v_\varphi}{r} \right) + \frac{(a_{22}^{(0)} - a_{23}^{(0)})}{2r^2} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} v_\varphi \right) = 0. \quad (5)$$

Введем новую безразмерную переменную  $\rho$ , связанную с радиальной координатой  $r$  соотношением:

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right), \quad (6)$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$  – малый параметр, который характеризует толщину сферы;  $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$ ;  $\rho \in [-1; 1]$ .

С учетом (6) уравнение равновесия (5) принимает вид:

$$b_{44}^{(0)} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - 3\varepsilon^2 u_\varphi \right) + \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = 0, \quad (7)$$

где  $u_\varphi = \frac{v_\varphi}{r_0}$ ,  $b_{ij}^{(0)} = \frac{a_{ij}^{(0)} r_0}{G_0}$  – безразмерные величины;  $G_0$  – некоторый параметр, имеющий размерность модуля упругости.

Если боковая часть границы сферы свободна от напряжений, то

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{b_{44}^{(0)}}{\varepsilon} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi \right) \Bigg|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (8)$$

где  $\sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{r\varphi} / G_0$  – безразмерная величина.



Считаем, что на торцах сферы (конических срезах) заданы напряжения

$$\sigma_{\varphi\theta}\Big|_{\theta=\theta_s} = f_s(\rho), \quad (9)$$

где  $f_s(\rho)$  ( $s = 1; 2$ ) – достаточно гладкие функции, имеющие относительно  $\varepsilon$  порядок  $O(1)$  и удовлетворяющие условиям равновесия.

Займемся построением однородных решений, к которым будем относить всякое решение уравнения равновесия (7), соответствующее отсутствию напряжений на боковых поверхностях. Такое решение ищем в виде

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = c(\rho)m'(\theta), \quad (10)$$

где функция  $m(\theta)$  удовлетворяет уравнению Лежандра [6]:

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \cdot m'(\theta) + \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) m(\theta) = 0,$$

причем параметр  $z$  определяется исходя из выполнения граничных условий для боковой поверхности.

Подставляя (10) в (7), (8), получаем

$$c''(\rho) + 2\varepsilon c'(\rho) + \left[ \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{2b_{44}^{(0)}} \left( \frac{9}{4} - z^2 \right) - 3 \right] \varepsilon^2 c(\rho) = 0, \quad (11)$$

$$b_{44}^{(0)} (c'(\rho) - \varepsilon c(\rho))\Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (12)$$

Решение (11) имеет вид

$$c(\rho) = D_1 e^{\varepsilon(t-1)\rho} + D_2 e^{-\varepsilon(t+1)\rho}, \quad (13)$$

где  $D_1, D_2$  – постоянные интегрирования;  $t = \sqrt{4 + \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{2b_{44}^{(0)}} \left( z^2 - \frac{9}{4} \right)}$ .

С помощью (13), удовлетворяя граничным условиям (12) относительно  $D_1, D_2$ , получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (t-2)e^{-\varepsilon(t-1)} D_1 - (t+2)e^{\varepsilon(t+1)} D_2 = 0, \\ (t-2)e^{\varepsilon(t-1)} D_1 - (t+2)e^{-\varepsilon(t+1)} D_2 = 0. \end{cases}$$

Условие существования ее нетривиальных решений приводит к характеристическому уравнению

$$\Delta(z; \varepsilon) = \left( z^2 - \frac{9}{4} \right) \operatorname{sh} \left( 2\varepsilon \sqrt{4 + \frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{2b_{44}^{(0)}} \left( z^2 - \frac{9}{4} \right)} \right) = 0. \quad (14)$$

Функция  $\Delta(z; \varepsilon)$  имеет две группы корней со следующими свойствами:

– первая состоит из нулей  $z_0^{\pm} = \pm \frac{3}{2}$ ;

– вторая включает счетное множество нулей  $z_k = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2b_{44}^{(0)}}{b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}} \left( \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon^2} + 4 \right)}$ ,

которые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремятся к бесконечности.

Перемещения и напряжения в случае  $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$  имеют вид

$$u_\varphi^{(1)}(\rho; \theta) = D_0 e^{\varepsilon\rho} \left( \frac{1}{2} \sin \theta \ln \left( \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right); \quad (15)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{\theta\varphi}^{(1)} = -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})e^{\varepsilon\rho}}{\sin^2 \theta} D_0.$$

Для второй группы нулей получаем

$$u_\varphi^{(2)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[ \pi k \cos \left( \frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) - 4\varepsilon \sin \left( \frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) \right] m'_k(\theta); \quad (16)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{44}^{(0)} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left( \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon} + 4\varepsilon \right) \sin \left( \frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) m'_k(\theta); \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta\varphi}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[ -\frac{\pi k}{2} \cos \left( \frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) + 2\varepsilon \sin \left( \frac{\pi k}{2} (1-\rho) \right) \right] \times \\ \times \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) m_k(\theta) \right], \quad (18)$$

где  $m_k(\theta) = N_{1k} P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta) + N_{2k} Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$ ;  $P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$ ,  $Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$  – функции Лежандра первого и второго рода соответственно;  $N_{1k}$ ,  $N_{2k}$  – неизвестные постоянные.

Уравнения (11), (12) представим в виде

$$Ac = \lambda c,$$

где  $Ac = \left\{ q \left( -c''(\rho) - 2\varepsilon c'(\rho) + 3\varepsilon^2 c(\rho) \right); b_{44}^{(0)} (c'(\rho) - \varepsilon c(\rho)) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0 \right\}$ ;

$$\lambda = \frac{9}{4} - z^2; \quad q = \frac{2b_{44}^{(0)}}{\varepsilon^2 (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}.$$

Введем гильбертово пространство  $H$  со скалярным произведением:

$$(c, v) = \int_{-1}^1 c(\rho) v(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho.$$

Докажем, что  $A$  – симметричный оператор в гильбертовом пространстве  $H(-1; 1)$  с весом  $e^{2\varepsilon\rho}$ . Для любой функции  $c(\rho) \in D_A$ ,  $v(\rho) \in D_A$  имеем

$$\begin{aligned}
(Ac, v) - (c, Av) &= \int_{-1}^1 (vAc - cAv) e^{2\varepsilon\rho} d\rho = \int_{-1}^1 \left[ q(-c''(\rho) - 2\varepsilon c'(\rho) + \right. \\
&\quad \left. + 3\varepsilon^2 c(\rho)) v(\rho) - q(-v''(\rho) - 2\varepsilon v'(\rho) + 3\varepsilon^2 v(\rho)) c(\rho) \right] e^{2\varepsilon\rho} d\rho = \\
&= \int_{-1}^1 \left[ 2\varepsilon(c(\rho)v'(\rho) - c'(\rho)v(\rho)) + c(\rho)v''(\rho) - v(\rho)c''(\rho) \right] e^{2\varepsilon\rho} d\rho. \quad (19)
\end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям и с учетом граничных условий (12) из (19) находим, что:

$$(Ac, v) - (c, Av) = 0, \text{ то есть } (Ac, v) = (c, Av).$$

Все собственные значения  $\lambda_k(A)$  вещественны, причем соответствующие им собственные функции являются ортогональными:

$$(c_k, c_n) = 0; \quad (k \neq n), \quad (20)$$

где 
$$c_n = \left( \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - 4\varepsilon \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right) e^{-\varepsilon(\rho+1)}.$$

Общее решение задачи (7), (8) будет суперпозицией решений, соответствующих выше найденным группам корней характеристического уравнения (14):

$$\begin{aligned}
u_\varphi(\rho, \theta) &= D_0 e^{\varepsilon\rho} \left( \frac{1}{2} \sin \theta \ln \left( \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[ \pi k \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - 4\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] m'_k(\theta); \\
\sigma_{\rho\varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{44}^{(0)} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left( \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon} + 4\varepsilon \right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) m'_k(\theta), \\
\sigma_{\theta\varphi} &= -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{\varepsilon\rho}}{\sin^2 \theta} D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[ 2\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) m_k(\theta) \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

Докажем, что постоянная  $D_0$  при отсутствии внешних усилий на боковых поверхностях пропорциональна крутящему моменту  $M$ , создаваемому напряжениями, действующими в сечении  $\theta = \text{const}$ . Его величина [6]

$$M = 2\pi \sin^2 \theta \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\varphi} r^2 dr,$$

или 
$$M = 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \int_{-1}^1 \sigma_{\theta\varphi} e^{3\varepsilon\rho} d\rho. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (22), интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}
 M &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{\sin^2 \theta} e^{\varepsilon\rho} D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[ 2\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta) \right] \right\} e^{3\varepsilon\rho} d\rho = \\
 &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \left\{ -\frac{(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}{\sin^2 \theta} D_0 \int_{-1}^1 e^{4\varepsilon\rho} d\rho + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) (2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta) \right) \left[ 2\varepsilon \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) e^{\varepsilon(2\rho-1)} d\rho - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\pi k}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) e^{\varepsilon(2\rho-1)} d\rho \right] \right\} = \pi(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \operatorname{sh}(4\varepsilon) D_0.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D_0 = \frac{M}{\pi(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \operatorname{sh}(4\varepsilon)}. \quad (23)$$

**Обсуждение результатов.** Уравнение (15) является проникающим решением и характеризует внутреннее напряженно-деформированное состояние сферы. Напряженное состояние, соответствующее решению (16), является самоуравновешенным в каждом сечении  $\theta = \text{const}$  и играет роль краевого эффекта, локализованного у торцов.

Для второй группы корней уравнения (14) главный член асимптотического решения уравнения (11) имеет следующий вид [13]:

$$m_k(\theta) = \begin{cases} (\mu\pi^2 k^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp\left(-\frac{\pi k}{\varepsilon} \sqrt{\mu}(\theta - \theta_1)\right) (1 + O(\varepsilon)) & \text{в окрестности } \theta = \theta_1; \\ (\mu\pi^2 k^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp\left(\frac{\pi k}{\varepsilon} \sqrt{\mu}(\theta - \theta_2)\right) (1 + O(\varepsilon)) & \text{в окрестности } \theta = \theta_2. \end{cases} \quad (24)$$

где 
$$\mu = \frac{b_{44}^{(0)}}{2(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)})}.$$

При увеличении расстояния от конических сечений  $\theta = \theta_j$  ( $j = 1, 2$ ), решения (16)–(18) экспоненциально убывают. Из (24) видно, что при фиксированных значениях « $k$ » и при малых значениях  $\mu$  некоторые решения, связанные с краевым эффектом, не затухают и могут в значительной степени менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Таким образом, в этом случае имеется качественное отличие в напряженно-деформированном состоянии радиально-неоднородных трансверсально-

изотропной и изотропной сфер [13], что подтверждает результаты, которые получены ранее в работе [17] для задачи, близкой к рассмотренной.

Подставляем (21) в (9) и учитываем (23):

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[ 2\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] \times \\ \times \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta_s m'_k(\theta_s) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta_s) \right] = f_s^*(\rho), \quad (25)$$

где 
$$f_s^*(\rho) = f_s(\rho) - \frac{M e^{\varepsilon \rho}}{\pi(b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \operatorname{sh}(4\varepsilon) \sin^2 \theta_s}.$$

Умножая (25) на  $c_n(\rho)e^{2\varepsilon\rho}$  и интегрируя в пределах  $[-1; 1]$ , с учетом (20) имеем

$$\left[ 2 \operatorname{ctg} \theta m'_k(\theta) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) m_k(\theta) \right] \Big|_{\theta=\theta_s} = h_{sk}, \quad (s=1; 2), \quad (26)$$

где 
$$h_{sk} = -\frac{1}{16\varepsilon^2 + \pi^2 k^2} \int_{-1}^1 \left[ 4\varepsilon \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \pi k \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] e^{\varepsilon(\rho-1)} f_{3s}^*(\rho) d\rho.$$

После решения системы (26) определяем неизвестные постоянные  $N_{1k}$ ,  $N_{2k}$  в следующем виде:

$$N_{1k} = \frac{W_{1k}}{W_k}; \quad N_{2k} = \frac{W_{2k}}{W_k},$$

где 
$$W_k = 4 \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1;1)}(\theta_1; \theta_2) + 2 \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) \left[ \operatorname{ctg} \theta_1 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1;0)}(\theta_1; \theta_2) + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \theta_2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(0;1)}(\theta_1; \theta_2) \right] + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right)^2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(0;0)}(\theta_1; \theta_2);$$

$$W_{1k} = h_{1k} \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta_2 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) \right] - \\ - h_{2k} \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta_1 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) \right];$$

$$W_{2k} = h_{2k} \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta_1 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_1) \right] - \\ - h_{1k} \left[ 2 \operatorname{ctg} \theta_2 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4}\right) P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta_2) \right];$$

$$L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_1, n_2)}(\theta_1; \theta_2) = P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_1)}(\cos \theta_1) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_2)}(\cos \theta_2) - \\ - P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_2)}(\cos \theta_2) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n_1)}(\cos \theta_1) \quad (n_1, n_2 = 0, 1).$$

**Выводы.** Получены выражения, позволяющие рассчитать напряжения и деформации в точках радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины при ее кручении. На основе проведенного анализа получены проникающее решение и решение, связанное с наличием краевого эффекта. Напряженное состояние, определяемое проникающим решением, эквивалентно крутящему моменту от напряжений, действующих в произвольном сечении сферы  $\theta = \text{const}$ . Вторая группа решений локализована в конических срезам и при удалении от конических сечений экспоненциально убывает. В отличие от изотропной радиально-неоднородной сферы некоторые решения для трансверсально-изотропной сферы демонстрируют распространение краевого эффекта на достаточно большое расстояние от мест расположения конических сечений, что может оказывать существенное влияние на картину напряженно-деформированного состояния.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Tokovyy, Y. Elastic analysis of inhomogeneous solids : history and development in brief / Y. Tokovyy, C. C. Ma // *Journal of Mechanics*. – 2019. – Vol. 35, is. 5. – P. 613–626.
- 2 Love, A. E. A treatise on the mathematical theory of elasticity / A. E. Love // Cambridge : University Press, 1927. – 643 p.
- 3 Галеркин, Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки / Б. Г. Галеркин // *Прикладная математика и механика*. – 1942. – Т. 6, № 6. – С. 487–496.
- 4 Лурье, А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки / А. И. Лурье // *Прикладная математика и механика*. – 1943. – Т. 7, № 6. – С. 393–404.
- 5 Виленская, Т. В. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины / Т. В. Виленская, И. И. Ворович // *Прикладная математика и механика*. – 1966. – Т. 30, № 2. – С. 278–295.
- 6 Mekhtiev, M. F. Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity / M. F. Mekhtiev. – Singapore : Springer, 2019. – 241 p.
- 7 Боев, Н. В. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки / Н. В. Боев, Ю. А. Устинов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1985. – № 3. – С. 136–143.
- 8 Ахмедов, Н. К. Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов // *Прикладная математика и механика*. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 416–426.
- 9 Ootao, Y. Transient thermal stress problem of a functionally graded magneto-electrothermoelastic hollow sphere / Y. Ootao, M. Ishihara // *Materials*. – 2011. – Vol. 4, no. 12. – P. 2136–2150.

10 **Poultangari, R.** Functionally graded hollow spheres under non-axisymmetric thermo-mechanical loads / R. Poultangari, M. Jabbari, R. Eslami // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2008. – Vol. 85, is. 5. – P. 295–305.

11 **Eslami, M. R.** Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere / M. R. Eslami, M. H. Babaei, R. Poultangari // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82, is. 7. – P. 522–527.

12 **Grigorenko, A. Y.** Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere / A. Y. Grigorenko, N. P. Yaremchenko, S. N. Yaremchenko // International Applied Mechanics. – 2018. – Vol. 54, is. 5. – P. 577–583.

13 **Akhmedov, N. K.** Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres / N. K. Akhmedov, A. H. Sofiyev // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 139. – P. 232–241.

14 **Akhmedov, N. K.** Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric problem of elasticity theory for a sphere with variable elasticity modulus / N. K. Akhmedov, N. S. Gasanova // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2020. – Vol. 25, is. 12. – P. 2231–2251.

15 **Akhmedov, N. K.** Investigation of elasticity problem for the radially inhomogeneous transversely isotropic sphere / N. K. Akhmedov, S. M. Yusubova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – Vol. 45, is. 16. – P. 10162–10186.

16 **Lurie, A. I.** Theory of Elasticity / A. I. Lurie. – Berlin : Springer, 2005. – 1050 p.

17 **Ахмедов, Н. К.** Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Т. Б. Мамедова // Вестник Донского государственного технического университета. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 455–461.

*S. M. YUSUBOVA*

*Lyceum named after Heydar Aliyev, Baku, Azerbaijan*

## **HOMOGENEOUS SOLUTIONS CONSTRUCTION FOR THE PROBLEM OF A RADIALLY INHOMOGENEOUS TRANSVERSALLY ISOTROPIC SPHERE TORSION**

A solution to the problem of torsion of a non-closed radially inhomogeneous transversally isotropic sphere with not any poles of 0 and  $\pi$  is presented. The elastic moduli are linearly related to the sphere radius. The lateral surface is assumed to be stress-free, and for conic sections, stresses are specified to ensure the equilibrium of the sphere. Taking into account the fulfillment of homogeneous boundary conditions on the sphere side surfaces, a characteristic equation is derived with respect to the spectral parameter. Solutions are constructed corresponding to two groups of roots of this equation. A penetrating solution corresponds to the first group, when the stress state corresponds to the action of torques from stresses acting in an arbitrary section parallel to the sphere equator. The solutions determined by the countable set of the second group of roots have the character of a boundary effect localized in conic slices. In the case of significant anisotropy, some of these solutions decay insignificantly and can cover the entire region of the sphere.

**Keywords:** sphere torsion, radially isotropic sphere, transversely isotropic sphere, stress-strain state, boundary effect.

Получено 31.10.2022

УДК 691-419:534.1

А. В. ЯРОВАЯ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**

Исследуются свободные поперечные колебания находящейся в температурном поле круговой трехслойной пластины с шарнирно закрепленным контуром. Принято, что деформирование соответствует кинематической гипотезе ломаной линии. Для решения системы дифференциальных уравнений движения применен метод разложения по системе собственных ортонормированных функций. Получено трансцендентное уравнение, из которого определены собственные числа и соответствующие им частоты собственных колебаний. Представлены результаты численного расчета зависимости собственных частот колебаний от температуры.

**Ключевые слова:** круговая сэндвич-пластина, свободные колебания, собственные функции, температура.

**Введение.** Современные требования машиностроения к прочности композитных конструкций, работающих в условиях воздействия различных физико-механических полей, приводят к необходимости создания расчетных моделей квазистатического и динамического деформирования, вызванного, в том числе, тепловым воздействием.

Монографии [1–3] предлагают подходы к построению математических моделей статического и динамического деформирования элементов слоистых конструкций при различных краевых условиях. Решения ряда задач о нестационарных и гармонических, в том числе неосесимметричных, нагружениях неоднородных цилиндрических и сферических оболочек представлены в работах [4, 5]. В публикациях [6, 7] исследованы вынужденные колебания трехслойных круговых пластин при локальных и резонансных нагрузках. Решения ряда задач о квазистатическом упругопластическом деформировании трехслойных круговых пластин, в том числе с учетом сжимаемости заполнителя и деформирования в своей плоскости, рассмотрены в работах [8–12]. Изотермическое деформирование трехслойных пластин, взаимодействующих с упругим основанием, рассмотрено в [13, 14]. Термосиловое нагружение неоднородной пластины изучалось в работах [15, 16]. Статья [17] посвящена исследованию свободных колебаний в температурном поле трехслойной круговой пластины, контур которой защемлен.

Целью данной работы является решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях шарнирно закрепленной сэндвич-пластины в стационарном температурном поле.

**Постановка начально-краевой задачи.** Рассматривается трехслойная пластина, в которой тонкие несущие слои имеют толщины  $h_1 = h_2$ , а достаточно



толстый наполнитель –  $h_3 = 2c$ . Введена цилиндрическая система координат, в которой в качестве координатной принята срединная плоскость наполнителя, а ось  $z$  направляется перпендикулярно этой плоскости в сторону первого слоя (рисунок 1). При разработке математической модели использованы следующие кинематические гипотезы: Кирхгофа – для несущих слоев; прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали – для легкого наполнителя.

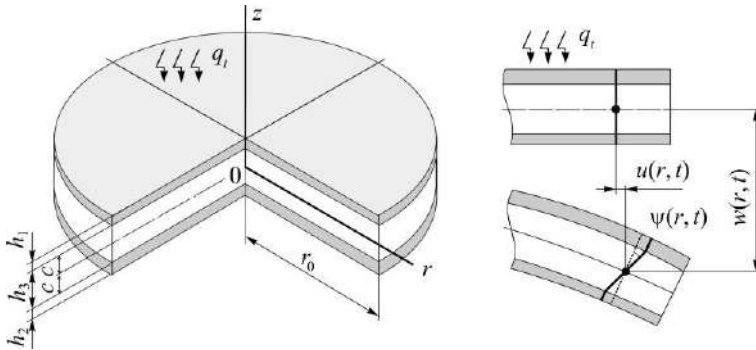


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной пластины

Температурное поле принято однородным ( $T = \text{const}$ ). Деформации в слоях связаны с напряжениями соотношениями термоупругости:

$$s_i^{(k)} = 2G_k(T)\varepsilon_i^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T) \quad (k = 1, 2, 3); \quad (1)$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k(T)\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (i = r, \varphi),$$

где  $s_i^{(k)}$ ,  $\varepsilon_i^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k(T)$ ,  $K_k(T)$  – модули сдвига и объемного деформирования,  $T$  – усредненная по толщине пластины температура;  $\Delta T$  – приращение температуры по отношению к некоторому начальному значению  $T_0$ ;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения материала  $k$ -го слоя.

Выражения модулей упругости  $G(T)$ ,  $K(T)$  в зависимости от температуры приняты в соответствии с универсальной формулой Белла [1]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T);$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где  $T_m$  – температура плавления материала;  $G(0)$ ,  $K(0)$ ,  $E(0)$  – значения, определяемые по результатам экспериментов, например, если при некоторой начальной температуре  $T_0$  знаем  $G_0$ , то получаем  $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$ .

Прогиб пластины  $w(r, t)$  и относительный сдвиг в наполнителе  $\psi(r, t)$  в дальнейшем считаются искомыми функциями. Предполагается, что на кон-

туре пластины располагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев ( $\psi = 0$  при  $r = 1$ ).

Общие уравнения движения трехслойной упругой пластины, полученные вариационным методом, представлены в [1]. Соответственно свободные колебания описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= 0; \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \end{aligned}$$

коэффициенты  $a_i$  зависят от температуры и выражаются через упругие модули

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \\ a_5 &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &= K_k(T) + \frac{4}{3} G_k(T), \quad K_k^- = K_k(T) - \frac{2}{3} G_k(T); \end{aligned}$$

$M_0\ddot{w}$  – поперечные силы инерции,  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$ ,  $\rho_k$  – плотность материала.

Начальные условия движения

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (3)$$

Кинематические условия шарнирного закрепления на контуре пластины

$$\psi = w = 0, \quad M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad (4)$$

где изгибающий момент определяется с использованием выражений (1)

$$M_r = \left( a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1} - M_t \right) = 0,$$

причем температурная составляющая момента при  $T = \text{const}$

$$\begin{aligned} M_t &= \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_k K_k \int_{h_k} T z dz = 0; \\ a_{60} &= h_1 K_1^- \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + h_2 K_2^- \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^-. \end{aligned}$$

**Аналитическое решение.** Система дифференциальных уравнений движения (2), преобразовывается к виду

$$\psi = \frac{a_5}{a_4} w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты  $M^4 = M_0 D$ ,  $D = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2}$ .

Перемещения в центре пластины ограничены по величине, поэтому в (5) необходимо положить  $C_2 = 0$ . Прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(\beta r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (6)$$

где  $v(\beta r)$  – искомая функция,  $\omega$  – частота собственных колебаний,  $A$  и  $B$  – константы, которые определяются начальными условиями (3).

Уравнение для определения функции  $v(r)$  получим после подстановки прогиба (6) в (5):

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0, \quad (7)$$

где  $\beta$  – собственное число оператора  $L_3$  связано с частотой  $\omega$

$$\beta^4 = M^4 \omega^2.$$

Решение уравнения (7) известно:

$$v(\beta r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) + C_6 K_0(\beta r), \quad (8)$$

где  $C_3, \dots, C_6$  – константы интегрирования,  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя;  $I_0, K_0$  – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда.

Функции  $Y_0(\beta r)$  и  $K_0(\beta r)$  обладают особенностью типа логарифма в начале координат. Поэтому в (8) необходимо положить  $C_5 = C_6 = 0$ . В результате решение системы (5) записываем в виде

$$\psi(r, t) = b_2 w_{,r} + C_3 r,$$

$$w(r, t) = v(\beta r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (9)$$

где

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r).$$

Подставив в граничные условия (4) решение (9) с учетом функции  $v(\beta r)$ , получаем систему алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования  $C_3, C_4$ :

$$C_3 J_0(\beta r_0) + C_4 I_0(\beta r_0) = 0,$$

$$C_3 (a_7 (\beta J_0(\beta r_0) - J_1(\beta r_0)) + a_8 J_1(\beta r_0)) +$$

$$+ C_4 (a_7 (\beta I_0(\beta r_0) - I_1(\beta r_0)) + a_8 I_1(\beta r_0)) = 0.$$

Эта система является однородной, поэтому имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю ее детерминанта. Поэтому уравнение для нахождения собственных чисел шарнирно закрепленной по контуру круговой трехслойной пластины, находящейся в температурном поле

$$\frac{J_0(\beta r_0)}{a_7(\beta J_0(\beta r_0) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta r_0)} = -\frac{I_0(\beta r_0)}{a_7(\beta I_0(\beta r_0) - I_1(\beta r_0)) + a_8 I_1(\beta r_0)}, \quad (10)$$

где  $J_1, I_1$  – функции Бесселя первого порядка;

$$a_7 = a_6 - \frac{a_5^2}{a_4}; \quad a_8 = a_{60} + \frac{a_5^2}{a_4};$$

$$a_{60} = h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^- + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-.$$

Трансцендентное уравнение (10) имеет бесконечное число решений  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), которые представляют собой собственные числа оператора в уравнении (7). Соответственно частоты собственных колебаний

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \quad (11)$$

Заметим, что частоты  $\omega_n$  зависят от температуры в связи с изменением коэффициентов в знаменателе. Собственные числа от температуры не зависят.

Описание прогиба круглой сэндвич-пластины, которая шарнирно закреплена по контуру, при свободных поперечных колебаниях осуществляется системой собственных ортонормированных функций:

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (12)$$

где  $d_n$  – нормирующие коэффициенты.

В (12) учтено вытекающее из условия  $w = 0$  при  $r = r_0$  соотношение между константами интегрирования  $C_6 = -C_5 J_0(\beta r_0) / I_0(\beta r_0)$ .

В конечном виде искомое решение получается в результате разложения в ряд по полученной фундаментальной системе функций (12)

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\ w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\varphi_n \equiv \varphi_n(\beta_n, r)$  – система функций, связанная с системой собственных ортонормированных функций (12) дифференциальной зависимостью

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[ J_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} \left( I_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\beta_n r) \right) \right].$$

Коэффициенты  $A_n, B_n$  в (13) следуют из начальных условий движения (3):

$$A_n = \int_0^1 f(r)v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 g(r)v_n r dr.$$

Таким образом, перемещения (13) с частотами (11) описывают свободные колебания круговой сэндвич-пластины в стационарном температурном поле.

**Численные результаты.** В ходе вычислений получена зависимость собственных частот от температуры круговой шарнирно опертой сэндвич-пластины из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т единичного радиуса: при  $h_1 = h_2 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,1$ . На рисунке 2 приведены соответствующие графики, показывающие, что нагревание на  $100^\circ\text{C}$  приводит к уменьшению частот на 3,6 %, при нагревании на  $200^\circ\text{C}$  – 7 %.

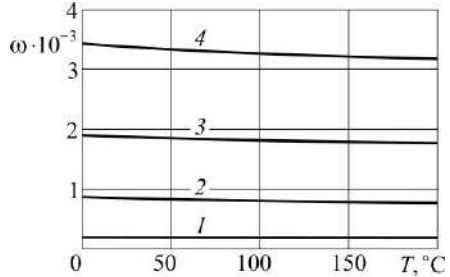


Рисунок 2 – Зависимость от температуры собственных чисел и частот колебаний:

1 –  $\omega_0$ ; 2 –  $\omega_1$ ; 3 –  $\omega_2$ ; 4 –  $\omega_3$

**Вывод.** При проектировании конструкций, включающих сэндвич-панели, влияние стационарной температуры на частоты собственных колебаний целесообразно учитывать при нагревании на  $200^\circ\text{C}$  и более.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22УЗБ-015).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 3 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 4 Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
- 5 Mikhailova, E. Yu. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. – P. 239–247.
- 6 Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.
- 7 Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, no. 5. – P. 561–570.

8 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

9 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках.* – 2018. – № 2. – С. 14–27.

10 **Нестерович, А. В.** Напряжённое состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

11 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

12 **Яровая, А. В.** Перемещения в трехслойной ортотропной пластине с усиливающей накладкой / А. В. Яровая // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – Вып. 10. – С. 224–232.

13 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

14 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

15 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics.* – 2006. – Vol. 42, no. 2. – P. 206–213.

16 **Плескачевский, Ю. М.** Деформирование и разрушение элементов конструкций из неоднородных материалов в условиях термосилового нагружения / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева, П. И. Ширвель. – Минск : БНТУ, 2018. – 228 с.

17 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, А. В. Яровая // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2022. – Вып. 36. – С. 15–20.

A. V. YAROVAYA

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **FREE OSCILLATIONS OF A HINGED CIRCULAR SANDWICH PLATE IN A TEMPERATURE FIELD**

Free transverse oscillations of a circular three-layer plate with a hinged contour located in a temperature field are investigated. It is assumed that the deformation corresponds to the kinematic hypothesis of a broken line. To solve the system of motion differential equations there is applied the method of expansion in the terms of system orthonormal eigenfunctions. A transcendental equation is obtained, on its base the eigenvalues and the corresponding frequencies of natural oscillations are determined. The numerical calculation results of the dependence of natural oscillation frequencies on temperature are presented.

**Keywords:** circular sandwich plate, free oscillations, eigenfunctions, temperature.

Получено 12.10.2022

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODOLOGICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 15. Гомель, 2022

---

УДК 531.311:531.111.5

Э. А. АСЛАНОВ, Г. Г. САФАРОВ, И. А. ИСМАИЛ

*Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан*

### СВЯЗЬ СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА И ЗАКОНОВ НЬЮТОНА

На основе свойств изотропии и однородности пространства-времени предложены пути обоснования законов современной классической механики. Представлены доказательства закона инерции и обоснование эквивалентности векторов во втором законе Ньютона.

**Ключевые слова:** симметрия, пространство, законы Ньютона.

Более 330 лет назад Ньютон в своём классическом произведении «Математические начала натуральной философии» сформулировал законы динамики как аксиомы [1, с. 12]. Вторая из них такова: вектор силы, приложенной к частице, равен произведению массы частицы  $m$  на её вектор ускорения  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Именно в такой векторной форме второй закон Ньютона приводится в учебниках. В то же время при его обсуждении авторы обращают внимание на некоторые неудобства. Так, физик-теоретик, нобелевский лауреат Р. Фейнман отмечает: «...сила обладает независимыми свойствами в дополнение к закону  $\vec{F} = m\vec{a}$ ; но характерные независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь еще; поэтому физический закон  $\vec{F} = m\vec{a}$  – закон неполный» [2, с. 214]. Авторы известного учебника по физике указывают: «Показав универсальный характер законов сохранения мы тем самым пришли к некоторому логическому противоречию <...> законы сохранения были нами получены как следствия второго и третьего законов Ньютона. Между тем сами законы Ньютона являются результатом обобщения экспериментов с упругими, гравитационными и кулоновскими взаимодействиями» [3, с. 194]. Зарубежные специалисты обращают внимание: «Классическую механику

можно излагать и изучать по-разному, начиная либо с законов Ньютона, либо с закона сохранения импульса» [4, с. 18].

В учебнике Л. Д. Ландау имеется замечание: «...свойство инерциальности можно сформулировать также как утверждение об однородности и изотропии пространства и однородности времени по отношению к такой системе отсчёта» [5, с. 14]. Цель данной работы – рассмотрение свойств сил и связанного с ними второго закона Ньютона на основе приведенного суждения. Она представляет собой обобщение и дальнейшее развитие теории, которая ранее была представлена в статьях [6, 7].

Вначале рассмотрим те «неудобства», которые возникают в связи с законом Ньютона (1).

*Во-первых*, обратим внимание, что равенство (1) справедливо, если векторы в левой и правой его частях эквивалентны. Без соблюдения этого условия второй закон Ньютона *нельзя считать достоверным*. Два свободных вектора эквивалентны, если они имеют одинаковые модули и направления. Для эквивалентности двух связанных векторов они также должны лежать на одной прямой и прикладываться к одной точке. Уточним, в чем состоит эквивалентность векторов силы  $\vec{F}$  и  $m\vec{a}$  (в дальнейшем последний для облегчения восприятия материала будем называть количеством ускорения). Они приложены к одной и той же свободной частице, но не являются свободными векторами, поскольку отличаются по сути. Сила – это причина физического явления, а количество ускорения – его результат. Как нельзя складывать причину и результат, так нельзя складывать и эти векторы. Вектор количества ускорения присущ частице и является связанным, а вектор силы действует на частицу извне. Но примечательно, что количество ускорения  $m\vec{a}$  как порождается с приложением вектора силы  $\vec{F}$ , так и пропадает с ее исчезновением. Такая одновременность наталкивает на мысль, что, как и количество ускорения, вектор силы тоже должен быть связанным вектором. Это интуитивное соображение является предварительным условием эквивалентности векторов в выражении (1).

*Во-вторых*, во всех учебниках теоремы о моменте количества движения и законе сохранения механической энергии выводят из второго закона Ньютона [8, 9], приводя к выводу о том, что они являются его следствием. В действительности законы сохранения имеют фундаментальное значение и подтверждают неуничтожаемость материи и её движения. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить. Однако эти законы не дают прямых указаний о направлении процесса и его ходе.

Второй закон Ньютона позволяет определить силы и даёт представление о детальном ходе процесса, давая возможность найти для любого момента времени закон движения, траекторию, величину и направление скорости. Существование первых интегралов дифференциальных уравнений движения позволяет утверждать, что выражение (1) не противоречит законам сохранения.



Вектор силы в соответствии с (1) определяется как результат изменения только количества движения, сохранение которого обусловлено однородностью пространства [10]. Действие силы является причиной изменения момента количества движения и кинетической энергии. Следовательно, в определении вектора силы следует учесть свойство изотропии пространства и однородности времени.

Основными *понятиями* классической механики являются абсолютное пространство и абсолютное время. При этом все ее законы в соответствии с современными представлениями должны удовлетворять требованиям *симметрии* (или инвариантности), согласно которым объект путём применения некоторых операций должен переходить сам в себя. К числу таких операций относятся параллельный перенос, поворот, зеркальное отражение и др. Свойства симметрии определяются аксиомами, в соответствии с которыми к изменению физических законов не приводят:

- сдвиг системы координат в пространстве, что соответствует его однородности (сдвиговая симметрия);
- поворот системы координат как целого, что свидетельствует об изотропии пространства (поворотная симметрия);
- сдвиг системы координат как целого во времени, что говорит о равноправии всех моментов времени (однородность времени).

Отметим, что связь между симметрией пространства и законами сохранения была установлена немецким математиком Э. Нётер [11].

*Выбор системы отсчёта.* В силу однородности и изотропии пространства все его точки равноценны, а направления равноправны, поэтому в нем *невозможно* выделить какую-либо точку с особыми свойствами. Предполагается существование инерциальных систем отсчёта, а симметрия позволяет произвольно принять в качестве тела отсчета любое из двух тел, перемещающихся относительно друг друга. Соответственно возможно определить положение двух точек, отстоящих на определённом расстоянии друг от друга. Отметим, что в евклидовой группе симметрий сохраняются длины, углы и площади.

Введем в рассмотрение радиус-вектор  $\vec{r}$ . Его начало  $O$  располагается на теле отсчета, и с ним связана система координат. Конец вектора  $A$  совмещен с частицей, обладающей количеством движения  $m\vec{v}$  (рисунок 1).

Вириал вектора относительно начала координат определяется положением точки приложения этого вектора и не зависит от его физической сути. В данном случае вириал вектора количества движения относительно начала координат

$$V_O(m\vec{v}) = \vec{r} \cdot m\vec{v}.$$

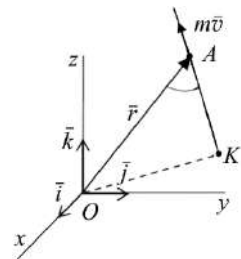


Рисунок 1 – Рассматриваемая система

Он явно не зависит от времени и удовлетворяет свойству однородности времени, которое предполагает независимость физического явления от того, какой момент времени мы примем в качестве начального. Вириал количества движения – скалярная величина, поэтому не зависит от направлений осей координат. Следовательно, он удовлетворяет и свойству изотропии пространства. Пространство, во всех точках которого количество движения частицы одинаково, является эвклидовым.

Выбранная система отсчёта, относительно которой определяется положение частицы с количеством движения  $m\vec{v}$ , тоже расположена в эвклидовом пространстве. В этой системе координат момент количества движения

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Он также не зависит от сдвига и поворота системы координат. Таким образом, при свободном движении частицы с количеством движения  $m\vec{v}$  вириал  $V_O(m\vec{v})$  и момент  $\vec{M}_O(m\vec{v})$  количества движения удовлетворяют аксиоме об однородности и изотропии пространства.

Следовательно, свободное движение материальной точки в пространстве характеризуют семь параметров: по три проекции векторов количества и момента количества движения и один вириал количества движения.

Перейдём к *выводу первого закона Ньютона*. Мы рассматриваем движение частицы, но при этом отсутствует информация о системе, относительно которой оно происходит. Предполагается, что выбранная система отсчёта, для которой выполняются аксиомы о свойствах пространства-времени, инерциальная. Доказав данное утверждение, удастся доказать первый закон Ньютона: существуют системы отсчёта, относительно которых все тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся прямолинейно и равномерно.

**Доказательство.** Вириал и момент количества движения относительно начала координат определяются выражениями:

$$V_O(m\vec{v}) = \vec{r} \cdot m\vec{v}; \quad \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

В соответствии с формулами, приведенными в [12, с. 38], выразим отсюда радиус-вектор

$$\vec{r} = \frac{m\vec{v} \times \vec{M}_O(m\vec{v})}{m^2 v^2} + \frac{m\vec{v} \cdot V_O(m\vec{v})}{m^2 v^2}. \quad (2)$$

Легко убедиться, что первое слагаемое представляет собой  $\vec{r}_K$  – радиус-вектор точки  $K$ , а второе – вектор  $\overline{KA}$  (см. рисунок 1). С учетом этих обозначений получаем

$$\vec{r} = \vec{r}_K + c \cdot m\vec{v},$$

где  $c$  – коэффициент, пропорциональный расстоянию  $KA$ .

Получено уравнение прямой в параметрической форме.

Введем единичный вектор  $\vec{\tau}$  по направлению количества движения. Тогда

$$\frac{m\vec{v}}{mv} = \vec{\tau}; \quad \vec{r}_K = \vec{\tau} \times \vec{M}_O(\vec{\tau}); \quad l = V_O(\vec{\tau}).$$

Подстановка в (2) преобразует уравнение прямой к виду

$$\vec{r} = \vec{r}_K + l\vec{\tau}.$$

Из данного выражения следует, что при увеличении параметра  $l$  точка  $A$  удаляется по траектории от точки  $K$ , в которой вириал вектора равен нулю.

Таким образом, при движении частицы по инерции ее траектория, которая не зависит от массы и значения скорости, представляет собой прямую. При этом количество движения  $m\vec{v}$  частицы остаётся постоянным как по величине, так и по направлению.

Системы отсчёта, в которых свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью, называются инерциальными. А утверждение их существования и есть закон инерции. Таким образом, первый закон Ньютона доказан.

Вектор момента количества движения относительно начала координат в рассмотренном случае также не изменяется. Остаётся показать, что сохраняется и кинетическая энергия частицы. В силу однородности пространства и времени, а также изотропии пространства кинетическая энергия не может зависеть от радиус-вектора, времени и направления вектора скорости. Этому требованию удовлетворяет скалярное произведение векторов скорости и количества движения, умноженное на любой постоянный коэффициент, например,

$$T = \frac{\vec{v} \cdot (m\vec{v})}{2}.$$

Следует подчеркнуть, что при данном определении выражение кинетической энергии приобретает реальный физический смысл. Очевидно, что в силу постоянства скорости частицы сохраняется и механическая энергия.

*Перейдём к доказательству эквивалентности векторов во втором законе Ньютона.*

**Теорема.** Для того чтобы векторы силы  $\vec{F}$  и количества ускорения  $m\vec{a}$  были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы эти векторы удовлетворяли условиям однородности и изотропии пространства и однородности времени:

$$\vec{F} = m\vec{a}; \tag{3}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(m\vec{a}); \tag{4}$$

$$V_O(\vec{F}) = V_O(m\vec{a}). \tag{5}$$

*Доказательство.*

1 Потребуем обратного, чтобы векторы  $\vec{F}$  и  $m\vec{a}$  удовлетворяли уравнению (3), являясь свободными векторами. Данные векторы равны по модулю и одинаковы по направлению. Однако вектор  $m\vec{a}$  является атрибутом частицы и всегда приложен к ней. Если вектор  $\vec{F}$  удовлетворяет требованию, но не лежит на траектории и не приложен к частице, то векторы  $\vec{F}$  и  $m\vec{a}$  нельзя считать эквивалентными (рисунок 2, а).

2 Предположим, что векторы дополнительно удовлетворяют условию однородности пространства, то есть их векторы-моменты относительно начала координат одинаковы. При выполнении условий (3), (4) векторы  $\vec{F}$  и  $m\vec{a}$  лежат на одной прямой, но их точки приложения различны (рисунок 2, б). Сила не приложена к частице, следовательно рассматриваемые векторы нельзя считать эквивалентными.

3 Требуем, чтобы векторы  $\vec{F}$  и  $m\vec{a}$  удовлетворяли условию изотропии пространства (5).

Вириал определяет координаты точки приложения вектора на траектории:

$$V_O(m\vec{a}) = m\vec{a} \cdot \vec{r}_A = ma \cdot r_A \cos \theta_1 = ma \cdot KA;$$

$$V_O(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{r}_B = F \cdot r_B \cos \theta_2 = F \cdot KB,$$

где  $\theta_1$  – угол между векторами  $\vec{r}_A$  и  $m\vec{a}$ ;  $\theta_2$  – угол между векторами  $\vec{r}_B$  и  $\vec{F}$ ;  $\vec{r}_A = \vec{OA}$ ;  $\vec{r}_B = \vec{OB}$ .

Чтобы удовлетворить требованию равенства обоих значений, надо выполнение условий  $\theta_1 = \theta_2$ ;  $KB = KA$ . Следовательно, точки  $A$  и  $B$ , являющиеся началами векторов  $m\vec{a}$  и  $\vec{F}$ , совпадают (рисунок 2, в). Теорема доказана.

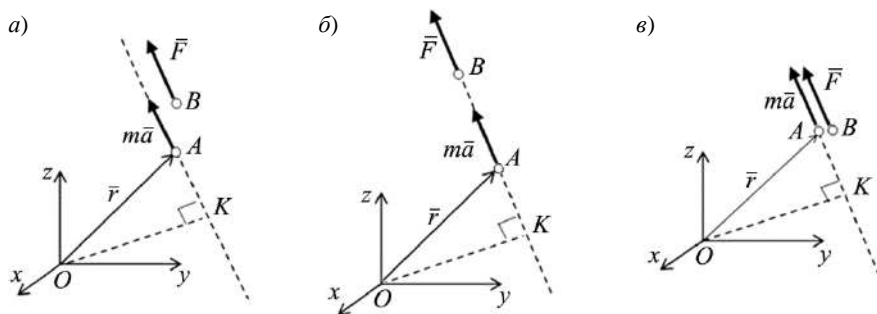


Рисунок 2 – Схемы к доказательству эквивалентности векторов

В статьях [6, 7] показано, как из условий эквивалентности (3)–(5) могут быть выведены общие теоремы динамики материальной точки. Таким образом, аксиомы, определяющие законы симметрии, позволили с нетрадици-

онной стороны взглянуть на законы Ньютона и предложить новые подходы к их рассмотрению при обучении студентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Newton, I.** Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica / I. Newton. – Londini : Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater, 1687. – 510 p.

2 **Фейнман, Р.** Фейнмановские лекции по физике : Т. 1 : Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : АСТ, 2021. – 448 с.

3 **Яворский, Б. М.** Основы физики. Т. 1: Движение и силы; законы сохранения, молекулярно-кинетическая теория газа; молекулярные силы и агрегатные состояния вещества, электродинамика / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – М. : Наука, 1974. – 495 с.

4 **Акоста, В.** Основы современной физики / В. Акоста, К. Кован, Б. Грэм. – М. : Просвещение, 1981. – 495 с.

5 **Ландау, Л. Д.** Краткий курс теоретической физики. Кн. 1. Механика. Электродинамика : учеб. пособие для физ. специальностей вузов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М. : Наука, 1969. – 271 с.

6 **Сафаров, Г. Г.** Симметрия и законы Ньютона / Г. Г. Сафаров // Вестник современных исследований. – 2019. – № 3.7 (30). – С. 29–37.

7 **Сафаров, Г. Г.** Новые аксиомы классической механики / Г. Г. Сафаров // Инновации. Наука. Образование. – 2021. – № 26. – С. 1751–1762.

8 **Ольховский, И. И.** Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 575 с.

9 **Вәктаşi, Т. Н.** Nəzəri mexanika / Т. Н. Вәктаşi. – Bakı: Maarif, 1981. – 510 s.

10 **Тютин, И. В.** Симметрия в физике элементарных частиц. Ч. 1. Пространственно-временные симметрии / И. В. Тютин // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – № 5. – С. 64–69.

11 **Noether, E.** Invariante Variationsprobleme / E. Noether // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1918. – S. 235–257.

12 **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики. Т. 1. Кинематика, статика, динамика точки / Н. А. Кильчевский. – М. : Наука, 1977. – 480 с.

*E. A. ASLANOV, G. G. SAFAROV, I. A. ISMAIL*  
*Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan*

## RELATIONSHIP OF SPACE SYMMETRY AND NEWTON'S LAWS

On the basis of the space-time isotropy and homogeneity properties, ways of substantiating the laws of modern classical mechanics are proposed. The proof of the inertia law and the justification of the equivalence of vectors in Newton's second law are presented.

**Keywords:** symmetry, space, Newton's laws.

Получено 14.03.2022

УДК 531:372.8

*Х. Д. ДЖУМАЕВ, И. МИРЗАЕВ*

*Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент,  
Узбекистан*

## **СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД К ПРЕПОДАВАНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Рассматривается новый подход к преподаванию теоретической механики, обобщающий исследования, проведенные учеными-педагогами в предыдущие годы, и учитывающий потенциал студентов в настоящее время.

**Ключевые слова:** преподавание, теоретическая механика, потенциал студентов.

Наука «Теоретическая механика» имеет особое значение в подготовке квалифицированных инженерных специалистов. Это естественнонаучная дисциплина, лежащая в основе современной науки и техники. Изучение теоретической механики способствует формированию системы фундаментальных знаний, позволяющих будущему специалисту научно анализировать проблемы в его профессиональной области, используя современные образовательные и информационные технологии, овладеть той новой информацией, с которой ему придется столкнуться в производственной или научной деятельности.

Теоретическая механика является научной основой всех технических наук. Ее методы и приемы используются в абсолютном большинстве технических расчетов при проектировании машин и сооружений. Чтобы повысить интерес и внимание студентов при преподавании теоретической механики, необходимо приводить примеры из техники и проектной практики.

Наряду с важными образовательными аспектами изучение теоретической механики имеет также большое значение для развития профессионального мышления будущего инженера. Чем лучше и глубже студент знает теоретическую механику, тем эффективнее он изучает другие технические дисциплины.

Теоретическая механика имеет древнюю историю, она формировалась сотни лет. Во многих высших учебных заведениях ее преподавание осуществляется на высоком уровне. В то же время для многих преподавателей высших учебных заведений теоретическая механика остается наукой старого образца, свободной от инноваций, наукой, точное практическое значение которой не уточняется при формировании будущего инженера.

Преподавание по-прежнему осуществляется классическим способом, включающим изложение темы и контроль для дальнейшего усвоения [1–3]. Это не в полной мере отражает основную и важную роль преподавания теоретической механики в профессиональной подготовке современного инженера.

В последние годы в сети Интернет появились решения задач из книг: «Сборник задач по теоретической механике», выпущенный под руководством И. В. Мещерского, и «Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике» под общей редакцией А. А. Яблонского. Также изданы несколько сборников, а также методических пособий и инструкций, в которых представлены решения большого числа задач, что создало атмосферу удобства для студентов при самостоятельном изучении материала.

Сокращение числа аудиторных часов и увеличение часов, выделенных для самостоятельного обучения, способствует внедрению новых подходов к обучению студентов предмету теоретической механики. Они включают в себя следующее:

- показ решений коротких задач, касающихся предмета, во время лекционных занятий;

- раздачу студентам материалов, отражающих краткое содержание следующей или проводимой лекции (например, через Telegram);

- использование методов педагогических и информационных технологий, привлекающих внимание всей аудитории и обогащающих тему примерами;

- стимулирование полного владения предметом одаренными студентами, которые проявляют интерес к теоретической механике, и побуждение их к помощи в обучении остальных студентов;

- наличие у каждого студента электронного варианта задачника по теоретической механике (например, на его мобильном телефоне) с целью решения большого количества задач на практических занятиях;

- предоставление студентам набора задач по теоретической механике, доступных в интернете, а также их решений (если таковые имеются) и других методических возможностей;

- регулярное привлечение студентов к использованию компьютерных программ для текущих задач, такие программы в последнее время успешно используются в обучении и при проектировании ("Живая Физика 4.3", Mathematica, Maple, MathCAD, MathLab, Statics, ANSYS, LIRA, APM Win-Machine и т. д.) [4];

- уделение особого внимания консультациям и проверке РГР, которые необходимо проводить строго в назначенное время;

- открытие отдельного Telegram-канала для студентов по теоретической механике, а также использование возможностей ZOOMa.

Вышеуказанные предложения требуют полного отказа от ограничений, связанных с необходимостью посещения традиционных лекций или практических занятий.

В часы консультаций и приёма расчетно-графических работ целесообразно сосредоточиться на знании основных теоретических концепций механики, отказавшись от доскональной проверки вспомогательных математических выкладок. Например, при рассмотрении произвольных сил на плоскости в статике основное внимание следует обратить на то, чтобы студент

правильно расставлял реакции связей и знал, как проецировать силы на оси координат и вычислять моменты сил. Аналогично необходимо обратить серьезное внимание на то, чтобы студент понимал теоретическую сторону вопроса по кинематике и динамике [5].

Для достижения полного владения предметом одаренными студентами по теоретической механике надо предлагать им решение сравнительно сложных задач [6].

Таким образом, преподавание теоретической механики требует особой ответственности от педагога. Несмотря на то, что базовых знаний у большинства студентов недостаточно, требуется определить одаренных студентов, проявляющих интерес к предмету теоретической механики. Серьезное внимание следует уделять консультациям и выполнению заданий студентами. С каждым из них следует работать индивидуально.

В результатах итогового контроля ощущаются серьезные различия уровня освоения дисциплины разными студентами. Если преподаватель поставил перед собой цель углубленного преподавания студентам теоретической механики, то результаты итоговых контрольных работ должны улучшаться.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Архангельский, С. И.** Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С. И. Архангельский. – М.: Высш. шк., 1980. – 368 с.

2 **Архангельский, С. И.** Лекции по теории обучения в высшей школе / С. И. Архангельский. – М.: Высш. шк., 1974. – 382 с.

3 **Буга, П.** Технология обучения в высшей школе / П. Буга, В. Карпов // Вестник высшей школы. – 1991. – № 11. – С. 19–26.

4 **Ахтямов, А. В.** Применение APM WinMachine к решению задач по теоретической механике / А. В. Ахтямов, И. В. Колмыкова. – Белгород: БГТУ, 2012. – 111 с.

5 Методика преподавания основ теоретической механики / И. А. Парфенова [и др.] // Современные проблемы науки и образования. – 2019. – № 2. – С. 14–21.

6 **Шимановский, А. О.** О международных олимпиадах по теоретической механике / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 194–234.

*X. D. JUMAEV, I. MIRZAEV*

*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

#### MODERN APPROACH TO ENGINEERING MECHANICS TEACHING

There is considered a new approach to teaching of engineering mechanics, summarizing the research performed by scientists-teachers in the recent years taking into account the potential of students at the present time.

**Keywords:** teaching, engineering mechanics, student's potential.

Получено 29.10.2022



УДК 534.01

*Д. В. КОМНАТНЫЙ*

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,  
Гомель, Беларусь*

## **КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ТРАНСПОРТНОГО ВУЗА**

Предлагается методический подход к изучению колебательных цепей в курсах теоретической механики для подготовки инженеров транспорта. Приведена классификация колебательных цепей. Рассмотрена применимость теоремы Штурма к различным их типам. Получены уравнения движения колебательных цепей методом уравнений Лагранжа второго рода и описаны методы их решения. Показана аналогия простых и сложных колебательных цепей с фильтрами электрических колебаний.

**Ключевые слова:** колебательные цепи, теоретическая механика, уравнения Лагранжа, теорема Штурма, частотные фильтры.

Системой цепной структуры или колебательной цепью называется колебательная система с конечным числом степеней свободы, в которой упругие силы зависят только от разности смещений соседних тел [1].

Изучение этих систем восходит к трудам И. Бернулли, Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, Ж.-Л. Даламбера, У. Томпсона (лорда Кельвина), Э. Рауса. Исследования позволили получить обширные математические и физические результаты, представляющие интерес и для современности. Они, например, оказываются востребованными при исследованиях движения автомобилей и железнодорожных поездов [2, 3]. Поэтому изучение колебательных цепей целесообразно осуществлять в курсах теоретической механики, ориентированных на подготовку инженеров транспорта.

В существующих литературных источниках теория колебательных цепей излагается с разнообразных точек зрения. Так, в [4–6] изложение ведется с позиций теории колебаний, выявления свойств системы в целом. В [7–9] колебательные цепи рассматриваются с целью подготовки к освоению физики немеханических явлений и процессов. В книгах [10, 11] осуществляется вывод законов движения цепей тел на основе положений теоретической механики, причем изложение либо удалено от практики в область теоретических построений [10], либо углубляется в практические вопросы конструирования и моделирования технических средств [2, 11].

В данной статье предпринят анализ накопленного теоретического материала по колебательным цепям с целью сформировать методический подход к изучению его в курсах теоретической механики транспортных вузов. Критериями формирования в этом случае являются: достаточная теоретическая полнота, широкие практические приложения, возможность межпредметных

связей, научение навыкам анализа динамики модельных систем, в том числе, моделей транспортных средств. Таким образом, достигается основная цель преподавания – подготовка высококвалифицированных инженеров транспорта на современном уровне.

Начальным этапом анализа является классификация колебательных цепей [2]. Их упругие элементы часто имеют зависимость между силой и деформацией, более сложную, нежели закон Гука, а массивные элементы могут совершать колебания, которые нельзя считать малыми. Колебательные цепи, для которых справедливо минимум одно из этих условий, являются нелинейными. Их теория достаточно сложна и далека от завершения [12], поэтому в курсе теоретической механики рационально рассматривать только линейные колебательные цепи.

С точки зрения топологии колебательные цепи подразделяются на прямолинейные, разветвленные, кольцевые и сложносоединенные [2]. Разветвленные и сложносоединенные цепи содержат параллельные присоединения к некоторой массе или к некоторому ответвлению. Присоединения к ответвлению реализуются в виде зубчатых передач, картеры которых упруго соединены с другими массами посредством пружин, рессор и тому подобного. Цепи, содержащие такие элементы, называются цепями с реактивными элементами. Соответственно, цепи без реактивных элементов присоединений к ответвлениям не содержат [2].

Если колебания совершаются под действием одной возвращающей силы по одной обобщенной координате, то такие колебательные цепи будем считать простыми. Если же в системе имеется несколько возвращающих сил, а колебания могут происходить по нескольким обобщенным координатам, то колебательная цепь является сложной. Например, цепочки из математических маятников, связанных пружинами; из стержней, связанных упругими нитями; из твердых тел, соединенных подпружиненными шарнирами [5, 10, 11].

В курсах теоретической механики, особенно ориентированных на подготовку инженеров транспорта, рационально рассматривать прямолинейные и разветвленные простые колебательные цепи без реактивных элементов, поскольку наличие последних значительно усложняет восприятие материала студентами. На базе таких цепей могут строиться модели динамики транспортных средств [2, 3].

Топология простой прямолинейной колебательной цепи показана на рисунке 1, а, простой разветвленной цепи – на рисунке 1, б. Конкретными примерами таких цепей являются [2, 10]:

- цепи из точечных масс, соединенных пружинами, совершающие параллельные продольные колебания в одной плоскости;
- цепи из точечных масс, соединенных упругими нитями, совершающие колебания по одной вертикальной координате;
- цепи из дисков, соединенные упругими валами, совершающие крутильные колебания.

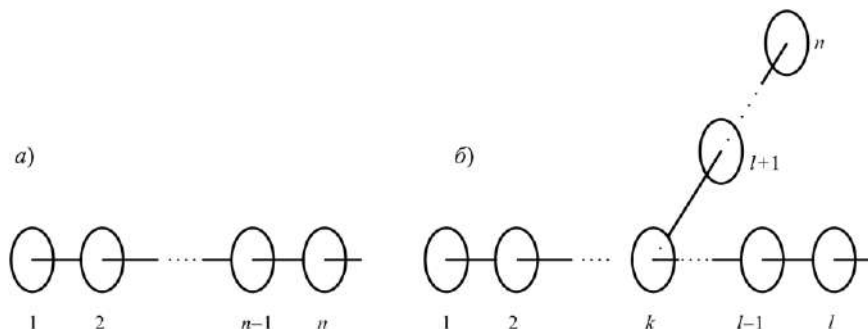


Рисунок 1 – Топологии простых колебательных цепей

Наиболее рационально для анализа динамики колебательных цепей использовать метод уравнений Лагранжа II рода [1].

Кинетическая энергия таких цепей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2, \quad (1)$$

где  $i$  – счетная переменная;  $n$  – число массовых элементов;  $I_i$  – инерционный параметр элемента;  $q_i$  – обобщенная координата, точка над переменной обозначает производную по времени.

Потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} (q_i - q_j)^2, \quad (2)$$

где  $j$  – счетная переменная,  $c_{ij}$  – коэффициент упругости.

В случае простой прямолинейной колебательной цепи выражение (2) может быть представлено в виде

$$\Pi = \sum_{i=1}^n A_i q_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} B_i q_i q_{i-1}, \quad (3)$$

где  $A_i, B_i$  – расчетные коэффициенты.

Для систем, кинетическая энергия которых выражается формулой (1), а потенциальная – выражением (3), справедлива теорема Штурма [10, 13]:

- частоты собственных колебаний цепи различны;
- для амплитудного вектора  $\vec{y}(y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mm})$  амплитуды вектора основного тона имеют одинаковый знак;
- амплитудный вектор  $k$ -го обертона имеет  $k$  узлов;
- узлы амплитудных векторов двух соседних обертонов перемежаются;
- между двумя узлами  $k$ -го обертона лежит, по крайней мере, один узел  $(k+1)$ -го обертона.

Разветвленные колебательные цепи не удовлетворяют теореме Штурма, так как для них не выполняется соотношение (3). Отметим, что изучение

данной теоремы, даже без доказательства, представляет значительный интерес, так как позволяет выявить отличительные особенности динамики простых прямолинейных колебательных цепей.

Полученная методом уравнений Лагранжа II рода матричная система дифференциальных уравнений движения колебательных цепей имеет вид [1, 2]

$$[I][\ddot{q}] + [c][\dot{q}] = [Q], \quad (4)$$

где  $[I] = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_{n-1}, I_n)$  – матрица инерциальных коэффициентов;  $q^T = (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n)$  – матрица обобщенных координат;  $[c]$  – матрица коэффициентов упругости;  $Q^T = (Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n)$  – матрица обобщенных сил.

Для анализа переходных и установившихся процессов обобщенные силы целесообразно принимать в виде

$$Q_i = M(1 - e^{-t/\tau}); \quad Q_i = M \sin(\omega_i t); \quad Q_i = M(1 - e^{-t/\tau}) \sin(\omega_i t),$$

где  $M$ ,  $\tau$ ,  $\omega_i$  – некоторые константы;  $t$  – время.

Система (4) позволяет решить ряд задач (методы их решения описаны в литературе [1, 2, 6, 10]), поэтому ограничимся кратким обзором).

Если принять  $[Q] = [0]$  и каждое уравнение системы разделить на  $I_i$ , то получится матричная система однородных дифференциальных уравнений

$$[\ddot{q}] + [k][q] = [0].$$

Основываясь на ней, можно отыскать собственные частоты и соответствующие им формы колебаний. Определение таких форм позволяет найти опасные зоны [1, 2]. Данный алгоритм решения, называемый методом разложения по главным координатам, рационально использовать для определения параметров свободных колебаний, возникших после приложения мгновенного импульсного воздействия [1].

Для анализа динамики колебательной цепи под действием ненулевых обобщенных сил в [2] предложен метод, основанный на получении решения системы (4) в виде суммы общего решения однородной системы дифференциальных уравнений (т. е. для случая  $[Q] = [0]$ ), и частного решения системы (4).

Метод комплексных амплитуд оказывается полезным при анализе стационарного режима гармонических колебаний и построении амплитудно-частотных характеристик колебательной цепи [1].

Перечисленные методы анализа динамики колебательных цепей позволяют решить широкий круг задач, которые регулярно возникают на практике.

Отдельный интерес представляют амплитудно-частотные характеристики простых прямолинейных колебательных цепей при равенстве всех инерционных и упругих коэффициентов в (1) и (2). В этом случае амплитудно-частотная характеристика имеет полосу пропускания, отвечающую механическому фильтру нижних частот. Для этого частного случая колебательной цепи можно подобрать акустический и электрический аналоги [7].

Некоторые сложные колебательные цепи при том же условии равенства инерционных и упругих параметров также обладают амплитудно-частотными характеристиками со свойствами фильтров: верхних частот, полосопропускающего, заграждающего. Для них также имеются электрические аналоги [5, 7, 8]. Структура таких колебательных цепей приведена на рисунке 2.

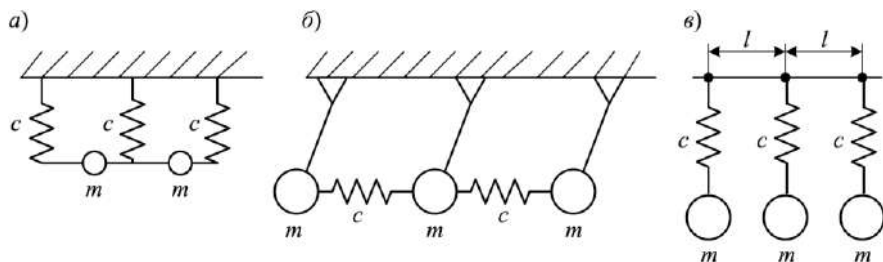


Рисунок 2 – Колебательные цепи со свойствами фильтра верхних частот (а); полосопропускающего фильтра (б); заграждающего частотного фильтра (в)

Для студентов транспортных специальностей при отсутствии в учебных планах курса теории колебаний рассмотрение колебательных систем со свойствами фильтров колебаний может выноситься на самостоятельное изучение. Этот элемент теории может использоваться для организации семинарских занятий, кружковой, учебно-исследовательской работы. Весьма привлекательной является возможность выполнения анализа механических систем на основе уравнений динамики, а их электрических аналогов – на основе теории электрических цепей [14]. Сравнение результатов анализа позволяет выявить аналогичный характер колебаний в них. Установление межпредметных связей, так же как изучение аналогий в динамике систем различной природы весьма полезно для активизации учебного процесса.

Таким образом, анализ представленных материалов по динамике колебательных цепей показывает целесообразность их изучения в транспортных вузах на основе рассмотрения методов определения движения материальной системы под действием обобщенных сил. Рассмотрение данного материала представляет собой обучение расчетным методам, применяемым при моделировании средств транспорта. Вместе с тем анализ получаемых результатов должен включать и выявление возможных в принципе режимов колебаний. Представленный подход обеспечивает теоретическую подготовку на современном уровне, широкий кругозор студента, умение пользоваться аналогиями. Тем самым будет достигнуто оптимальное сочетание теоретической и практической составляющих в знаниях и компетенциях современного инженера.

*Автор выражает искреннюю благодарность коллективу кафедры «Строительная механика» БелГУТа за предоставленные литературные источники для работы над настоящей статьей.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Воробьев, С. А.** Сопротивление материалов. Прикладная теория колебаний / С. А. Воробьев. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 257 с.
- 2 **Микулик, Н. А.** Динамические системы с реактивными звеньями / Н. А. Микулик. – Минск : Выш. шк., 1985. – 192 с.
- 3 **Сахаров, П. А.** Оценка влияния характеристик межвагонных связей в поезде на величину продольных сил при электрическом торможении / П. А. Сахаров, А. О. Шимановский // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 171–181.
- 4 **Магнус, К.** Колебания. Введение в исследование колебательных систем / К. Магнус. – М. : Мир, 1982. – 393 с.
- 5 Решение и анализ задач линейной теории колебаний / В. П. Кандидов [и др.]. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 291 с.
- 6 **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1965. – 559 с.
- 7 **Рабинович, М. И.** Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. Н. Трубецков. – М. : Наука, 1992. – 453 с.
- 8 **Бриллюэн, Л.** Распространение волн в периодических структурах / Л. Бриллюэн, М. Пароди. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 457 с.
- 9 **Ольховский, И. И.** Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 574 с.
- 10 **Раус, Э. Д.** Динамика системы твердых тел : в 2 т. Т. 2 / Э. Д. Раус. – М. : Наука, 1983. – 544 с.
- 11 **Нагаев, Р. Ф.** Колебания механических систем с периодическими структурами / Р. Ф. Нагаев, К. Ш. Ходжаев. – Ташкент : Фан, 1973. – 270 с.
- 12 **Тода, М.** Теория нелинейных решеток / М. Тода. – М. : Мир, 1984. – 259 с.
- 13 **Гантмахер, Ф. Р.** Осцилляторные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. – М.–Л. : Гостеортехиздат, 1950. – 359 с.
- 14 **Булгаков, С. В.** Колебания / С. В. Булгаков. – М. : Гостеортехиздат, 1954. – 891 с.

*D. V. KOMNATNY*

*Gomel State Technical University named by P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus*

## OSCILLATION CHAINS IN ENGINEERING MECHANICS COURSE OF A TRANSPORT UNIVERSITY

A methodical approach to the study of oscillatory chains in the courses of engineering mechanics for the transport engineers training is proposed. The classification of oscillatory chains is given. The applicability of Sturm's theorem to their various types is considered. The motion equations for the oscillatory chains are obtained by the method of Lagrange equations of the second kind, and the methods for their solution are described. The analogy of simple and complex oscillatory chains with filters of electrical oscillations is shown.

**Keywords:** oscillating chains, theoretical mechanics, Lagrange equations, Sturm's theorem, frequency filters.

Получено 21.02.2022

УДК 531.312.1:531.391.3

*А. В. ЛОКТИОНОВ, А. А. СИДОРОВИЧ*

*Витебский государственный технологический университет, г. Витебск, Беларусь*

## **ВЫВОД УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

Представлена методика вывода уравнения малых колебаний эллиптического маятника, основанная на применении принципа Даламбера. С учетом относительного движения стержня с шариком получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее закон изменения угла поворота стержня маятника. Обсуждены некоторые аспекты применения принципа Даламбера, которые позволяют рассматривать относительное движение путем его фиктивного приведения к абсолютному движению.

**Ключевые слова:** эллиптический маятник, малые колебания, относительное движение, принцип Даламбера.

Эллиптическим маятником называется система тел: ползуна, который может перемещаться вдоль горизонтальной направляющей, и связанного с ним недеформируемым стержнем шарика. При определенных начальных условиях система может совершать колебательные движения.

В статьях [1, 2] с применением уравнений Лагранжа выведено дифференциальное уравнение движения эллиптического маятника без учета действия сил тяжести, что соответствует его перемещению в горизонтальной плоскости. Анализ сложного движения, имеющего место при колебаниях эллиптического маятника, рассмотрен в работе [3]. Кинетостатическим методом уравнения движения маятника получены в работе [4], где также с использованием теоремы о движении центра масс определена реакция связи, действующая на ползун со стороны направляющей. В работе [5] с помощью принципа Даламбера установлены законы движения шарика и ползуна для заданных начальных условий, при которых угловая скорость стержня не равна нулю ( $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$ ).

В публикациях [6–8] представлены решения ряда более сложных задач, в которых рассмотрены нелинейные колебания эллиптического маятника.

В работах [1–5] не акцентируется внимание на особенностях, которые связаны с учетом относительного движения и должны приниматься во внимание при выводе уравнения колебаний эллиптического маятника. Они более подробно рассматриваются в данной статье.

Рассмотрим эллиптический маятник, который включает ползун  $A$ , который перемещается вдоль гладкой горизонтальной направляющей, и шарик  $B$ ,

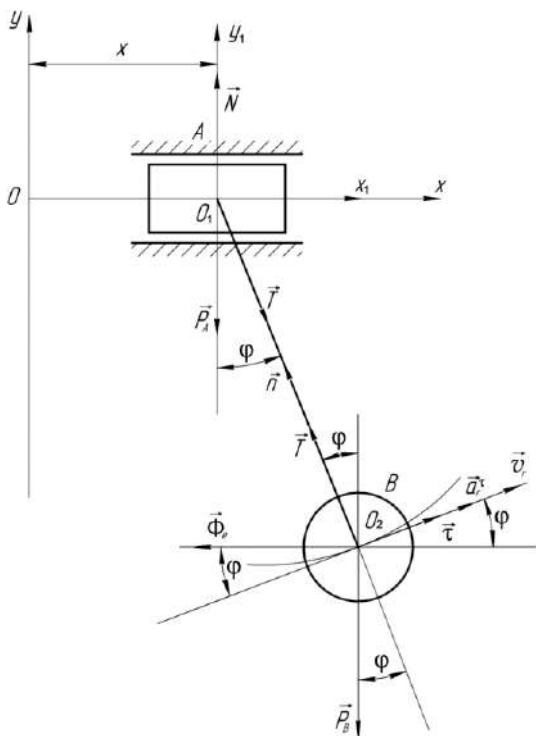


Рисунок 1 – Расчетная схема эллиптического маятника

связанный с ползуном А с помощью нерастяжимого стержня (рисунок 1). Принимаем, что в начальный момент стержень вертикален ( $\varphi = \varphi_0 = 0$ ), а его угловая скорость  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$ . Ставится задача по определению законов движения тел системы с использованием принципа Даламбера и теории сложного движения точки.

На систему (см. рисунок 1) действуют три внешние силы: силы тяжести  $\vec{P}_A$ ,  $\vec{P}_B$  и динамическая реакция  $\vec{N}$ . Уравнение движения шарика (основной закон динамики для случая несвободного относительного движения точки) в векторной форме

$$m\vec{a}_r = \vec{P}_B + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k + \vec{T}, \quad (1)$$

где  $\vec{\Phi}_e$ ,  $\vec{\Phi}_k$  – переносная и кориолисова сила инерции,  $\vec{T}$  – реакция стержня.

Так как переносное движение (перемещение связанных с ползуном подвижных осей  $x_1, O_1y_1$ ), является поступательным, то ускорение Кориолиса отсутствует, соответственно сила инерции  $\vec{\Phi}_k = 0$ . Поэтому закон относительного движения шарика (рисунок 1) принимает вид

$$m_B\vec{a}_r = \vec{P}_B + \vec{\Phi}_e + \vec{T}. \quad (2)$$

В проекции на касательную к траектории центра  $O_2$  шарика получаем

$$m_B a_r^\tau = -P_B \sin \varphi - \Phi_e \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $\Phi_e = m_B \ddot{x}$ ,  $\ddot{x}$  – переносное ускорение,  $a_r = l\ddot{\varphi}$ . Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$m_B l \ddot{\varphi} = -m_B g \sin \varphi - m_B \ddot{x} \cos \varphi. \quad (4)$$



Так как рассматривается случай малых колебаний, то угол  $\varphi$  также мал. Следовательно,  $\sin \varphi = \varphi$ ,  $\cos \varphi = 1$ . Из равенства (4) имеем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = -\frac{\ddot{x}}{l}.$$

Подробное решение данного уравнения представлено в статье [9] и здесь не приводится.

В рассматриваемом случае в уравнении (1) силы инерции  $\vec{\Phi}_e$  и  $\vec{\Phi}_k$  наряду с активными силами и реакциями связей определяют взаимодействие материальной точки (шарика), который совершает сложное движение, и некоторого твердого тела (ползуна), обуславливающего в данном случае переносное движение.

Между шариком и ползуном, с которым связана подвижная система координат, имеется связь, роль которой выполняет стержень. Поэтому можно считать, что силы  $\vec{\Phi}_e$  и  $\vec{\Phi}_k$  приложены не к шарiku, а к тому телу, которое определяет движение подвижной системы координат. Соответственно равенство (1) можно рассматривать как своеобразное применение принципа Даламбера к задаче об определении параметров относительного движения материальной точки [10]. Здесь мысленно “останавливается” движущаяся материальная точка, а для того чтобы ее механическое взаимодействие с окружающими телами, приводящими к ускорению данной точки, не изменилось, прикладываем к ней силы инерции  $\vec{\Phi}_e$  и  $\vec{\Phi}_k$ .

Другими словами, при анализе движения рассматриваемой системы осуществляется мысленная остановка подвижной системы координат  $x_1 O_1 y_1$ . В этом случае, чтобы обеспечить сохранение условий взаимодействия стержня и ползуна, с которым связана подвижная система координат  $x_1 O_1 y_1$ , требуется учесть в уравнении (2) переносную силу инерции  $\vec{\Phi}_e$ .

Следовательно, учет действия на шарик переносной силы инерции и силы Кориолиса позволяет формально свести задачу о движении по отношению к подвижной системе координат к исследованию перемещения относительно неподвижной системы координат. Поэтому форму записи уравнения (2) можно рассматривать в качестве методики, смысл которой состоит в исследовании относительного движения путем фиктивного приведения его к абсолютному движению.

Таким образом, в работе представлен вывод уравнения малых колебаний эллиптического маятника на основе теории сложного движения. Показано, что использованный подход можно рассматривать в качестве одного из возможных путей применения принципа Даламбера для решения задач об определении параметров относительного движения материальной точки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Локтионов, А. В.** Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 26. – С. 138–143.
- 2 **Локтионов, А. В.** Решение уравнения малых колебаний эллиптического маятника / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2011. – Вып. 5. – С. 199–203.
- 3 **Локтионов, А. В.** Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 290–293.
- 4 **Локтионов, А. В.** Кинестатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 226–229.
- 5 **Локтионов, А. В.** Расчёт уравнения малых колебаний с учётом сил тяжести и заданной начальной угловой скоростью движения маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 1. – С. 43–48.
- 6 **Хакимуллина, Л. Ш.** О проблеме учета эмпирического закона «сухого» трения в динамике эллиптического маятника / Л. Ш. Хакимуллина // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2016. – № 3–4. – С. 62–67.
- 7 **Глазкова, Т. А.** Нелинейные колебания эллиптического маятника / Т. А. Глазкова // Современные проблемы науки и образования. – 2009. – № 3-2. – С. 99–100.
- 8 **Сарбасов, Е. К.** К аналитическому решению нелинейного уравнения эллиптического маятника / Е. К. Сарбасов, З. Е. Шагагаева // Наука и мир. – 2015. – № 2-1 (18). – С. 33–35.
- 9 **Локтионов, А. В.** Анализ малых колебаний эллиптического маятника с применением теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении / А. В. Локтионов, А. А. Сидорович // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 275–279.
- 10 **Локтионов, А. В.** Применение принципа Даламбера при рассмотрении сил инерции и относительного движения эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 1. – С. 24–28.

*A. V. LOKTIONOV, A. A. SIDOROVICH*

*Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus*

## DERIVATION OF THE SMALL OSCILLATIONS EQUATION FOR AN ELLIPTICAL PENDULUM BASED ON THE RELATIVE MOTION THEORY

There is presented a technique for deriving of the small oscillations equation for an elliptical pendulum based on the application of the d'Alembert principle to a material point relative motion. A linear inhomogeneous differential equation is obtained, it describes the law of the pendulum rod rotation angle change. Some aspects of the d'Alembert principle application are discussed, they allow to consider relative motion by fictitious reduction to absolute motion.

**Keywords:** small oscillations, d'Alembert's principle, relative motion, elliptical pendulum.

Получено 28.08.2020

УДК 624.046:539.3/6

*Е. Н. ФИСЕНКО, Р. А. САБИРОВ**Сибирский государственный университет науки и технологий  
им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия*

## **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНО-СЖАТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Представлено расчетно-графическое проектировочное учебное задание для изучения устойчивости стержней с тонкостенными поперечными сечениями (в том числе и неодносвязными), предназначенное для студентов аэрокосмических специальностей, изучающих дисциплины «Сопrotивление материалов» и «Строительная механика».

**Ключевые слова:** устойчивость, тонкостенный стержень, метод уменьшения основного допускаемого напряжения.

**Введение.** В машиностроении, авиационной и аэрокосмической технике при проектировании изделий требуются расчеты устойчивости сжатых стержневых конструкций [1]. Обычно нагрузки заданы и требуется подобрать размеры сечений. Если неизвестны как сами размеры, так и гибкость, то задачу подбора размеров сечений рекомендуется решать методом попыток. В литературе предлагается выполнять расчет с помощью «Метода уменьшения основного допускаемого напряжения» [2–4].

В учебном процессе курса сопротивления материалов института космической техники СибГУ (Красноярск), для расчета устойчивости центрально сжатых стержней много лет успешно применяются «Методические указания» [5], в которых описана методика расчетов с подробными примерами и приведены расчетные схемы заданий. В качестве поперечных сечений предложены как сплошные односвязные, так и применяемые в машиностроении комбинации сечений, составленные из прокатных профилей.

Разработанное учебно-проектировочное задание имеет цель дополнить работу [5] тонкостенными поперечными сечениями, которые широко используются в конструкциях аэро-ракетной техники, однако требуют более трудоемкого способа вычисления геометрических характеристик сечения, таких как площадь, положение центра тяжести, статические моменты площадей, моменты инерции. В решебнике [6] для вычисления геометрических характеристик подробно рассматриваются приемы интегрирования по контуру, составлены программы для интерпретатора Maple. В отличие от [6], в учебно-проектировочном задании продуманы и реализованы приемы вычисления с помощью электронных таблиц, что достаточно просто и эффективно.

Концепция метода уменьшения основного допускаемого напряжения состоит в расчете с помощью «коэффициента ослабления»  $\varphi$ , при котором допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma] = \varphi\sigma_T / n,$$

где  $[\sigma] = \sigma_t / n$  – допустимое напряжение при сжатии;  $\sigma_t$  – предел текучести металла;  $n$  – коэффициент запаса. Значение коэффициента ослабления основного допустимого напряжения  $\phi$  приводится в специальных таблицах в зависимости от гибкости  $\lambda$ .

Для выполнения проектировочного расчета на устойчивость сжатых стержней метод уменьшения основного допустимого напряжения предлагается использовать в современной литературе, рекомендованной для машиностроительных и аэрокосмических специальностей, например, в учебнике [7]. Это связано с актуальностью метода не только при изучении сопротивления материалов, но при сравнении с результатами, полученными с помощью программ САПР в ходе проектирования. Техника расчета приводится в курсах сопротивления материалов. Однако отметим, что применяемый метод обладает принципиальным недостатком – он не дает отчетливого представления о действительном запасе устойчивости стержня [8].

**Пример.** Приведем фрагмент выполнения учебно-проектировочного задания для схемы, представленной на рисунке 1.

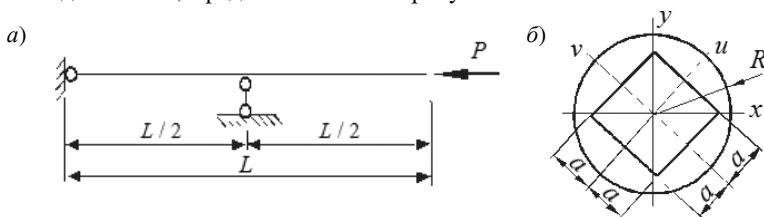


Рисунок 1 – Модель исследуемой балки:

$a$  – расчетная схема ( $L$  – длина,  $P = 200$  кН – заданная сила);

$b$  – поперечное сечение ( $a$  – искомый параметр,  $R$  – радиус,  $x, y, u, v$  – центральные оси)

Продемонстрируем результаты расчета после шестой итерации метода.

1 Получая  $\frac{\phi_5}{\phi_6} = \frac{0,3097}{0,3096} = 1,00$ , определяем, что итерационный процесс

привел к сходимости коэффициента  $\phi$  к значению  $\phi = 0,30963$ . Искомый параметр  $a = 0,03796$  м можно округлить до  $a = 0,038$  м.

2 Проверим выполнение условия устойчивости ( $S$  – площадь сечения):

$$\frac{P}{S} \leq \phi_6 \cdot [\sigma]; \quad \frac{200000}{0,004613} \leq 0,3096 \cdot 140 \cdot 10^6,$$

что дает  $4,336 \cdot 10^7 = 4,336 \cdot 10^7$ , то есть условие устойчивости выполняется.

3 Вычислим момент инерции

$$J_{\min} = 2,75a^4 = 2,75 \cdot 0,038^4 = 5,704 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

и рассчитаем критическую силу по формуле Эйлера

$$P_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L_{\text{привед}}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5,704 \cdot 10^{-6}}{5,827^2} = 386,2 \text{ кН.}$$

4 Соответствующее критическое напряжение

$$\sigma_{\text{крит}} = \frac{P_{\text{крит}}}{S} = \frac{386200}{0,004613} = 83,72 \text{ МПа} .$$

5 Коэффициент запаса устойчивости

$$n_{\text{уст}} = \frac{P_{\text{крит}}}{P} = \frac{386,2}{200} = 1,931 \approx 2.$$

В качестве **вывода** отметим, что подобранный коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения позволил определить параметр сечения  $a = 0,03796$  м и найти критическую силу с двойным коэффициентом запаса устойчивости.

Представленная разработка способствует совершенствованию качества преподавания дисциплин, являющихся первоначальной базой освоения специализированных пакетов САПР для решения вопросов прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций ракетно-космической техники.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Феодосьев, В. И.** Основы техники ракетного полета / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 496 с.

2 **Вольмир, А. С.** Устойчивость упругих систем / А. С. Вольмир. – М. : Физматгиз, 1963. – 880 с.

3 **Заславский, Б. В.** Краткий курс сопротивления материалов : учеб. для авиационных специальностей вузов / Б. В. Заславский. – М. : Машиностроение, 1986. – 328 с.

4 **Тимошенко, С. П.** Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – М. : Мир, 1976. – 670 с.

5 **Кснаткин, В. П.** Устойчивость центрально сжатого стержня. Методические указания и расчетные схемы задания по курсу «Сопротивление материалов» / В. П. Кснаткин, Л. А. Доставалова. – Красноярск, 1983. – 39 с.

6 **Кирсанов, М. Н.** Решебник. Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов. – М. : Физматлит, 2002. – 384 с.

7 **Горшков, А. Г.** Сопротивление материалов / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М. : Физматлит, 2002. – 544 с.

8 **Биргер, И. А.** Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1986. – 560 с.

*E. N. FISENKO, R. A. SABIROV*

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

#### STABILITY ANALYSIS OF THE CENTRALLY COMPRESSED THIN-WALLED RODS

There is presented an educational task for a calculation graphic project for studying the stability of rods with thin-walled cross sections (including non-simply connected ones), intended for students of aerospace specialties studying the disciplines "Strength of Materials" and "Structural Mechanics".

**Keywords:** stability, thin-walled rod, method of reducing the main allowable stress.

Получено 09.11.2022

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, представляемые в сборник научных трудов «Механика. Исследования и инновации», должны соответствовать следующим требованиям.

1 Материал статьи должен отражать профиль сборника научных трудов.

2 Статья не должна быть опубликована ранее в каком-либо печатном или электронном издании. Возможна публикация расширенного варианта какой-либо работы с обязательным упоминанием ее исходного варианта в списке литературных источников и тексте.

3 Статьи оформляются в соответствии с шаблоном, который можно найти на сайте БелГУТа (<http://www.bsut.by/>). Рукопись представляется на русском, английском либо белорусском языке. Аннотация и ключевые слова в обязательном порядке представляются на русском и английском языках. Для размещения статьи в разделе «Научные публикации» объем рукописи должен составлять не менее 0,35 авторского листа (не менее 5 *полных* страниц при оформлении по указанному шаблону).

4 Основная часть статьи должна включать:

– введение, в котором обосновывается цель работы и дается краткий обзор литературы по данной проблеме; для включения в раздел «Научные публикации» статья должна содержать ссылки на работы иных авторов, статьи в периодических изданиях, а также на работы на английском языке; не допускаются ссылки в одной фразе сразу на несколько работ без описания их особенностей;

– описание методики, аппаратуры, материалов, объектов исследования и подробное освещение содержания исследований, проведенных авторами, включая графики и другой иллюстративный материал; полученные результаты должны быть проанализированы с точки зрения их достоверности, научной новизны и сопоставлены с соответствующими известными данными; иллюстрации и формулы, встречающиеся в статье, нумеруются в соответствии с порядком цитирования в тексте;

– обсуждение, в котором автор должен представить свою интерпретацию полученных в ходе исследования результатов; для публикаций по физико-математическим наукам обязательно необходимо объяснить, в чем состоит новизна работы по сравнению с предыдущими исследованиями;

– заключение, содержащее сформулированные в сжатом виде выводы, которые должны вытекать из полного текста статьи, а не только из ее названия.

5 Рисунки, формулы и таблицы вставляются непосредственно в текст статьи и должны быть пронумерованы в соответствии с порядком упоминания в тексте.

6 Список литературы, размещаемый по окончании текста статьи, должен включать библиографические данные в соответствии с ГОСТ 7.1–2003. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Для включения в раздел «Научные публикации» список литературы должен включать не менее 10 наименований, причем *количество работ одного конкретного автора не должно превышать пяти* (исключение могут представлять только обзорные статьи).

7 Работы, показавшие при проверке на плагиат наличие заимствований без упоминания оригинальных публикаций, не рассматриваются, о чем информируются авторы. Материалы, не соответствующие требованиям пп. 3–6, не отправляются на рецензирование и возвращаются авторам для доработки.

8 Вместе с материалами статьи на адрес электронной почты редакции [tm.belsut@gmail.com](mailto:tm.belsut@gmail.com) следует выслать сведения об авторах, включающие фамилию, имя, отчество (полностью), место работы, занимаемую должность, ученую степень, ученое звание, адрес для переписки (почтовый и электронной почты), номер телефона для оперативной связи.

9 Направляя статью для публикации, авторы соглашаются с возможной редакционной правкой, не искажающей содержание статьи.

Научное издание

**Механика.  
Исследования и инновации**

Международный сборник научных трудов  
Выпуск 15

Научный редактор А. О. Шимановский

Редактор А. А. Павлюченкова  
Технический редактор В. Н. Кучерова  
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать 28.12.2022 г. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 17,16. Тираж 100 экз.  
Зак. № 566. Изд. № 58.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий

№ 1/361 от 13.06.2014.

№ 2/104 от 01.04.2014.

№ 3/1583 от 14.11.2017.

Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель