

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

**Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы
студентов электротехнических специальностей**

Гомель 2017

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

*Одобрено методической комиссией электротехнического
факультета в качестве учебно-методического пособия
для самостоятельной работы студентов
электротехнических специальностей*

Гомель 2017

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2
В67

Р е ц е н з е н т – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электротехника»
В. Н. Галушко (БелГУТ)

Волков, Н. П.

В67 Теоретические основы электротехники. Электростатическое поле: учеб.-метод. пособие / Н. П. Волков ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2017.– 80 с.
ISBN 978-985-554-629-1

Рассмотрены вопросы теории электростатического поля курса «Теоретические основы электротехники». Приведены решения типовых задач по рассмотренным в пособии темам.

Предназначено для студентов электротехнических специальностей.

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.21

ISBN 978-985-554-629-1

© Волков Н. П., 2017
© Оформление. БелГУТ, 2017

1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Электрическое поле, также как и магнитное поле, является составной частью единого электромагнитного поля, которое представляет вид материи. Между электрическими и магнитными полями существует глубокая внутренняя связь, которая проявляется в том, что эти поля могут превращаться друг в друга. Это взаимное превращение электрических и магнитных полей было открыто во второй половине девятнадцатого века английским ученым Дж. Максвеллом.

Частным случаем электромагнитного поля является *электростатическое* поле, к которому ученые пришли при рассмотрении взаимодействия покоящихся заряженных тел. При рассмотрении магнитного взаимодействия движущихся зарядов (токов) или постоянных магнитов пришли к понятию *магнитного* поля.

Электрические и магнитные поля могут существовать и без зарядов и токов, первоначально их породивших, например, в виде излученной электромагнитной волны.

Электромагнитное поле обладает энергией, массой, количеством движения и является определенной формой материи, посредством которой осуществляются электрические и магнитные взаимодействия. Энергия электромагнитного поля может переходить в другие виды энергии.

Электромагнитное поле обладает физическими свойствами, а следовательно, при его математическом описании используется ряд физических величин, как скалярных так и векторных. В дальнейшем векторные величины будем обозначать жирным шрифтом: **E**, **H**, **δ** и т. п.

Понятие физического электромагнитного поля, как одного из видов материи, не следует отождествлять с математическим понятием поля некоторой функции, скалярной или векторной. Под полем некоторой величины в математике понимают некоторую область пространства, каждой точке которого соответствует ее определенное значение: скалярное (поле скаляра) или векторное (поле вектора). Математическое понятие поля удобно применять при математическом описании физических свойств электромагнитного поля.

В теоретической электротехнике изучают классическую теорию электромагнитного поля, которая позволяет исследовать широкий круг

вопросов, встречающихся в энергетике, радиотехнике, технике связи и передачи информации.

1.1 Закон Кулона

Началом количественного изучения электрических явлений следует считать 1785 год, когда французский ученый Шарль Кулон установил опытным путем закон взаимодействия точечных электрических зарядов, носящий с тех пор его имя. Под *точечным* будем понимать такой заряд, когда размеры тела, на котором он расположен, несоизмеримо малы по сравнению с расстояниями до точек, в которых рассматривается поле.

Закон Кулона для двух заряженных тел на рисунке 1.1 формулируется следующим образом:

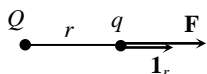


Рисунок 1.1

Два точечных заряда Q и q, расположенные в вакууме, взаимодействуют друг с другом с силой F, пропорциональной произведению этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{1}_r$ – единичный вектор, направленный от заряда Q к заряду q;

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} - \text{электрическая постоянная.}$$

Сила \mathbf{F} направлена по линии, соединяющей точечные заряды. Тела с зарядами одного знака отталкиваются, а если они имеют разные знаки, то притягиваются.

1.2 Напряженность и потенциал электрического поля

Для количественной оценки свойств электрического поля используются такие основные величины, как *напряженность E* и *потенциал φ*.

Пусть в поле, созданное точечным зарядом Q, вносится другой точечный пробный заряд q. Если пробный заряд q помещать в разных точках поля, то в соответствии с законом Кулона на него будет действовать сила F, пропорциональная q. Отношение силы F к заряду q не будет зависеть от значения этого заряда, в том числе и при $q \rightarrow 0$. Предел отношения силы F, действующей на пробный заряд, к этому заряду при его стремлении к нулю называется *напряженностью* электрического поля

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (1.2)$$

$$q \rightarrow 0$$

Напряженность поля уединенного точечного заряда Q в вакууме определяется по формуле:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r. \quad (1.3)$$

Векторы силы \mathbf{F} , приложенной к заряду q , и напряженности поля \mathbf{E} в точке, где находится q , связаны соотношением:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим перемещение положительного точечного заряда q из начальной точки 1 в конечную точку 2 по траектории 1 – 3 – 2 (рисунок 1.2) в поле положительного точечного заряда Q . Заряд q выберем по значению таким, чтобы он не искажал поле заряда Q .

Работу A_{12} по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 запишем в виде линейного интеграла

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{l}$ – элемент длины, направленный по касательной к траектории перемещения заряда.

При $q = 1$ работа, затрачиваемая силами поля по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2, называется *разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ или *напряжением* U_{12} между этими точками:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1.5)$$

Если принять потенциал конечной точки 2 равным нулю, то потенциал φ_1 начальной точки 1 можно рассматривать как *работу, совершаемую силами поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в точку, потенциал которой равен нулю*.

В реальных практических задачах электростатики обычно принимают равным нулю потенциал поверхности земли. Если полагать, что конечная точка 2 находится на бесконечном удалении от точки 1, то

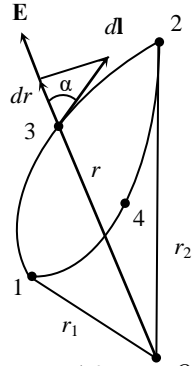


Рисунок 1.2

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \mathbf{E}d\mathbf{l}.$$

В точке 3 рисунка 1.2 векторы \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$ не совпадают по направлению и образуют угол α . Скалярное произведение

$$\mathbf{E}d\mathbf{l} = Edl\cos\alpha = Edr,$$

где $dr = dl\cos\alpha$ – проекция вектора $d\mathbf{l}$ на направление вектора \mathbf{E} .

Если перемещение заряда q рассматривать относительно неподвижного заряда Q , то его положение в точке 3 можно характеризовать радиус-вектором r , проведенным из точки Q в точку 3. Координаты начальной 1 и конечной 2 точек траектории заряда обозначим через r_1 и r_2 соответственно.

С учетом отмеченного выше получим формулу для расчета U_{12} :

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

При $r_2 \rightarrow \infty$ потенциал любой точки поля, расположенной на удалении r от заряда Q , будет определяться формулой

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.6)$$

Как и работа, потенциал является скалярной величиной.

При перемещении заряда q из точки 2 в точку 1 по траектории 2 – 4 – 1 силами поля будет совершена работа

$$A_{21} = q \int_2^1 \mathbf{E}d\mathbf{l} = -A_{12}.$$

Работа сил поля по перемещению заряда вдоль замкнутого контура равна нулю, т. е. в электростатическом поле выполняется условие: *циркуляция вектора \mathbf{E} вдоль любого замкнутого контура равна нулю:*

$$\oint_l \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0. \quad (1.7)$$

Это соотношение выражает собой основное свойство электростатического поля. Поле, для которого выполняется такое условие, называется *потенциальным*.

Если электрическое поле создано системой точечных зарядов, то для величин его характеризующих можно применить *принцип суперпозиции (наложения)*, в соответствии с которым напряженность поля в какой-либо точке определяется в виде векторной суммы, а потенциал – в виде алгебраической суммы соответствующих составляющих от действия каждого заряда:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i; \quad \mathbf{E} = \sum_j \mathbf{E}_j.$$

Принцип суперпозиции позволяет вычислять потенциалы и напряженность поля произвольной системы зарядов.

1.3 Поляризованность диэлектриков

Электрические заряды, которые свободно перемещаются в веществе (проводнике) под действием сил поля, называют *свободными*.

Под *связанными* понимают заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие вещества относят к классу диэлектриков.

Если какое-либо вещество, в котором нет свободных зарядов, поместить в электрическое поле, то оно *поляризуется*. Под *поляризацией* понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в диэлектрике, вызванное воздействием электрического поля.

В поляризованном веществе молекулы в электрическом отношении представляют собой *диполи*.

Электрическим диполем называют систему из двух разноименных и одинаковых по значению точечных зарядов q , находящихся на расстоянии l друг от друга (рисунок 1.3). Диполь характеризуется векторной величиной, называемой *электрическим моментом* $\mathbf{p} = ql$.

За положительное направление вектора \mathbf{p} принимают направление от отрицательного заряда к положительному.

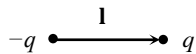


Рисунок 1.3

Электрическое поле, создаваемое в диэлектрической среде, воздействует на электронные орбиты атомов. Под действием электрического поля происходит их деформация, и они превращаются в электрические диполи, которые ориентируются вдоль линий напряженности внешнего поля. Такие диполи называют *квазипружинами*.

Поляризация происходит и в диэлектриках, молекулы которых обладают собственным дипольным моментом (*полярные* молекулы). В отсутствие внешнего поля диполи в веществе расположены хаотически, и поляризация отсутствует.

Если пластину из диэлектрика поместить в электростатическое поле, то под действием внешнего поля диполи вещества будут стремиться ориентироваться в пространстве таким образом, чтобы их электрический момент был направлен параллельно вектору \mathbf{E} (рисунок 1.4).

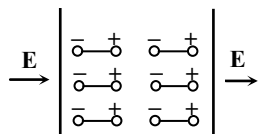


Рисунок 1.4

В результате на левой стороне пластины появится избыток отрицательных зарядов, а на противоположной – избыток положительных зарядов. Таким образом, поляризация связана со смещением в диэлектрике положительно и отрицательно заряженных частиц.

Электрический момент суммы диполей, находящихся в объеме Δv вещества, отнесенный к объему Δv при его стремлении к нулю называют *вектором поляризованности* и обозначают \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum q\mathbf{l}}{\Delta v}. \quad (1.8)$$

Для большинства диэлектриков вектор \mathbf{P} пропорционален напряженности электрического поля:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad (1.9)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость среды.

1.4 Вектор электрического смещения

Наряду с векторами \mathbf{E} и \mathbf{P} в электротехнических расчетах используют введенный Дж. Максвеллом *вектор электрической индукции* или *вектор электрического смещения* \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.10)$$

С учетом соотношения 1.9 получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\chi}{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \left(1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

где ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества;

ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость вещества.

Относительная диэлектрическая проницаемость вещества показывает, во сколько раз интенсивность электрического поля в диэлектрике меньше, чем в вакууме при прочих равных условиях.

Расчетные формулы (1.1) и (1.3) принимают для поля, созданного в диэлектрике, следующий вид:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{1}_r \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{1}_r.$$

1.5 Определение потенциала заряженных тел различной конфигурации

Если заряженное тело имеет достаточно большие размеры, и его нельзя характеризовать как точечный заряд, то в этом случае его можно рассматривать в виде совокупности бесконечного множества элементарных зарядов Δq и применить к ним принцип наложения. При этом необходимо знать распределение зарядов внутри тела.

В практике возможны три варианта распределения зарядов:

1 Заряд распределен определенным образом внутри тела (рисунок 1.5, а). Выделим внутри этого тела малый объем Δv , в котором находится заряд Δq .

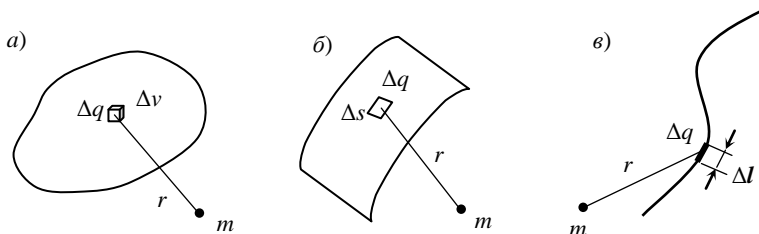


Рисунок 1.5

Предел отношения заряда Δq к объему Δv при стремлении последнего к нулю определяет *объемную плотность* заряда ρ :

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \rho.$$

Тогда заряд dq в бесконечно малом объеме dv (точечный заряд) находим в виде $dq = \rho dv$, а потенциал в точке m от действия всех точечных зарядов находим по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_v \frac{\rho dv}{r}. \quad (1.12)$$

2 Заряд располагается только внутри тонкого слоя, прилегающего к поверхности (рисунок 1.5, б). В этом случае пользуются понятием *поверхностной плотности* заряда σ

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \sigma,$$

где Δq – заряд, находящийся на элементе поверхности Δs .

Выражение для потенциала принимает вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_s \frac{\sigma ds}{r}. \quad (1.13)$$

3 Заряд распределен вдоль протяженного тела, поперечные размеры которого весьма малы. В этом случае распределение заряда характеризуется *линейной плотностью* заряда τ

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \tau,$$

где Δq – заряд, находящийся на элементе длины Δl .

Для расчета потенциала используем формулу:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{r}. \quad (1.14)$$

1.6 Геометрия поля

Конфигурация поля может быть наглядно изображена с помощью картины *силовых линий* или *линий напряженности* поля. Силовая линия представляет собой пространственную кривую, вектор касательной к которой совпадает в каждой точке с вектором \mathbf{E} (рисунок 1.6).

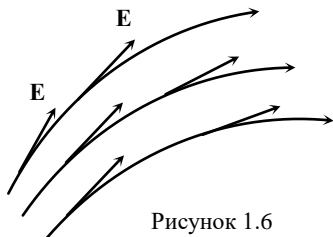


Рисунок 1.6

Силовые линии точечного заряда представляют собой семейство радиально расходящихся прямых (рисунок 1.7).

Силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах и нигде не пересекаются между собой. При этом плотность силовых линий пропорциональна напряженности поля.

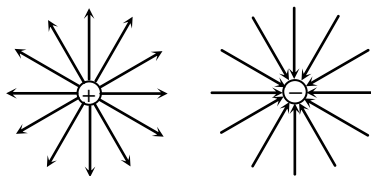


Рисунок 1.7

Картина поля может быть также представлена с помощью семейства *эквипотенциальных поверхностей* в пространстве.

Эквипотенциальная поверхность есть совокупность точек пространства, имеющих один и тот же потенциал. След эквипотенциальной поверхности в плоскости чертежа представляет собой линию равного потенциала или *эквипотенциальную линию*. При перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности работа силами поля не производится.

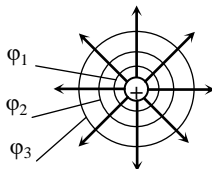


Рисунок 1.8

Силовые линии поля пересекают эквипотенциальные поверхности под прямым углом.

Для точечного заряда эквипотенциальные поверхности – семейство концентрических сфер, а на плоскости – семейство концентрических окружностей (рисунок 1.8).

Под силовой трубкой понимают пространство, ограниченное силовыми линиями в направлении электрического поля. Поток вектора \mathbf{E} вдоль всей трубки остается постоянным

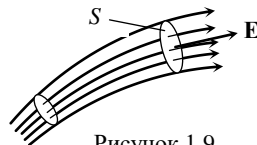


Рисунок 1.9

$$\int_s \mathbf{E} ds = \text{const}$$

1.7 Градиент потенциала

Если известно распределение потенциала в какой-либо части пространства, т. е. значения потенциала в каждой точке поля, то можно найти и напряженность поля в каждой точке.

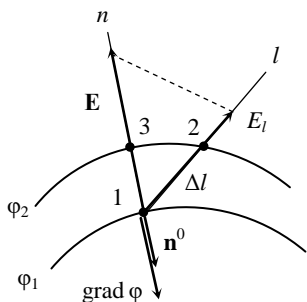


Рисунок 1.10

Рассмотрим две очень близко расположенные эквипотенциальные поверхности электростатического поля, фрагменты следов (эквипотенциальных линий) которых в плоскости чертежа изображены на рисунке 1.10. Одна из них имеет потенциал φ_1 , другая – потенциал φ_2 , при этом $\varphi_1 > \varphi_2$. Представим, что положительный заряд $q = 1$ переносится из точки 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2 по прямолинейному направлению l на расстояние Δl . Работа ΔA по

перемещению заряда силами поля может быть выражена через напряженность E поля:

$$\Delta A = E_l \Delta l,$$

где E_l – проекция вектора напряженности E в точке 1 на направление l .

С другой стороны ту же работу можно выразить через разность потенциалов:

$$\Delta A = \varphi_1 - \varphi_2.$$

При этом приращение потенциала $\Delta\varphi$ при перемещении заряда на отрезке Δl будет равно $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, откуда получаем $E_l \Delta l = -\Delta\varphi$ или

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

Найдем предел отношения приращения потенциала $\Delta\varphi$ к численному значению перемещения Δl при стремлении его значения к нулю

$$E_l = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

Значение этой производной существенно зависит от выбора направления l . Совмещая направление перемещения l с направлением n вектора E , будем иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -E.$$

Пусть единичный вектор нормали \mathbf{n}^0 к эквипотенциальной поверхности φ_1 направлен в сторону возрастания потенциала поля, т. е. противоположно направлению вектора \mathbf{E} . Тогда с учетом сказанного можно записать:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathbf{n}^0 = -\mathbf{E}. \quad (1.15)$$

Вектор $\frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathbf{n}^0$, направленный в данной точке 1 поля по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала и численно равный производной скалярной величины φ в этой точке по нормали, называется *градиентом скалярного потенциала* и обозначается

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathbf{n}^0. \quad (1.16)$$

Векторы \mathbf{E} и $\text{grad } \varphi$ равны между собой по значению и направлены в противоположные стороны:

$$\text{grad } \varphi = -\mathbf{E}. \quad (1.17)$$

В декартовой системе координат x, y, z с единичными ортами \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} выражение 1.16 записывается так:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Имея в виду, что $\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$, получаем:

$$\mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right).$$

Из этого соотношения следует:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Градиент потенциала можно записать при помощи символического векторного оператора Гамильтона $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ (знак *набла*) в виде

$$\nabla\varphi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi.$$

Следовательно, соотношение 1.17 можно написать в форме

$$\mathbf{E} = - \nabla\varphi.$$

Выражение градиента потенциала в цилиндрической системе координат (обозначения на рисунке 1.11, а):

$$\text{grad}\varphi = \mathbf{1}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{1}_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (1.18)$$

В сферической системе координат (обозначения на рисунке 1.11, б):

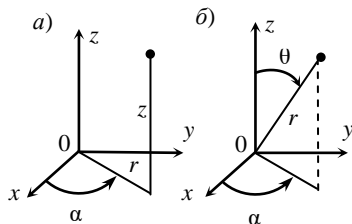


Рисунок 1.11

$$\text{grad}\varphi = \mathbf{1}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{1}_\alpha \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}. \quad (1.19)$$

1.8 Энергия системы заряженных тел

Система заряженных тел обладает определенным запасом энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками в процессе повышения зарядов тел и может быть возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Если в поле, созданном несколькими заряженными телами, поместить точечный заряд q в некоторую точку с потенциалом φ , то его энергия измерится произведением заряда на потенциал:

$$W = q\varphi.$$

Энергия системы двух тел с зарядами q_1 и q_2 измеряется работой, которую совершают силы поля при перемещении одного из этих тел в бесконечно удаленную точку. Если φ_1 – потенциал от действия первого заряда в точке, где находится второй заряд, а φ_2 – потенциал от действия второго заряда в точке, где находится первый, то

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

Для системы неподвижных точечных зарядов $q, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k,$$

где φ_k – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме k -го, в точке, в которой находится заряд q_k .

Плотностью энергии w называется величина, измеряемая энергией в единице объема,

$$w = \frac{dw}{dv}.$$

1.9 Теорема Гаусса

Рассмотрим в электрическом поле поверхность S , ограниченную некоторым контуром (рисунок 1.12). Выделим бесконечно малый элемент ds этой поверхности и условимся характеризовать его вектором ds , численно равным площади этой поверхности и направленным по нормали n в некоторой точке этого элемента поверхности. Проекцию вектора смещения \mathbf{D} на направление n обозначим $D_n = D \cos\beta$.

Интеграл от произведений элементов поверхности на составляющие вектора D_n , нормальные к этим элементам, распространенный на всю поверхность S , носит название *потока вектора смещения* сквозь эту поверхность

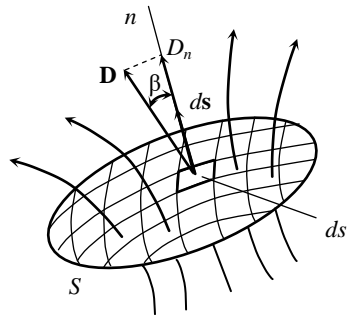


Рисунок 1.12

$$\Psi_D = \int_S D \cos\beta ds = \int_S \mathbf{D} ds.$$

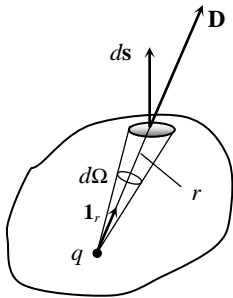


Рисунок 1.13

Поток вектора – величина скалярная.

Если поверхность S является замкнутой и внутри нее находится точечный заряд q (рисунок 1.13), то поток вектора смещения через эту поверхность

$$\Psi_D = \oint_S \mathbf{D} ds = \frac{q}{4\pi} \oint_S \frac{ds}{r^2} 1_r.$$

Величина $\frac{ds}{r^2} 1_r = d\Omega$ представляет собой

телесный угол $d\Omega$, под которым виден элемент поверхности ds , если вершина телесного угла совмещена с точкой, в которой находится заряд q . Телесный угол, под которым видна вся поверхность S , равен 4π стерадиан. Подставив значение $d\Omega$, получим

$$\oint_S \mathbf{D} ds = q. \quad (1.20)$$

Как следует из приведенного выше соотношения, полученный результат не зависит ни от положения точечного заряда внутри объема, ни от формы замкнутой поверхности. Это позволяет применять его для любого числа точечных заряженных тел, а следовательно, и для любого числа заряженных тел произвольной конфигурации.

Полученная формула 1.20 является математическим выражением теоремы Гаусса в интегральной форме, которая гласит:

Поток вектора смещения электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

Если диэлектрическая среда, в которой создано электрическое поле, является однородной и изотропной, то вместо вектора \mathbf{D} можно воспользоваться вектором напряженности поля $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_a$ и записать теорему в следующем виде:

$$\oint_S \mathbf{E} ds = \frac{q}{\epsilon_a}. \quad (1.21)$$

Поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению алгебраической суммы свободных электрических зарядов,

заключенных внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды.

Поток вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность может создаваться не только суммой свободных зарядов q , но и связанными зарядами q' , находящимися внутри этой поверхности. Как отмечалось выше, связанные заряды обусловлены явлением поляризации и зависят от вектора поляризованности \mathbf{P} . Поток вектора поляризованности сквозь любую замкнутую поверхность равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_S \mathbf{P} ds = -q'.$$

Запишем формулу (1.20) с учетом соотношения (1.10) следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{D} ds = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) ds = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} ds + \oint_S \mathbf{P} ds = q.$$

Следовательно,
$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} ds = q - \oint_S \mathbf{P} ds = q + q'$$

или
$$\oint_S \mathbf{E} ds = \frac{q + q'}{\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

Пусть некоторый свободный электрический заряд распределен определенным образом внутри объема диэлектрика, ограниченного замкнутой поверхностью. Выделим вокруг точки m малый объем Δv , который содержит заряд Δq (рисунок 1.14) и применим к нему формулу (1.20):

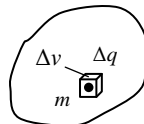


Рисунок 1.14

$$\oint_S \mathbf{D} ds = \Delta q.$$

Разделим обе части соотношения на Δv и найдем предел, к которому стремится отношение при $\Delta v \rightarrow 0$.

Имеем

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} ds}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v}.$$

Предел отношения потока вектора \mathbf{D} сквозь замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем, к этому объему называется *дивергенцией* вектора \mathbf{D} и обозначается $\text{div } \mathbf{D}$. В правой части получаем объемную плотность ρ заряда в данной точке пространства.

Таким образом, получаем формулу теоремы Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (1.23)$$

Для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью можно записать:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (1.24)$$

Выразим $\text{div } \mathbf{E}$ в декартовой системе координат. С этой целью рассмотрим бесконечно малый параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , параллельными осям координат (рисунок 1.15).

Найдем поток вектора \mathbf{E} сквозь поверхность параллелепипеда путем алгебраического суммирования потоков сквозь его грани. Потоки, входящие внутрь поверхности будем учитывать со знаком «минус», а потоки, исходящие из параллелепипеда – со знаком «плюс».

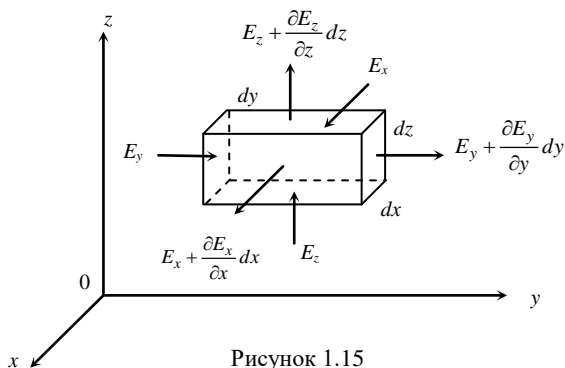


Рисунок 1.15

Поделив найденный поток $\frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz dx dy$ на объем параллелепипеда $dx dy dz$, находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Полученное выражение формально можно рассматривать как скалярное произведение векторного дифференциального оператора Гамильтона

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

и вектора $\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$:

$$\nabla \mathbf{E} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме можно написать в виде

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

В декартовой системе координат она имеет вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (1.25)$$

Дивергенция вектора величина алгебраическая. Ее знак зависит от знака заряда.

1.10 Уравнения Пуассона и Лапласа

Подставим в уравнение (1.25) вместо величин E_x , E_y и E_z их выражения через потенциал:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad (1.26)$$

которое носит название *уравнения Пуассона*. Решение уравнения для случая, когда заряды распределены в конечной области пространства, дается интегралом

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_v \frac{\rho dv}{r}.$$

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды, то уравнение Пуассона получает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.27)$$

и называется *уравнением Лапласа*.

Уравнения Пуассона и Лапласа можно записать в компактной форме, если воспользоваться оператором

$$\nabla^2 = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

который называют оператором Лапласа.

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Приведем выражения $\nabla^2 \varphi$ в цилиндрической и сферической системах координат:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (1.28)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.29)$$

1.11 Граничные условия

Под *граничными условиями* следует понимать определенные условия, которым должны удовлетворять векторы поля на границе двух различных сред. Граничные условия нужны для однозначного решения дифференциальных уравнений поля.

1.11.1 Условия на границе раздела проводника и диэлектрика

Как известно, проводниками называют вещества, имеющие свободные заряды. К ним относятся:

- а) металлы со свободными электронами;
- б) электролиты с положительно и отрицательно заряженными ионами;
- в) плазма (ионизированный газ), в составе которой присутствуют электроны и ионы.

Электрическое поле внутри проводников отсутствует ($E = 0$). Это объясняется следующим. Если внести проводник во внешнее электрическое поле, то под действием сил поля свободные заряды будут перемещаться по проводнику, при этом на одной части поверхности проводника накапливаются положительные заряды, а на другой – отрицательные (рисунок 1.16). Разделение зарядов продолжается до тех пор, пока поле

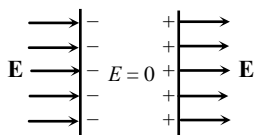


Рисунок 1.16

смещенных зарядов не уравнивает внешнее поле. Свободные заряды сосредотачиваются на поверхности проводника в слое бесконечно малой толщины.

Все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Таким образом, поверхность проводника всегда эквипотенциальна, а линии напряженности внешнего поля перпендикулярны

к ней.

Пусть проводник расположен в диэлектрической среде. Выделим вблизи границы раздела двух сред замкнутую цилиндрическую поверхность, расположенную в обеих средах (рисунок 1.17). Торцевая поверхность Δs цилиндра параллельна поверхности проводника, а боковая поверхность цилиндра нормальна границе раздела. Применим теорему Гаусса в интегральной форме, полагая, что поверхностная плотность σ заряда в силу малости линейных размеров цилиндра во всех точках поверхности Δs одна и та же, а полный заряд внутри поверхности равен $\sigma \Delta s$,

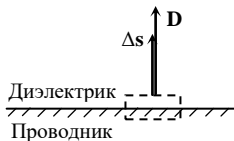


Рисунок 1.17

$$\int_S \mathbf{D} ds = \sigma \Delta s.$$

Принимая во внимание тот факт, что поток вектора \mathbf{D} через боковую поверхность и нижний торец цилиндра равен нулю, получим:

$$D = \sigma. \quad (1.30)$$

При постоянном значении абсолютной диэлектрической проницаемости среды можно записать:

$$\sigma = E/\varepsilon_a.$$

Поверхностная плотность σ заряда, индуцированного внешним полем, в какой-либо точке проводящей поверхности, равна отношению напряженности поля в этой точке к абсолютной диэлектрической проницаемости среды.

1.11.2 Условия на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим электрическое поле на границе двух однородных и изотропных диэлектриков с различными относительными диэлектрическими проницаемостями ε_{1r} и ε_{2r} (рисунок 1.18). Будем полагать, что на границе отсутствуют свободные заряды. Пусть векторы \mathbf{D}_1 и \mathbf{E}_1 в первой среде направлены под углом θ_1 к нормали $n-n$.

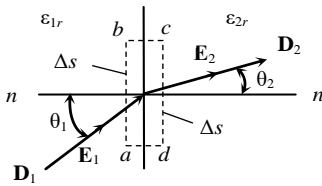


Рисунок 1.18

При прохождении через границу раздела двух диэлектриков они испытают преломление и займут положение под углом θ_2 . Определим граничные условия. Выделим вблизи границы раздела замкнутую цилиндрическую поверхность S , одна половина которой находится в

первой среде, а другая – во второй. Торцевые поверхности Δs цилиндра параллельны поверхности раздела сред.

Уменьшая высоту цилиндра так, чтобы его торцевые поверхности стремились к границе между диэлектриками, получим близкое к нулевому значение потока вектора \mathbf{D} через боковую поверхность. Тогда в соответствии с теоремой Гаусса можем записать:

$$-D_1 \cos \theta_1 \Delta s + D_2 \cos \theta_2 \Delta s = 0.$$

После сокращения на Δs получим первое граничное условие:

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 \quad \text{или} \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

На поверхности раздела равны нормальные составляющие вектора электрического смещения.

Если на границе раздела диэлектриков распределен свободный заряд с поверхностной плотностью σ (что встречается весьма редко), то граничное условие для вектора смещения примет вид:

$$-D_1 \cos \theta_1 \Delta s + D_2 \cos \theta_2 \Delta s = \sigma \Delta s$$

или

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Второе граничное условие получим из рассмотрения циркуляции вектора напряженности \mathbf{E} по контуру $a-b-c-d-a$, которая в соответствии с формулой (1.7) равна нулю. Для равных по длине отрезков ab и cd и бесконечно малых по сравнению с ними отрезков bc и da имеем:

$$E_1 \sin \theta_1 ab - E_2 \sin \theta_2 cd = 0 \quad \text{или} \quad E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2.$$

На поверхности раздела равны тангенциальные (касательные) составляющие вектора напряженности электрического поля:

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Разделив соотношения $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$ и $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$, получим условие преломления силовых линий поля при переходе их из одной диэлектрической среды в другую:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}. \quad (1.31)$$

Если линии напряженности нормальны к поверхности раздела двух диэлектрических сред, то векторы смещения будут одинаковыми в обеих средах:

$$D_1 = D_2.$$

При этом будет наблюдаться скачкообразное изменение векторов напряженности поля, т. к.

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_{1a}} \neq E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_{2a}}.$$

Это можно объяснить появлением связанного заряда на границе раздела диэлектриков. Если $\varepsilon_{1a} > \varepsilon_{2a}$, то $E_1 < E_2$. В зависимости от разной способности диэлектриков поляризоваться на поверхности раздела будет наблюдаться разная плотность зарядов диполей (рисунок 1.19). Вблизи

поверхности раздела в первой среде образуются положительные заряды диполей Δq_+ , а во второй – отрицательные Δq_- . Если коэффициент поляризованности χ_1 первого диэлектрика больше соответствующего коэффициента χ_2 второго диэлектрика, то положительные заряды будут преобладать над отрицательными, и в тонком слое у поверхности раздела образуется связанный слой положительных зарядов с поверхностной плотностью

$$\sigma' = \frac{\Delta q_+ - \Delta q_-}{\Delta S} = \frac{\Delta q'}{\Delta S}.$$

Применим к цилиндрической поверхности S , проведенной вблизи границы раздела, теореме Гаусса и формулу (1.22)

$$\int_S \mathbf{E} ds = -E_1 \Delta S + E_2 \Delta S = \frac{\Delta q'}{\varepsilon_0}.$$

Поделив обе части соотношения на ΔS , будем иметь

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

С учетом условия, что $D_1 = D_2$ или $\varepsilon_0 E_1 + P_1 = \varepsilon_0 E_2 + P_2$ получим

$$\varepsilon_0 (E_2 - E_1) = P_1 - P_2 = \sigma'.$$

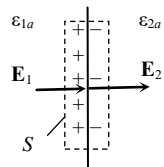


Рисунок 1.19

1.12 Теорема единственности решения

Электрическое поле описывается уравнением Пуассона или Лапласа в частных производных, которые в общем случае имеют множество линейно независимых друг от друга решений. При этом в каждом конкретном случае есть единственное решение, выбор которого осуществляется с помощью граничных условий. Это положение называют *теоремой единственности решения*. Для электростатического поля она формулируется следующим образом:

Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона или Лапласа и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Из теоремы единственности вытекают два положения, имеющие практическое значение.

Следствие 1. *Электростатическое поле в некоторой области, ограниченной эквипотенциальными поверхностями, не изменится, если эти поверхности сделать проводящими с соответствующими потенциалами.*

Следствие 2. *Электростатическое поле по одну сторону некоторой граничной поверхности не изменится, если по другую сторону этой поверхности изменить параметры среды и распределение зарядов таким образом, чтобы граничные условия на этой поверхности полностью сохранились (принцип зеркальных отображений).*

1.13 Одномерное, плоскопараллельное и плоскомеридианное поля

Расчет поля существенно упрощается, если величины, характеризующие поле, являются функциями только одной координаты. Поле в этом случае называется *одномерным*.

Если величины, характеризующие поле, зависят от двух координат, поле называется *двумерным*. Двумерные поля бывают плоскопараллельными и плоскомеридианными.

Плоскопараллельным называют поле, потенциал точек которого не зависит от одной из координат декартовой системы. В этом случае картина поля, т. е. совокупность силовых и эквипотенциальных линий, одинакова во всех плоскостях, перпендикулярных этой оси координат.

В *плоскомеридианном* поле потенциал точек поля не зависит от азимутальной координаты цилиндрической системы. Картина поля одинакова во всех плоскостях, проходящих через ось вращения системы координат.

1.14 Поле заряженной оси

Под *заряженной осью* понимают прямолинейный металлический проводник, диаметр которого весьма мал по сравнению с его длиной. Если на проводнике длиной l располагается заряд q , то на единицу длины проводника приходится заряд $\tau = q/l$. Для определения напряженности поля в некоторой точке, находящейся на расстоянии r от оси, проведем через эту точку цилиндрическую поверхность таким образом, чтобы оси цилиндра и проводника совпали (рисунок 1.20). Применим теорему Гаусса в интегральной форме. Поток вектора напряженности \mathbf{E} поля имеется только сквозь боковую поверхность цилиндра шириной h , а поток через торцы цилиндра

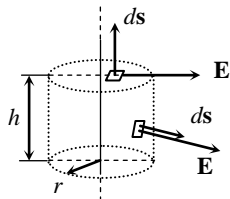


Рисунок 1.20

отсутствует, т. к. для любой точки обеих торцевых поверхностей векторы элемента ds и напряженности \mathbf{E} взаимно перпендикулярны.

В любой точке боковой цилиндрической поверхности в силу граничных условий векторы \mathbf{E} и ds совпадают по направлению и нормальны осевой линии, поэтому

$$\int_{S_{\text{бок}}} E ds = \frac{\tau h}{\epsilon_a} \quad \text{или} \quad E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\tau h}{\epsilon_a}$$

откуда
$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (1.32)$$

Напряженность в точке, находящейся в поле заряженной оси, обратно пропорциональна расстоянию r точки от оси.

Потенциал точки определяем по формуле (1.17), учитывая, что в цилиндрической системе координат для данного случая он зависит только от координаты r :

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E, \quad \text{откуда} \quad \varphi = -\int E dr + C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Подставив E из формулы (1.32), получим

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + C_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} + C_1. \quad (1.33)$$

Из формулы (1.33) следует, что поверхностями равного потенциала являются боковые поверхности круговых цилиндров, а эквипотенциальные линии в плоскости, перпендикулярной заряженной оси, – концентрические окружности. Поле заряженной оси является плоскопараллельным.

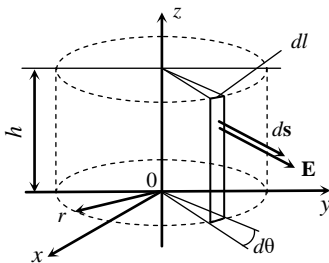


Рисунок 1.21

Найдем выражение для линий напряженности поля заряженной оси. Выделим на боковой цилиндрической поверхности элементарную площадку ds длиной h и шириной dl (рисунок 1.21), параллельную оси z . Поток вектора \mathbf{E} через площадку $ds = hdl = hrd\theta$

$$d\Psi_E = E ds = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} h d\theta.$$

Условимся рассматривать поток на единицу длины заряженной оси и введем обозначение

$$\frac{d\Psi_E}{h} = dv = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} d\theta.$$

Величина v , которую называют *функцией потока*, представляет собой уравнение силовой линии поля:

$$v = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \theta + C_2. \quad (1.34)$$

Постоянные C_1 и C_2 в уравнениях (1.33) и (1.34) зависят от выбора линии равного потенциала, на котором принимается $\varphi = 0$, и от выбора начальной линии напряженности поля, для которой принимается $v = 0$.

На чертеже линии равного потенциала проводят так, чтобы при переходе от линии, помеченной номером k , к следующей, $(k + 1)$ -й линии, приращение потенциала было одним и тем же:

$$\Delta\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{1}{r_{k+1}} - \ln \frac{1}{r_k} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_k}{r_{k+1}} = \text{const},$$

т. е.
$$\frac{r_k}{r_{k+1}} = \text{const}$$

Приращение Δv функции потока при переходе от k -й линии напряженности поля к $(k + 1)$ -й будем также принимать одинаковым:

$$\Delta v = v_{k+1} - v_k = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\theta_{k+1} - \theta_k) = \text{const},$$

откуда
$$\theta_{k+1} - \theta_k = \Delta\theta = \text{const},$$

т. е. линии напряженности поля должны отстоять друг от друга на равные углы. На рисунке 1.22 приведены семейства силовых и эквипотенциальных линий электрического поля положительно заряженной оси.

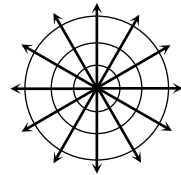


Рисунок 1.22

1.15 Поле двух параллельных заряженных осей

Рассмотрим плоскопараллельное поле, созданное двумя параллельными линейными проводниками, один из которых имеет заряд на единицу длины τ_1 , а другой — τ_2 , причем $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$. В декартовой системе координат точки

пересечения проводов с плоскостью xOy обозначим буквами B и C и расположим их симметрично оси y на расстоянии b (рисунок 1.23). Потенциал в точке A , имеющей координаты x и y , найдем в соответствии с принципом наложения по формуле (1.33):

$$\varphi = \varphi_{\tau} + \varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r_1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (1.35)$$

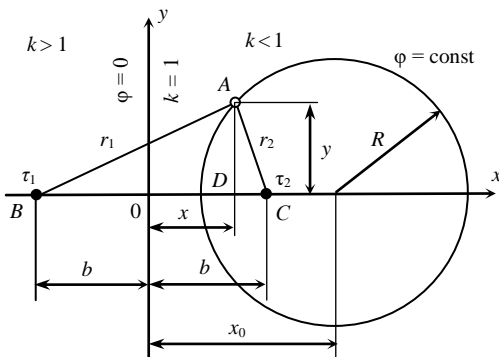


Рисунок 1.23

треугольников ABD и ACD можно записать

$$r_1^2 = (b+x)^2 + y^2 \quad \text{и} \quad r_2^2 = (b-x)^2 + y^2.$$

Имеем

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = k^2.$$

Преобразуем это выражение

$$b^2 - 2bx + x^2 + y^2 = k^2(b^2 + 2bx + x^2) + k^2y^2$$

или

$$(1-k^2)x^2 - 2(1+k^2)bx + (1-k^2)y^2 = -b^2(1-k^2).$$

Поделив полученное выражение на $(1-k^2)$ и добавив с каждой стороны

по члену $\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 b^2$, получим

где r_1 и r_2 – расстояния от точки A до положительно и отрицательно заряженных проводов соответственно.

Уравнение равного потенциала имеет вид

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$$

или

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}$$

Из рассмотрения прямоугольных

$$x^2 - 2 \frac{1+k^2}{1-k^2} bx + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 b^2 + y^2 = -b^2 + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 b^2$$

или

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2} b \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2k}{1-k^2} b \right)^2,$$

что является уравнением окружности с координатами центра

$$x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2} b, \quad y_0 = 0 \quad (1.36)$$

и радиусом

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|} b. \quad (1.37)$$

Для всех точек на оси ординат для рисунка 1.23 $k = 1$, т. к. $r_1 = r_2$. Следовательно, ось y является линией нулевого потенциала. Эквипотенциальные линии, лежащие слева от оси y , имеют положительные значения потенциалов ($k > 1$), а линии справа от оси y характеризуются отрицательными значениями потенциалов ($k < 1$).

Для построения семейства эквипотенциальных линий необходимо, чтобы приращение потенциала при переходе от любой эквивалентной линии к соседней оставалось постоянным, т. е. должно соблюдаться условие:

$$\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{r_{2,i+1}}{r_{1,i+1}} - \ln \frac{r_{2,i}}{r_{1,i}} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{k_{i+1}}{k_i} = \text{const}$$

или

$$\frac{k_{i+1}}{k_i} = \text{const}$$

Для получения уравнения силовой линии, проходящей через точку A , рассмотрим рисунок 1.24. Через точку A проходит линия напряженности поля, берущая свое начало на положительно заряженной оси (точка B) и заканчивающаяся на отрицательно заряженной оси (точка C).

Функцию потока для силовой линии, проходящей через точку A , найдем по формуле (1.34):

$$v(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \theta_1 - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \theta_2 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\theta_2 - \theta_1).$$

Если $\theta_1 = \theta_2$ что возможно при $\theta_1 = 0$ или $\theta_1 = \pi$, то $v = 0$.

Следовательно, начальной линией напряженности поля являются участки оси абсцисс, уходящие в бесконечность.

Уравнение любой силовой линии поля имеет следующий вид:

$$v(x, y) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a}(\theta_2 - \theta_1) = \text{const}$$

или $\theta_2 - \theta_1 = \theta = \text{const}$

Полученное выражение представляет собой уравнение дуги окружности с центром в точке O_1 , проходящей через точки A, B и C , т. е. при перемещении точки A по этой дуге угол BAC , под которым виден отрезок BC , равен углу θ и остается постоянным. Из рассмотрения прямоугольного треугольника BO_1O следует, что угол BO_1O равен θ , а координаты центра O_1 окружности

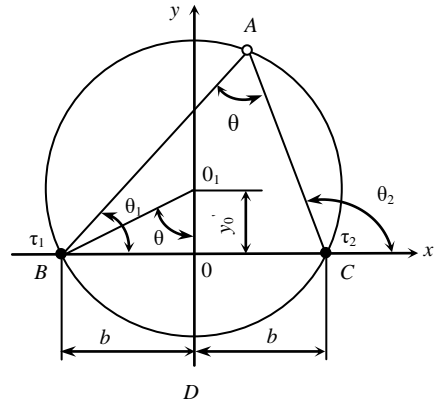


Рисунок 1.24

$$x'_0 = 0 \quad \text{и} \quad y'_0 = bctg\theta.$$

Таким образом, любая линия окружности, проходящая через точку A , образует две силовые линии, каждая из которых начинается на положительно заряженной оси (точка B) и заканчивается на отрицательно заряженной оси (точка C).

Для построения семейства силовых линий поля необходимо, чтобы переход от любой линии напряженности поля к соседней сопровождался одинаковым приращением функции потока

$$\Delta v = v_{i+1} - v_i = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a}(\theta_{i+1} - \theta_i) = \text{const}$$

или $\theta_{i+1} - \theta_i = \Delta\theta = \text{const}.$

1.16 Поле двух параллельных проводов кругового сечения

Пусть два провода бесконечной длины и радиусом R каждый расположены параллельно друг другу (рисунок 1.25), расстояние между

осями проводов равно D . Провода имеют одинаковые по значению и противоположные по знаку заряды с линейной плотностью τ , при этом левый провод несет положительный заряд, а правый – отрицательный.

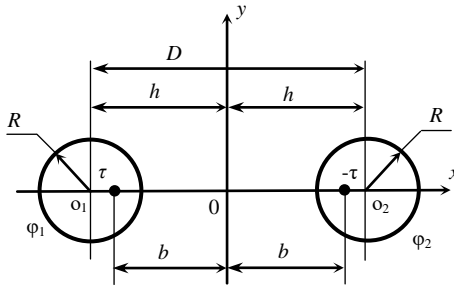


Рисунок 1.25

параллельных заряженных осей, находящихся на расстоянии b от оси y , при условии, что поверхности равного потенциала поля параллельных заряженных осей совпали с поверхностями реальных проводов. В плоскости чертежа след эквипотенциалей представляет собой окружности с центрами O_1 и O_2 . Координаты этих центров и радиусы эквипотенциальных линий определяются формулами (1.36) и (1.37):

$$h = |x_0| = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b; \quad R = \frac{2k}{|1-k^2|} b.$$

Из приведенных соотношений находим

$$b = \sqrt{h^2 - R^2}. \quad (1.38)$$

Полученная формула дает возможность определять положение электрических осей по заданным значениям R и D .

Поле внутри металлических проводов отсутствует, а за их пределами, т. е. в диэлектрической среде, оно остается неизменным, т. к. при этом выполняется основное граничное условие – постоянство потенциалов на поверхности каждого провода.

1.17 Поле параллельных несоосных цилиндров

Определение величин, характеризующих поле двух параллельных несоосных цилиндров круглого сечения различных радиусов R_1 и R_2 бесконечной длины (рисунок 1.26), сводится, как и в рассмотренном ранее

случае поля двухпроводной линии, к нахождению положения двух заряженных осей.

Проведем ось абсцисс x через осевые точки цилиндров O_1 и O_2 . Пусть D – расстояние между геометрическими осями цилиндров, а h_1 и h_2 – расстояния от геометрических осей цилиндров до плоскости нулевого потенциала, след которой в плоскости чертежа совпадает с осью ординат y .

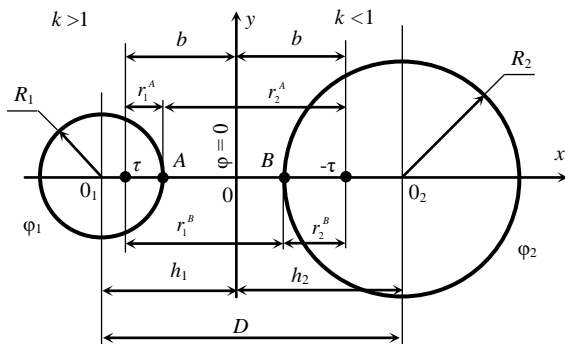


Рисунок 1.26

Предположим, что к цилиндрам подключен источник с напряжением U , при этом левый цилиндр присоединен к положительной клемме источника, а правый – к отрицательной. Поверхности цилиндров будут эквипотенциальными с потенциалами ϕ_1 и ϕ_2 и иметь одинаковые по значению и противоположные по знаку заряды $q_1 = -q_2 = q$. Линейная плотность зарядов $\tau = q/l$, где l – длина системы параллельных цилиндров. Определим положение электрических осей, которые на рисунке обозначены буквами τ и $-\tau$.

Согласно формуле (1.38) для обоих цилиндров можно записать

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} \quad \text{или} \quad (h_1 + h_2)(h_1 - h_2) = R_1^2 - R_2^2.$$

В соответствии с рисунком 1.26 имеем $h_1 + h_2 = D$

и, следовательно,

$$h_1 - h_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{D},$$

откуда находим

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{D^2 - R_1^2 + R_2^2}{2D}. \quad (1.39)$$

Выразим напряжение между цилиндрами через разность потенциалов точек A и B на их поверхностях (см. рисунок 1.26). Для этой цели воспользуемся формулой (1.35).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2^A}{r_1^A} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2^B}{r_1^B},$$

где r_1^A и r_2^A – расстояния от точки A соответственно до положительной τ и отрицательной $-\tau$ осей;

r_1^B и r_2^B – расстояния от точки B соответственно до положительной τ и отрицательной $-\tau$ осей.

Обозначив $\frac{r_2^A}{r_1^A} = k_1$ и $\frac{r_2^B}{r_1^B} = k_2$, получим

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{k_1}{k_2}. \quad (1.40)$$

Из полученной формулы найдем линейную плотность заряда цилиндров

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_a U}{\ln \frac{k_1}{k_2}}. \quad (1.41)$$

Воспользовавшись полученными ранее формулами (1.36) и (1.37)

$$h = |x_0| = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b \quad \text{и} \quad R = \frac{2k}{|1-k^2|} b,$$

получим соотношение $\frac{h}{R} = \frac{1+k^2}{2k}$, которое приводит к квадратному уравнению относительно k :

$$k^2 - 2\frac{h}{R}k + 1 = 0.$$

Корни уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{h}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}. \quad (1.42)$$

Знак «+» следует брать при $k > 1$, что соответствует случаю $r_2 > r_1$, т. е. расположению окружности равного потенциала слева от линии $\varphi = 0$. Знак «-» следует брать при $k < 1$, что соответствует случаю $r_2 < r_1$, т. е. расположению окружности равного потенциала справа от линии $\varphi = 0$.

Когда один из цилиндров радиусом R_1 расположен внутри другого (рисунок 1.27) $h_2 - h_1 = D$ и, следовательно, $h_2 + h_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D}$.

В этом случае получаем

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D};$$

$$h_2 = \frac{D^2 - R_1^2 + R_2^2}{2D}.$$

Так как оба цилиндра на рисунке 1.27 располагаются слева от плоскости равного потенциала, то для обеих поверхностей цилиндров коэффициенты k будут больше 1. Потенциалы φ_1 и φ_2 цилиндров будут положительными, причем $\varphi_1 > \varphi_2$.

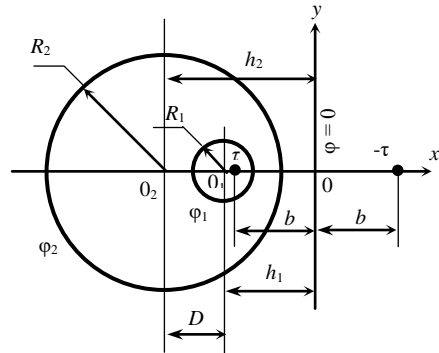


Рисунок 1.27

В рассмотренном случае поле существует только в пространстве, заключенном между поверхностями цилиндров. Внутри малого цилиндра и вне большого поле отсутствует.

1.18 Расчет электрической емкости

Потенциал уединенного проводника зависит от его формы, размеров и значения размещенного на нем заряда. Отношение заряда уединенного проводника к его потенциалу определяет его *электрическую емкость* при условии, что проводник удален на бесконечно большое расстояние от точек, потенциал которых равен нулю.

Два уединенных проводника образуют *конденсатор*. При подключении такого конденсатора к источнику с напряжением U проводники (электроды или *обкладки* конденсатора) получают одинаковые по значению и противоположные по знаку заряды $q_1 = -q_2 = q$ и приобретают потенциалы φ_1 и φ_2 , при этом $\varphi_1 - \varphi_2 = U$. В этом случае электрическая емкость C , или просто емкость, системы двух проводников, находящихся в

диэлектрической среде, равна отношению заряда одного из проводников к разности их потенциалов:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (1.43)$$

Емкость конденсатора зависит от геометрических размеров, конфигурации и взаимного расположения его обкладок, а также от свойств среды, находящейся между обкладками.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1 Уединенный шар

Пусть металлический шар (сплошной или полый) радиусом R находится в диэлектрической среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r и несет на себе заряд q . Потенциал любой точки на его поверхности найдем по формуле (1.6), полагая $r = R$,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R}.$$

Поделив q на φ , получим формулу для емкости уединенного шара

$$C = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R.$$

Используя полученную формулу, можно вычислить емкость земного шара. Если принять средний радиус Земли равным 6370 км, то получим, что

$$C_3 = 4\pi(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1} 6,37 \cdot 10^6 = 708 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

2 Плоский конденсатор

Он представляет собой две металлические пластины площадью S каждая, разделенные слоем диэлектрика толщиной d (рисунок 1.28). При подключении конденсатора к источнику с напряжением U его обкладки получают заряды q и $-q$ соответственно, которые равномерно распределены по поверхности пластин с плотностью $\sigma = q/S$.

Будем считать, что расстояние между пластинами весьма мало по сравнению с их размерами, т. е. можно пренебречь искажением поля вблизи краев пластин (краевым эффектом) и считать поле между пластинами одномерным (зависящим только от координаты x) и однородным. Напряженность поля в плоском конденсаторе выражается формулой

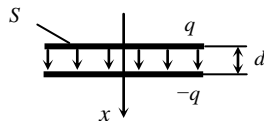


Рисунок 1.28

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_a} = \frac{q}{\varepsilon_a S},$$

поэтому разность потенциалов между электродами:

$$U = \int_0^d E dx = \frac{qd}{\varepsilon_a S},$$

откуда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_a S}{d}.$$

При уменьшении расстояния d между обкладками емкость конденсатора увеличивается.

3 Сферический конденсатор

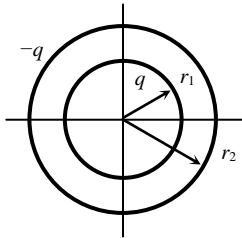


Рисунок 1.29

Если на обкладках конденсатора имеется заряд q , то напряжение между сферическими обкладками радиусами r_1 и r_2 (рисунок 1.29)

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_a r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

4 Цилиндрический конденсатор

Такой конденсатор состоит из двух коаксиальных цилиндров с радиусами r_1 (внутренний) и r_2 (внешний). Длину l цилиндра будем считать весьма большой по сравнению с толщиной слоя диэлектрика. Напряжение между обкладками, каждая из которых имеет заряд $q = \tau l$,

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

5 Емкость двух параллельных цилиндров

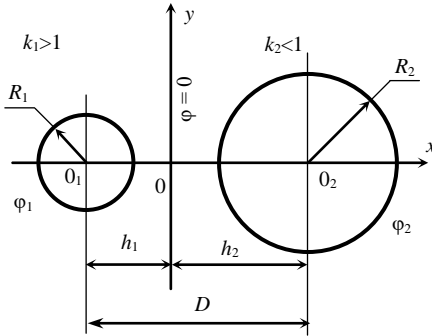


Рисунок 1.30

Рассмотрим два круглых металлических цилиндра бесконечной длины радиусами R_1 и R_2 , расположенных параллельно друг другу в диэлектрической среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r . Расстояние между осями O_1 и O_2 цилиндров равно D (рисунок 1.30). В соответствие с выражениями 1.40 и 1.42 емкость для отрезков цилиндров длиной l может быть вычислена по формуле:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{k_1}{k_2}} = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) : \left(\frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}$$

или

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) \cdot \left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}$$

Если $R_1 = R_2 = R$, то $h_1 = h_2 = D/2$, и формула для емкости примет вид

$$C = \frac{\pi \epsilon_a l}{\ln \left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1} \right)}.$$

Если один цилиндр радиусом R_1 располагается внутри другого с большим радиусом R_2 при расстоянии D между их геометрическими осями (рисунок 1.31), то коэффициенты k_1 и k_2 будут иметь одинаковый знак. В этом случае емкость вычисляется по формуле

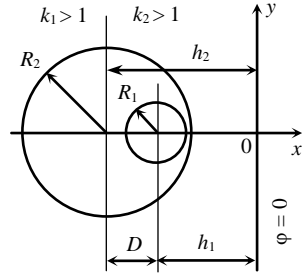


Рисунок 1.31

$$C = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln \left[\left(\frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1} \right)^2 - 1} \right) ; \left(\frac{h_2}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

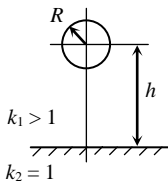


Рисунок 1.32

6 Емкость круглого цилиндра относительно проводящей плоскости (рисунок 1.32)

Данный случай можно рассматривать как поле двух цилиндров на рисунке 1.30, когда радиус R_2 второго цилиндра стремится к бесконечности, а поверхность этого цилиндра становится плоскостью, для которой коэффициент $k_2 = 1$. В этом случае емкость круглого цилиндра радиусом R , находящегося на расстоянии h от проводящей поверхности, определяется формулой

$$C = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln \frac{k_1}{k_2}} = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln \left[\left(\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R} \right)^2 - 1} \right) \right]}.$$

1.19 Метод зеркальных изображений

Метод основан на втором следствии теоремы единственности и применяется для расчета поля заряженных тел, расположенных вблизи границы раздела двух сред, имеющих правильную форму (плоскость, цилиндр, сфера). Это искусственный прием расчета, в котором кроме заданных заряженных тел вводят еще дополнительные, местоположение

которых и их заряды выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям поля. Рассмотрим примеры по применению этого метода.

1.19.1 Поле линейного провода, находящегося вблизи проводящей плоскости

Пусть провод радиусом R расположен в воздухе на расстоянии h от поверхности земли (рисунок 1.33, *a*) параллельно ей и несет на себе положительный заряд с линейной плотностью τ , при этом высота подвеса h провода много больше его радиуса R . Требуется определить потенциал провода и плотность индуцированного заряда в точке m на поверхности земли.

Заменим мысленно проводящую среду с удельной проводимостью γ диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 и разместим в ней фиктивный провод, являющийся зеркальным изображением реального и имеющий такой же по значению заряд, как и реальный провод, но противоположного знака (рисунок 1.33, *b*).

Таким образом, реальный провод и его зеркальное изображение представляют собой двухпроводную линию, поле которой рассмотрено ранее в подразд. 1.14. Очевидно, что картина электростатического поля будет такой же, как и в рассмотренном ранее случае. Плоскость, расположенная между реальным проводом и его зеркальным изображением, является плоскостью нулевого

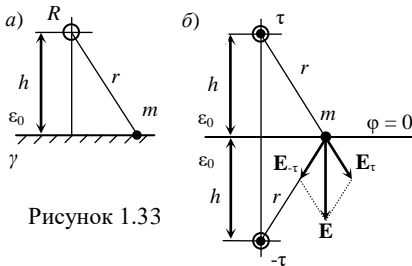


Рисунок 1.33

потенциала, как и поверхность земли.

Так как $h \gg R$, то можно считать, что электрические оси τ и $-\tau$ совпадают с геометрическими осями проводов. Потенциал провода найдем по формуле:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R}.$$

Для определения поверхностной плотности σ индуцированного на поверхности земли заряда в точке m воспользуемся граничными условиями на поверхности раздела проводника и диэлектрика: $\sigma = D = \epsilon_0 E$.

Вектор напряженности \mathbf{E} поля в точке m , отстоящей на расстоянии r от электрических осей, находим по принципу суперпозиции в виде суммы векторов напряженностей поля от действия зарядов реального и фиктивного проводов: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_{-\tau}$. Модуль каждой из этих составляющих может быть вычислена по формуле (1.32):

$$E_\tau = E_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}.$$

Из рисунка 1.33, б) следует, что в силу симметрии векторов \mathbf{E}_τ и $\mathbf{E}_{-\tau}$ относительно нормали к поверхности нулевого потенциала результирующий вектор напряженности поля \mathbf{E} в точке m перпендикулярен поверхности земли, что соответствует граничному условию.

Рассмотренный метод применим и при наличии нескольких заряженных проводов, расположенных параллельно друг другу и параллельно проводящей плоской поверхности.

Методом зеркальных изображений можно воспользоваться и в том случае, когда диэлектрик ограничен двумя проводящими поверхностями, сходящимися под углом $\alpha = \pi/n$, где n – целое число.

При этом кроме реального заряженного тела появятся несколько зеркальных изображений с одинаковыми по значению зарядами и чередующимися знаками.

Например, если поле создано заряженным проводом, расположенным параллельно двум перпендикулярным поверхностям на рисунке 1.34, а, то задача будет сведена к расчету поля четырех проводов с соответствующими зарядами (рисунок 1.34, б).

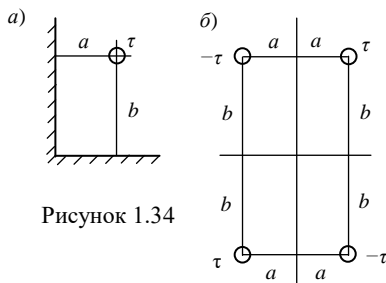


Рисунок 1.34

1.19.2 Поле заряженной оси, расположенной параллельно границе раздела двух диэлектриков

На рисунке 1.35, а) параллельно границе раздела двух диэлектрических сред в верхнем полупространстве с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_{1r} расположена заряженная ось с зарядом τ , а нижняя часть полупространства заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ_{2r} . Поле заряженной оси вызывает поляризацию диэлектриков, в силу чего на границе раздела диэлектрических сред появляются связанные заряды, влияющие на поле в обеих средах. Граничные условия необходимо

рассматривать для двух величин: вектора напряженности \mathbf{E} и вектора электрического смещения \mathbf{D} поля. С этой целью вводят две фиктивные заряженные оси с зарядами τ_1 и τ_2 , значения которых предстоит определить. Расчет поля в любой точке верхнего полупространства проведем от действия двух зарядов: заданного τ и фиктивного τ_1 , расположенного симметрично заряду τ . При этом и верхнее, и нижнее полупространства заполняем однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{1r} (рисунок 1.35, б).

Для расчета поля в любой точке нижней части пространства используем фиктивный заряд τ_2 , который помещаем в диэлектрическую среду с относительной диэлектрической проницаемостью ε_{2r} в ту же точку, в которой находился заряд τ (рисунок 1.35, в).

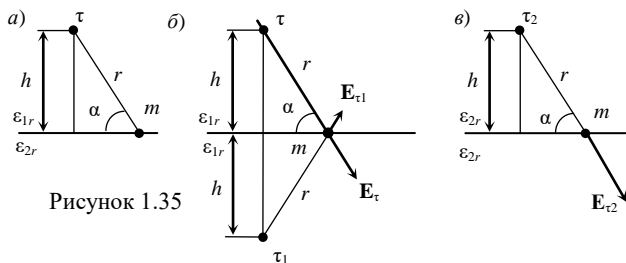


Рисунок 1.35

Запишем два уравнения, описывающих прохождение векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} через границу раздела двух диэлектриков. В соответствии с граничными условиями на границе раздела равны тангенциальные составляющие векторов напряженности поля и нормальные составляющие векторов электрического смещения:

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{1r}r} \cos\alpha + \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{1r}r} \cos\alpha = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{2r}r} \cos\alpha;$$

$$\frac{\tau}{2\pi r} \sin\alpha - \frac{\tau_1}{2\pi r} \sin\alpha = \frac{\tau_2}{2\pi r} \sin\alpha,$$

откуда получаем систему уравнения для нахождения значений фиктивных зарядов τ_1 и τ_2 :

$$\tau + \tau_1 = \tau_2 \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}};$$

$$\tau - \tau_1 = \tau_2.$$

Решение этой системы уравнений дает следующие значения зарядов:

$$\tau_1 = \tau \frac{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}}; \quad \tau_2 = \frac{2\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}} \cdot r$$

1.20 Группы формул Максвелла

Как отмечалось ранее, потенциал уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, формы и значения размещенного на нем заряда.

Если имеется система нескольких заряженных проводников, то потенциал каждого проводника будет зависеть не только от собственного заряда, но также от зарядов остальных проводников. В однородной диэлектрической среде потенциал каждого проводника линейно зависит от зарядов всех тел. Для n заряженных тел связь между потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и их зарядами q_1, q_2, \dots, q_n определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots + \alpha_{1k}q_k + \dots + \alpha_{1n}q_n; \\ &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \varphi_k &= \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kk}q_k + \dots + \alpha_{kn}q_n; \\ &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \varphi_n &= \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \dots + \alpha_{nk}q_k + \dots + \alpha_{nn}q_n. \end{aligned} \tag{1.44}$$

В матричной форме эту систему уравнений можно записать так:

$$[\varphi] = [\alpha][q],$$

где $[\alpha]$ – квадратная матрица потенциальных коэффициентов размером $n \times n$.

Потенциальные коэффициенты зависят от формы и размеров поверхностей тел, от их взаимного положения и от диэлектрической проницаемости среды. Коэффициенты α_{kk} с одинаковыми индексами называются *собственными потенциальными коэффициентами*, а коэффициенты α_{kn} с разными индексами – *взаимными потенциальными коэффициентами*. Систему уравнений 1.44 принято называть первой группой формул Максвелла.

Если все заряды тел кроме q_k положить равными нулю, то можно определить собственный потенциальный коэффициент k -го тела:

$$\alpha_{kk} = \frac{\varphi_k}{q_k}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & \dots & \alpha_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение Δ_{kn} получают из определителя системы Δ путем вычеркивания k -ой строки и n -го столбца и умножения полученного минора на $(-1)^{k+n}$. Так как определитель системы симметричен относительно главной диагонали, то $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$, и поэтому $\beta_{kn} = \beta_{nk}$.

Для определения взаимного емкостного коэффициента β_{nk} примем потенциалы всех тел, кроме k -го, равными нулю и измерим заряд q_n n -го тела при разряде k -го тела на землю. При $\varphi_k > 0$ заряд $q_k > 0$, а индуцированный на n -ом теле заряд q_n будет отрицательным. Следовательно,

$$\beta_{nk} = \frac{q_n}{\varphi_k} < 0,$$

т. е. все коэффициенты с разными индексами отрицательны.

Систему уравнений (1.45) целесообразно записывать в иной форме, когда в ней вместо потенциалов используют разности потенциалов между данным телом и всеми остальными, в том числе и землей, потенциал которой принят равным нулю:

$$q_1 = C_{11}(\varphi_1 - 0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1k}(\varphi_1 - \varphi_k) + \dots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n);$$

$$q_k = C_{k1}(\varphi_k - \varphi_1) + C_{k2}(\varphi_k - \varphi_2) + \dots + C_{kk}(\varphi_k - 0) + \dots + C_{kn}(\varphi_k - \varphi_n); \quad (1.46)$$

$$q_n = C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) + \dots + C_{nk}(\varphi_n - \varphi_k) + \dots + C_{nn}(\varphi_n - 0).$$

Матричная форма записи имеет вид

$$[q] = [C][U].$$

Для определения собственной частичной емкости C_{kk} k -го тела примем потенциалы всех тел равными и определим заряд тела k

$$C_{kk} = \frac{q_k}{\varphi_k}.$$

Обращаясь к системе уравнений (1.45) при тех же условиях, можно констатировать, что

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn}.$$

Чтобы найти взаимную частичную емкость C_{nk} , нужно принять потенциалы всех тел, кроме k -го, равными нулю, и определить заряд n -го тела.

Тогда

$$C_{nk} = \frac{q_n}{-\varphi_k} = -\beta_{nk}.$$

Частичные емкости удовлетворяют принципу взаимности:

$$C_{kn} = C_{nk}.$$

Таким образом, все частичные емкости, собственные и взаимные, положительны.

Система уравнений (1.46) является третьей группой формул Максвелла.

1.21 Потенциальные коэффициенты системы длинных параллельных проводов

Рассмотрим двухпроводную линию длиной l из весьма длинных проводов с зарядами τ_1 и τ_2 на единицу длины каждого провода, подвешенную в воздухе параллельно поверхности земли (рисунок 1.36, *a*). Созданное проводами электрическое поле будем полагать плоскопараллельным. Радиусы R_1 и R_2 проводов весьма малы по сравнению с расстояниями между их осями и с высотой их подвеса (h_1 и h_2 соответственно). Для определения потенциальных коэффициентов этой линии воспользуемся методом зеркальных изображений (рисунок 1.36, *b*). Полагаем, что заряд первого провода $q_1 = \tau_1 l \neq 0$, а заряд второго $q_2 = 0$. Найдем потенциал первого провода по формуле (1.35):

$$\varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{R_1}.$$

Тогда собственный потенциальный коэффициент первого провода

$$\alpha_{11} = \frac{\varphi_1}{q_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{2h_1}{R_1}.$$

Для определения взаимного потенциального коэффициента α_{12} найдем потенциал на оси второго провода от действия заряда первого провода и его зеркального изображения:

$$\varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}},$$

следовательно,
$$\alpha_{21} = \frac{\varphi_2}{q_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}}.$$

Аналогично, полагая $q_1 = 0$ и $q_2 = \tau_2 l$,

получим, что
$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{2h_2}{R_2}.$$

Так как $r_{1'2} = r_{1'2'}$, что следует из рисунка 1.36, б), то $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

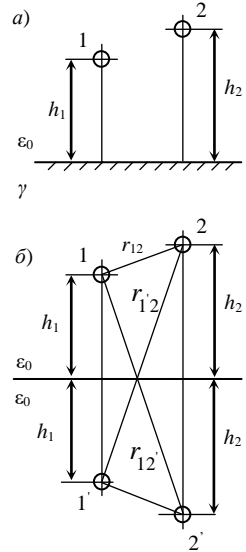


Рисунок 1.36

1.22 Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли

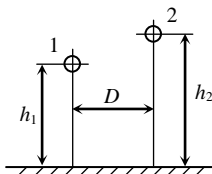


Рисунок 1.37

Если двухпроводная линия на рисунке 1.37 с радиусом проводов R подключена под напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$, то ее провода имеют одинаковые по значению и противоположные по знаку заряды: $q_1 = -q_2 = q$. В этом случае получаем систему уравнений относительно потенциалов, записанных через потенциальные коэффициенты:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q;$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})q.$$

Емкость линии длиной l имеет выражение

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}},$$

где потенциальные коэффициенты

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{2h_1}{R}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{2h_2}{R};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a l} \ln \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)^2 + D^2}{(h_1 - h_2)^2 + D^2}}.$$

Емкость рассмотренной двухпроводной линии можно вычислить, введя в рассмотрение частичные емкости, представленные на рисунке 1.38.

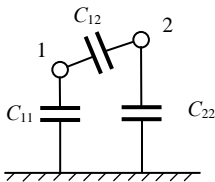


Рисунок 1.38

Провода имеют собственные частичные емкости C_{11} и C_{22} относительно земли, которые соединены между собой последовательно, и взаимную частичную емкость C_{12} . Суммарная рабочая емкость линии

$$C = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}.$$

2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 2.1 Три точечных заряда $q_1 = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл, $q_2 = -3 \cdot 10^{-12}$ Кл и $q_3 = 8 \cdot 10^{-12}$ Кл находятся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 3$ и расположены в вершинах равностороннего

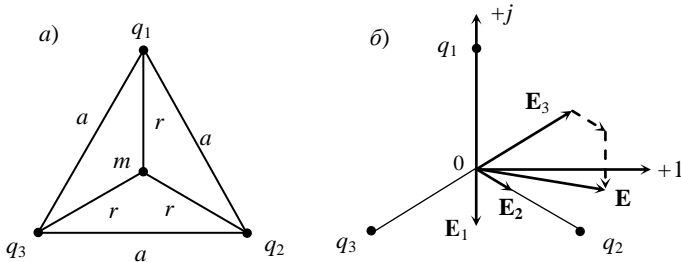


Рисунок 2.1

треугольника со стороной $a = 10$ см (рисунок 2.1, a). Определить значения напряженности и потенциала электрического поля в точке m , находящейся в центре треугольника.

Решение. Точка m находится на расстоянии $r = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = 5,77$ см относительно всех зарядов. Найдем значения напряженности и потенциала в точке m от действия каждого из зарядов:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = 3,6 \text{ В/м}; \quad \varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} = 62,4 \text{ В};$$

$$E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = 2,7 \text{ В/м}; \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} = -46,8 \text{ В};$$

$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = 7,2 \text{ В/м}; \quad \varphi_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} = 124,8 \text{ В}.$$

Для определения результирующей напряженности поля, которая является векторной величиной, представим векторы \underline{E}_1 , \underline{E}_2 и \underline{E}_3 комплексными числами на комплексной плоскости в соответствии с геометрией рисунка 1.3, б, поместив точку m в начало координат, и выполним операцию по нахождению их суммы.

$$\underline{E}_1 = -j3,6 \text{ В/м}; \quad \underline{E}_2 = 2,7e^{-j30^\circ} = 2,34 - j1,35 \text{ В/м};$$

$$\underline{E}_3 = 7,2e^{j30^\circ} = 6,24 + j3,6 \text{ В/м}.$$

Модуль напряженности поля E в точке m

$$E = |\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3| = |8,58 - j1,35| = 8,68 \text{ В/м},$$

а потенциал

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 140,4 \text{ В}.$$

Пример 2.2 Плоский конденсатор имеет двухслойную изоляцию с толщиной слоев $d_1 = 0,2$ мм, $d_2 = 0,4$ мм (рисунок 2.2, a) и относительными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_{1r} = 2$ и $\epsilon_{2r} = 6$ соответственно. Площадь пластин конденсатора $S = 10 \text{ см}^2$.

1 Найти емкость конденсатора.

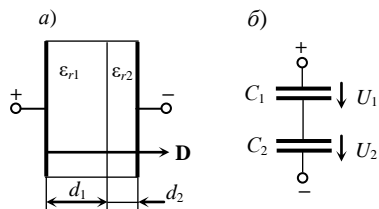


Рисунок 2.2

2 Определить напряжение $U_{пр}$, при котором конденсатор будет пробит, если пробивные напряженности слоев изоляции $E_{1пр} = 15 \text{ кВ/мм}$ и $E_{2пр} = 30 \text{ кВ/мм}$.

3 Найти электрическое смещение D , напряженность E , поляризованность P в слоях изоляции и плотность свободных зарядов σ на обкладках, если конденсатор

включить под постоянное напряжение $U = U_{пр}/2$.

Решение. Конденсатор с двухслойной изоляцией можно представить в виде последовательного соединения двух плоских однослойных конденсаторов C_1 и C_2 (рисунок 2.2, б) с эквивалентной емкостью

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \text{ где } C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{1r} S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{2r} S}{d_2}.$$

$$\text{Таким образом, получаем } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{1r} \epsilon_{2r} S}{\epsilon_{1r} d_2 + \epsilon_{2r} d_1} = 37,928 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Поле в каждом слое диэлектриков, если пренебречь краевым эффектом, можно считать однородным. В силу граничных условий вектор электрического смещения D в обоих слоях будет одинаков по значению и нормален поверхности раздела диэлектриков

$$D_1 = D_2 = D.$$

Значения напряженности поля в слоях:

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{1r}} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{1r}}; \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{2r}} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{2r}}.$$

На границе раздела диэлектриков вектор напряженности изменяется скачкообразно (рисунок 2.3):

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r}} = 3, \quad \text{т. е. } E_1 = 3E_2.$$

Напряжение между обкладками конденсатора

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Если принять $E_{\text{пр}} = E_{1\text{пр}}$, то напряжение, при котором произойдет пробой конденсатора,

$$U_{\text{пр}} = E_{1\text{пр}} d_1 + \frac{E_{1\text{пр}}}{3} d_2 = 7 \text{ кВ}.$$

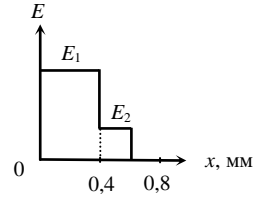


Рисунок 2.3

Если к конденсатору подведено постоянное напряжение $U = U_{\text{пр}} / 2 = 3500 \text{ В}$, то можно найти заряд одной из обкладок :

$$q = CU = 132,75 \cdot 10^9 \text{ Кл}.$$

Из условий на границе металл – диэлектрик следует, что $D = \sigma$, где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда на обкладках. Таким образом,

$$D = \frac{q}{S} = 132,75 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Значения напряженности в слоях:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{1r}} = 7,5 \cdot 10^6 \text{ В/м}; \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{2r}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Поляризованность слоев определяют из соотношения (1.10):

$$P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0 \epsilon_r E - \epsilon_0 E = \epsilon_0 E (\epsilon_r - 1).$$

Таким образом,

$$P_1 = \epsilon_0 E_1 (\epsilon_{1r} - 1) = 66,375 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2;$$

$$P_2 = \epsilon_0 E_2 (\epsilon_{2r} - 1) = 110,675 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Пример 2.3 Диэлектрическая среда с относительной проницаемостью ϵ_{r1} отделена от воздуха стеклянной пластиной с ϵ_{r2} достаточно больших размеров (рисунок 2.4). В первой среде линии напряженности однородного электрического поля направлены под углом $\theta_1 = 30^\circ$ относительно нормали $n - n$ к поверхности стеклянной пластины, при этом вектор

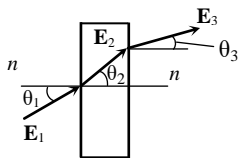


Рисунок 2.4

напряженности $E_1 = 3 \cdot 10^5$ В/м. Найти напряженности поля, а также углы падения и преломления в стекле и воздухе, если $\epsilon_{1r} = 3$, $\epsilon_{2r} = 7$.

Решение. На границе раздела двух диэлектрических сред равны тангенциальные составляющие векторов напряженности поля. В соответствии с этими граничными условиями имеем:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2; \quad E_2 \sin \theta_2 = E_3 \sin \theta_3.$$

Условия преломления силовых линий определяются формулой (1.31):

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_{1r}}{\epsilon_{2r}}; \quad \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_3} = \frac{\epsilon_{2r}}{\epsilon_{3r}}.$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r}} \operatorname{tg} \theta_1 = 1,347; \quad \theta_2 = 53,4^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{\epsilon_{3r}}{\epsilon_{2r}} \operatorname{tg} \theta_2 = 0,192; \quad \theta_3 = 10,9^\circ;$$

$$E_2 = E_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = 311403 \text{ В/м}; \quad E_3 = E_2 \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_3} = 1322721,3 \text{ В/м}.$$

Пример 2.4 Две широкие параллельные металлические пластины расположены на расстоянии d друг от друга и соединены между собой металлическим проводом (рисунок 2.5). Между пластинами на расстоянии $d/3$ ниже верхней пластины натянута равномерно заряженная диэлектрическая пленка, на единицу площади которой приходится положительный заряд σ . Найти напряженности электрического поля E_1 и E_2 вблизи верхней и нижней пластин, если пластины и пленка находятся в воздухе.

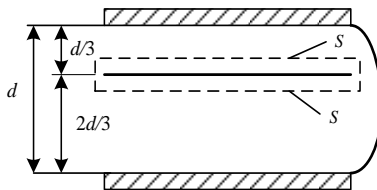


Рисунок 2.5

Решение. Пренебрегая краевым эффектом, будем считать, что электрическое поле как в верхней части, так и в нижней части диэлектрической среды является однородным, а соответствующие векторы напряженности E_1 и E_2 направлены от заряженной пленки перпендикулярно пластинам.

По условию задачи потенциалы пластин равны, отсюда следует

$$E_1 \frac{d}{3} - E_2 \frac{2d}{3} = 0, \text{ т. е. } E_1 = 2E_2.$$

Окружим пленку замкнутой поверхностью и применим теорему Гаусса, имея в виду, что поток вектора напряженности поля имеется только через горизонтальные участки S этой поверхности:

$$E_1 S + E_2 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \text{ откуда имеем } E_1 = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}.$$

Пример 2.5 Тонкий провод, изогнутый под прямым углом (рисунок 2.6), расположен в воздухе и заряжен с линейной плотностью τ . Каждый участок провода имеет длину a . Найти напряженность поля и потенциал в точке m , находящейся в плоскости проводника.

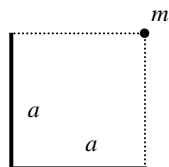


Рисунок 2.6

Решение. Применим принцип наложения и найдем искомые величины от действия распределенного заряда каждого участка провода.

Горизонтальный участок провода разместим в системе координат x, y на рисунке 2.7 и выделим на проводе фрагмент длиной dx . На нем будет располагаться заряд $dq' = \tau dx$. Напряженность поля в точке m от действия точечного заряда dq' находим по формуле (1.3):

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Вектор dE' располагается в плоскости xOy , и его проекции на оси координат x, y и z соответственно равны:

$$dE'_x = dE' \cos \alpha = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha; \quad dE'_y = dE' \sin \alpha = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha; \quad dE'_z = 0.$$

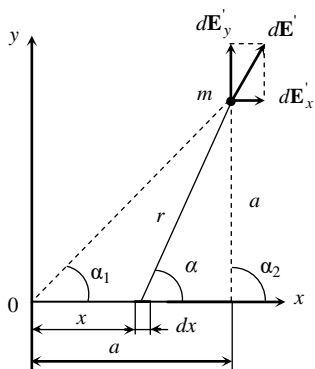


Рисунок 2.7

Интегрирование приведенных выше выражений будем производить, используя в качестве переменной α . Угол α отсчитываем от положительного направления элемента dx , задаваемого осью x , к положительному направлению радиуса r , соединяющего элемент dx и точку m . Произведем замены:

$$\sin \alpha = \frac{a}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{a-x}{r}; \quad \frac{a-x}{a} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

откуда выразим переменную x через переменную α :

$$x = a(1 - \operatorname{ctg} \alpha) = a \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right); \quad dx = -a \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Получим
$$dE'_x = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{\tau \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 a} d\alpha;$$

$$E'_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

Из условий задачи и рисунка 2.7 следует, что $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и

$$E'_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$dE'_y = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \frac{\tau \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 a} d\alpha;$$

$$E'_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\tau \sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Рассчитаем составляющие напряженности поля E''_x и E''_y от действия второго, вертикального, участка провода, выполняя аналогичные операции. Все необходимые обозначения используемых в расчете величин приведены на рисунке 2.8.

Выделим на проводе фрагмент длиной dy с зарядом $dq'' = \tau dy$. Напряженность поля в точке m от действия точечного заряда dq'' :

$$dE'' = \frac{dq''}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 R^2};$$

$$dE''_x = dE'' \cos\gamma;$$

$$dE''_y = dE'' \sin\gamma; \quad dE''_z = 0.$$

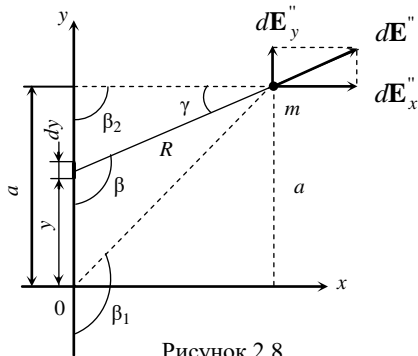


Рисунок 2.8

В качестве переменной возьмем угол β , связанный с углом γ следующим соотношением:

$$\gamma = \beta - \pi/2.$$

В этом случае $\cos\gamma = \sin\beta$, а $\sin\gamma = -\cos\beta$. Угол β отсчитываем от положительного направления элемента dy , задаваемого осью y , к положительному направлению радиуса R , соединяющего элемент dy и точку m . При этом

$$\cos\gamma = \frac{a}{R}; \quad \sin\gamma = \frac{a-y}{R}; \quad \frac{a-y}{a} = -\text{ctg}\beta; \quad y = a(1 + \text{ctg}\beta) = a\left(1 + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right);$$

$$dy = a \frac{-\sin^2\beta - \cos^2\beta}{\sin^2\beta} d\beta = -\frac{ad\beta}{\sin^2\beta}.$$

Проекции вектора E'' на оси x и y :

$$dE''_x = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\gamma = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\beta = -\frac{\tau \sin\beta}{4\pi\epsilon_0 a} d\beta;$$

$$E''_x = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\beta_2 - \cos\beta_1).$$

$$dE_y'' = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \gamma = -\frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \beta = \frac{\tau \cos \beta}{4\pi\epsilon_0 a} d\beta;$$

$$E_y'' = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1).$$

Из рисунка 2.7 следует, что $\beta_1 = \frac{3}{4}\pi$, а $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$. В таком случае

$$E_x'' = \frac{\tau\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a}; \quad E_y'' = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Напряженность поля в точке m определяется по формуле:

$$E = \sqrt{E_x''^2 + E_y''^2},$$

где

$$E_x = E_x' + E_x'' = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a}; \quad E_x = E_x' + E_x'' = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a};$$

Таким образом,

$$E = \frac{\tau\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Потенциал в точке m от точечного заряда dq' находим по формуле (1.3):

$$d\varphi' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau dx \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \sin \alpha},$$

а потенциал от действия горизонтального участка заряженного провода

$$\varphi' = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Так как точка m расположена симметрично относительно обоих участков провода, то искомый потенциал

$$\varphi = 2\varphi' = 2 \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[-\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \alpha) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}(\pi/4) = 1$, а $\operatorname{ctg}\alpha_2 = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$, окончательно получаем:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} [\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg}\alpha_1) - \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg}\alpha_2)] = 1,585 \cdot 10^{10} \tau.$$

Пример 2.6 На рисунке 2.9 заряд равномерно распределен с линейной плотностью τ вдоль тонкого проводника в форме кольца радиусом R_0 . Требуется:

- 1 Найти напряженность поля и потенциал в точке m , лежащей на оси кольца на расстоянии z от его центра O , если окружающая среда – воздух.
- 2 Определить положение точки m на оси z , при котором напряженность поля в ней будет иметь максимальное значение.

Решение. Выделим на кольце элемент длины dl , на котором находится элементарный заряд $dq = \tau dl$, который можно рассматривать как точечный. Потенциал поля от действия этого заряда в точке m

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r},$$

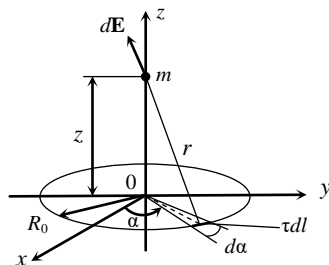


Рисунок 2.9

где r – расстояние от точки m до точечного заряда. Потенциал поля в рассматриваемой точке от действия всех элементарных зарядов проводника найдем, выполняя интегрирование по азимутальной координате α и учитывая, что $dq = \tau R_0 d\alpha$ и $r = \sqrt{R_0^2 + z^2}$.

$$\varphi = \frac{\tau R_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} = \frac{\tau R_0}{2\epsilon_0 \sqrt{R_0^2 + z^2}}.$$

Вектор напряженности поля в точке m в цилиндрической системе координат будет зависеть только от координаты z : $E_r = 0$; $E_\alpha = 0$.

$$E = E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\tau R_0 z}{2\varepsilon_0 (R_0^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Согласно полученной формуле $E = 0$ при $z = 0$ и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Значение z , при котором напряженность поля E будет максимальной, найдем из условия:

$$\frac{dE}{dz} = 0.$$

$$\frac{\tau R_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{(R_0^2 + z^2)\sqrt{R_0^2 + z^2} - 3z^2\sqrt{R_0^2 + z^2}}{(R_0^2 + z^2)^3} = 0,$$

откуда

$$z = \pm \frac{R_0}{\sqrt{2}}.$$

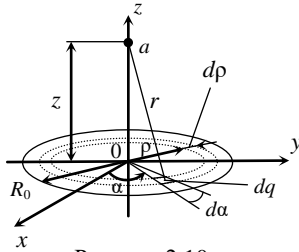


Рисунок 2.10

Пример 2.7 Заряд q равномерно распределен по поверхности диска радиусом R_0 , находящегося в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r (рисунок 2.10). Найти закон изменения потенциала и напряженности поля вдоль оси диска.

Решение. Выделим на поверхности диска элемент площади ds , на котором размещается элементарный заряд $dq = \sigma ds$, где

поверхностная плотность заряда $\sigma = \frac{q}{\pi R_0^2}$.

Запишем ds в полярной системе координат $ds = \rho d\rho d\alpha$.

Потенциал в точке a на оси z , обусловленный зарядом dq , определяем по формуле для точечного заряда:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} = \frac{\sigma d\alpha\rho d\rho}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \sqrt{z^2 + \rho^2}}.$$

Потенциал от действия суммарного заряда диска q :

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{R_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r R_0^2} \left(\sqrt{z^2 + R_0^2} - z \right).$$

Вектор напряженности поля E в точке a имеет только одну составляющую:

$$E = E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r R_0^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_0^2}} \right).$$

Пример 2.8 Электрическое поле создано между двумя плоскими электродами размером $l \times l$ каждый и расположенными в вакууме на расстоянии d между ними (рисунок 2.11). Потенциал в пространстве между электродами изменяется по закону: $\varphi = ax^3 + bx^2 + cx$, где a , b и c – постоянные коэффициенты. Найти объемный заряд, находящийся между электродами, полагая, что $d \gg l$.

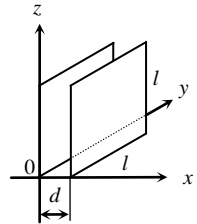


Рисунок 2.11

Решение. Принимая во внимание, что в декартовой системе координат изменение потенциала зависит только от координаты x , запишем уравнение Пуассона для области между электродами:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Произведем двукратное дифференцирование по x выражения для φ

$$\frac{d\varphi}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c; \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 6ax + 2b.$$

Выделим элементарный объем $dv = l^2 dx$, в котором находится заряд

$$dq = \rho dv = \rho l^2 dx.$$

Из приведенных выше уравнений определим зависимость ρ от x

$$\rho = -\epsilon_0 (6ax + 2b)$$

и найдем искомую величину, т. е. объемный заряд между обкладками плоского конденсатора

$$q = \int_V \rho dv = -\varepsilon_0 l \int_0^d (6ax + 2b) dx = -\varepsilon_0 l^2 d (3ad + 2b).$$

Пример 2.9 Шар радиусом R_0 , выполненный из материала с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r , расположен в воздухе. Внутри шара распределен заряд с объемной плотностью ρ . Найти зависимости потенциала φ и напряженности поля E внутри и вне шара в функции координат в двух случаях: а) объемная плотность заряда постоянна; б) объемная плотность заряда является функцией расстояния от центра шара: $\rho = kr$, где $k = \text{const}$. Принять $\varphi = 0$ при $r = \infty$.

Решение. Выберем сферическую систему координат и совместим ее центр с центром шара. Напряженность поля в этом случае будет иметь только радиальную составляющую $E = E_r$, зависящую от координаты r . В качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиусом r . В соответствии с граничными условиями вектор \mathbf{E} будет нормален к поверхности сферы, а его модуль будет одинаков для всех точек сферы.

1 Рассмотрим случай, когда заряд равномерно распределен внутри шара. Для решения задачи воспользуемся теоремой Гаусса.

При $r < R_0$

$$\oint_S E_1 ds = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad \text{откуда} \quad E_1(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Потенциал внутри шара изменяется по закону:

$$\varphi_1(r) = -\int E_1 dr + C_1 = -\frac{\rho}{6\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} r^2 + C_1.$$

При $r > R_0$

$$\oint_S E_2 ds = \frac{\frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{откуда} \quad E_2(r) = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Потенциал поля вне шара

$$\varphi_2(r) = -\int E_2 dr + C_2 = \frac{\rho R_0^3}{3\pi\epsilon_0 r} + C_2.$$

По условию задачи $\varphi_2 = 0$ при $r = \infty$, следовательно, $C_2 = 0$.

Постоянную интегрирования C_1 найдем из условия равенства потенциалов φ_1 и φ_2 на поверхности шара:

$$-\frac{\rho R_0^2}{6\pi\epsilon_0\epsilon_r} + C_1 = \frac{\rho R_0^2}{3\pi\epsilon_0}, \text{ откуда } C_1 = \frac{\rho R_0^2}{3\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_r}\right).$$

2 При рассмотрении второго случая, когда $\rho = kr$, воспользуемся уравнением Пуассона для расчета поля внутри шара и уравнением Лапласа для внешней области.

Так как ρ зависит только от координаты r , уравнение Пуассона в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r} = -\frac{kr}{\epsilon_0\epsilon_r},$$

а уравнение Лапласа –

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0.$$

Проинтегрировав уравнения дважды по r , получим законы изменения потенциалов φ_1 внутри шара и φ_2 во внешней по отношению к шару области в функции координаты r :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{kr^3}{\epsilon_0\epsilon_r}; \quad \frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{kr^2}{4\epsilon_0\epsilon_r} + \frac{C_1}{r^2}; \quad \varphi_1 = -\frac{kr^3}{12\epsilon_0\epsilon_r} - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0; \quad r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} = C_3; \quad \frac{d\varphi_2}{dr} = \frac{C_3}{r^2}; \quad \varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Потенциал φ_1 в центре шара должен иметь конечное значение, что возможно при $C_1 = 0$. Потенциал $\varphi_2 = 0$ при $r = \infty$, поэтому $C_4 = 0$. Таким образом, получаем

$$\varphi_1 = -\frac{kr^3}{12\varepsilon_0\varepsilon_r} + C_2; \quad \varphi_2 = -\frac{C_3}{r}.$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определим из условия, что на границе раздела двух диэлектрических сред равны потенциалы φ_1 и φ_2 , а также нормальные составляющие векторов электрического смещения:

$$D_1 = D_2 \quad \text{или} \quad E_1\varepsilon_0\varepsilon_r = E_2\varepsilon_0.$$

Найдем законы изменения напряженности поля в обеих диэлектрических средах:

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}; \quad E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{C_3}{r^2}.$$

При $r = R_0$ имеем

$$\frac{kR_0^2}{4\varepsilon_0} = -\frac{C_3}{R_0^2}, \quad \text{откуда} \quad C_3 = -\frac{kR_0^4}{4\varepsilon_0}.$$

Из условия $\varphi_1|_{r=R_0} = \varphi_2|_{r=R_0}$ находим постоянную интегрирования C_2 .

$$-\frac{kR_0^3}{12\varepsilon_0\varepsilon_r} + C_2 = \frac{kR_0^3}{4\varepsilon_0}, \quad \text{откуда} \quad C_2 = \frac{kR_0^3}{4\varepsilon_0} \left(1 + \frac{1}{3\varepsilon_r}\right).$$

Окончательно имеем : $\varphi_1(r) = -\frac{kr^3}{12\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{kR_0^3}{4\varepsilon_0} \left(1 + \frac{1}{3\varepsilon_r}\right); \quad \varphi_2(r) = \frac{kR_0^4}{4\varepsilon_0 r};$

$$E_1(r) = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}; \quad E_2(r) = \frac{kR_0^4}{4\varepsilon_0 r^2}.$$

Пример 2.10 По поверхности протяженного полого металлического цилиндра кругового сечения радиусом R_0 равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью σ . Найти законы изменения потенциала φ и напряженности поля E в функции расстояния r от оси цилиндра, если он находится в однородной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r .

Решение. Для решения задачи будем пользоваться теоремой Гаусса. С этой целью в качестве поверхности интегрирования будем использовать цилиндрическую поверхность радиуса r и длиной в 1 м, ось которой совмещена с осью заряженного цилиндра. Исходя из граничных условий поля вектор \mathbf{E} будет нормален боковой поверхности цилиндра, а следовательно, и его оси, и иметь одинаковые значения во всех точках, равноудаленных от оси цилиндра. Внутри цилиндра поле отсутствует ($E = 0$).

Определим поток вектора \mathbf{E} через боковую поверхность цилиндра радиусом r , учитывая, что через торцевые поверхности он отсутствует.

В соответствии с теоремой Гаусса имеем:

$$\oint_S \mathbf{E} ds = \int_{S_{\text{бок}}} E ds = \frac{2\pi R_0 \cdot 1 \cdot \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad E \cdot 2\pi r \cdot 1 = \frac{2\pi R_0 \cdot 1 \cdot \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad \text{откуда}$$

$$E = \frac{R_0 \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r r}.$$

Закон изменения потенциала найдем из формулы $E = -\frac{d\varphi}{dr}$.

$$\varphi = -\int E dr + C = -\frac{R_0 \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln r + C = \frac{R_0 \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{1}{r} + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Пример 2.11 Протяженный цилиндр кругового сечения радиусом R_0 , выполненный из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r , расположен в воздухе. Внутри цилиндра распределен заряд с объемной плотностью ρ . Найти зависимости потенциала φ и напряженности поля E внутри и вне цилиндра в функции расстояния r от его оси в двух случаях: а) объемная плотность заряда постоянна; б) объемная плотность заряда является функцией расстояния от центра шара: $\rho = kr$, где $k = \text{const}$. Принять $\varphi = 0$ при $r = 0$.

Решение. Рассмотрим решение для случая, когда $\rho = \text{const}$. Применим теорему Гаусса и выполним операции, аналогичные тем, которые были сделаны в примере 2.8.

В первой области, т. е. при $r < R_0$

$$\int_{S_{\text{бок}}} E_1 ds = \frac{\pi r^2 \cdot 1 \cdot \rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}; \quad E_1 = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

$$\varphi_1 = -\int E_1 dr + C_1 = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0 \varepsilon_r} + C_1.$$

По условию задачи при $r = 0$ $\varphi_1 = 0$, следовательно, $C_1 = 0$.

Во второй области (при $r > R_0$)

$$\int_{S_{\text{бок}}} E_2 ds = \frac{\pi R_0^2 \cdot 1 \cdot \rho}{\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

$$\varphi_2 = -\int E_2 dr + C_2 = -\frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_0} \ln r + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем из условия: $\varphi_1|_{r=R_0} = \varphi_2|_{r=R_0}$.

$$-\frac{\rho R_0^2}{4\varepsilon_0 \varepsilon_r} = -\frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_0} \ln R_0 + C_2, \quad \text{откуда} \quad C_2 = \frac{\rho R_0^2}{4\varepsilon_0} \left(2 \ln R_0 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right).$$

Для определения характеристик поля при $\rho = kr$ применим уравнение Пуассона для диэлектрической среды заряженного цилиндра и уравнение Лапласа для среды вне цилиндра. В цилиндрической системе координат напряженность E и потенциал φ поля зависят только от координаты r .

При $r < R_0$ запишем уравнение Пуассона и найдем его решение.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = -\frac{kr}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}; \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{kr^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r};$$

$$r \frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{kr^3}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r} + C_1; \quad \frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{kr^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r} + \frac{C_1}{r};$$

$$\varphi_1 = -\frac{kr^3}{9\varepsilon_0 \varepsilon_r} + C_1 \ln r + C_2.$$

Потенциал φ_1 на оси цилиндра конечен, поэтому $C_1 = 0$. По условию задачи при $r = 0$ $\varphi_1 = 0$ откуда $C_2 = 0$. Таким образом,

$$\varphi_1 = -\frac{kr^3}{9\varepsilon_0\varepsilon_r}.$$

Найдем закон изменения напряженности поля в этой области.

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{kr^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{dE}{dz} = 0.$$

Для области за пределами заряженного цилиндра, т. е. при $r > R_0$ уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0.$$

Найдем его решение путем двукратного интегрирования по r

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0; \quad r \frac{d\varphi_2}{dr} = C_3;$$

$$\varphi_2 = C_3 \ln r + C_4.$$

Напряженность поля в этой части пространства

$$E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{C_3}{r}.$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 найдем из следующих условий:

а) на границе раздела двух диэлектрических сред равны нормальные составляющие векторов электрического смещения: $D_1 = D_2$ или $\varepsilon_0\varepsilon_r E_1 = \varepsilon_0 E_2$;

б) при переходе через поверхность раздела двух сред потенциал остается непрерывным, т. е. $\varphi_1|_{r=R_0} = \varphi_2|_{r=R_0}$.

$$\frac{kR_0^2}{3} = -\frac{C_3}{\varepsilon_0 R_0} \quad \text{откуда} \quad C_3 = -\frac{kR_0^3}{3\varepsilon_0}.$$

$$\varphi_2 = -\frac{kR_0^3}{3\varepsilon_0} \ln r + C_4. \quad -\frac{kR_0^3}{9\varepsilon_0\varepsilon_r} = -\frac{kR_0^3}{3\varepsilon_0} \ln R_0 + C_4.$$

$$C_4 = \frac{kR_0^3}{9\varepsilon_0} \left(3 \ln R_0 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right).$$

Окончательно получаем законы изменения потенциала и напряженности поля в функции r :

$$\varphi_1(r) = -\frac{kr^3}{9\varepsilon_0\varepsilon_r}; \quad \varphi_2(r) = -\frac{kR_0^3}{3\varepsilon_0} \ln r + \frac{kR_0^3}{9\varepsilon_0} \left(3 \ln R_0 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right);$$

$$E_1(r) = \frac{kr^2}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}; \quad E_2(r) = -\frac{kR_0^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

Пример 2.12 Двухпроводная линия длиной $l = 10$ м с проводами круглого сечения, изображенная на рисунке 1.26, находится в трансформаторном масле, относительная диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon_r = 3$. Радиусы проводов $R_1 = 2$ см, $R_2 = 4$ см, а расстояние между их осями $D = 8$ см. К линии подведено постоянное напряжение $U = 10$ кВ.

1 Найти потенциалы проводов и емкость линии.

2 При каком напряжении $U_{\text{пр}}$ между проводами произойдет пробой диэлектрика, если его пробивная напряженность $E_{\text{пр}} = 100$ кВ/см.

Решение. Воспользуемся обозначениями на рисунке 1.26 и приведенными в этом разделе соотношениями. Будем полагать, что левый провод имеет потенциал φ_1 и положительный заряд с линейной плотностью τ , а правый провод – потенциал φ_2 и отрицательный заряд $-\tau$. Определим положение электрических осей относительно оси y , которая является линией нулевого потенциала и расположена на расстоянии h_1 от оси левого провода и на расстоянии h_2 от оси правого:

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} = 3,25 \text{ см};$$

$$h_2 = D - h_1 = 4,75 \text{ см}.$$

Электрические оси располагаются на расстоянии b от оси y :

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = 2,56 \text{ см}.$$

Потенциалы φ_1 и φ_2 проводов, определяемые в точках A и B на их поверхностях, находим по формулам:

$$\varphi_1 = \varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln k_1; \quad \varphi_2 = \varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln k_2,$$

где

$$k_1 = \frac{r_2^A}{r_1^A}; \quad k_2 = \frac{r_2^B}{r_1^B}.$$

$$r_1^A = R_1 - (h_1 - b) = 1,31 \text{ см}; \quad r_1^B = R_2 - (h_2 - b) = 1,81 \text{ см};$$

$$r_2^A = 2b - r_1^A = 3,81 \text{ см}; \quad r_2^B = 2b - r_1^B = 3,31 \text{ см}.$$

После подстановки числовых значений получаем $k_1 = 2,906$; $k_2 = 0,547$.
Значения коэффициентов k_1 и k_2 можно рассчитать по формулам:

$$k_1 = \frac{h_1}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1} = 2,906 \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{h_2}{R_2} - \sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1} = 0,547.$$

Из соотношения $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{k_1}{k_2}$ найдем линейную плотность заряда

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r U}{\ln \frac{k_1}{k_2}} = 10^{-6} \text{ Кл/м}.$$

Потенциалы проводов: $\varphi_1 = 6388 \text{ В}$, $\varphi_2 = -3612 \text{ В}$.

Емкость 1 м двухпроводной линии $C_0 = \frac{\tau}{U} = 110^{-9} \text{ Ф/м}$.

Найдем значения напряженности поля в точках A и B , суммируя векторы напряженности от действия заряженных осей τ и $-\tau$ (рисунок 2.12). Из рисунка следует, что все четыре вектора направлены вдоль оси x . Таким образом, напряженности поля E_A и E_B в точках A и B определяем по формулам:

$$E_A = E_A^\tau + E_A^{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r_1^A} + \frac{1}{r_2^A} \right) = 6,136 \cdot 10^3 \text{ В/см};$$

$$E_B = E_B^\tau + E_B^{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r_1^B} + \frac{1}{r_2^B} \right) = 5,113 \cdot 10^3 \text{ В/см.}$$

Если принять $E_A = E_{\text{пр}}$, то линейная плотность заряда в этом случае будет равна

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r E_{\text{пр}}}{\frac{1}{r_1^A} + \frac{1}{r_2^A}} = 1,628 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м,}$$

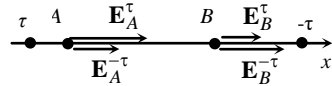


Рисунок 2.12

а пробивное напряжение $U_{\text{пр}} = \frac{\tau_{\text{пр}}}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{k_1}{k_2} = 1.63 \cdot 10^5 \text{ В.}$

Пример 2.13 Провод круглого сечения радиусом $R = 4$ см расположен в воздухе параллельно проводящей поверхности (рисунок 2.13, а), потенциал которой равен нулю. Ось провода находится на расстоянии $h = 10$ см от плоскости. На поверхности провода распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл/м.

Определить:

- 1 Потенциал провода.
- 2 Напряженность поля в точке 1, отстоящей от проекции оси провода на плоскость на расстоянии $d = 8$ см.
- 3 Плотность заряда σ в точке 2 на поверхности провода.

Решение. Потенциал ϕ провода зависит как от его собственного заряда, так и от заряда, индуцированного на проводящей поверхности. Поле вблизи границы двух сред можно рассчитать, если применить метод зеркальных изображений. С этой целью заменим проводящую среду с удельной проводимостью γ на диэлектрическую (ϵ_0) и поместим симметрично границе раздела фиктивный провод того же радиуса, что и реальный, с зарядом $-\tau$ (рисунок 2.13, б). Задача в этом случае сводится к расчету поля, образованного двухпроводной линией.

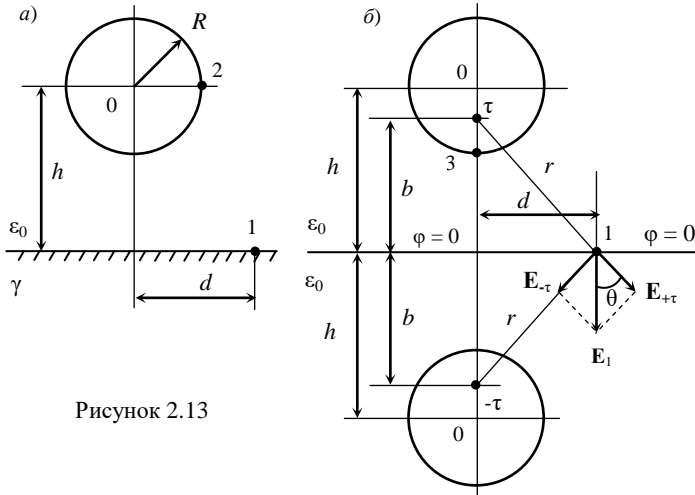


Рисунок 2.13

Определим положение электрических осей:

$$b = \sqrt{h^2 - R^2} = 9,165 \text{ см.}$$

Потенциал провода определим для точки 3 по формуле:

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{h-R+b}{R-h+b}\right) = 1127 \text{ В.}$$

Напряженность поля в точке 1 в соответствии с принципом наложения находим в виде геометрической суммы составляющих, созданных реальным и фиктивным проводами:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_{-\tau}.$$

Исходя из граничных условий, вектор \mathbf{E}_1 нормален линии нулевого потенциала. В силу симметрии модули векторов \mathbf{E}_τ и $\mathbf{E}_{-\tau}$ равны.

Таким образом, напряженность поля в точке 3 определяем по формуле:

$$E_1 = 2E_\tau = 2 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \cos\theta,$$

где
$$r = \sqrt{b^2 + d^2}; \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}}.$$

В итоге получаем

$$E_1 = 2 \frac{\tau b}{2\pi\epsilon_0 (b^2 + d^2)} = 8909 \text{ В/м.}$$

Для выполнения п. 3 задачи обратимся к рисунку 2.14.

Точка 2 находится на границе раздела двух сред и в соответствии с граничными условиями поверхностная плотность заряда σ в этой точке будет равна отношению напряженности поля E_2 к электрической постоянной ϵ_0 . Вектор E_2 направлен по нормали к поверхности провода и определяется геометрической суммой составляющих E_τ и $E_{-\tau}$ от действия заряженных осей τ и $-\tau$. Модули этих составляющих равны:

$$E_\tau = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_1}; \quad E_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_2},$$

где r_1 и r_2 – расстояния от точки 2 соответственно до положительной и отрицательной заряженных осей.

Значения r_1 и r_2 находим из рассмотрения соответствующих прямоугольных треугольников:

$$r_1 = \sqrt{R^2 + (h-b)^2} = 4,086 \text{ см}; \quad r_2 = \sqrt{R^2 + (h+b)^2} = 19,578 \text{ см.}$$

Значение напряженности поля в точке 2 найдем, суммируя проекции векторов E_τ и $E_{-\tau}$ на направление вектора E_2 :

$$E_2 = E_\tau \cos\alpha + E_{-\tau} \cos\beta.$$

Значения $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ определим из соотношений сторон прямоугольных треугольников на рисунке 2.13:

$$\cos\alpha = \frac{R}{r_1}; \quad \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = \frac{R}{r_2}.$$

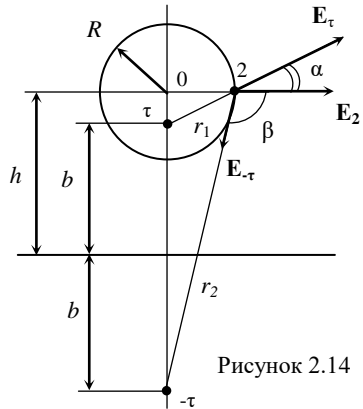


Рисунок 2.14

Таким образом, на основании приведенных выше соотношений поверхностная плотность заряда в точке 2 будет равна:

$$\begin{aligned} \sigma &= E_2 \varepsilon_0 = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 r_1} \cos \alpha + \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 r_2} \cos \beta = \\ &= \frac{\tau R}{2\pi} \left[\frac{1}{R^2 + (h-b)^2} - \frac{1}{R^2 + (h+b)^2} \right] = 1,459 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2. \end{aligned}$$

Пример 2.14 На рисунке 2.15 коаксиальный кабель с двухслойной изоляцией подключен к источнику постоянного напряжения $U = 500 \text{ В}$. Радиус жилы кабеля $r_1 = 1 \text{ мм}$, радиус границы раздела слоев $r_2 = 3 \text{ мм}$, а радиус заземленной оболочки $r_3 = 6 \text{ мм}$. Относительные диэлектрические проницаемости материалов слоев: $\varepsilon_{1r} = 1$, $\varepsilon_{2r} = 3,2$.

1 Найти распределение напряженности поля внутри кабеля.

2 Определить емкость 1 м кабеля.

3 Вычислить пробивное напряжение кабеля, если электрическая прочность материала диэлектриков составляет $E_{1пр} = 150 \text{ кВ/см}$ и $E_{2пр} = 30 \text{ кВ/см}$.

Решение. Для анализа поля в кабеле воспользуемся цилиндрической системой координат, совместив ось z с осью кабеля. Поле, созданное в пространстве между центральной жилой и оболочкой, является плоскопараллельным и одномерным. Его характеристики (напряженность и потенциал) зависят только от координаты r . Электрическое поле отсутствует вне кабеля и внутри центральной жилы. Для каждого слоя диэлектрика закон изменения напряженности поля в функции r определяется теоремой Гаусса:

$$E_1(r) = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{1r} r} \quad \text{при} \quad r_1 \leq r \leq r_2;$$

$$E_2(r) = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{2r} r} \quad \text{при} \quad r_2 \leq r \leq r_3.$$

Линейную плотность заряда τ найдем из выражения для напряжения, приложенного к кабелю:

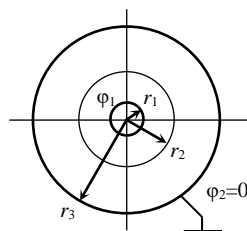


Рисунок 2.15

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_3} E dr = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{1r}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2r}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right),$$

откуда

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\frac{1}{\epsilon_{1r}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2r}} \ln \frac{r_3}{r_2}} = 2,682 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м.}$$

Емкость погонного метра кабеля

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{1r}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2r}} \ln \frac{r_3}{r_2}} = 53,65 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Определим значения напряженности поля на поверхности жилы, на границе слоев диэлектриков и на внутренней поверхности оболочки:

$$E_1 \Big|_{r=r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{1r}r_1} = 1508 \text{ В/м;}$$

$$E_1 \Big|_{r=r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{1r}r_2} = 502,5 \text{ В/м;}$$

$$E_2 \Big|_{r=r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{2r}r_3} = 804 \text{ В/м.}$$

$$E_2 \Big|_{r=r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{2r}r_2} = 1608 \text{ В/м.}$$

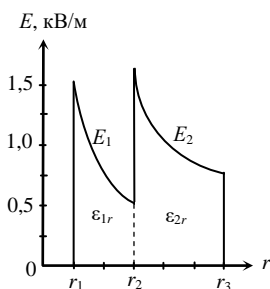


Рисунок 2.16

График изменения напряженности поля в диэлектрических слоях кабеля приведен на рисунке 2.16. Если принять, что максимальная напряженность на поверхности жилы $E_{1max} = E_{1np} = 150 \text{ кВ/см}$, то ей будет соответствовать линейная плотность заряда

$$\tau_1 = E_{1np} \cdot 2\pi\epsilon_0\epsilon_{1r}r_1 = 2,669 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}$$

и пробивное напряжение

$$U_{1np} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{1r}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2r}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) = 49,75 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

Если принять, что $E_{2max} = E_{2np} = 30 \text{ кВ/см}$ при $r = r_2$, то

$$\tau_2 = E_{2\text{пр}} \cdot 2\pi\epsilon_0\epsilon_{2r}r_2 = 5,005 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}$$

и

$$U_{2\text{пр}} = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{1r}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2r}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) = 9,328 \cdot 10^3 \text{ кВ.}$$

Таким образом, пробивное напряжение коаксиального кабеля

$$U_{\text{пр}} = 9,328 \cdot 10^3 \text{ кВ.}$$

Пример 2.15 Протяженный провод радиусом $r_0 = 5$ мм несет на себе положительный заряд с линейной плотностью $\tau = 10^{-7}$ Кл/м и протянут в воздухе параллельно двум заземленным проводящим поверхностям, которые образуют между собой прямой угол (рисунок 2.17, а). Определить потенциал провода, емкость системы на единицу длины и напряженность в точке m при $a = 30$ см и $b = 40$ см.

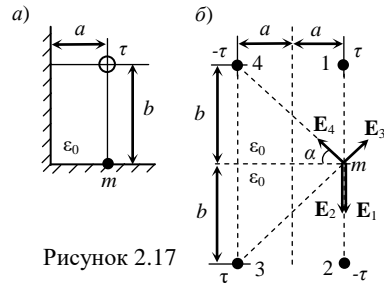


Рисунок 2.17

Решение. Применим метод зеркальных изображений и принцип наложения. Устраним границы раздела сред, и будем рассматривать все пространство однородным с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , в котором кроме реального провода 1 появятся еще три фиктивных провода 2, 3 и 4 (рисунок 2.17, б), каждый из которых имеет одинаковый по значению заряд с чередующимися знаками (τ или $-\tau$). Так как расстояния a и b значительно больше радиуса r_0 провода, то можно считать, что электрические оси реального и фиктивных проводов совпадают с их геометрическими осями. Потенциал реального провода 1 найдем, алгебраически суммируя составляющие от действия всех четырех заряженных проводов:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2a}{r_0} + \ln \frac{2b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2ab}{r_0\sqrt{a^2 + b^2}} = 4067 \text{ В.}$$

Емкость погонного метра провода с учетом влияния проводящих поверхностей

$$C_0 = \frac{\tau}{\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2ab}{r_0\sqrt{a^2+b^2}}} = 24,6 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Напряженность электрического поля в точке m определим путем геометрического суммирования соответствующих векторов от действия зарядов проводов:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4.$$

Результирующий вектор \mathbf{E} направлен перпендикулярно горизонтальной проводящей поверхности. В силу симметрии векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и \mathbf{E}_4 относительно вертикальной линии, проходящей через точку m , модуль результирующего вектора \mathbf{E} найдем по формуле:

$$E = 2E_1 - 2E_3 \sin\alpha,$$

где
$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 b}; \quad E_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Таким образом, получаем

$$E = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{b}{a^2+b^2} \right) = \frac{\tau a^2}{\pi\epsilon_0 b(a^2+b^2)} = 32,37 \cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

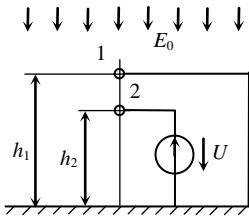


Рисунок 2.18

Пример 2.16 Положительно заряженное грозное облако находится над землей и создает напряженность электрического поля $E_0 = 0,4 \text{ кВ/м}$. Параллельно поверхности земли протянуты два провода круглого сечения радиусом $r = 10 \text{ мм}$ каждый (рисунок 2.18). Высота подвеса проводов: $h_1 = 8 \text{ м}$ и $h_2 = 7,5 \text{ м}$. Верхний провод заземлен, а нижний подключен к источнику напряжением $U = 10 \text{ кВ}$. Считая поле, созданное облаком, однородным, определить линейную плотность зарядов проводов.

Решение. Потенциалы проводов и линейные заряды на них связаны первой группой формул Максвелла:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + E_0h_1;$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + E_0h_2.$$

Собственные α_{11} , α_{22} и взаимные $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ потенциальные коэффициенты на единицу длины линии определяются по формулам:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{r} = 1,327 \cdot 10^{11} \text{ м/Ф}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{R} = 1,315 \cdot 10^{11} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = 6,176 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}.$$

По условию задачи $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = U$. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 = -E_0h_1;$$

$$\alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = U - E_0h_2,$$

решая которую методом Крамера, найдем искомые величины τ_1 и τ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 1,364 \cdot 10^{22}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -E_0h_1 & \alpha_{12} \\ U - E_0h_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix} = -8,531 \cdot 10^{14};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -E_0h_1 \\ \alpha_{21} & U - E_0h_2 \end{vmatrix} = 1,126 \cdot 10^{15};$$

$$\tau_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -6,257 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}; \quad \tau_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 8,26 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}.$$

Пример 2.17 Двухпроводная линия на рисунке 2.19, отключенная от источника, находится в однородном поле грозовой тучи с напряженностью $E_0 = 1$ кВ/м. Провод 1 изолирован от земли, а провод 2 заземлен. Высота подвеса проводов $h = 5$ м, расстояние между ними $d = 1$ м, а радиусы проводов $r = 1$ см. Определить потенциал провода 1.

Решение. Как и в предыдущей задаче, выразим потенциалы φ_1 и φ_2 проводов через потенциальные коэффициенты и индуцированные на проводах линейные заряды τ_1 , τ_2 , а также учтем наличие внешнего поля.

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + E_0h;$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + E_0h.$$

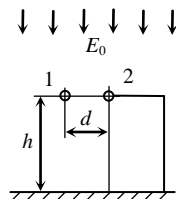


Рисунок 2.19

Поскольку линия была предварительно отключена от источника, и первый провод изолирован от земли, то его заряд τ_1 следует принять равным нулю. Потенциал второго провода по условию задачи равен нулю. С учетом сказанного уравнения примут следующий вид:

$$\varphi_1 = \alpha_{12}\tau_2 + E_0h; \quad \alpha_{22}\tau_2 + E_0h = 0,$$

откуда

$$\varphi_1 = E_0h \left(1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right).$$

Найдем потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(2h)^2 + d^2}}{d} = 4,15 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r} = 1,242 \cdot 10^{11} \text{ м/Ф}.$$

Подставив полученные значения α_{12} и α_{22} в формулу для потенциала φ_1 , найдем его значение: $\varphi_1 = 3,33 \cdot 10^3 \text{ В}$.

3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 3.1 Электростатическое поле параллельных несоосных цилиндров

Два полых металлических цилиндра радиусами R_1 и R_2 и длиной l находятся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r . Оси цилиндров O_1 и O_2 параллельны, расстояние между ними равно D . К цилиндрам, образующим конденсатор, подведено напряжение U . Цилиндры имеют равные по значению и противоположные по знаку заряды ($q_1 = -q_2 = q$) и располагаются относительно друг друга в соответствии с рисунком 3.1 в зависимости от варианта (а или б).

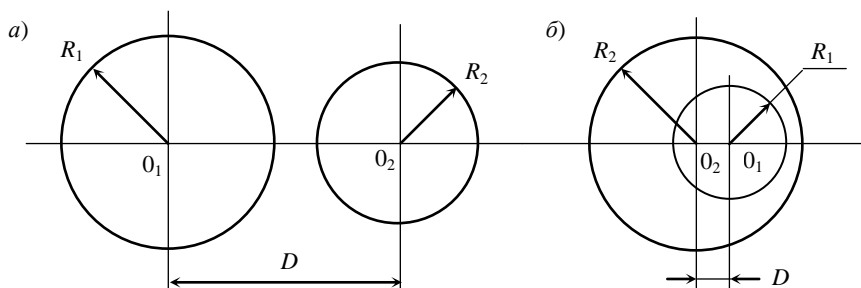


Рисунок 3.1

Геометрические размеры системы цилиндров, параметры диэлектрической среды, напряжение источника и заряд цилиндров приведены в таблицах. Считая поле данной системы заряженных тел плоскопараллельным,

1 Определить:

- а) напряжение U или заряд q (в зависимости от варианта);
- б) емкость между цилиндрами.

2 Построить графическую картину электростатического поля, соблюдая следующие требования:

- а) разность потенциалов между двумя любыми соседними линиями равного потенциала должна быть одна и та же;
- б) поток вектора напряженности электростатического поля во всех силовых трубках должен быть одинаков;

в) при построении картины поля на каждой линии равного потенциала указать значение потенциала; на силовых линиях должно быть указано их направление и ограниченное данной линией значение потока напряженности поля, отсчитываемое от некоторой фиксированной линии, принятой за начальную.

3 Вычислить и представить в виде графиков изменение потенциала и напряженности электростатического поля на линии, соединяющей наиболее близкие точки цилиндров, и распределение плотности заряда на поверхности цилиндра с б́льшим потенциалом.

4 Определить напряжение, приложенное к цилиндрам, при котором произойдет пробой диэлектрика, если известно значение пробивной напряженности $E_{пр}$ диэлектрической среды.

Исходные расчетные данные выбирают: по первой цифре шифра – из таблицы 3.1, по второй – из таблицы 3.2, по третьей – из таблицы 3.3.

Таблица 3.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
U , кВ	5	2	–	3	–	4	–	–	6	–
q , мкКл	–	–	12	–	15	–	12	13	–	10
Знак q	+	+	–	+	–	+	–	–	+	–
<i>Примечание</i> - знак заряда относится к цилиндру меньшего радиуса										

Таблица 3.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_r	3	1	2,5	4	1,5	3,5	2	1	3	4
$E_{пр}$, кВ/см	80	30	50	90	40	70	40	30	60	100

Таблица 3.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R_1 , см	12	16	18	16	20	24	24	12	16	15
R_2 , см	15	36	12	40	12	10	14	32	40	36
D , см	38	10	40	12	44	40	48	8	10	8
l , м	6	12	18	10	15	9	8	7	20	16

Задача 3.2 Поле двухпроводной линии

Параллельно безграничной плоской проводящей поверхности расположены два тонких провода 1 и 2 радиусом R и длиной l каждый. Взаимное расположение поверхности и проводов дано на рисунке 3.2. Провода находятся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r .

1 Определить значения потенциальных коэффициентов α , емкостных коэффициентов β и частичных емкостей C системы проводов.

2 Найти рабочую емкость C двухпроводной линии.

3 При подключении линии под постоянное напряжение $U = U_{12}$:

а) определить потенциал в точке A с координатами x_A и y_A , полагая потенциал проводящей поверхности равным нулю;

б) построить график распределения плотности индуцированного поверхностного заряда в функции x .

При решении задачи считать, что электрические оси проводников совпадают с их геометрическими осями.

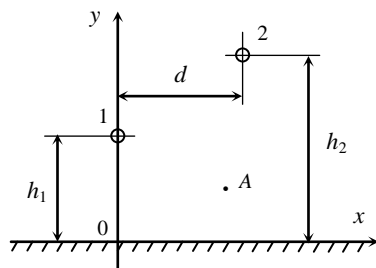


Рисунок 3.2

Геометрические размеры линии R , l , h_1 , h_2 , d приведены в таблице 3.4, а значения напряжения U , относительной

диэлектрической проницаемости среды ϵ_r и координаты точки A – в таблице 3.5.

Исходные данные для решения задачи выбирают:– из таблицы 3.4 по последней цифре шифра, а из таблицы 3.5 – по предпоследней цифре.

Таблица 3.4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , мм	5	4	6	4	4	5	6	4	6	5
l , м	25	20	28	30	24	27	32	31	23	22
h_1 , см	50	40	75	50	65	80	90	55	90	75
h_2 , см	85	75	50	40	50	65	60	85	75	45
d , см	30	25	30	25	30	35	40	35	30	35

Таблица 3.5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
U , кВ	2,1	4,0	3,5	2,6	2,8	3,2	2,5	3,6	3,4	3,1
ϵ_r	3,0	2,6	4,2	2,8	3,0	3,6	3,2	4,0	2,7	2,9
x_A , см	20	25	30	20	15	20	30	35	25	15
y_A , см	20	15	20	25	30	40	35	40	30	25

4 ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Какие заряды называют точечными?

2 Почему потенциал ϕ связывают с напряженностью поля соотношением $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$, а не соотношением $\mathbf{E} = \text{grad } \phi$?

3 Для каких электростатических полей используют понятие функции потока?

4 Как изменяется напряженность электростатического поля вдоль координат x и z , если его потенциал изменяется по закону $\phi(x, z) = x^4 + z^2$?

5 На границе раздела двух диэлектриков ($\epsilon_{1a}, \epsilon_{2a}$) распределены диполи с плотностью $\sigma = \text{const}$. Как изменится нормальная составляющая вектора \mathbf{E} при переходе через границу раздела диэлектриков?

6 Заземленный трос радиусом $r_0 = 1$ см находится в равномерном поле грозовой тучи (рисунок 4.1) на расстоянии $h = 5$ м от поверхности земли. Определить напряженность поля на поверхности троса, если напряженность поля, создаваемого тучей $E_0 = 0,4$ кВ/м.

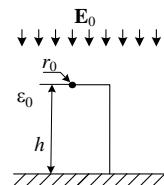


Рисунок 4.1

7 Линейная плотность заряда оси бесконечной длины

$\tau = 10^{-7}$ Кл/м. Найти напряженность электрического поля E и потенциал ϕ в точках, находящихся на расстоянии $r = 4$ см от оси. Диэлектрическая проницаемость среды ϵ_0 .

8 В объеме плоского конденсатора напряженность электрического поля изменяется по закону: $E_x = E_0 + (1 - x^2 / d^2)$; $E_y = E_z = 0$. Найти разность потенциалов между электродами.

9 У коаксиального кабеля длиной $l = 10$ м радиус внутренней жилы $r_1 = 2$ мм, радиус внешней оболочки $r_2 = 5$ мм. Под какое напряжение можно включить кабель, если максимальная напряженность поля не должна превышать $1/3$ пробивной напряженности, равной $2 \cdot 10^4$ кВ/м?

10 Определить емкость двухпроводной линии длиной $l = 100$ м, провода которой имеют радиус $r = 6$ мм и находятся на расстоянии $d = 25$ мм друг от друга в воздухе.

11 Определить емкость и пробивное напряжение системы двух некоаксиальных цилиндров длиной $l = 30$ м, находящихся в воздухе, если пробивная напряженность воздуха $E_{пр} = 30$ кВ/см. Радиусы цилиндров $R_1 = 10$ мм, $R_2 = 20$ мм, расстояние между их осями $D = 20$ мм.

12 Какой радиус должен иметь уединенный металлический шар в воздухе, чтобы на нем можно было разместить заряд в 1 Кл и создать на поверхности шара напряженность электрического поля $E = 30$ кВ/см?

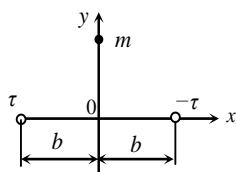


Рисунок 4.2

13 Два длинных тонких провода разноименно заряжены в воздухе на расстоянии $2b = 6$ м друг от друга (рисунок 4.2). Линейная плотность заряда $\tau = 10^{-9}$ Кл/м. Вычислить напряженность электрического поля в точке m с координатами: $x_m = 0$; $y_m = 0$.

14 Записать соотношение, которое связывает между собой векторы электрического смещения \mathbf{D} , напряженности поля \mathbf{E} и поляризованности \mathbf{P} .

15 В чем суть метода зеркальных изображений при расчете электрических полей?

16 Заряд Q равномерно распределен внутри цилиндра длиной L и радиусом R , при этом $L \gg R$. Найти напряженность поля во внутренних точках цилиндра.

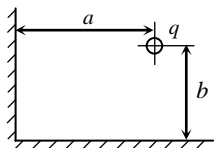


Рисунок 4.3

17 Точечный заряд q помещен на расстояниях a и b от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол (рисунок 4.3). Найти силу, действующую на заряд.

18 Две металлические сферы имеют общий центр. Внутренней сфере радиусом R_1 сообщен заряд q_1 , а внешней радиусом R_2 – заряд q_2 . Найти зависимость напряженности электрического поля в точках на расстоянии r от центра сфер. Чему равен потенциал на поверхности внутренней сферы?

19 На рисунке 4.4 два длинных коаксиальных цилиндра находятся в воздухе и заряжены, при этом линейная плотность заряда внутреннего цилиндра равна τ_1 , а линейная плотность заряда внешнего цилиндра равна τ_2 . Найти зависимость напряженности электрического поля E от расстояния r , измеряемого от осевой линии цилиндров, и разность потенциалов между цилиндрами. Внутренний и внешний радиусы внутреннего цилиндра равны r_1 и r_2 , а внешнего цилиндра – r_3 и r_4 .

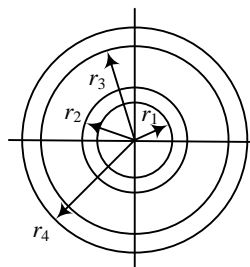


Рисунок 4.4

20 Могут ли быть замкнутыми силовые линии электростатического поля?

21 Укажите взаимосвязь между объемной плотностью свободного заряда и потенциалом электростатического поля.

22 В среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_a известен потенциал электрического поля: $\varphi = 5x^3 - 60x^2$. Запишите закон изменения объемной плотности свободных зарядов ρ в этой среде.

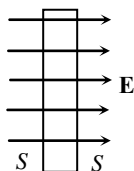


Рисунок 4.5

23 В однородное электрическое поле с напряженностью E внесли металлическую пластинку площадью S . Какой заряд индуцируется на каждой ее стороне (рисунок 4.5)?

24 В каких случаях расчета электрических полей применяют теорему Гаусса в интегральной форме?

25 Сплошная металлическая сфера радиусом R несет равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью σ . Построить графики зависимости напряженности поля E и потенциала φ в функции расстояния r от центра шара.

26 Фарфоровая пластина находится в воздухе в однородном поле с напряженностью $E_1 = 15$ кВ/см (рисунок 4.6). Какова напряженность поля в фарфоре, если $\epsilon_{2a} = 7\epsilon_0$?

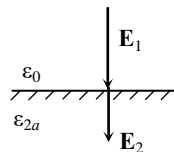


Рисунок 4.6

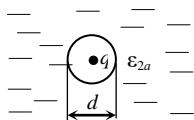


Рисунок 4.7

27 Точечный заряд $q = 2 \cdot 10^{-12}$ Кл находится в центре пузырька воздуха, представляющего собой сферу диаметром $d = 20$ мм, окруженной трансформаторным маслом ($\epsilon_{2r} = 2,2$). Найти напряженность поля на внешней поверхности сферы.

28 Плоский конденсатор емкостью 50 пФ со слюдяным диэлектриком ($\epsilon_a = 6,5$; $E_{пр} = 800$ кВ/см) должен быть рассчитан на рабочее напряжение 20 кВ и четырехкратный запас прочности. Какой должна быть толщина диэлектрика и площадь пластин?

29 Уединенный проводящий шар радиусом $R = 5$ см помещен в трансформаторное масло с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 3$. Вычислить емкость шара.

30 Определить емкость сферического конденсатора, радиусы электродов которого R_1 и R_2 (рисунок 4.8). Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ_a .

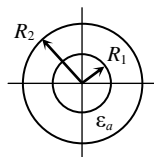


Рисунок 4.8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Нейман, Л. Р.** Теоретические основы электротехники. Т. 2 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
- 2 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1986. – 263 с.
- 3 **Коровкин, Н. В.** Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учеб. пособие / Н. В. Коровкин., Е. Е. Селина, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004. – 512 с.
- 4 **Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле.** : учеб. / Г. И. Атабеков [и др.]. 4-е изд. – М. : Энергия, 1979. – 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Общие сведения	3
1.1 Закон Кулона	4
1.2 Напряженность и потенциал электрического поля	4
1.3 Поляризованность диэлектриков	7

1.4 Вектор электрического смещения	8
1.5 Определение потенциала заряженных тел различной конфигурации	9
1.6 Геометрия поля	10
1.7 Градиент потенциала	11
1.8 Энергия системы заряженных тел	14
1.9 Теорема Гаусса	15
1.10 Уравнения Пуассона и Лапласа	19
1.11 Граничные условия	20
1.11.1 Условия на границе раздела проводника и диэлектрика	20
1.11.2 Условия на границе раздела двух диэлектриков	21
1.12 Теорема единственности решения	24
1.13 Одномерное, плоскопараллельное и плоскомеридианное поля	24
1.14 Поле заряженной оси	25
1.15 Поле двух параллельных заряженных осей	27
1.16 Поле двух параллельных проводов кругового сечения	30
1.17 Поле параллельных несоосных цилиндров	31
1.18 Расчет электрической емкости	34
1.19 Метод зеркальных изображений	38
1.19.1 Поле линейного провода, находящегося вблизи проводящей плоскости	38
1.19.2 Поле заряженной оси, расположенной параллельно границе раздела двух диэлектриков	39
1.20 Группы формул Максвелла	41
1.21 Потенциальные коэффициенты системы длинных параллельных проводов	44
1.22 Емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли	45
2 Примеры решения типовых задач	46
3 Задачи для самостоятельной работы	74
4 Вопросы и задачи для самопроверки	76
Список литературы	79

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Электростатическое поле
Учебно-методическое пособие

Редактор *Т. М. Маруняк*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 28.07.2017. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,84. Тираж 200 экз.
Зак. № Изд. № 36.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель