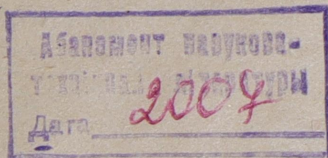


1991

ПОГАСШЕНО

N. Stolarof, répétiteur à l'École Polytechnique à Kieff.

C.1.a. Recueil d'exercices sur la défférentiation des fonctions.



578
C 21

СОБРАНИЕ УПРАЖНЕНІЙ ВЪ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЪ.

ВЫПУСКЪ I-й. ПРИМѢРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦІЙ

(УСЛОВІЯ и ПОДРОБНЫЯ РѢШЕНІЯ.)

ПОГАСШЕНО

СОСТАВИЛЪ

Николай Столяровъ,

Преподаватель Кіевского Политехническаго Института.

B 75
ПОГАСШЕНО
15

Цена 1 рубль.

Кіевъ.

Типо-Литографія Р. К. Лубковскаго, Б.-Владимірская № 49.

1902.

1975

Оглавленіе.

Предисловіе.	Стр. V
Опечатки и добавленія.	VII

Отдѣлъ I. УСЛОВІЯ.

Функціи явныя. №№ (1—163).	1
Функціи неявныя одного независимаго переменнаго. (164—211).	10
Функціи неявныя многихъ независимыхъ переменныхъ. (212—241).	13
Функціи неявныя, опредѣляемыя совокупными уравненіями. (242—267).	15

Отдѣлъ II. РѢШЕНІЯ.

Функціи явныя. (1—163).	17
Функціи неявныя одного независимаго переменнаго. (164—211).	62
Функціи неявныя многихъ независимыхъ переменныхъ. (212—241).	81
Функціи неявныя, опредѣляемыя совокупными уравненіями. (242—267).	94



Предисловіе.

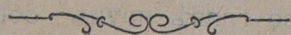
Цѣль настоящаго изданія пополнить пробѣлъ въ русской учебно-математической литературѣ и удовлетворить ощущаемой (въ особенности теперь) потребности въ такомъ сборникѣ упражненій въ высшей математикѣ, матеріалъ котораго съ одной стороны способствовалъ бы усвоенію основныхъ теоретическихъ положеній науки, а съ другой стороны давалъ случай къ ихъ непосредственному примѣненію, т. е. къ практическому упроченію приобретаемыхъ свѣдѣній. Мы вовсе не хотимъ сказать, что учебная литература наша бѣдна сборниками (и хорошими сборниками) задачъ, какъ переводными, такъ и оригинальными. Правда, матеріалъ упражненій въ высшей математикѣ разработанъ настолько, что врядъ ли теперь можно ожидать, особенно по отношенію къ дифференціальному и интегральному вычисленіямъ, много новаго и оригинальнаго. И дѣйствительно, въ имѣющихся въ русской литературѣ (равно какъ и въ иностранной) сборникахъ встрѣчается масса задачъ общаго для всѣхъ типа, устанавливающихъ ихъ преемственность отъ того подбора примѣровъ, какой сложился въ пору самой разработки основъ высшей математики. Сборники эти въ большей мѣрѣ предлагаютъ матеріалъ для самоусовершенствованія, для изощренія математическаго остроумія и, даже, для пополненія теоретическихъ познаній разными частностями, чѣмъ для усвоенія основныхъ положеній предмета,—или же, хотя и предлагаютъ вопросы такого рода, но даютъ только краткія на нихъ отвѣты, а то и совсѣмъ оставляютъ подобныя вопросы безъ отвѣтовъ. Сборники такого рода могли удовлетворять существующей въ нихъ потребности до тѣхъ поръ, пока математику изучали только лица, чувствующія къ ней призваніе, одаренные къ ней способностями, а главное избравшіе эту науку своей спеціальностью. Въ настоящее же время математику начинаютъ изучать въ большемъ, сравнительно съ прежнимъ, числѣ не только лица, которыя ожидаютъ отъ нея практическихъ приложеній и результатовъ, но и тѣ, кто просто сознаетъ ея значеніе во главѣ наукъ, образующихъ циклъ естественно-историческаго міросозерцанія,—вообще лица, которыя желаютъ положить математику фундаментомъ своего развитія, но далекіе отъ мысли въ ней специализоваться. Для такихъ лицъ существующіе сборники и трудны, и обширны, и въ то же время, мало разъясняя основы,—недостаточны.

Въ настоящемъ сборникѣ мы старались по мѣрѣ нашихъ силъ и педагогическаго опыта восполнить этотъ пробѣлъ. Въ виду этого сборникъ нашъ менѣе всего можетъ претендовать на оригинальность матеріала; наоборотъ, все отступающее отъ нормальныхъ типовъ для нашихъ цѣлей несущественно, то же, что выработано двухвѣковымъ отборомъ, задачи, вошедшія во многіе сборники, наиболѣе интересны для методической обработки; тѣмъ не менѣе не мало задачъ намъ пришлось и еще прійдется составить именно къ данному случаю.

Извѣстно, что большая доля задачъ по высшей математикѣ наиболѣе просто рѣшается т. н. искусственными способами (правда, искусственность ихъ бываетъ болѣе или менѣе относительна, но, все же, мы не можемъ согласиться съ афоризмомъ, что, „самый простой способъ рѣшенія, есть въ то же самое время и наиболѣе естественный“.) Конечно, въ рѣдкихъ случаяхъ начинающему прійдетъ въ голову подобное искусственное рѣшеніе вопроса, и дѣло пособія — натолкнуть и воспитать учащагося въ этомъ направленіи. Но, въ то же время, едва ли педагогично читателя, начинающаго только что усвоенныя теоріи примѣнять къ практикѣ и упражнять пріобрѣтенные навыки, — такого читателя съ первыхъ словъ обрывать и подчеркивать, что весь его теоретическій багажъ рѣдко пригоденъ къ практическому примѣненію; наоборотъ, руководителю должно постараться подойти къ пониманію учащагося, внушить ему довѣріе къ правильнымъ попыткамъ его интуиціи, дать ему увѣренность, что теоріи, которыми онъ овладѣлъ, являются средствомъ достигатьжелаемаго, и только послѣ такой школы, овладѣвъ мыслью учащагося, подвести его непрерывнымъ путемъ къ болѣе простымъ способамъ рѣшенія каждаго частнаго вопроса. Поэтому мы считали себя обязанными, указывая то или иное наиболѣе подходящее рѣшеніе, въ то же время давать и непосредственное, хотя и менѣе изящное рѣшеніе вопроса, такъ чтобы учащійся могъ или провѣрить свое рѣшеніе или, по крайней мѣрѣ, сравнить съ близко къ нему подходящимъ, возможно подробно изложеннымъ. Мы прекрасно сознаемъ, что въ подробностяхъ можно идти только до извѣстнаго предѣла, что всего не объяснишь, а все искусство — выбрать умѣло то, что требуетъ объясненія, — и что тѣмъ труднѣе объяснять, чѣмъ элементарнѣе объясняемое. Насколько мы сумѣли соблюсти мѣру, судить не намъ.

Нѣкоторые вопросы въ сборникѣ, какъ увидятъ спеціалисты, являются пропедевтикой дальнѣйшихъ болѣе трудныхъ вопросовъ анализа; насколько умѣло разчленены и подготовлены послѣдніе, — другой вопросъ, но едва ли кто будетъ оспаривать, что самая ихъ пропедевтика необходима. Всякія замѣчанія, въ особенности детальныя, какими почтять насъ заинтересовавшіяся нашимъ трудомъ лица, мы примемъ съ глубоккою благодарностью.

Въ заключеніе считаемъ своимъ долгомъ выразить нашу признательность преподавательницѣ Кіево-Подольской женской гимназіи Е. А. Вороновой за помощь, оказанную намъ въ нелегкомъ дѣлѣ чтенія корректуръ.

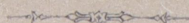


Опечатки

Стр.:	Строка:	№№ условій:	Вмѣсто:	Слѣдуетъ:
3	послѣдняя	52	- - - - - \arctg	$\arctg x$
4	22	68	- - - - - $y = \arctg \cot g$	$y = x \arctg \cot g$
9	11	148	- - - - - $\frac{d^2 t}{dx dy} ?$	$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} ?$
13	4	211	- - - - - $\frac{\partial^2 y}{dx^2} ?$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ?$
14	1	224	- - - - - $\frac{\partial z^2}{\partial x^2} ?$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} ?$
23	19	рѣшеній: 34	- - - - - пред. $x=0$	пред. $h=0$
35	25	75	- - - - - $\frac{1}{\arctg 3}$	$\frac{1}{\arctg 3x}$
47	11	122	- - - - - $\frac{w dv + v dw}{w^2}$	$\frac{w dv - v dw}{w^2}$
53	7	139	- - - - - $(z-c)^2$	$(z-c)^2$
53	16	140	- - - - - $\frac{\partial^2 u}{dx dz}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$
79	15	209	- - - - - $a^2 x$	$d^2 x$

Добавленія.

Стр.:	Строка:	№№ условій:	
1	4	1 bis	- - - - - $F(x) \equiv \frac{1}{1+x}$; опредѣлить $F\left(\frac{1}{1-x}\right) ?$
1	5	2	- - - - - Опредѣлить $f\left(\frac{x+y}{x}, \frac{y}{x+y}\right) ?$
16	24—25	264 bis	- - - - - $\begin{matrix} xy = z + t \\ zt = x + y \end{matrix}$ Найти $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} ?$ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ?$ (независимо отъ задачи № 263)
16	26—27—28	265	- - - - - Найти $d^2 \rho$, $d^2 \theta$, $d^2 \psi$?
17	16	рѣшеній: 1 bis	- - - - - $F\left(\frac{1}{1-x}\right) \equiv \frac{1-x}{2-x}$
17	послѣдняя	2	- - - - - $f\left(\frac{x+y}{x}, \frac{y}{x+y}\right) \equiv \frac{2x^2 + 3xy + 2y^2}{y(x+y)}$
28	20	60	- - - - - Примѣчаніе: или непосредственно, или же замѣтивъ, что ξ есть корень нѣкоего квадратнаго уравненія, поступать по правиламъ дифференцированья неявныхъ функцій.



ПРИМѢРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦІЙ.

Отдѣлъ I.

У С Л О В І Я.

Функции явные.

1. $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$ Опредѣлить $f\left(\frac{1}{1+x}\right)?$ $f\left(\frac{1+x}{x}\right)?$

2. $f(x,y) \equiv \frac{2x-y}{xy}$ Опредѣлить $f\left(\frac{y}{x+y}, \frac{x+y}{x}\right)?$

3. $f(x) \equiv \frac{x+1}{x-1}$ Опредѣлить $f[f(x)]?$ $f\{f[f(x)]\}?$

4. $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. Найти предѣльное значеніе этого выраженія въ предположеніи, что x стремится къ предѣлу, равному 0?

5. $y = \text{Log}_F x$; гдѣ $F = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3m}\right)^{2m}$

Найти производную отъ y по измѣняемости x са? ($y'_x = ?$) Найти дифференціалъ dy ?

6. $y = 10^x$ Найти y' ?

7. $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ Найти y' ?

8. $y = x^6 \sqrt[4]{x^3}$ Найти y' ? dy ?

9. Найти функцію y , производная которой $y' = \frac{a}{x}$?

10. $y = a + b x^n - \frac{c}{x^4 \sqrt[3]{x}} + \frac{\varepsilon}{x^2}$ Найти y' ? dy ?

11. Найти функцію y , производная которой по измѣняемости x равнялась бы x^3 ? ($y'_x = x^3$)

12. Производная какой функціи $y' = ex^2 \sqrt{x}$?

13. Найти функцию, коей дифференциаль $dy = \frac{dx}{x^5}$?

14. Найти функцию, коей производная $y' = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} + \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}$?

15. Решая задачу №9 двумя способами, получили в первом случае $y_{(1)} = \text{Log}_{\sqrt{e}} x$, во втором $y_{(2)} = a \log_e x$. Могут ли отличаться друг от друга подобные ответы? Отличаются ли в данном случае?

16. $y = \frac{\text{tg } 45}{\sqrt[3]{x^2}}$ Найти y' ?

17. $y = \frac{x^{1+\cos\sqrt{3}}}{1+\cos\sqrt{3}}$ Найти dy ?

18. Найти функцию, коей производная $y' = \frac{1}{x^{\sin 2}}$?

19. $y = (1+2x-4x^2)(1-2x+4x^2-4x^3)$ Найти y' ?

20. $y = \frac{x}{5+x^3}$ Найти y' ? (найти dy ?)

21. $y = \frac{x^3}{5+ax}$ Найти dy ? (найти y' ?)

22. $y = e^x (x-1)$ Найти y' ?

23. $y = e^x (2x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 48x + 48)$ Найти dy ?

24. $y = 7 - 2x^3 + 5x^6 - x^{12} + \frac{1}{x^9}$. Найти производную от y по изменчивости x^3 ? (Считая x^3 как бы независимым переменным)

25. $y = \log \sqrt{x}$ Найти производную от y по изменчивости \sqrt{x} ?

26. Найти производную от $\frac{\cos 2x}{2}$ по изменчивости $\cos x$?

27. Найти производную от $y = (7+mx)^3$ по изменчивости двучлена $(7+mx)$?

28. $y = (7+mx)^3$ Найти y' ?

29. $y = \log \sqrt{x}$ Найти y' ?

30. $y = (\sin x)^2$ Найти y' ?

31. $y = \text{arc tg } \log x$. Найти производную от этой дуги по изменчивости соответствующего ей тангенса?

32. $y = A (\log x)^p$ Найти y' ?

33. $y = e^{\arctg \log x}$ Найти y' ?

34. $y = \sin x^0$ (синусъ угла въ x градусо́въ)

Найти y'_x ? (производную отъ синуса по x , т. е. производную по измѣняемости числа градусо́въ.)

35. Найти функцію, коей производная $y' = e^{ax}$?

36. Рѣшить задачу №20, не пользуясь формулой производной отъ дроби.

37. $y = e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$ Найти y' ?

38. $y = (a + bx^n)^m$ Найти y'_x ?

39. $y = \sqrt[m]{(a + bx + cx^2 + dx^3)^n}$ Найти y'_x ?

40. $y = \sin 2x + 2x$ Найти y'_x ? dy ?

41. $y = \sin 2x - 2x$ Найти dy ?

42. $y = a \arctg \frac{x}{b} - b \arctg \frac{x}{a}$ Найти y'_x ?

43. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ Найти y'_x ? dy ?

44. $y = \frac{x}{\sqrt[n]{a + bx^n}}$ Найти y'_x ?

45. $y = \text{Log} \left[C \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^m \right]$. Найти y'_x ?

46. $y = \log \left[(a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3) (x\sqrt{x} - x) \right]$ Найти y'_x ?

47. $y = \text{Log} \left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2} \right)$ Найти dy ?

48. $y = \log \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ Найти y'_x ?

49. $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ Найти y'_x ?

50. $y = \text{tg} \frac{x}{2} - \text{cotg} \frac{x}{2}$ Найти dy ?

51. $y = \log (k \cos x) + \frac{\sec^2 x}{2}$ Найти y'_x ?

52. $y = \log c \sqrt{1 + x^2} - x \arctg$ Найти y'_x ?

53. $y = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}$ Найти y'_x ?

54. $y = x\sqrt{1 - x^2} - \arcsin x + 2x^2 \arcsin x$ Найти y'_x ?

55. $y = \log \left[c(1 - e^x)^{e^{\log m}} \right] - mx$ Найти y'_x ?

56. $y = m \arctg ax$ Найти dy ?

57. $y = \operatorname{tg} \log x$ Найти dy ?

58. $y = \arccotg \log \sec x$ Найти dy ?

59. $y = (x + 1)\sqrt{x + 1} - x\sqrt{x}$ Найти dy ?

60. $\bar{z} = \frac{1}{2} (1 + Q + e) - \sqrt{\frac{1}{4}(1 + Q + e)^2 - Q}$ Найти $d_c \bar{z}$?

61. $y = \arccos(-x)$ Найти $y'_{(-x)}$? y'_x ? (Предполагая, что y мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до π .)

(То же, но при измѣненіи y въ предѣлахъ отъ π до 2π ?)

62. $y = \sin x$ Найти производную по $\cos x$? ($y'_{\cos x}$?)

63. $y = \cotg x$ Найти $y'_{\sin x}$? Найти $y'_{\cos x}$?

64. $y = \arctg \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ Найти dy ?

Указаніе: непосредственно, или упростивъ выраженіе тангенса (представивъ выраженіе тангенса въ видѣ степени), или упростивъ выраженіе самого y .

65. $y = \arcsin \left(+\sqrt{1 - x^2} \right)$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

Указаніе: непосредственно, или упростивъ выраженіе y .

66. $y = \arctg \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

То же указаніе.

67. $y = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ Найти dy ?

68. $y = \arccotg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 - x^2}$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

69. $y = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right)^2$ Найти dy ?

70. $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ Найти dy ?

71. $y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2) \sqrt[3]{(a + bx)^2}$ Найти dy ?

72. $y = \frac{(x - 2)^9}{(x - 1)^2 (x - 3)^5 \sqrt{(x - 1)(x - 3)}}$ Найти dy ?

73. $y = a\sqrt[4]{x}$ Найти y'_x въ функціи y ?

(или непосредственно, или на основаніи теоремы о производныхъ обратныхъ функцій.)

74. то же для $y = \arcsin e^x$

75. Найти функцію, коей производная $y' = \frac{3}{(1 + 9x^2)\arctg 3x}$

76. Найти функцію, коей дифференціалъ $dy = e^{\arccos x} \sin x dx$

77. Производная отъ y по x $y'_x = \cos x$

Найти производную отъ x по y ? ($x'_y = ?$)

(узнавъ предварительно самую функцію y отъ x , или пользуясь теоремой о производныхъ обратныхъ функцій.)

78. Найти функцію y , производная которой $\frac{dy}{dx} = -\cos^2 y$?

(сдѣлать повѣрку найденнаго рѣшенія)

79. Найти функцію, производная коей $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{ax^2 + 2bx + c}$?

80. Найти функцію, производная коей $\frac{dx}{dy} = \frac{y + 3}{\sqrt{y^2 + 6y}}$?

81. Найти функцію, коей дифференціалъ $dy = \frac{\sqrt[3]{y^3 + 3ky + 1}}{y^2 + k} dx$

82. $y = \operatorname{tg} x$ Найти y''_x ?

83. $y = e^{\log x}$ Найти y''_x ?

84. $y = (x + 1) \arctg x + (x + 1) \operatorname{arccotg} x$. Показать, что $d^2y = 0$?

непосредственно (и вывести отсюда заключеніе о формѣ y'); или упростивъ выраженіе y .

85. $y = \operatorname{Log} \left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2} \right)$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

86. $y = A (\log x)^p$ Найти d^2y и d^3y ?

(указать въ отвѣтъ отдѣльные элементы формулы дифференціала функціи отъ функціи.)

87. $y = x \sin^3 x + \log (\cos x)$ Найти d^3y ?

88. $y = x^2 + \cos^2 x$ Найти $\frac{d^4y}{dx^4}$?

89. $x = \frac{cq^2t}{1 + cqt}$

Найти $v = \frac{dx}{dt}$ въ функціи отъ x ? Найти $p = \frac{d^2x}{dt^2}$ въ функціи отъ v ?

90. $s = \frac{1}{gk^2} \log \left(\frac{e^{gkt} + e^{-gkt}}{2} \right)$

Найти $\frac{d^2s}{dt^2}$? Выразить искомую производную въ функціи отъ s ?

91. $s = \frac{1}{gk^2} \log (\cos gkt + ck \operatorname{singkt})$ Найти $\left[\frac{d^2s}{dt^2} \right]_{t=0} = ?$

92. $s = \frac{1}{b^2} [abt - (a - bc) (1 - e^{-bt})]$

Найти $v_{t=0}$, $v_{t=\infty}$, $p_{t=0}$ и $p_{t=\infty}$, значенія функцій $v = \frac{ds}{dt}$ и $p = \frac{d^2s}{dt^2}$ при $t=0$ и $t=\infty$? Доказать, что $bv_{t=0} + p_{t=0} = a$?

93. $y = \frac{1}{2} P \left(1 - e^{-\frac{2ct}{w}} \right)$

Найти $v = \frac{dy}{dt}$? Найти значенія v для $t=0, 1, 2, \dots, \infty$?

Найти $p = \frac{d^2y}{dt^2}$? Выразить v и p въ функціи y ? Найти соотношеніе между v и p ?

94. $y = f(\sin x)$ Найти $\frac{d^4y}{dx^4} = ?$

95. $y = \sin \phi(x)$ Найти d^4y ?

96. $y = x^m$ Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$ и d^ny ?

97. $y = \frac{1}{x}$ Найти d^ny ?

98. $y = \sqrt{x}$ Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$?

99. $y = (a - bx)^p$ Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$?

100. $y = e^x$; $z = e^{-x}$; $u = a^{bx}$ Найти d^ny ? d^nz ? d^nu ?

101. $y = \log x$ Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$ и d^ny ?

102. $z = \operatorname{Log}(bx)$ Найти d^nz ?

103. Найти $d^n [\log(1+x)]$?

104. $y = \frac{1+x}{1-x}$ Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$?

105. $y = \cos x$ Найти $\frac{d^ny}{dx^n}$?

106. $y = \sin x$ Найти $d^n y$?
107. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x$ Найти y ?
108. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x$ Выразить $\frac{dy}{dx}$ въ функціи $\sin x$ и $\frac{dy}{d \sin x}$?
109. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$ Найти $\frac{dy}{d(\log x)}$?
110. $u = x^n y^m$ Найти частную производную отъ u по измѣняемости y ? $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$
111. $u = x y z t$ Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$?
112. $u = \frac{ax - by}{cy - az}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$?
113. $u = \frac{ax - by}{cy - az}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$?
114. $x = (bz)^{cy}$, Найти $\frac{\partial x}{\partial y}$? $\frac{\partial x}{\partial z}$? Найти полный dx ?
115. $u = y^{zx}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$?
116. $u = x^{yz}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$? $\frac{\partial u}{\partial y}$? $\frac{\partial u}{\partial z}$?
117. $\psi = x \cdot y \cdot z$ Найти полный дифференціалъ $d\psi$?
118. $u = x^3 + y^3 + z^3$ Найти du ?
119. $u = x^n y^m$ Найти du ?
120. $y = x^{\sin x}$ Найти dy ?
121. $y = x^x$ Найти dy ?
122. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} xy^2$ Найти du ?

ВВ. При рѣшеніи нѣкоторыхъ изъ послѣдующихъ задачъ важно имѣть въ виду примѣчаніе къ предыдущей задачѣ (см. рѣшенія).

123. $u = \log \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$? $\frac{\partial u}{\partial y}$? и полный du ?
124. $u = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$ Найти du ?
125. $u = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$?
126. $u = \frac{ax - by}{cy - az}$ Найти du ?

127. $u = \frac{e^{zy}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Найти du ?

128. $u = z^{yx}$. Найти du ?

129. $u = z^{y^x}$ Найти du ? Найти всё частныя производныя?

(Два способа: непосредственный, или дважды логарифмировать заданное соотношение.)

130. $y = x^{x^x}$; $z = x^{x^{\sin x}}$ Найти $\frac{dy}{dx}$? $\frac{dz}{dx}$?

131. $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Найти du ?

132. $u = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$ Найти du ?

133. $z = \left(t + x \arctg \frac{t}{y} \right)^{\frac{t}{x+t}}$ Найти dz ?

134. $u = x^n y^m z^p$ Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$? $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$? $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$? $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$? $d^2 u$? $d^3 u$?

135. $z = \sin^2(x + 2y) - y \log y + t^2 \arctg \frac{t}{x}$
Найти $\frac{du}{dt}$? $\frac{du}{dy}$? $\frac{d^2 u}{dx dy}$? $\frac{d^2 u}{dt dy}$?

136. $u = y^{zx}$ Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$? $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$?

137. $u = \arctg \frac{x}{y}$ Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$?

138. $u = \frac{ax - by}{cy - az}$ Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$?

139. $u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{1}{r}$

Вычислить $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = ?$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ?$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = ?$

140. $u = yx^3 e^z + \frac{e^z}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{z}{x}$ Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$?

(По какому из переменных лучше взять первую производную?)

$$141. u = \sin \left[\sqrt{x^2 + m} - \sqrt{y^2 + m} \right] \cos \left[\sqrt{x^2 + m} + \sqrt{y^2 + m} \right]$$

Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$? (Непосредственно можно, но проще воспользоваться некоторым тригонометрическим соотношением.)

$$142. z = \frac{1}{4} \left[(2x + y)^2 \log(2x + y) - 6xy \right] \quad \text{Найти } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}?$$

$$143. u = \log \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$144. u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} xy^3 \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$145. u = \sin(3x - y^2 + 2z) \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$146. u = \log(x^3 + e^y) \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$147. z = x - \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad \text{Считая } y \text{ функцией одного переменнаго } x, \text{ найти}$$

полную производную отъ z по x ? $\left(\frac{dz}{dx} \right)$ Найти dz ? Найти $\frac{d^2 z}{dx^2}$ и $d^2 z$?

$$148. t = \frac{y}{x^2 \cos z} - \log z. \quad \text{Считая } z \text{ функцией } x \text{ и } y, \text{ найти } \frac{\partial^3 t}{\partial x^3} ? \frac{d^2 t}{dx dy} ?$$

$$149. u = y^2 \sin \frac{z}{y} + \operatorname{arc} \operatorname{cotg}(xz). \quad \text{Считая } z \text{ функцией } x \text{ и } y, \text{ найти}$$

всѣ частныя производныя второго порядка отъ u по x и y ?

$$150. u = \cos(xz + 2p) + 2z^3 q^2$$

p и q суть функции независимыхъ переменныхъ x, y, z и t .
Найти $d^2 u$ и всѣ вторыя производныя отъ u ?

$$151. u = xyz \quad \text{Найти } d^4 u?$$

$$152. u = x^n y^m \quad \text{Найти } d^3 u?$$

$$153. u = \frac{ax y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$154. u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{x} + \log \frac{1}{xz + y^2} + y^2 \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$155. u = z^{y^x} \quad \text{Найти } d^2 u?$$

$$156. u = \sqrt{2xy + y^2} \quad \text{Найти } d^3 u? \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}?$$

$$157. u = \log \frac{(x + y)^5}{(y + z)^3} \quad \text{Найти } \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}?$$

(По какому переменному проще будетъ брать сперва производную?)

158. $u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ Найти d^3u ?

159. $u = f(x, \sin x)$ Найти $\frac{d^2u}{dx^2}$? $\frac{d^3u}{dx^3}$?

160. $u = x^{\sin x}$ Найти $\frac{d^2u}{dx^2}$? d^2u ?

161. $y'_x = \frac{2y}{x}$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$?

Сдѣлать заключеніе о томъ, какого характера функцией $x^{\sin x}$ является y ?

162. $y'_x = \frac{3y}{x}$ Какая изъ производныхъ отъ y первой обратится тождественно въ нуль?

163. $y'_x = \frac{my}{x}$ При какомъ m всѣ производныя отъ y , начиная со второй, обратятся тождественно въ нуль?

Функціи неявныя одного независимаго переменнаго.

164. $y^3 + x^3 - 3xy = 0$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

165. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

166. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Найти $\frac{dx}{dy}$?

167. $8x^3 - 27py^2 = 0$ Доказать, что отношеніе переменныхъ отличается отъ отношенія ихъ дифференціаловъ на числовой множитель?

168. $ax + by + xy = \sqrt{x^2 + y^2}$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

169. $x^3 - y^2 \sin \frac{y}{x} + \cos 2y = 0$ Найти dy ?

170. $x + y^2 \log(x^2 + y^2) - \operatorname{arc cotg} \frac{x}{y} = 0$

Считая y независимымъ, найти dx ?

171. $x \cos 3y = 5e^{\frac{x}{3} + y}$ Найти dy ? $\frac{dy}{dx}$?

172. $e^{x^y} + \sqrt{\sec xy} = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$?

173. $\frac{y \log x}{x \log y} = \frac{x \log y}{y \log x}$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

174. $a^x - e^{x-y} = 0$. Найти dy ? $\frac{dy}{dx}$?

175. $\text{arc cosec} \left(\frac{y^3 + x^3 - 3x^2y}{y^3 + x^3 - 3xy^2} \right)^{\frac{1}{3}} = a$

Доказать наиболее просто, что $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$?

176. $\text{arc sec} (1 + 2xy + 3x^2y^2) = \frac{e^{2xy} + 1}{xy}$ Найти $\frac{dy}{dx}$?

177. $y^n = \frac{x+y}{x-y}$ Найти dy ? $\frac{dy}{dx}$?

178. $x^3 + y^2 \cos xy - y \log y = 0$ Найти dy ?

179. $y^x - x^3 = \log (1 + 2y)$ Найти dx ?

180. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

181. $x = 1 + ye^x$ Найти d^2x ?

182. $\sqrt{x^2 + y^2} = m \text{ arc tg } \frac{y}{x}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

183. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти d^2y ?

184. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$ Найти d^2x ?

185. $(y^2 - x)^2 - y^5 = 0$ Найти $\frac{d^2x}{dy^2}$? Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

186. $x = y^x + a$ Найти d^2x ? (y — независимое переменное)
Найти d^2y ? (x — независимое)

187. $x^4 - y^4 - 4a x^2y = 0$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

188. $2y^2 - (x^2 - 4x + 3)y - 1 = 0$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

189. $x = y + \sin y$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

190. $z - x \cos z = 0$ Найти z'' ?

191. $4 = 4x \cos y - x^2 \cos^2 y$ Найти y'' ?

192. $y^2 = \sin(a^2 - x^2)$ Найти d^2y ?

Выразить алгебраически дифференциальный коэффициентъ отвѣта?

193. $ax + by + c = \sqrt{x^2 + y^2}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

194. $x^2y^2 = (l + y)^2(m^2 - y^2)$ Найти d^2y ?

(Коэффициентъ отвѣта проще всего выражается въ функции y .)

195. $\log z = \cotg x$ Найти d^2z ? (при x независимомъ переменномъ)

Найти d^2x ? (при независимомъ переменномъ z)

196. $x = \log \operatorname{tg}(y + m)$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

Показать, что найденное выраженіе для всякаго опредѣленнаго значенія x имѣетъ опредѣленное значеніе, независимое отъ m ?

197. $\log(x^2 + y^2) - m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = h$. Найти d^3y ? Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

198. $\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ Найти d^3y ?

199. $(2a - x)y^2 - x^3 = 0$ Найти d^3x ?

200. $(x^2 - 4x + 3)y - 1 = 0$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$?

201. $x = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ Найти $\frac{d^4y}{dx^4}$? d^4y ?

202. $x = f(y)$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

203. $\sin(x^2 - y^2) = \cos(x^2 - y^2)$ Найти d^2y ?

204. $f\left(\frac{x}{x+y}\right) = 0$ Найти y'' ? Найти y' ?

205. $1 + \left(\frac{y-1}{x-1}\right)^3 = f\left(\frac{x-1}{y-1}\right)$ Найти d^2x ?

206. $f\left(x + \frac{2}{xy}\right) = x^2 + \frac{4}{y^2x^2} + \frac{4}{y}$ Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

207. $f(x, \cos y) = 0$ Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$?

208. $y = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{t^2-1}}{t}$; $x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ Найти y'_x ?

209. Для y и x предыдущей задачи найти $y''_{x,x}$?

210. $x = \frac{2t}{1+t^2}$; $y = \frac{1-t}{1+t^2}$. Найти y'_x ? $y''_{x,x}$?

Считая t независимымъ переменнымъ.

Или считая x независимымъ переменнымъ, а t его неявной функцией.

211. $y = \arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ Найти $\frac{\partial^2 y}{dx^2}$

(NB формулы тригонометрии!)

Функции неявные многихъ независимыхъ переменныхъ.

212. $z(y+2t) = x + \log(x^3 + 5yt^2)^{y+2t}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$? $\frac{\partial z}{\partial t}$?

213. $\arccotg \frac{z^2 + a^2}{u} + (z^2 - a^2)u = xy^2$

Найти всѣ частныя производныя перваго порядка отъ u ?

214. $y'' = u \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)$ Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$? $\frac{\partial u}{\partial y}$?

215. $x = r \cos \theta$. Доказать, что $d\theta = \frac{xdr - rdx}{r\sqrt{r^2 - x^2}}$?

216. $(\sec y) \cdot e^z - (x^2 + 2xy - y) \sin x + y \cos x = 1$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$? Найти dz ?

217. $2xy = \arccos(2z - 1)$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$?

218. $z = x + ye^z$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$? Написать dz ?

219. $xy^3z^4 = y$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$? Найти d^2z ?

220. $\log x = y \log z$ Найти d^2z ?

221. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Найти всѣ частныя производныя втораго порядка отъ y ?

222. $z^2 - y \cos x + \sin y = 0$ Найти $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$?

223. $\frac{y}{x^2 \cos z} = \log z$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$?

224. $yz + zx + xy = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$?

225. $\cos z = \cos^2 y - \sin^2 x$ Найти $d^2 z$?

(Симметрично ли z относительно x и y ?)

226. $\sin z = \sin y \sin x$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$? Найти $d^2 z$?

227. $y = x \operatorname{tg} z$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$?

228. $y \cotg z = x$ Найти $d^2 z$?

(Исключивъ изъ отвѣта тригонометрическія величины!)

229. $x^3 + ye^z + t^4 = 0$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y}$ Найти dz ?

Найти всѣ частныя производныя отъ z второго порядка?

230. $y \sin z = x$ Найти $d^2 z$?

231. $x = (y^2 + z^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{z}$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$?

232. $xy = \operatorname{arc} \sin \frac{z}{xy}$ Найти $d^2 z$?

233. $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{y^2 - z^2}} = m$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$?

234. $\operatorname{arc} \sin \frac{x+y}{z^2} = \operatorname{tg} \frac{z^2}{x+y}$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$? Найти $d^2 z$?

235. $\sin \frac{xz}{x+y} = \log(x+y) - \log x - \log z$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$?

236. Какъ измѣнится предыдущая задача и ея рѣшеніе, если въ данномъ уравненіи перемѣстить x съ z ?

237. $\cotg \frac{\log(z+1)}{y^3 - xz} = \sqrt{\frac{y^3 - xz}{\log(z+1)}}$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$?

238. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$? $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$? $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$? $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$? $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$?

239. $(1+x)u = x^2 y^2 z^2$ Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$? $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$? $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$? Найти $d^3 u$?

240. $y = v \operatorname{tg} \frac{z}{x^2}$ Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y \partial v}$?

241. $y = x \operatorname{arc} \cos \frac{x-z}{x} - \sqrt{2xz - z^2}$ Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$?

Функции неявные, определяемые совокупными уравнениями.

242. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$
 $x + y + z = a$

Найти $\frac{dy}{dx}$? $\frac{dz}{dx}$?

Найти dz , считая y независимым переменным?

243. $x^3 - y^2 + x \cos z = 0$
 $2y + xz^2 - 1 = 0$

Представить зависимость между дифференциалами переменных в формѣ отношений и найти производную отъ x по y ?

244. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Найти $\frac{dy}{dx}$? $\frac{dz}{dx}$?

$Ax + By + Cz + D = 0$

Найти dy при x независимомъ переменномъ?

245. $\log \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + Ax + By \right) + \sin \left(\frac{y}{A} + \frac{x}{B} \right) = 0$

$\arctg 3 \frac{Ax + By + 12}{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 100} = \sin \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)$ Найти dx ? и dz ?

246. $e^z - \log y + 6x = 0$

$e^z + \log \frac{y}{5} = 0$

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$? d^2z ?

247. $x^2 + y^2 = 2pz$

Считая x независимымъ переменнымъ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1$

найти d^2z ?

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

248. $\sin x + \cos z - \sin y = x$
 $\cos x - \sin z + \cos y = b$

Найти отъ y и отъ z вторыя производныя по x ?

249. $\operatorname{tg} y \sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} z \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} y$

Найти вторую производную отъ z по x ?

250. $x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2} = 1$

$z \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - z^2} = 1$

Найти второй дифференциалъ отъ z ,

считая x независимымъ переменнымъ?

То же, считая y независимымъ?

(сопоставить результаты и найти ихъ взаимное соотношеніе.)

251. $e^{x+y^2+z^3} = \cos (x^3 + y^2 + z)$

$e^{x^3 + y^2 + z} = \sin (x + y^2 + z^3)$

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$?

252. $\sin (z + y^2 - x^2) = \cos (z + y^2 - x^2)$
 $xyz = 1$

Найти d^2y ? $\frac{d^2z}{dx^2}$?

Представить результатъ вѣ формѣ отношений?

253. $x + y + z + u + t = a$

$xyzut = b$

Найти первыя частныя производныя отъ всѣхъ переменныхъ, принятыхъ за независимы, по какому либо независимому?

254. Найти полные дифференциалы зависимых переменных, определяемых уравнениями предыдущей задачи?

255. Какъ поступать, если въ задачѣ №253 будетъ необходимо найти частныя производныя, всѣ или въ большомъ числѣ?

Примѣнить наипростѣйшій способъ къ нахожденію частныхъ производныхъ отъ y и u по измѣняемости x , z и t ?

$$\begin{aligned} 256. \quad & x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 27 \\ & x^7 + y^7 + z^7 + u^7 = 128 \end{aligned}$$

Найти $\frac{\partial x}{\partial u}$, считая z другимъ независимымъ переменнымъ? ($27=3^3$; $128=2^7$)

$$\begin{aligned} 257. \quad & x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + t^2 = a \\ & x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4 + t^4 = 4 \end{aligned}$$

Найти всѣ первыя производныя отъ v , считая t другимъ зависимымъ переменнымъ?

$$\begin{aligned} 258. \quad & x + y + z + u + t = a \\ & x y z u t = b \end{aligned}$$

Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$?

259. Сохраняя въ предыдущей задачѣ тѣже переменныя независимыми, опредѣлить $\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}$?

Опредѣлить $\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}$, если другимъ зависимымъ переменнымъ взять z ?

$$\begin{aligned} 260. \quad & x + y + z + u = a \\ & x y z u = b \end{aligned}$$

Найти вторые полные дифференциалы функций, опредѣляемыхъ данными уравненіями?

$$\begin{aligned} 261. \quad & x z u = b \\ & y^2 + z^2 + u^2 = b \end{aligned}$$

Найти всѣ вторыя частныя производныя отъ z и u и ихъ полные дифференциалы второго порядка?

$$\begin{aligned} 262. \quad & x + y + z + u + t = 1 \\ & x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + t^3 = 3 \end{aligned}$$

Найти $d^2 u$ и $d^2 t$?

$$\begin{aligned} 263. \quad & x y = z + t \\ & z t = x + y \end{aligned}$$

Найти всѣ частныя производныя второго порядка, считая x и y зависимыми переменными?

$$\begin{aligned} 264. \quad & x y = z + t \\ & z t = x + y \end{aligned}$$

Найти $\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$?

$$\begin{aligned} 265. \quad & x = r \sin \theta \cos \phi \\ & y = r \sin \theta \sin \phi \\ & z = r \cos \theta \end{aligned}$$

Найти dr , $d\theta$, $d\phi$?

$$\begin{aligned} 266. \quad & t + z = \rho + \phi - \theta \\ & -t + z = \rho - \phi + \theta \end{aligned}$$

Найти dz ? $\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$? $\frac{\partial^2 t}{\partial \phi \partial \theta}$?

$$\begin{aligned} 267. \quad & Ax + By + Cz + D = 0 \\ & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{aligned}$$

Найти $d^3 y$?

ПРИМѢРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦІЙ.

Отдѣлъ II.

РѢШЕНІЯ.

Функціи явные.

1. Функція отъ аргумента x , обозначенная въ данной задачѣ черезъ f , получится, если выполнить слѣдующія два дѣйствія: 1) вычесть аргументъ x изъ единицы; 2) раздѣлить единицу на полученную разность.

Въ выраженіи $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$ подразумѣвается функція та же f , но отъ другого аргумента $\left(\frac{1}{1+x}\right)$. Чтобы получить ее, необходимо выполнить тѣ же два дѣйствія, но не надъ x , а надъ $\left(\frac{1}{1+x}\right)$, т. е. 1) вычесть аргументъ изъ единицы $\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$; 2) раздѣлить единицу на полученную разность. $\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)}$

Иначе говоря — подставить въ выраженіе $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$ вмѣсто x аргументъ $\frac{1}{1+x}$

$$\text{Тогда окажется } f\left(\frac{1}{1+x}\right) \equiv \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} \equiv \frac{1+x}{(1+x)-1} \equiv \frac{1+x}{1}.$$

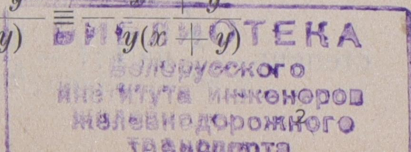
Чтобы получить $f\left(\frac{1+x}{x}\right)$, вставляемъ въ выраженіе $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$ вмѣсто аргумента x аргументъ $\left(\frac{1+x}{x}\right)$. Тогда

$$f\left(\frac{1+x}{x}\right) \equiv \frac{1}{1 - \frac{1+x}{x}} \equiv \frac{x}{x - (1+x)} \equiv -x$$

2. f — функція двухъ аргументовъ.

Чтобы получить $f\left(\frac{y}{x+y}, \frac{x+y}{x}\right)$, надо въ выраженіи $f(x, y)$ замѣнить первый аргументъ x черезъ $\frac{y}{x+y}$, второй аргументъ y черезъ $\frac{x+y}{x}$. Тогда.

$$f\left(\frac{y}{x+y}, \frac{x+y}{x}\right) \equiv \frac{2\left(\frac{y}{x+y}\right) - \left(\frac{x+y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x+y}\right)\left(\frac{x+y}{x}\right)} \equiv \frac{-x^2 - y^2}{y(x+y)} \equiv \frac{x^2 + y^2}{y(x+y)}$$



3. Въ выраженіи $f(x)$ аргументъ x замѣняемъ черезъ аргументъ $f(x)$ или черезъ $\frac{x+1}{x-1}$. Тогда

$$f[f(x)] \equiv \frac{f(x)+1}{f(x)-1} \equiv \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \equiv \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} \equiv \frac{2x}{2} \equiv x$$

$$f\left\{f[f(x)]\right\} \equiv f\left\{x\right\} \equiv \frac{x+1}{x-1}$$

4. Представивъ

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

и замѣчая, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x}\right) = \pm \infty$, а предѣлъ постоянной степени равенъ той же степени предѣла основанія, заключаемъ, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\lim_{\left(-\frac{2}{x}\right) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

5. По формулѣ $y' = \frac{1}{x} \text{Log}_F e$

$$\text{но } F = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3m}\right)^{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3m}\right)^{3m}\right]^{\frac{2}{3}}$$

Такъ какъ предѣлъ отъ постоянной степени равенъ той же степени предѣла основанія, то

$$F = \left[\lim_{3m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3m}\right)^{3m}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} \quad \text{Откуда } e = F^{\frac{3}{2}};$$

$$\text{Log}_F e = \frac{3}{2} \text{Log}_F F = \frac{3}{2}; \quad \text{итакъ } y' = \frac{3}{2x}; \quad dy = \frac{3}{2x} dx$$

6. $y' = 10^x \log_e 10$

извѣстно, что $\log_e 10 = \frac{1}{\text{Log}_{10} e} \text{Log}_{10} 10 = \frac{1}{0,4342...} = 2,3028...$

7. $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = x^{-\frac{2}{5}}$. Производную надо брать, какъ отъ степени: понижаемъ степень $-\frac{2}{5}$ на 1: $\left(-\frac{2}{5} - 1\right) = -\frac{7}{5}$. Выраженіе $x^{-\frac{7}{5}}$ умножаемъ на $-\frac{2}{5}$.

$$\text{Итакъ } y' = -\frac{2}{5} x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{2}{5\sqrt[5]{x^7}} = -\frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}}$$

8. Беремъ производную, какъ отъ степени, такъ какъ y можетъ быть представлено дробной степенью x^a . Постоянный множитель будетъ $(6 + \frac{4}{3})$. Чтобы уменьшить эту сумму на 1*), уменьшаемъ на 1 ея цѣлое слагаемое.

$$\text{Итакъ } y' = 6\frac{3}{4} x^5 \sqrt[4]{x^3} = \frac{27}{4} x^5 \sqrt[4]{x^3}; \quad dy = 6\frac{3}{4} x^5 \sqrt[4]{x^3} dx$$

9. Извѣстна формула $(\text{Log } x)' = \frac{1}{x} \text{Log } e$

Очевидно, что $\frac{a}{x}$ есть производная отъ $\text{Log}_k x$, взятаго при такомъ основаніи k , для котораго $\text{Log}_k e = a$. Откуда $e = k^a$ по опредѣленію логарифма. Слѣд. $k = \sqrt[a]{e}$. Итакъ $\frac{a}{x} = (\text{Log}_{\sqrt[a]{e}} x)' = y'$ Откуда $y = \text{Log}_{\sqrt[a]{e}} x$

Другой способъ. Производная отъ произведенія функціи на постоянный множитель, равняется произведенію постоянного множителя на производную отъ функціи. Здѣсь $y' = a \cdot \frac{1}{x}$, гдѣ a постоянный множитель; $\frac{1}{x}$ производная отъ функціи $\log_e x$. Слѣд. $y' = a \cdot \frac{1}{x} = a (\log x)'$. Откуда $y = a \log_e x = \log_e x^a$.

10. Производная отъ многочлена составляется изъ производныхъ отдѣльныхъ одночленовъ.

Первый одночленъ постоянный. Производная его $= 0$.

Второй одночленъ имѣетъ постоянного множителя, на который прійдется умножить и производную отъ остальной части одночлена, т. е. $nx^{n-1} \cdot b$. Подобнымъ образомъ и въ остальныхъ одночленахъ.

Въ третьемъ одночленѣ степень x^a будетъ $(-4 - \frac{1}{3})$. Уменьшая на 1 получимъ $(-5 - \frac{1}{3})$.

$$\text{Итакъ } y' = 0 + nbx^{n-1} - \left(-\frac{13}{3}\right) \frac{c}{x^5 \sqrt[3]{x}} + (-2) \frac{\varepsilon}{x^3} = nbx^{n-1} + \frac{13c}{3x^5 \sqrt[3]{x}} - \frac{2\varepsilon}{x^3}$$

(Написавъ безъ радикаловъ и знаменателей: $y = a + bx^n - cx^{-\frac{13}{3}} + \varepsilon x^{-2}$)

$$y' = nbx^{n-1} + \frac{13}{3} cx^{-\frac{16}{3}} - 2\varepsilon x^{-3}; \quad dy = nbx^{n-1} dx + \frac{13c dx}{3x^5 \sqrt[3]{x}} - \frac{2\varepsilon dx}{x^3}$$

послѣднее выраженіе y' приводится легко къ предыдущему.)

11. Степенью независимой переменнѣй, за исключеніемъ (-1) -ой степени выражается производная отъ степени же, на единицу высшей; — въ нашемъ примѣрѣ отъ x^4 . Для полученія производной отъ x^4 , степень, на 1 низшая, умножалась на первоначальнаго показателя 4. Его въ заданной производ-

*) Уменьшить степень x^a на единицу—все равно, что раздѣлить на x .

ной пѣтъ; очевидно онъ сократился съ такимъ же дѣлителемъ первоначальной функціи. Итакъ $y = \frac{x^4}{4}$; полное рѣшеніе будетъ $y = \frac{x^4}{4} + \text{постоянное}$, ибо производная постояннаго равна нулю.

12. Заданная производная—произведение e на степень x , постоянный множитель производной e былъ и въ первоначальной функціи. Для получения производной, во первыхъ, степень x^{ca} понижалась на 1, при обратномъ переходѣ повысимъ на единицу; будетъ $x^3\sqrt{x}$;— во вторыхъ, для получения производной мы умножали на показателя первоначальной степени, т. е. на $(3\frac{1}{2})$, здѣсь на него надо раздѣлить.

$$\text{Итакъ, } y = \frac{ex^3\sqrt{x}}{3\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} ex^3 \sqrt{x} \quad \text{Полное рѣшеніе } y = \frac{2}{7} ex^3 \sqrt{x} + \text{Const.}$$

13. Раздѣливъ dy на dx , получимъ производную $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^5}$. Повышаемъ степень производной на единицу, будетъ $x^{-5+1} = \frac{1}{x^4}$, и дѣлимъ на показателя первоначальной функціи (-4) . Слѣд., $y = -\frac{1}{4x^4} + \text{Const}$

14. Слагаемая производной суть производныя слагаемыхъ первоначальной функціи. Поэтому находимъ отдѣльно первоначальную функцію для слагаемаго $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$, для чего повышаемъ въ немъ степень x^{ca} на единицу, будетъ $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, и дѣлимъ на показателя $(-1\frac{1}{2})$, что даетъ $-\frac{2}{3x\sqrt{x}}$; для слагаемаго $\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}$ повышаемъ въ немъ степень x^{ca} на единицу: $\sqrt[3]{x}$, дѣлимъ на показателя $+\frac{1}{3}$ и умножаемъ на постоянный множитель a ; имѣемъ $\frac{a\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}}$.

$$\text{Слѣдовательно } y = -\frac{2}{3x\sqrt{x}} + 3a\sqrt[3]{x} + \text{Const}$$

15. Такъ какъ производная отъ суммы равна суммѣ производныхъ, а производная отъ постоянной величины равна нулю, то прибавивъ къ первоначальной функціи любое постоянное, не измѣнимъ ея производной. Обратно: одна и та же функція можетъ служить производной не для одной первоначальной, а для многихъ, отличающихся другъ отъ друга на любую постоянную величину; итакъ наши отвѣты могутъ отличаться другъ отъ друга на постоянную величину. Такъ какъ отвѣты выражены логариѣмами различныхъ системъ, то для сравненія необходимо одинъ изъ логариѣмовъ замѣнить логариѣмомъ другой системы. Напр. $\text{Log}_{\sqrt[3]{e}} x = \log_e x$. $\text{Log}_{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{e} = \log_e \frac{1}{e}$. Но модуль преобразованія $\text{Log}_{\sqrt[3]{e}} e = a$. Слѣдовательно оба отвѣта совпадаютъ. Или потенцируемъ оба отвѣта: $(\sqrt[3]{e})^{y(1)} = x$ и $e^{\frac{y(2)}{a}} = x$ откуда очевидно тождество въ данномъ случаѣ $y(1)$ и $y(2)$.

16. $\operatorname{tg} 45$ — величина постоянная; степень $x^{\operatorname{tg} 45}$ здѣсь равна $(-\frac{2}{3})$

$$y' = \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{\operatorname{tg} 45}{x^{\frac{2}{3}} \sqrt{x^2}} = -\frac{2 \operatorname{tg} 45}{3 x \sqrt{x^2}}$$

$$\left(y = \operatorname{tg} 45 \cdot x^{-\frac{2}{3}}; \quad y' = \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-1\frac{2}{3}} \operatorname{tg} 45\right)$$

17. $dy = (1 + \cos \sqrt{3}) \frac{x^{\cos \sqrt{3}}}{1 + \cos \sqrt{3}} dx = x^{\cos \sqrt{3}} dx.$

18. $y' = \frac{1}{x^{\sin 2}} = x^{-\sin 2}$

($-\sin 2$) величина постоянная. Слѣдовательно y' — производная отъ постоянной степени, на единицу высшей, т. е. отъ $x^{1-\sin 2}$. При полученіи производной мы умножаемъ на первоначальнаго показателя, при обратномъ переходѣ раздѣлимъ на того же показателя. Итакъ

$$y = \frac{x^{1-\sin 2}}{1-\sin 2} + \text{Const.}$$

19. Производная отъ произведенія

Производная отъ перваго множителя $(2-8x)$; отъ втораго $(-2+8x-12x^2)$

$$y' = (2-8x)(1-2x+4x^2-4x^3) + (1+2x-4x^2)(-2+8x-12x^2) =$$

$$= 4x(20x^3-24x^2+9x-2)$$

20. Производная отъ дроби.

$$y' = \frac{(x)'(5+x^3) - x(5+x^3)'}{(5+x^3)^2} = \frac{1 \cdot (5+x^3) - x \cdot 2x^2}{(5+x^3)^2} = \frac{5+x^3-3x^3}{(5+x^3)^2} = \frac{5-2x^3}{(5+x^3)^2}$$

$$dy = \frac{5-2x^3}{(5+x^3)^2} dx$$

21. $dy = \frac{[d(x^3)](5+ax) - x^3 \cdot [d(5+ax)]}{(5+ax)^2} = \frac{[3x^2 dx](5+ax) - x^3[adx]}{(5+ax)^2} =$

$$= \frac{15x^2 + 2ax^3}{(5+ax)^2} dx; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 + 2ax^3}{(5+ax)^2}$$

22. $y' = (e^x)'(x-1) + e^x(x-1)' = e^x[(x-1)+1] = xe^x$; ибо $(e^x)' = e^x$

23. $dy = (2x^4-8x^3+24x^2-48x+48) d(e^x) + e^x d(2x^4-8x^3+24x^2-48x+48) =$

$$= (2x^4-8x^3+24x^2-48x+48) e^x dx + e^x(8x^3-24x^2+48x-48) dx =$$

$$= 2x^4 e^x dx.$$

24. $y = 7 - 2(x^3) + 5(x^3)^2 - (x^3)^4 + (x^3)^{-3}$

$$y'_{(x^3)} = -2 + 5 \cdot 2 \cdot (x^3) - 4(x^3)^3 + (-3)(x^3)^{-4} = -2 + 10x^3 - 4x^9 - \frac{3}{x^{12}}$$

25. За независимое переменное надо считать \sqrt{x}

$$y'_{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$26. \cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

косинусъ двойной дуги представляется, не считая постоянныхъ величинъ, второю степенью косинуса простой дуги. Поэтому

$$\left(\frac{\cos 2x}{2} \right)'_{\cos x} = 2 \cos x$$

27. y —есть степень двучлена, по которому берется производная, а потому

$$y'_{(7+mx)} = 3(7+mx)^2$$

28. y —функция (третья степень) отъ функции (двучлена) независимаго переменнаго x . Производная y' выразится произведениемъ производной отъ третьей степени двучлена по измѣняемости основанія [т. е. произведениемъ производной по этому двучлену, разсматривая его какъ бы независимымъ переменнымъ], на m , т. е. на производную отъ основанія [отъ двучлена] по измѣняемости независимаго переменнаго x . Итакъ

$$y'_x = y'_{(7+mx)} \cdot (7+mx)'_x = 3(7+mx)^2 m.$$

29. y —функция (логариѳмъ) отъ функции (корня или дробной степени) независимаго переменнаго x

$$y'_x = (\log \sqrt{x})'_{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'_x$$

Производная отъ логариѳма по логариѳмируемому выраженію (по \sqrt{x})

$$(\log \sqrt{x})'_{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Производная отъ логариѳмируемаго выраженія [половинной степени] по основанію, т. е. по x : $(\sqrt{x})'_x = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{Итакъ } y'_x = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

Проще всегда преобразовать логариѳмъ $y = \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$; $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

30. Здѣсь функция (2-ая степень) отъ функции (синуса) независимаго переменнаго x . Производная y' равняется $2 \sin x$, производной отъ 2-ой степени синуса по измѣняемости основанія (т. е. по синусу, считая его какъ бы независимымъ переменнымъ), умноженной на производную отъ основанія ($\sin x$) по независимому переменному x , т. е. на $\cos x$. Итакъ

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

31. y —дуга, коей тангенсъ равенъ $\log x$. Производную надо брать по $\log x$, считая его независимымъ переменнымъ. Тогда по формулѣ

$$y'_{\log x} = (\operatorname{arctg} \log x)'_{\log x} = \frac{1}{1 + (\log x)^2}$$

32. y = функція (степень p) отъ функції (логариѣма) независимаго переменнаго x .

Производная отъ y по логариѣму будетъ $Ap(\log x)^{p-1}$

Производная отъ $\log x$ по x будетъ $\frac{1}{x}$.

$$\text{Итакъ } y' = Ap (\log x)^{p-1} \cdot \frac{1}{x}$$

33. y — функція (показательная) отъ функції (arctg) третьей функції (логариѣма) независимаго переменнаго x

$$y' = (e^{\operatorname{arctg} \log x})'_{\operatorname{arctg}} \cdot (\operatorname{arctg} \log x)'_{\log} \cdot (\log x)'_x$$

Производная отъ показательной функції по показателю (arctg) равняется самой показательной функції $(e^{\operatorname{arctg} \log x})'_{\operatorname{arctg}} = e^{\operatorname{arctg} \log x}$

Производная отъ arctg по самому tg^{-cy} , [равному въ нашей задачѣ $\log x$] будетъ $(\operatorname{arctg} \log x)'_{\log x} = \frac{1}{1 + (\log x)^2}$

Производная отъ $\log x$ по x извѣстна $\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{Итакъ } y'_x = e^{\operatorname{arctg} \log x} \cdot \frac{1}{1 + (\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

34. При выводѣ производной \sin^a считаютъ, что за единицу дуги принята дуга равная по длинѣ радиусу, а слѣд. за единицу угла—уголь соотвѣтственная дуга котораго равна радиусу.

(Только въ такомъ предположеніи пред. $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ будетъ равенъ единицѣ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Выразимъ поэтому нашу дугу $\arcsin y = x^0$ въ радиальныхъ единицахъ

$$\arcsin y = x^0 = \frac{x}{180} \pi; \quad y = \sin \frac{\pi x}{180}; \quad y' = \cos \frac{\pi x}{180} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \cos x^0.$$

$\cos \frac{\pi x}{180}$ — производная отъ синуса по аргументу, т. е. по дугѣ $\frac{\pi x}{180}$

$\frac{\pi}{180}$ — производная отъ дуги по независимому переменному x .

35. Показательная функція e^{ax} получается въ выраженіи производной отъ такой же показательной функції по ея показателю ax . Такую производную надо еще помножить на производную отъ показателя по независимому переменному x , т. е. на a , если получаютъ производную по x , а не по ax . Въ данной производной множителя a не видно. Исчезнуть онъ могъ, только сократившись съ равнымъ ему дѣлителемъ первоначальной функції.

$$\text{Итакъ } y = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$36. y = \frac{x}{5+x^3} = x \cdot (5+x^3)^{-1}$$

$$y' = (x)' (5+x^3)^{-1} + x \left[(5+x^3)^{-1} \right]'$$

$$(x)' = 1; \left[(5+x^3)^{-1} \right]' = -1 \cdot (5+x^3)^{-2} \cdot 3x^2$$

$$y' = \frac{1}{5+x^3} - \frac{3x^3}{(5+x^3)^2} = \frac{5-2x^2}{(5+x^3)^2}$$

$-1(5+x^3)^{-2}$ — производная отъ $(5+x^3)^{-1}$ по измѣняемости двучлена $(5+x^3)$

$$\text{Иначе: } y = \frac{x}{5+x^3} = \frac{1}{\frac{5}{x}+x^2} = \left(\frac{5}{x} + x^2 \right)^{-1}$$

$$y' = -1 \cdot \left(\frac{5}{x} + x^2 \right)^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{x^2} + 2x \right) = \frac{5-2x^2}{(5+x^3)^2}$$

$-1 \left(\frac{5}{x} + x^2 \right)^{-2}$ — производная отъ $\left(\frac{5}{x} + x^2 \right)^{-1}$ по основанію $\left(\frac{5}{x} + x^2 \right)$

$\left(-\frac{5}{x^2} + 2x \right)$ — производная отъ основанія по x .

$$37. y' = (e^{-x})' (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + e^{-x} (3x^2 + 6x + 6)$$

$$(e^{-x})' = (e^{-x})'_{-x} (-x)'_x$$

производная отъ показательной функции e^{-x} по показателю $(-x)$ равняется самой функции e^{-x} ; $(-x)'_x = -1$. Итакъ

$$y' = -e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + e^{-x} (3x^2 + 6x + 6) = e^{-x} (-x^3) = -x^3 e^{-x}.$$

38. Беремъ производную отъ m -ой степени основанія $(a + bx^n)$ по этому самому основанію и умножаемъ ее на производную отъ основанія по независимому переменному x :

$$y' = m (a + bx^n)^{m-1} \cdot (a + bx^n)' = mn b (a + bx^n)^{m-1} x^{n-1}.$$

39. Представивъ радикаль въ видѣ дробной степени, поступаемъ согласно правилу предыдущей задачи.

$$y' = \left[(a + bx + cx^2 + dx^3)^{\frac{n}{m}} \right]' = \frac{n}{m} (a + bx + cx^2 + dx^3)^{\frac{n-m}{m}} (a + bx + cx^2 + dx^3)'$$

$$y' = \frac{n(b + 2cx + 3dx^2)}{m \sqrt[m]{(a + bx + cx^2 + dx^3)^{m-n}}}.$$

$$40. y' = \cos 2x \cdot 2 + 2 = 2(1 + \cos 2x) = 4 \cos^2 x.$$

$\cos 2x$ — производная отъ $\sin 2x$ по дугѣ, равной $2x$;

2 — производная отъ $2x$ по независимому x .

$$dy = 4 \cos^2 x dx.$$

$$41. dy = d(\sin 2x) - d(2x) = (\cos 2x - 1) d(2x) = -2 \sin^2 x \cdot 2 dx = -4 \sin^2 x dx.$$

$$42. y' = a \cdot \frac{\frac{1}{b}}{1 + \frac{x^2}{b^2}} - b \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{ab}{b^2 + x^2} - \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}.$$

$$43. y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \cdot (a^2 - x^2)'$$

Второй членъ этого выраженія для y' есть произведение 1-го множителя x на—производную отъ отрицательной дробной степени по всему подкоренному выраженію [т. е. по : $(a^2 - x^2)$], умноженную на производную отъ подкоренного выраженія по независимому переменному x :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x}{2\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \cdot (-2x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y' = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

$$\text{Иначе: } y = \frac{1}{\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{1/2}} = \frac{1}{(a^2 x^{-2} - 1)^{1/2}} = (a^2 x^{-2} - 1)^{-1/2}$$

y' есть производная отъ степени по основанію $(a^2 x^{-2} - 1)$, умноженная на производную отъ основанія по независимому переменному x :

$$y' = -\frac{1}{2} (a^2 x^{-2} - 1)^{-3/2} \cdot (-2a^2 x^{-3}) = \frac{a^2 x^{-3}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^3}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

$$dy = \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

Можно сразу находить dy

$$\begin{aligned} dy &= d(a^2 x^{-2} - 1)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (a^2 x^{-2} - 1)^{-3/2} d(a^2 x^{-2} - 1) = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^3}} a^2 \cdot (-2)x^{-3} dx = \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \end{aligned}$$

$$44. \text{ Упростивъ знаменателя получимъ: } y = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a}{x^n} + b}} = (ax^{-n} + b)^{-\frac{1}{n}}$$

y' = производной отъ степени по основанію, т. е. по $(ax^{-n} + b)$, умноженной на производную отъ основанія по независимому переменному x .

$$y' = -\frac{1}{n} (ax^{-n} + b)^{-\left(\frac{n+1}{n}\right)} \cdot a \cdot (-n) \cdot x^{-(n+1)} = \frac{a}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$\begin{aligned} \text{ибо: } \frac{a \cdot x^{-(n+1)}}{\left(\frac{a}{x^n} + b\right)^{\frac{n+1}{n}}} &= \frac{a}{x^{n+1} \left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{a}{x^{n+1} \sqrt[n]{\frac{(a+bx^n)^{n+1}}{x^{n(n+1)}}}} \\ &= \frac{a}{x^{n+1} \sqrt[n]{(a+bx^n)^{n+1}}} = \frac{a}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^{n+1}}} \end{aligned}$$

45. Логарифмируемъ выраженіе, стоящее во 2-й части
 $y = \text{Log } C + m \text{Log } (x-1) - m \text{Log } (x+1)$

$$y' = m \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \text{Log} e - m \cdot \frac{1}{x+1} \text{Log} e = m \cdot \frac{2}{x^2 - 1} \cdot \text{Log} e = \frac{2m \text{Log} e}{x^2 - 1}$$

46. Логариѣмируемъ наше выраженіе, стоящее во 2-й части;

$y = \log(a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3) + \log(x\sqrt{x} - x) = \log(a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3) + \log(x^{3/2} - x)$
 y' = производной отъ логариѣма по логариѣмируемому выраженію, умноженной на производную отъ логариѣмируемаго выраженія по независимому переменному x :

$$\text{Слѣд., } y' = \frac{1}{x\sqrt{x} - x} \cdot (3/2 x^{1/2} - 1) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{2x(\sqrt{x} - 1)}$$

$$\begin{aligned} 47. \quad dy &= \frac{\text{Log } e}{\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}} \overset{*}{d} \left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2} \right) = \\ &= \frac{\text{Log } e}{\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}} \left[dx + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a + bx + x^2}} \overset{**}{d} (a + bx + x^2) \right] = \\ &= \frac{\text{Log } e}{\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}} \frac{1}{\sqrt{a + bx + x^2}} \left[dx \sqrt{a + bx + x^2} + \frac{b}{2} dx + \frac{2x}{2} dx \right] = \\ &= \frac{\text{Log } e \, dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} \end{aligned}$$

48. Освободимъ дробь отъ ирраціональности въ знаменателѣ:

$$\begin{aligned} y &= \log \frac{1 + x + 1 - x + 2\sqrt{1 - x^2}}{1 + x - 1 + x} = \log \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} = \log(1 + \sqrt{1 - x^2}) - \log x \\ y' &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{x} = -\frac{x^2 + 1 - x^2 + \sqrt{1 - x^2}}{x\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

49. $y' = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x$, гдѣ $\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ есть производная отъ отрицательной степени \sin по основанію, (т. е. по самому \sin), а $\cos x$ есть производная отъ основанія, (т. е. отъ $\sin x$) по независимому переменному x

$$y' = \cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} (\sin^2 x - 1) = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = -\cos x \cot^2 x$$

$$\begin{aligned} 50. \quad dy &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} d\frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}} \frac{dx}{2} = \\ &= \frac{2 \, dx}{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin^2 x} dx \end{aligned}$$

*) Производная отъ логариѣма по логариѣмируемому выраженію умножается на дифференціалъ логариѣмируемаго выраженія (того, по которому взята производная).

**) Производная отъ корня по подкоренному выраженію умножается на дифференціалъ подкореннаго выраженія.

$\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ — производная от tang по дугѣ, равной въ данной зада-
чѣ $\frac{x}{2}$, умножается на дифференціалъ этой дуги.

$$51. y = \log k + \log \cos x + \frac{1}{2} \sec^2 x$$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{2 \cdot (-\sin x)}{2 \cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} (1 - \cos^2 x) = \operatorname{tg}^3 x.$$

Секансъ передъ дифференцированиѣмъ былъ выраженъ черезъ косинусъ.

52. Это выраженіе можно представить въ видѣ:

$$y = \log c + \frac{1}{2} \log(1 + x^2) - x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - x \frac{1}{1 + x^2} = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

Примѣчаніе: $\log c = \text{const.}$

$\frac{1}{1 + x^2}$ — производная отъ логариѣма по логариѣмируемому выраженію,
т. е. по $(1 + x^2)$,

$2x$ — производная отъ логариѣмируемаго выраженія по независи-
мому перемѣнному x .

$$53. y' = a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

Примѣчаніе: $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$ — производная отъ $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}$ по аргументу (равному
синусу дифференцируемой дуги), т. е. по $\frac{x}{a}$

$\frac{1}{a}$ — производная отъ этого аргумента-синуса по незави-
симому перемѣнному x .

$$54. y' = \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + 4x \operatorname{arc} \sin x + \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= 4x \operatorname{arc} \sin x$$

$$55. y = \log c + m \log(1 - e^x) - mx$$

$$y' = m \left[\frac{-e^x}{1 - e^x} - 1 \right] = m \cdot \frac{-e^x - 1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{m}{e^x - 1}$$

Или
$$y = \log c + m \log \frac{1 - e^x}{e^x} = \log c + m \log(e^{-x} - 1),$$

ибо
$$mx = mx \log e = m \log e^x$$

$$y' = m \cdot \frac{1}{e^{-x} - 1} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{m}{e^x - 1}$$

$\frac{1}{e^{-x} - 1}$ — есть производная отъ логариѣма по $(e^{-x} - 1)$

e^{-x} — есть производная отъ e^{-x} по $(-x)$

и (-1) — есть производная отъ $(-x)$ по независимому переменному x .

$$56. dy = m (\operatorname{arctg} ax)'_{ax} (ax)'_x dx = \frac{m}{1 + a^2 x^2} a dx$$

Примѣчаніе $\frac{m}{1 + a^2 x^2} = y'_{(ax)}$; $a dx = d(ax)$. Откуда $dy = \frac{m}{1 + a^2 x^2} d(ax)$

поэтому можно бы и такъ: $dy = m d(\operatorname{arctg} ax) = m \frac{1}{1 + a^2 x^2} d(ax) = \frac{ma}{1 + a^2 x^2} dx$

$$57. dy = (\operatorname{tg} \log x)'_{\log x} d(\log x) = \frac{1}{(\cos \log x)^2} \frac{1}{x} dx$$

$$58. dy = -\frac{1}{1 + (\log \sec x)^2} \cdot \frac{1}{\sec x} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{tg} x dx}{1 + (\log \sec x)^2}$$

y'_{\log} (равную $-\frac{1}{1 + (\log \sec x)^2}$) умножаемъ на $d \log \sec x$

$$d \log \sec x = (\log \sec x)'_{\sec} \cdot d \sec x = \frac{1}{\sec x} d \frac{1}{\cos x};$$

$$d \frac{1}{\cos x} = (\cos^{-1} x)'_{\cos x} d \cos x = (-1) \cdot \cos^{-2} x d \cos x;$$

$$d \cos x = -\sin x \cdot dx$$

$$\text{или проще } y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \log \frac{1}{\cos x} = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (-\log \cos x) = -\operatorname{arc} \operatorname{cotg} \log \cos x$$

$$59. y = (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$$

$$dy = \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]'_{x+1} (x+1)'_x dx + (x^{\frac{3}{2}})'_x dx = \frac{3}{2} (x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot dx + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{3}{2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) dx$$

60. $d_c \xi$ показываетъ, что здѣсь независимое переменное c , а ξ его функція

$$d\xi = \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1 + Q + C}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 + Q + c)^2 - Q}} \right) dc$$

61. Пусть $y = \operatorname{arc} \cos u$ (т. е. $u = \cos y$)

Производная отъ $\operatorname{arc} \cos$ по измѣняемости самаго косинуса (равнаго u) для y (дуги, мѣняющейся въ первыхъ двухъ четвертяхъ окружности *) будетъ

$$y'_u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

*) В. П. Ермаковъ. Дифференціальное исчисленіе. Изданіе Шкляревскаго и Хонякевича Кіевъ, 1899. Ч. I, § 12.

Въ нашемъ примѣрѣ $u = (-x)$, а потому

$$y'_{(-x)} = \left[\arccos(-x) \right]'_{(-x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Но $y'_x = y'_{(-x)} \cdot (-x)'_x = y'_{(-x)} \cdot (-1)$

Слѣдовательно $y'_x = \left[\arccos(-x) \right]'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Если дуга y будетъ мѣняться въ третьей и четвертой четвертяхъ, то

$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}; \quad y'_{(-x)} = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

62. Заменяемъ \sin черезъ \cos : $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$y'_{\cos x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \cdot (-2 \cos x) = -\cotg x$$

Итакъ $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = -\cotg x.$

Иначе на основаніи формулы дифференціала функции отъ функции $dy = y'_{\cos x} d(\cos x)$ имѣемъ

$$y'_{\cos x} = \frac{dy}{d \cos x} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx} = -\cotg x$$

$$63. y'_{\sin x} = \frac{dy}{d \sin x} = \frac{-\frac{dx}{\sin^2 x}}{\cos x dx} = -\frac{1}{\cos x \sin^2 x}$$

$$y'_{\cos x} = \frac{dy}{d \cos x} = \frac{-\frac{dx}{\sin^2 x}}{-\sin x dx} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

Если бы отыскивая производную отъ y , напр. по $\cos x$, непремѣнно полагали бы необходимымъ y выразить въ функции отъ $\cos x$, то сдѣлали бы преобразование:

$$y = \cotg x = \frac{1}{\tg x} = \frac{1}{\sqrt{\tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^{-2} x - 1}} = (\cos^{-2} x - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Не выводимъ $\cos x$ въ числитель, чтобы не брать производной отъ дроби

$$y'_{\cos x} = -\frac{1}{2} (\cos^{-2} x - 1)^{-\frac{3}{2}} (-2) \cos^{-3} x = \left[(\cos^{-2} x - 1)^{\frac{1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} \right]^{-3} =$$

$$= \left[(1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} \right]^{-3} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

$-\frac{1}{2} (\cos^{-2} x - 1)^{-\frac{3}{2}}$ — производная отъ корня по подкоренному выраженію;

$-2 \cos^{-3} x$ — производная отъ подкореннаго выраженія по $\cos x$, принимаемому за независимое переменное.

64. Непосредственно имѣемъ

$$dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^2} d \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1 - x^2} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} d(x^{-2} - 1) =$$

$$= \frac{x^3}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x^{-3}) dx = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2}$ — производная отъ arctg по аргументу $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (т. е. по измѣняемости той самой величины, коѣй равенъ $\operatorname{tg} y$)

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$ — производная отъ тангенса, равнаго $\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$, по подкоренному выраженію, т. е. по $(x^{-2}-1)$.

$-2x^{-3}$ — производная отъ подкореннаго выраженія по независимому переменному x .

Иначе: преобразуемъ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{tg} y$; $1-x^2 = x^2 \operatorname{tg}^2 y$; $1 = x^2(1 + \operatorname{tg}^2 y)$

$$x^2 = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y; \quad x = \pm \cos y; \quad y = \arccos(\pm x).$$

Формула производной отъ y , выраженной черезъ arctg , получается безъ всякаго условія, въ какой четверти лежитъ дуга y . (См. В. П. Ермаковъ. Дифференціальное исчисленіе. Ч. I, § 13). Поэтому, приведя выраженіе y къ \arccos , мы можемъ считать что y принадлежитъ какъ разъ къ тѣмъ четвертямъ, къ какимъ улаиваются относить дугу при выводѣ формулы производной отъ дуги по измѣняемости ея косинуса (производная отъ \arccos), т. е. къ двумъ первымъ четвертямъ (Д. В., § 12). Слѣдовательно нужно изслѣдовать, какой изъ знаковъ формулы $y = \arccos(\pm x)$ соотвѣтствуетъ первымъ двумъ четвертямъ?

При измѣненіи независимаго переменнаго x отъ -1 , черезъ 0 , до $+1$ (для такихъ только значеній заданный намъ tg дѣйствителенъ), tgy [равный $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$] будетъ мѣняться соотвѣтственно отъ 0 (для $x=-1$), черезъ $\mp \infty$ (для $x=0$), до 0 (для $x=+1$) т. е. будетъ убывать. Соотвѣтственные значенія дуги y , принадлежащей первымъ двумъ четвертямъ, (дуга всегда вмѣстѣ съ тангенсомъ убываетъ) и ея косинуса будутъ $y=\pi$, $\cos y=-1$ (для $x=-1$); $y=\frac{\pi}{2}$, $\cos y=0$ (для $x=0$); $y=0$, $\cos y=1$ (для $x=+1$).

Слѣдовательно $x = +\cos y$ или $y = \arccos(+x)$

$$\text{Итакъ } dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Если бы взяли y въ третьей и четвертой четвертяхъ, то $y = \arccos(-x)$, но тогда производная (см. зд. № 61) $y'_{(-x)} = +\frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}$;

$$\text{а } y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} (-x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и снова } dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

65. Непосредственно имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{+\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$$

Примѣч.: $\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}$ — производная отъ \arcsin 'а по аргументу $\sqrt{1-x^2}$

$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ — производная отъ самого синуса (равнаго $\sqrt{1-x^2}$) по подкоренному выраженію, т. е. по $(1-x^2)$,

— $2x$ — производная отъ подкоренного выраженія по независимому переменному x .

Корня изъ x^2 не извлекаемъ, чтобы показать, что знакъ y' будетъ зависѣть отъ знака x ; знаки ихъ противоположны.

Въ самомъ дѣлѣ для положительныхъ значеній x^a : $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = +1$.

$$\text{Тогда: } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для отрицательныхъ $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = -1$ и, слѣдовательно $\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Иначе;

Если $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, то $\sin y = \sqrt{1-x^2}$.
 Слѣдовательно, $\sin^2 y = 1-x^2$, или $x^2 = 1-\sin^2 y$; $x^2 = \cos^2 y$
 $x = \pm \cos y$; $y = \arccos(\pm x)$.

На \arcsin берется согласно условію (Диф. Исч. Ч. I, § 11, стр. 12) въ предѣлахъ между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

При измѣненіи x отъ 0 до 1:

$+\sqrt{1-x^2} = \sin y$ мѣняется отъ 1 до 0,

и $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ „ „ $\frac{\pi}{2}$ „ 0.

Слѣдовательно $x = +\cos y$; $y = \arccos(+x)$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

При измѣненіи x отъ 0 до —1:

$+\sqrt{1-x^2} = \sin y$ мѣняется отъ 1 до 0,

и $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ „ „ $\frac{\pi}{2}$ „ 0.

Слѣдовательно, $x = -\cos y$ [или $x = \cos(\pi-y)$]

Тогда $y = \arccos(-x)$, [или $\pi-y = \arccos x$]

Отсюда $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} \cdot (-x)'$, [или $-y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]

Итакъ для x отрицательнаго: $\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} 66. \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\frac{x^2}{b^2-x^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}} - x \frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{(b^2-x^2)^3}} \right) \\ &= \frac{b^2-x^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{(b^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}} \end{aligned}$$

Для полученія $\frac{dy}{dx}$ производная отъ y по аргументу $\left(\frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}\right)$, равная $\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{b^2-x^2}}\right)$, умножается на производную отъ этого аргумента по x . Въ со-

ставъ послѣдней $\left(\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}} \frac{dx}{dx} - x \frac{d \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}}{dx} \right)$ входитъ производная по x отъ $\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$; чтобы вычислить таковую, слѣдуетъ производную отъ $\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$, другими словами, отъ $(b^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ по основанію (b^2-x^2) , равную $\left(-\frac{1}{2\sqrt{b^2-x^2}} \right)$, умножить на $(-2x)$, т. е. на производную отъ (b^2-x^2) по x .

Иначе: замѣчая въ первомъ рѣшеніи, что результатъ не зависитъ отъ знака x , можемъ утверждать, что преобразование $\frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}} = [b^2x^{-2}-1]^{-\frac{1}{2}}$ не измѣнитъ знака производной, а потому

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{b^2-x^2}} \frac{d(b^2x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{b^2-x^2}{b^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (b^2x^{-2}-1)^{-\frac{3}{2}} \frac{d(b^2x^{-2}-1)}{dx} = \\ &= \frac{b^2-x^2}{b^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (b^2x^{-2}-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2b^2x) = \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}} \end{aligned}$$

Еще иначе: $y = \arctg \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}; \quad \operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}; \quad \operatorname{tg}^2 y = \frac{x^2}{b^2-x^2}$

$$b^2-x^2 = x^2 \cotg^2 y; \quad b^2 = x^2 \operatorname{cosec}^2 y = \frac{x^2}{\sin^2 y}$$

$$\sin^2 y = \frac{x^2}{b^2}; \quad \sin y = \pm \frac{x}{\sqrt{b^2}};$$

$$y = \arcsin \left(\pm \frac{x}{\sqrt{b^2}} \right) = \pm \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{b^2}} \right)$$

Приведа *) выраженіе y къ \arcsin , мы можемъ считать, что дуга y измѣняется въ предѣлахъ отъ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ до $\frac{\pi}{2}$ (въ такомъ предположеніи была выведена формула производной отъ \arcsin ; представленіе же черезъ \arctg не налагаетъ на y никакихъ условій). Поэтому нужно изслѣдовать, какой изъ знаковъ формулы $y = \arcsin \pm \frac{x}{\sqrt{b^2}}$ соответствуетъ первой и четвертой четвертямъ?

Такъ какъ при измѣненіи x отъ $-\sqrt{b^2}$ черезъ 0, до $+\sqrt{b^2}$

$\operatorname{tg} y \equiv \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}$ будетъ мѣняться отъ $-\infty$, черезъ 0, до $+\infty$,

т. е. будетъ возрастать, то соотвѣтственные значенія дуги y и ея синуса будутъ

$$y = -\frac{\pi}{2}; \quad \sin y = -1 \quad (\text{для } x = -\sqrt{b^2})$$

$$y = 0 \quad \sin y = 0 \quad (\text{для } x = 0)$$

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \sin y = 1 \quad (\text{для } x = +\sqrt{b^2})$$

*) Здѣсь мы смогли вынести \pm изъ подъ знака функціи \arcsin , ибо съ измѣненіемъ знака \sin^a мѣняется знакъ и дуги. Въ двухъ предыдущихъ задачахъ мы не смогли этого сдѣлать съ \arccos , ибо съ измѣненіемъ знака \cos^a , не знакъ дуги мѣняется, а дуга замѣняется своимъ дополненіемъ до π , т. е. $-\sin u = \sin(\pi - u)$; $-\cos u = \cos(\pi - u)$; [но $\cos(-u) = \cos u$]

Слѣдовательно $\frac{x}{\sqrt{b^2}} = \sin y$.

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{b^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$\begin{aligned} 67. \quad dy &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\sqrt{1+x^2} \left(\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + x d\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= -\sqrt{1+x^2} \left(\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \right) = -\frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Иначе: } dy &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\sqrt{1+x^2} d(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\sqrt{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} d(x^{-2}+1) = \\ &= +\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}} (-2)x^{-3} dx = -\frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

или преобразовавъ $y = \operatorname{arccotg} x$, всего скорѣе получимъ $dy = -\frac{1}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned} 68. \quad \frac{dy}{dx} &= \left(\operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{x}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \right) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left(\operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - x \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Другой способъ рѣшенія: $y = x \left(\operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \sqrt{1-x^2} = x (\arccos x) - \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arccos x.$$

$$\begin{aligned} 69. \quad dy &= 2 \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2+x^2}}} \left(\frac{dx}{\sqrt{b^2+x^2}} - \frac{x \cdot 2x dx}{2\sqrt{(b^2+x^2)^3}} \right) = \\ &= 2 \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{b^2}} \left(1 - \frac{x^2}{b^2+x^2} \right) dx = 2 \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} \right) \frac{(+\sqrt{b^2})}{b^2+x^2} dx; \quad (A) \end{aligned}$$

$$\text{Или: } y = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} \right)^2 = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)^2$$

$$dy = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) \cdot \frac{\frac{dx}{b}}{1+\frac{x^2}{b^2}} = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) \frac{b dx}{b^2+x^2} \quad (B)$$

Примѣчаніе:

$$\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} = \sin \sqrt{y}; \quad x^2 - x^2 \sin^2 \sqrt{y} = b^2 \sin^2 \sqrt{y}; \quad x^2 \cos^2 \sqrt{y} = b^2 \sin^2 \sqrt{y}$$

$$\operatorname{tg} \sqrt{y} = \pm \frac{x}{b}; \quad \sqrt{y} = \pm \operatorname{arctg} \frac{x}{b}; \quad y = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)^2$$

Во отвѣтъ (А) вмѣсто b стоитъ $+Vb^2$, чтобы показать, что измѣненіе знака b не вліяетъ на знакъ dy (какъ и слѣдуетъ изъ самаго выраженія y).

Измѣненіе знака b поведетъ въ отвѣтъ (В) измѣненіе знака двухъ его множителей b и $\arctg \frac{x}{b}$, что взаимно уничтожится.

$$70. \sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad x^2 = \frac{1}{\sin^2 y} - 1 = \cotg^2 y; \quad x = \pm \cotg y.$$

\arcsin берется обыкновенно между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, а потому

при измѣненіи x отъ 0 до $+\infty$:

$\sin y \left(= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$ измѣняется отъ 1 до 0,

Поэтому $y \left(= \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$ можно считать отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0.

$\cotg y$ будетъ мѣняться соотвѣтственно отъ 0 до $+\infty$

Слѣдовательно $x = +\cotg y; \quad y = \arctg x$

$$dy = -\frac{dx}{1+x^2} \quad \text{для } x \text{ положительнаго.}$$

При измѣненіи x отъ 0 до $-\infty$:

$\sin y$ измѣняется отъ 1 до 0.

y „ отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0.

$\cotg y$ по прежнему отъ 0 до $+\infty$

Слѣд., $x = -\cotg y$

$$y = \arctg(-x) = -\arctg x$$

$$dy = +\frac{dx}{1+x^2} \quad \text{для } x \text{ отрицательнаго.}$$

Другой способъ: непосредственно имѣемъ:

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-2xdx}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = -\frac{xdx}{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{(1+x^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Для } x \text{ положительнаго: } \frac{x}{\sqrt{x^2}} = +1; \quad \text{тогда } dy = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{Для } x \text{ отрицательнаго: } \frac{x}{\sqrt{x^2}} = -1; \quad \text{въ такомъ случаѣ } dy = +\frac{dx}{1+x^2}$$

71. По формулѣ дифференціала произведенія

$$\begin{aligned} dy &= (-6abdx + 10b^2xdx)\sqrt[3]{(a+bx)^2} + (9a^2-6abx+5b^2x^2) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \\ &= \frac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a+bx}} dx \end{aligned}$$

дифференціалъ второго множителя равенъ производной отъ него, какъ отъ степени (съ показателемъ $\frac{2}{3}$) по основанію $(a+bx)$,— умноженной на дифференціалъ подкореннаго выраженія (равный $b dx$).

72. Возьмемъ логариемы (неперовы) отъ обѣихъ частей (Ерм. Д. В. § 10)
 $\log y = 9 \log (x - 2) - 2\frac{1}{2} \log (x - 1) - 5\frac{1}{2} \log (x - 3)$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{9}{x-2} - \frac{2\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{5\frac{1}{2}}{x-3} \right] dx$$

$$dy = \frac{y [18(x-1)(x-3) - 5(x-2)(x-3) - 11(x-2)(x-1)]}{(x-2)(x-1)(x-3) \cdot 2} dx =$$

$$= \frac{(x-2)^8 (x^2 - 7x + 1) dx}{(x-1)^3 (x-3)^6 \sqrt{(x-1)(x-3)}}$$

73. $y' = \frac{1}{4} \frac{a}{\sqrt[4]{x^3}}$; изъ даннаго уравненія $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{a}{y}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{a^3}{y^3}$.

Замѣняя въ выраженіи для y' радикалъ найденнымъ равнымъ ему раціональнымъ выраженіемъ, получимъ $y' = \frac{1}{4} \frac{a^4}{y^3}$

Или на основаніи того, что производныя обратныхъ функцій суть величины обратныя, т. е. $y'_x \cdot x'_y = 1$, опредѣлимъ предварительно x'_y .

Изъ даннаго соотношенія имѣемъ $x = \frac{y^4}{a^4}$.

Откуда $x'_y = \frac{4y^3}{a^4}$. Слѣд., $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{a^4}{4y^3}$

74. $y = \arccos e^{-x}$;

$$y'_x = \frac{d(\arccos e^{-x})}{d(e^{-x})} \cdot \frac{de^{-x}}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{\sqrt{e^{+2x}-1}}$$

Но изъ уравненія $e^x = \sec y$ слѣдуетъ, что $e^{2x} - 1 = \sec^2 y - 1$;
 или что $\sqrt{e^{2x}-1} = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \operatorname{tg} y$.

Вставляя послѣднее въ выраженіе для y' , найдемъ $y'_x = \operatorname{cotg} y$

Иначе: опредѣливъ изъ даннаго соотношенія $x = \log \sec y = -\log \cos y$ найдемъ $x'_y = -\frac{1}{\cos y} (-\sin y) = \operatorname{tg} y$.

А потому $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \operatorname{cotg} y$.

75. $y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \frac{3}{1+(3x)^2}$

3 есть производная отъ $(3x)$ по x

$\frac{1}{1+(3x)^2}$ — производная отъ $\operatorname{arctg} 3x$ по $3x$;

значитъ $\frac{3}{1+(3x)^2}$ — производная отъ $\operatorname{arctg} 3x$ по x .

$\frac{1}{\operatorname{arctg} 3}$ — производная отъ $\log \operatorname{arctg} 3x$ по $\operatorname{arctg} 3x$;

значитъ $\frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \frac{3}{1+(3x)^2} = y'$ т. е. это производная отъ $\log \operatorname{arctg} 3x$ по независимому перемѣнному x .

откуда $y = \log \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x + C$
или, постоянное C принявъ за лагариюмъ K , $y = \log (\operatorname{Karc} \operatorname{tg} 3x)$

76. $\sin x dx = -d \cos x$; $e^{a \cos x}$ есть производная отъ $e^{a \cos x}$ по $(a \cos x)$. Еслибы еще помножили на $d(a \cos x)$, т. е. на $(-a \sin x dx)$, то получили бы $de^{a \cos x}$.

Итакъ $dy = \frac{e^{a \cos x}(-a \sin x dx)}{-a} = -\frac{de^{a \cos x}}{a}$ Откуда $y = -\frac{e^{a \cos x}}{a} + C$,

77. Очевидно $y = \sin x + C$ Откуда $x = \operatorname{arc} \sin(y - c)$;

такъ какъ $\frac{d(y - c)}{dy} = 1$, то $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - (y - c)^2}}$

подставивъ $\sin x$ вмѣсто равнаго ему $(y - c)$, выразимъ x'_y въ функціи x^{\cos} , и такимъ образомъ устранимъ произвольное постоянное: $x'_y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

Что можно было бы получить и на основаніи $x'_y = \frac{dx'_y}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'_x}$.

78. Мы знаемъ производныя различныхъ функцій x выраженными тоже въ функціи x . Производную отъ y , выраженную въ функціи отъ самого y , намъ не удастся представить въ функціи отъ x , пока не найдемъ y . Зато въ функціи отъ y принято выражать производную отъ x по y . Потому представимъ

$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\cos^2 y}$ Откуда $x = -\operatorname{tg} y + \operatorname{const}$ или $\operatorname{tgy} = (c - x)$

Наоборотъ $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (c - x)$

Повѣрка: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (c - x)^2} (-1) = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = -\cos^2 y$.

79. Замѣтивъ, что числитель есть половина производной по x отъ знаменателя, имѣемъ

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{ax^2 + bx + c} \cdot \frac{d(ax^2 + bx + c)}{dx}$

$\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ есть производная отъ логариюма знаменателя по знаменателю.

Итакъ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d[\log(ax^2 + bx + c)]}{d(ax^2 + bx + c)} \frac{d(ax^2 + bx + c)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d[\log(ax^2 + bx + c)]}{dx}$

Откуда $y = \frac{1}{2} \log(ax^2 + bx + c) + \operatorname{const} = \log C \sqrt{ax^2 + bx + c}$

80. Здѣсь надо y считать переменнымъ независимымъ, а x его функціей; числитель — половина производной по y отъ подкореннаго выраженія въ

знаменателѣ; поэтому $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} (y^2 + 6y)^{-\frac{1}{2}} \frac{d(y^2 + 6y)}{dy}$

или $dx = \frac{1}{2} (y^2 + 6y)^{-\frac{1}{2}} d(y^2 + 6y)$

$\frac{1}{2} (y^2 + 6y)^{-\frac{1}{2}}$ можно считать производной отъ $(y^2 + 6y)^{\frac{1}{2}}$ по основанію $(y^2 + 6y)$; она умножается на дифференціалъ этого основанія. По опре-

дѣленію дифференціала произведение, стоящее въ правой части послѣдняго равенства, будетъ дифференціаломъ отъ $(y^2 + 6y)^{\frac{1}{2}}$ (Е. Д. В., ч. I, § 18).

Итакъ $dx = d(y^2 + 6y)^{\frac{1}{2}}$

Откуда $x + c = \sqrt{y^2 + 6y}$

81. Коэффициентъ при одномъ дифференціалѣ въ выраженіи другого дифференціала (т. е. производная, называемая благодаря этому свойству *дифференціальнымъ коэффициентомъ*) выражена въ функціи y . Удобно, значитъ, считать y независимымъ переменнымъ. Опредѣлимъ поэтому dx .

$$dx = \frac{y^2 + k}{\sqrt[3]{y^3 + 3ky + 1}} dy$$

числитель — третья доля производной по y отъ подкореннаго выраженія въ знаменателѣ.

$$\begin{aligned} dx &= (y^3 + 3ky + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{d(y^3 + 3ky + 1)}{dy} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 + 3ky + 1)^{-\frac{1}{3}} d(y^3 + 3ky + 1) \\ &= \frac{1}{2} d[(y^3 + 3ky + 1)^{\frac{2}{3}}] \end{aligned}$$

Слѣдовательно $x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(y^3 + 3ky + 1)^2} + c$

Откуда $y^3 + 3ky + [1 - 2(x + c)\sqrt[3]{2(x + c)}] = 0$

Искомый y будетъ корнемъ этого кубическаго уравненія.

Примѣчаніе: Это кубическое уравненіе рѣшается весьма просто. Приравняемъ величинѣ t свободный членъ уравненія, которое тогда представимъ въ видѣ:
 $y^3 + 3ky + t = 0$

Сдѣлаемъ предположеніе: $y = u + v$.

Возведя въ кубъ: $y^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$

Упростимъ послѣднее на основаніи $y = u + v$, получимъ: $y^3 - 3uv y - (u^3 + v^3) = 0$; что тождественно удовлетворится подстановкой: $y = u + v$.

Теперь сдѣлаемъ: $-3uv = 3k$; $-(u^3 + v^3) = t$.

Возведя первое въ кубъ, получимъ $u^3 v^3 = -k^3$; $u^3 + v^3 = -t$.

u^3, v^3 корни квадратнаго уравненія $z^2 + tz - k^3 = 0$; $z = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} + k^3}$

Итакъ $y = \sqrt[3]{-\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + k^3}} + \sqrt[3]{-\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + k^3}}$ (Формулы Кардана).

Всякое кубическое уравненіе $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ приводится къ предыдущему виду подстановкой $x = y - \frac{B}{A}$

(Болѣе подроб. см.: Шапошниковъ, Дополнительные статьи.)

82. $y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y''_x = (y'_x)'_x = -2 \frac{1}{\cos^3 x} (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad (= 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x)$$

y'_x функція (—2-я степень) отъ функціи (cosinus'a) независимаго переменнаго x .

83. $y = e^{\log x} = x$ по опредѣленію логариѳма,

$$y''_x = 0$$

Если бы не замѣтили упрощенія, то $y'_x = e^{\log x} \cdot \frac{1}{x}$,

$$y''_x = e^{\log x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + e^{\log x} (-1) \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\begin{aligned} 84. \quad dy &= \operatorname{arctg} x \, dx + \frac{x+1}{1+x^2} dx + \operatorname{arc} \cot g x \, dx - \frac{x+1}{1+x^2} dx = \\ &= [\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x] dx \\ d^2y &= \left[\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dx}{1+x^2} \right] dx = 0 \end{aligned}$$

$d(dx)$ не беремъ, ибо dx можетъ быть во все время вычисленія принять постояннымъ (хотя и произвольнымъ по величинѣ).

Переменное x независимое; слѣдовательно все, его касающееся, въ томъ числѣ и его дифференціалъ совершенно произвольны. Другими словами dx какъ бы новое независимое переменное; а мы его оставляемъ однимъ и тѣмъ же, не позволяя ему мѣняться въ теченіи всего вычисленія.

Разъ $d^2y = 0$, то $dy = \text{const}$; y выражается первой степенью x .

Иначе: $y = (x+1) [\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x]$.

но $\operatorname{arc} \cot g x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + n\pi$ гдѣ n любое цѣлое число.

$$y = \frac{2n+1}{2} \pi (x+1);$$

$$dy = \frac{2n+1}{2} \pi dx; \quad d^2y = 0$$

Примѣчаніе: пусть $\operatorname{arctg} x = u$; $\operatorname{arccotg} x = v$.

Откуда $\operatorname{tg} u = x = \cot g v = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \right] = \cot g \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$.

Слѣдовательно $v = \frac{\pi}{2} - u + n\pi$.

$$85. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Log} e}{\sqrt{a+bx+x^2}} \quad (\text{См. зад. № 47})$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \operatorname{Log} e \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(a+bx+x^2)^3}} \cdot (b+2x) = -\frac{\left(\frac{b}{2}+x\right) \operatorname{Log} e}{\sqrt{(a+bx+x^2)^3}}$$

$$86. \quad dy = Ap (\log x)^{p-1} \frac{dx}{x} \quad (\text{см. зад. № 32.})$$

$$\begin{aligned} d^2y &= Ap (p-1) (\log x)^{p-2} d(\log x) \frac{1}{x} dx + Ap (\log x)^{p-1} d\left(\frac{1}{x}\right) dx = \\ &= Ap (p-1) (\log x)^{p-2} \frac{dx^2}{x^2} + Ap (\log x)^{p-1} (-1) \cdot \frac{dx^2}{x^2} = \\ &= Ap (p-1 - \log x) \frac{(\log x)^{p-2}}{x^2} dx^2 \end{aligned}$$

$Ap \, dx$ выносится изъ подъ знака d , какъ постоянный множитель.

$$\begin{aligned} d^3y &= -Ap \frac{(\log x)^{p-2} dx^3}{x^2} \frac{1}{x} + Ap (p-1-\log x) (p-2) \frac{(\log x)^{p-3} dx^3}{x^2} \frac{1}{x} - 2Ap (p-1-\log x) \frac{(\log x)^{p-2}}{x^3} dx^3 = \\ &= Ap \frac{(\log x)^{p-3}}{x^3} [(p-2)(p-1-\log x) - 2(p-1-\log x) \log x - \log x] dx^3 = \\ &= Ap \frac{(\log x)^{p-3}}{x^3} [(p-1)(p-2) - 3(p-1) \log x + 2 \log^2 x] dx^3 \end{aligned}$$

Считая $u = \log x$; $y = f(u) = Au^p$; $Ap (p-1) (\log x)^{p-2} = Ap (p-1) u^{p-2} = \frac{d^2f}{du^2}$;

$$\frac{dx^2}{x^2} = du^2; \quad Ap(\log x)^{p-1} = Ap u^{p-1} = \frac{df}{du}; \quad (-1) \frac{dx^2}{x^2} = d^2u = d(d \log x).$$

Итакъ дѣйствительно $d^2y = d^2f(u) = f''(u) du^2 + f'(u) d^2u.$

$$Ap(p-1)(p-2)(\log x)^{p-3} = \frac{d^3f}{du^3}; \quad \frac{dx^3}{x^3} = du^3; \quad 3p(p-1)(\log x)^{p-2} = 3 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2};$$

$$-\frac{dx^2}{x^2} = d^2u; \quad \frac{dx}{x} = du; \quad Ap(\log x)^{p-1} = \frac{df}{du}; \quad 2 \frac{dx^3}{x^3} = d^3u = d(d^2 \log x).$$

Итакъ дѣйствительно $d^3y = d^3f(u) = f'''(u) du^3 + 3f''(u) du d^2u + f'(u) d^3u$

87. $dy = (\sin^3 x + 3x \sin^2 x \cos x - \operatorname{tg} x) dx$

$$d^2y = (6 \sin^2 x \cos x + 6x \sin x \cos^2 x - 3x \sin^3 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x) dx^2$$

$$d^3y = (18 \sin x \cos^2 x - 9 \sin^3 x + 6x \cos^3 x - 21x \sin^2 x \cos x - 2 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg}^3 x) dx^3$$

88. $\frac{dy}{dx} = 2x - \sin 2x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 2 \cos 2x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 4 \sin 2x;$
 $\frac{d^4y}{dx^4} = 8 \cos 2x$

89. $v = \frac{cq^2}{(1+cqt)^2} = c(q-x)^2 \quad p = -\frac{2c^2q^3}{(1+cqt)^3} = -2v\sqrt{cv}$

90. $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k} \frac{e^{gkt} - e^{-gkt}}{e^{gkt} + e^{-gkt}}$
 $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4g}{(e^{gkt} + e^{-gkt})^2}$

Потенцируя данное уравненіе и исключая знаменатель послѣдняго уравненія, имѣемъ

$$\frac{d^2s}{dt^2} = ge^{-2gk^2s}$$

91. $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k} \frac{ck \cos gkt - \sin gkt}{\cos gkt + ck \sin gkt}$
 $\frac{d^2s}{dt^2} = - \left[1 + \left(\frac{ck \cos gkt - \sin gkt}{\cos gkt + ck \sin gkt} \right)^2 \right] g$
 $\left. \frac{d^2s}{dt^2} \right|_{t=0} = - [1 + c^2 k^2] g$

92. $v = \frac{a - (a - bc)e^{-bt}}{b}; \quad v_{t=0} = c; \quad (A) \quad v_{t=\infty} = \frac{a}{b}$

$p = (a - bc)e^{-bt}; \quad p_{t=0} = a - bc; \quad (B) \quad p_{t=\infty} = 0 \text{ при } b > 0.$

Исключая c изъ уравненій (A) и (B) докажемъ требуемое тождество.

93. $v = \frac{cP}{w} e^{-\frac{2ct}{w}}$

$$v_{0,1,\dots,\infty} = \frac{cP}{w}, \frac{cP}{we^{\frac{2c}{w}}}, \frac{cP}{we^{\frac{4c}{w}}}, \dots, 0.$$

$$p = -\frac{2c^2 P}{w^2} e^{-\frac{2ct}{w}}$$

$$v = \frac{c}{w}(P-2y); \quad p = -\frac{2c^2}{w^2}(P-2y)$$

$$p + \frac{2c}{w}v = 0.$$

$$94. \frac{dy}{dx} = f'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(\sin x) \cdot (\cos x)^2 - f'(\sin x) \cdot \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} &= f'''(\sin x)(\cos x)^3 + f''(\sin x) \cdot 2 \cos x (-\sin x) - f'(\sin x) \cdot \cos x \sin x - f'(\sin x) \cos x \\ &= f'''(\sin x) \cdot (\cos x)^3 - 3f''(\sin x) \cdot \sin x \cos x - f'(\sin x) \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4y}{dx^4} &= f^{IV}(\sin x) \cdot \cos^4 x + f'''(\sin x) \cdot 3 \cos^2 x (-\sin x) - 3f''(\sin x) \cos^2 x \sin x - \\ &\quad - 3f''(\sin x) \cos^2 x + 3f''(\sin x) \sin^2 x - f''(\sin x) \cos^2 x + f'(\sin x) \sin x \\ &= f^{IV}(\sin x) \cdot \cos^4 x - 6f'''(\sin x) \cos^2 x \sin x - 4f''(\sin x) \cos^2 x + 3f''(\sin x) \cdot \sin^2 x + \\ &\quad + f'(\sin x) \sin x \end{aligned}$$

(Сравнить Ерм. Д. В., ч. I, § 33, изъ котораго можно бы получить наши формулы, полагая $u = \sin x$; $u' = \dots$, и т. д.)

$$95. dy = \cos \psi(x) \psi'(x) dx$$

$$d^2y = -\sin \psi(x) [\psi'(x) dx]^2 + \cos \psi(x) \psi''(x) dx^2 = \{-\sin \psi(x) [\psi'(x)]^2 + \cos \psi(x) \cdot \psi''(x)\} dx^2$$

$$\begin{aligned} d^3y &= \left[-\cos \psi(x) \psi'(x) dx [\psi'(x)]^2 - \sin \psi(x) \cdot 2\psi'(x) \cdot \psi''(x) dx - \sin \psi(x) \psi'(x) dx \psi''(x) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \psi(x) \psi'''(x) dx \right] dx^2 \\ &= \{-\cos \psi(x) [\psi'(x)]^3 - 3\sin \psi(x) \cdot \psi'(x) \psi''(x) + \cos \psi(x) \psi'''(x)\} dx^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^4y &= \left[\sin \psi(x) \psi'(x) dx \cdot [\psi'(x)]^3 - 3\cos \psi(x) [\psi'(x)]^2 \psi''(x) dx - 3\cos \psi(x) [\psi'(x)]^2 dx \psi''(x) - \right. \\ &\quad \left. - 3\sin \psi(x) \psi''(x) dx \psi''(x) - 3\sin \psi(x) \psi'(x) \psi'''(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \sin \psi(x) \psi'(x) dx \psi'''(x) + \cos \psi(x) \psi^{IV}(x) dx \right] dx^3 \\ &= \left[\sin \psi(x) [\psi'(x)]^4 - 6\cos \psi(x) [\psi'(x)]^2 \psi''(x) - 4\sin \psi(x) \psi'(x) \psi'''(x) - \right. \\ &\quad \left. - 3\sin \psi(x) [\psi''(x)]^2 + \cos \psi(x) \psi^{IV}(x) \right] dx^4 \end{aligned}$$

Сравнить съ Ерм. Д. В. § 34, изъ котораго получились бы наши формулы, полагая $u = \psi$; $u' = \dots$; $f(u) = \sin u$, $f'(u) = \dots$ и т. д.

$$96. \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

Каждое дифференцирование понижаетъ на 1 степень x . Въ производной n -аго порядка степень x будетъ $(m-n)$. Кромѣ того появляется всякій разъ новый постоянный множитель, равный показателю степени x въ предыдущей производной. Въ производной n -аго порядка такой множитель будетъ $(m-n+1)$. Итакъ

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nx^m}{dx^n} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$$

$$\text{а } d^n(x^m) = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n} dx^n$$

$$97. \quad dy = (-1) \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$d^2y = (-1)(-2) \cdot \frac{dx^2}{x^3}$$

.....
Степень x въ d^n будетъ $(-1 - n) = -(1 + n)$. Кромѣ предыдущихъ постоянныхъ войдетъ множителемъ показатель степени x въ предыдущемъ дифференціалѣ, т. е. $(-n)$. Итакъ

$$d^ny = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \dots (-n) \cdot \frac{dx^n}{x^{1+n}} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{x^{1+n}} dx^n$$

$$98. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{x}}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2^n (2n-1) x^{n-1} \sqrt{x}}$$

$(2n-1)$ дописывается и въ числитель и въ знаменатель на случай, чтобы формула годилась и для $n=1$.

$$99. \quad \frac{dy}{dx} = p(a-bx)^{p-1}(-b)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(p-1)(a-bx)^{p-2}(-b)^2 \quad \text{и т. д.}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = p(p-1) \dots (p-n+1)(a-bx)^{p-n}(-b)^n$$

или $\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n p(p-1) \dots (p-n+1) b^n (a-bx)^{p-n}.$

$$100. \quad d^ny = e^x dx^n$$

$$d^nz = (-1)^n e^{-x} dx^n$$

$$du = a^{bx} \cdot (\log a) b dx$$

$$d^2u = a^{bx} (\log a)^2 (b dx)^2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$d^nu = a^{bx} \cdot (\log a)^n b^n dx^n.$$

$$101. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1) \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (-1) \cdot (-2) \frac{1}{x^3}$$

$$\dots\dots\dots$$

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n}{n x^n}$$

$$d^n \log x = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}{n x^n} dx^n$$

n введено для того, чтобы формула выражала и первый дифференциаль.

$$102. d^n \log bx = (-1)^{n-1} \operatorname{Log} e \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n}{n x^n} dx^n$$

$$103. d^n \log(1+x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n}{n(1+x)^n} dx^n$$

104. Дадимъ нашему выраженію видъ:

$$y = \frac{2-(1-x)}{1-x} = \frac{2}{1-x} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-1) \cdot 2 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-2) \cdot 2 \cdot (-1)}{(1-x)^3} = \frac{2 \cdot 2}{(1-x)^3}$$

.....

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(1-x)^{n+1}}$$

$$105. \frac{dy}{dx} = -\sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

что мы можемъ выразить такимъ образомъ:
дифференцирование \cos^a по дуги равносильно увеличенію этой дуги на $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{dx} = \frac{d \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} \cdot \frac{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{dx}$$

$$\text{Но} \quad \frac{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{dx} = 1,$$

$$\text{а} \quad \frac{d \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \cos \left[\left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

на основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія.

$$\text{Слѣдовательно} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \cos \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right)$$

.....

.....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$106. dy = \cos x dx = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

дифференцирование \sin^a по дуге равносильно увеличению этой дуги на $\frac{\pi}{2}$

$$d^2y = \frac{d \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} d \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot dx$$

$$= \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right] dx \cdot dx = \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right) dx^2$$

.....

$$d^n y = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) dx^n$$

$$107. \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Замѣчая, что $\sin x = -\frac{d \cos x}{dx}$, получимъ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos x} \frac{d \cos x}{dx}$

но $-\frac{1}{\cos x}$ есть производная отъ $(-\log \cos x)$ по $\cos x$.

$$\text{Итакъ } dy = \frac{d[-\log(\cos x)]}{d \cos x} d \cos x.$$

$$\text{Откуда } y = -\log \cos x + \text{Const} = \log \left(\frac{C}{\cos x} \right) \quad \left[= \log(C \sec x) \right]$$

$$108. \text{ Непосредственно, опредѣливъ } y = \log \sin x + \text{Const}, \quad \frac{dy}{d(\sin x)} = \frac{1}{\sin x},$$

$$\text{получимъ } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(\sin x)} \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \frac{dy}{d(\sin x)}$$

Или, не находя y ;

$$\frac{dy}{d(\sin x)} = \frac{dy}{\cos x dx}; \quad \text{откуда то же выражение.}$$

Или, считая y функцией $(\sin x)^{ca}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d \sin x} \frac{d \sin x}{dx} = \frac{dy}{d(\sin x)} \cos x = \frac{dy}{d(\sin x)} \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

109. На основаніи правила производной функции отъ функции $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(\log x)} \frac{1}{x}$; откуда въ виду тождества двухъ выраженій для $\frac{dy}{dx}$ слѣдуетъ

$$\frac{1}{x \log x} \equiv \frac{dy}{d(\log x)} \frac{1}{x} \quad \text{Откуда очевидно} \quad \frac{dy}{d(\log x)} = \frac{1}{\log x}$$

$$\text{Иначе} \quad \frac{dy}{d(\log x)} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d(\log x)}$$

Чтобы найти производную отъ x по $\log x$, постараемся x представить въ видѣ функции отъ $\log x$; послѣднее съумѣемъ, имѣя въ виду опредѣленіе логарифма, которое гласитъ, что $x = e^{\log x}$.

$$\text{Слѣдовательно} \quad \frac{dx}{d(\log x)} = e^{\log x} = x$$

Итакъ
$$\frac{dy}{d(\log x)} = \frac{1}{x \log x} x = \frac{1}{\log x}$$

Примѣчаніе: производную отъ x по $\log x$ могли бы написать равной x также въ силу того, что она есть величина обратная производной отъ $\log x$ по x , т. е. обратная $\frac{1}{x}$. Слѣдовательно она равна $1: \frac{1}{x} = x$.

Еще иначе: Дано
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\log x} \frac{d(\log x)}{dx} \quad (A)$$

Извѣстно же, что
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(\log x)} \frac{d(\log x)}{dx}; \quad \text{откуда очевидно} \quad \frac{dy}{d(\log x)} = \frac{1}{\log x}$$

Примѣчаніе: продолжая строчку (A)
$$\frac{dy}{dx} = \dots = \frac{d \log(\log x)}{d \log x} \frac{d \log x}{dx} = \frac{d \log(\log x)}{dx}$$

Слѣдовательно $y = \log(\log x) + C$. Откуда
$$\frac{dy}{d(\log x)} = \frac{1}{\log x}$$

110. Считая x какъ бы постояннымъ, рассматриваемъ u какъ функцію одного переменнаго y . Тогда
$$\frac{\partial u}{\partial y} = m x^n y^{m-1}$$

111.
$$\frac{\partial u}{\partial z} = x y t$$

112.
$$\frac{\partial u}{\partial z} = (ax - by) \cdot \frac{(-1)}{(cy - az)^2} \cdot (-a) = \frac{a(ax - by)}{(cy - az)^2}$$

$(ax - by)$ — постоянный относительно z множитель;

$\frac{-1}{(cy - az)^2}$ — производная отъ $\frac{1}{cy - az}$ по $(cy - az)$;

$(-a)$ — производная отъ $(cy - az)$ по z .

113.
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(cy - az)(-b) - (ax - by) \cdot c}{(cy - az)^2} = \frac{a(bz - cx)}{(cy - az)^2}$$

$(-b)$ — производная по y отъ числителя

c — производная по y отъ знаменателя.

114.
$$\frac{\partial x}{\partial y} = (bz)^{cy} \cdot \log(bz) \cdot c$$

На c , т. е. на производную отъ показателя по y , умножается производная отъ x , какъ отъ показательной функціи, по показателю (cy) .

$$\frac{\partial x}{\partial z} = cy \cdot (bz)^{cy-1} \cdot b.$$

На b , т. е. на производную отъ основанія по z , умножается производная отъ x , какъ отъ степени, по основанію (bz) .

$$dx = \partial_y x + \partial_z x = c(bz)^{cy} \log(bz) dy + bcy (bz)^{cy-1} dz$$

Иначе: $\log x = cy \log(bz)$;

$$\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial y} = c \log(bz); \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial x}{\partial y} = cx \log(bz) = c(bz)^{cy} \log(bz)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial z} = cy \cdot \frac{1}{bz} \cdot b; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = bcy \frac{x}{bz} = bcy (bz)^{cy-1}$$

$\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial y}$ — здѣсь на производную отъ x по y умножается $\frac{1}{x}$, т. е. производная отъ $\log x$ по x . Очевидно все это выраженіе есть производная отъ $\log x$ по измѣняемости y .

115. $u = (y^z)^x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{zx} \log(y^z) = y^{zx} z \log y$$

Иначе: $\log u = zx \log y$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} = z \log y.$$

лѣвая часть равенства — производная отъ $\log u$ по измѣняемости x .

Откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = zu \log y = zy^{zx} \log y$

116. $u = (x)^{y^z}$ *)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{(y^z-1)} = y^z x^{y^z} \quad (\text{какъ отъ степени})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial (y^z)} \cdot \frac{\partial y^z}{\partial y} = (x^{y^z} \log x) (zy^{z-1}) = zy^{z-1} x^{y^z} \log x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial (y^z)} \cdot \frac{\partial y^z}{\partial z} = (x^{y^z} \log x) (y^z \log y) = y^z x^{y^z} \log(x) \cdot \log(y)$$

117. $d\phi = yz \cdot dx + xy dz + xz dy$

118. $du = 3x^2 dx + 3y^2 dy + 3z^2 dz$

119. $du = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$

120. Возьмемъ полную производную отъ y по x

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot x^{(\sin x - 1)} + x^{\sin x} \log x \cdot \cos x$$

$\sin x \cdot x^{(\sin x - 1)}$ — производная отъ $x^{\sin x}$, какъ отъ степени (вида x^n), по основанію, т. е. по x , возводимому въ степень.

$x^{\sin x} \log x$ — производная отъ $x^{\sin x}$, какъ отъ показательной функціи (вида $a^{\sin x}$), по показателю, т. е. по $\sin x$.

$\cos x$ — производная отъ $\sin x$ по x . (Е. Д. В. Ч. I § 20).

$$dy = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x \right) dx$$

Иначе: $\log y = \sin x \cdot \log x$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

*) Нѣтъ основаній предполагать $(x^y)^z$, ибо тогда можно было бы записать проще x^{yz}

Откуда $\frac{dy}{dx} = y \left(\cos x \cdot \log x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \log x + \frac{\sin x}{x} \right)$

121. Производная отъ x^x , какъ отъ степени (x^n), по основанію, т. е. по x , возводимому въ степень, будетъ: $x \cdot x^{x-1}$

Производная отъ x^x , какъ отъ показательной функціи (вида a^x), по показателю, т. е. по x , стоящему въ показателѣ, будетъ: $x^x \log x$

Итакъ $dy = (x \cdot x^{x-1} + x^x \log x) dx = x^x (1 + \log x) dx = x^x \log(ex) dx$

Иначе $\log y = x \log x$

$$\frac{1}{y} dy = \log x dx + x \cdot \frac{1}{x} dx$$

Откуда $dy = y (\log x + 1) dx = x^x \log(ex) dx$.

122. $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\arctg xy^2 \right)'_{(xy^2)} \cdot (xy^2)'_x = \frac{1}{1+x^2y^4} \cdot y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\arctg xy^2 \right)'_{(xy^2)} \cdot (xy^2)'_y = \frac{1}{1+x^2y^4} \cdot 2xy$$

$$\partial_x u = \frac{y^2}{1+x^2y^4} dx; \quad \partial_y u = \frac{2xy}{1+x^2y^4} dy$$

$$du = \partial_x u + \partial_y u = \frac{y}{1+x^2y^4} (ydx + 2xdy)$$

Здѣсь пришлось два раза находить одну и ту же производную отъ $\arctg xy^2$ по дугѣ xy^2 . Этого можно было бы избѣжать, воспользовавшись однимъ свойствомъ полнаго дифференціала, упрощающимъ во многихъ случаяхъ нахождение какъ его, такъ и всѣхъ сразу частныхъ производныхъ.

Пусть $u=f(x, y, z, \dots, v, w, \dots)$

Будутъ ли x, y, \dots, v, w, \dots переменными независимыми, или нѣкоторыя или всѣ изъ нихъ зависимы отъ остальныхъ изъ нихъ и еще новыхъ независимыхъ,

всегда $du = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \dots + \frac{df}{dv} dv + \frac{df}{dw} dw + \dots$

Пусть напр. x, y, \dots независимы;

v, w, \dots зависимы отъ тѣхъ же x, y, \dots

и еще какихъ либо независимыхъ ξ, η, ζ, \dots

т. е. $v=\varphi(x, y, \dots, \xi, \eta, \dots)$; $w=\psi(x, y, \dots, \xi, \eta, \dots)$; \dots

Тогда, по опредѣленію, полный дифференціалъ

$$du = \partial_x u + \partial_y u + \dots + \partial_\xi u + \partial_\eta u + \dots = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \dots$$

Но $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \dots$ (Е. Д. В. ч. I, § 20).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \dots$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ это производная отъ $u=f(\dots)$ по x , явно входящему;

$\frac{\partial u}{\partial x}$ — производная отъ $u=f(x, \dots, v, w, \dots)$, какъ отъ сложной функціи x , т. е. по x , входящему въ $f(\dots)$ и явно и черезъ зависимыя отъ него v, w, \dots

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \dots$$

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \dots \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \dots \right) dy + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) d\xi + \dots$$

Отбираемъ отдѣльно частныя производныя отъ f .

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta + \dots \right) + \frac{\partial f}{\partial w} \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \dots \right) + \dots$$

$$\text{Слѣдовательно} \quad du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \dots$$

Какъ частные случаи вытекаютъ формулы дифференціаловъ простѣйшихъ функцій отъ функцій *многихъ* переменныхъ. (Распространеніе Е. Д. В. Ч. I §§ 17, 18).

$$d(v+w) = dv+dw \quad \dots \quad \text{I}$$

$$d(vw) = wdv+vdw \quad \dots \quad \text{II}$$

$$d\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{wdv+vdw}{w^2} \quad \dots \quad \text{III}$$

$$d[f(v)] = \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad \dots \quad \text{IV}$$

Функціями сколькихъ бы переменныхъ ни были v, w, \dots , стоитъ только въ общую формулу для полученія:

$$\text{формулы I} \quad \text{вставить} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = 1;$$

$$\text{формулы II} \quad \text{„} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = w, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = v;$$

$$\text{формулы III} \quad \text{„} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{w}, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = -\frac{v}{w^2};$$

$$\text{формулы IV} \quad \text{„} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v};$$

а вмѣсто остальныхъ частныхъ производныхъ всякій разъ нули *).

На основаніи формулъ IV и II можемъ сразу искать полный дифференціалъ отъ заданной функціи u .

$$du = \frac{d(\arctg xy^2)}{d(xy^2)} d(xy^2) = \frac{1}{1+x^2y^4} [y^2 dx + x d(y^2)] = \frac{y^2 dx + 2xy dy}{1+x^2y^4}$$

123. Имѣя въ виду формулы: IV (два раза) и III предыдущей задачи, найдемъ раньше du

$$\begin{aligned} du &= \frac{d(\log \operatorname{tg} \frac{x}{y})}{d(\operatorname{tg} \frac{x}{y})} d(\operatorname{tg} \frac{x}{y}) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{y})}{d(\frac{x}{y})} d(\frac{x}{y}) = \cotg \frac{x}{y} \frac{1}{(\cos \frac{x}{y})^2} \frac{y dx - x dy}{y^2} = \\ &= 2 \frac{y dx - x dy}{y^2 \sin^2 \frac{2x}{y}} \end{aligned}$$

Коэффициентъ при dx есть частная производная отъ u по x , т. е. $\frac{2}{y(\sin \frac{2x}{y})} = \frac{\partial u}{\partial x}$

*) Предлагается доказать эти частныя формулы независимо отъ общей (по тому же методу) и свѣрить потомъ каждое доказательство съ приведеннымъ выше общимъ доказательствомъ посредствомъ указанныхъ для cadaго случая подстановокъ.

Подобнымъ образомъ

$$\frac{-2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Иначе пришлось бы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\log \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_x \left(\frac{x}{y} \right)'_x = \cotg \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_y = \cotg \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y = \frac{2}{\sin \frac{2x}{y}} \cdot (-1) \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{2}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$$

$$\partial_x u = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}} dx; \quad \partial_y u = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} dy$$

$$du = \partial_x u + \partial_y u = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right)$$

124. $du = (81x^2 - 108xy + 36y^2) dx + (-54x^2 + 72xy - 24y^2) dy$

Въ первыхъ скобкахъ частная производная отъ u по x , во вторыхъ—по y .

Проще въ данномъ частномъ случаѣ представить: $u = (3x - 2y)^3$

$$du = 3(3x - 2y)^2 (3dx - 2dy)$$

$3(3x - 2y)^2$ — производная отъ степени $(3x - 2y)^3$ по основанію, т. е. по $(3x - 2y)$

$3dx - 2dy$ — дифференціалъ основанія (см. IV).

125. Беремъ сразу полный дифференціалъ

$$du = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy + ay \frac{-1}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} (2xdx + 2ydy) = ax \cdot \frac{xdy - ydx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Здѣсь: $\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ есть производная отъ u по y , стоящему въ числитель, причемъ подкоренное выраженіе $(x^2 + y^2)$ рассматривается какъ бы постояннымъ. Эта производная умножается на dy .

$ay \cdot \frac{-1}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ — производная отъ u по подкоренному выраженію $(x^2 + y^2)$, причемъ y , стоящій въ числитель (по которому производная уже взята), рассматривается какъ бы постояннымъ. Эта производная умножается на дифференціалъ подкоренного выраженія, т. е. на $d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$.

$\frac{ax^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$, коэффициентъ при dy , есть $\frac{\partial u}{\partial y}$;

$\frac{-axy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$, коэффициентъ при dx , есть $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Иначе, упростивъ данное выраженіе въ видѣ: $u = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}}$,

получимъ
$$du = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]^3}} \cdot 2 \frac{x y dx - x dy}{y^2} = ax \frac{-y dx + x dy}{\sqrt{[x^2 + y^2]^3}}$$

Тотъ же самый дифференціалъ, а слѣд. и тѣ же частныя производныя!

а. $\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]^3}}$ — производная отъ u , какъ отъ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -ой степени по основанію, т. е. по $\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]$

$2 \frac{x}{y}$ — производная отъ $\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]$ по $\frac{x}{y}$.

$\frac{ydx - xdy}{y^2}$ — дифференціалъ дроби $\left(\frac{x}{y}\right)$

126. Полный дифференціалъ дроби

(№124; III).

$$du = \frac{(cy - az)(adx - bdy) - (ax - by)(cdy - adz)}{(cy - az)^2} =$$

$$= a \cdot \frac{(cy - az)dx + (bz - cx)dy + (ax - by)dz}{(cy - az)^2}$$

Если бы не воспользовались (III), то

$$du = \frac{a}{cy - az} dx + \left[\frac{-b}{cy - az} - \frac{(ax - by)c}{(cy - az)^2} \right] dy + \frac{a(ax - by)}{(cy - az)^2} dz$$

Первый членъ; $\frac{a}{cy - az}$ есть производная отъ u по x ;

$\frac{-b}{cy - az}$ — производная отъ u по y , входящему въ числитель;

$-\frac{(ax - by)c}{(cy - az)^2}$ — производная отъ u по y , входящему въ знаменатель;

$\frac{a(ax - by)}{(cy - az)^2}$ — производная отъ u по z .

По упрощеніи получили бы тотъ же результатъ.

127. Можно было бы

$$du = -\frac{2xye^z}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cdot dx + \left[\frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2e^z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right] dy + \frac{ye^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz =$$

$$= \frac{xe^z(xdy - ydx)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{ye^z dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Коэффициентъ при dx — производная отъ u по x ;

первая часть коэффициента при dy — производная отъ u по y , входящему въ числитель;

вторая часть „ „ „ — производная отъ u по y , входящему въ знаменатель подъ корнемъ;

коэффициентъ при dz — производная отъ u по z .

Но проще, представивъ въ видѣ $u = e^z \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}}$,

$$du = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}} e^z dz + e^z \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right]^3}} \cdot 2 \frac{x}{y} \frac{ydx - xdy}{y^2} =$$

$$= \frac{xe^z \cdot xe^z}{\sqrt{[x^2+y^2]^3}} (ydx + xdy) + \frac{ye^z \cdot ye^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dz.$$

$\frac{1}{\sqrt{y \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1 \right]}}$ — производная от u по e^z умножается на $e^z dz$, т. е. на $d(e^z)$.
 $e^z \left(e^z \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{y \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1 \right]}} \right)$ — производная от u по $\left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1 \right]$ умножается на $d \left[\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1 \right]$. Последний представляется в виде произведения $2 \frac{x}{y}$, производной от подкоренного выражения по $\left(\frac{x}{y} \right)$, — на $d \left(\frac{x}{y} \right)$, т. е. на $\frac{ydx - xdy}{y^2}$.

128. 128. $du = x^y \log z (ydx + xdy) + yx^y z^{y-1} dz.$

Первый член получается, если, принимая z за постоянное, возьмем производную от u как от показательной функции по показателю xy и умножим ее на дифференциал показателя. Второй член есть производная от u как от степени по основанию, умноженная на дифференциал основания z .

$$\begin{aligned}
 129. 129. du &= x^y \log z d(y^x) + y^x z^{y-1} dz = \\
 &= x^y (\log z) [y^x \log y dx + x y^{x-1} dy] + y^x z^{y-1} dz = \\
 &= y^x z^{y-1} \left[\log z \log y dx + \frac{x}{y} \log z dy + \frac{dz}{z} \right]
 \end{aligned}$$

Здесь:

$x^y \log z \log y$ — производная от u по изменчивости y^x , умножается на dy^x ; $y^x z^{y-1}$ — производная от u по изменчивости z , умножается на dz .
 dy^x составляется из производной от y^x по изменчивости x , [т. е. из $y^x \log y$], умноженной на dx , и из производной от y^x по изменчивости y , [т. е. из $x y^{x-1}$], умноженной на dy .

Другой способ решения:

$$u = x^y z^y$$

$$\log \log u = y \log z$$

$$\log \log \log u = x \log y + \log \log z$$

$$\frac{1}{\log u} \cdot \frac{1}{\log \log u} \cdot \frac{1}{\log \log \log u} \cdot \frac{du}{u} = \log y dx + \frac{dy}{y} \cdot \frac{1}{\log \log z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$du = du (\log u) \left[\log y dx + \frac{dy}{y} \cdot \frac{1}{\log \log z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{z} \right] = y^x z^{y-1} \left[\log z \cdot \log y dx + \frac{x}{y} \log z dy + \frac{dz}{z} \right]$$

Следовательно $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = y^x z^y \log z \cdot \log y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot y^{x-1} \cdot z^y \log z.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = y^x z^{y-1} (y^x - 1)$$

130. Разсматривая y либо z , какъ сложную функцію, беремъ сумму производныхъ, взятыхъ по каждому изъ трехъ входящихъ x , разсматривая остальные два какъ бы постоянными. (См. предыдущую задачу)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^x x^x \left[(\log x)^2 + \log x + \frac{1}{x} \right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^{\sin x} x^{x^{\sin x}} \left[\cos x (\log x)^2 + \frac{\sin x}{x} \log x + \frac{1}{x} \right]$$

Или дважды логарифмируемъ выраженіе y или z .

$$\begin{aligned} 131. du &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}} \cdot \frac{2(x^2 + y^2)(x dx - y dy) - 2(x^2 - y^2)(x dx + y dy)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{1}{y \sqrt{2} \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{2y^2 x dx - 2x^2 y dy}{x^2 + y^2} = \frac{x \sqrt{2} (y dx - x dy)}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Первый множитель — производная отъ \arcsin по $\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$;

второй $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$ — производная отъ предыдущаго корня по подкоренному выраженію;

последній множитель — дифференціалъ дроби, стоящей подъ корнемъ.

132. Умножимъ и числитель и знаменатель логарифмируемаго выраженія на величину, союзнную знаменателю, т. е. на $x + \sqrt{x^2 - y^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} u &= \log \frac{(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2}{x^2 - (x^2 - y^2)} = \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y} \right)^2 = 2 \log \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}} = \\ &= 2 \log \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) - 2 \log \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du &= 2 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(-2 \frac{y}{x} \right) d \frac{y}{x} - 2 \frac{1}{\frac{y}{x}} d \frac{y}{x} = \\ &= -2 \left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - y^2} \sqrt{x^2 - y^2}} \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \right) \frac{x dy - y dx}{x^2} = \\ &= 2 \frac{y dx - x dy}{y \sqrt{x^2 - y^2}} \quad \left[= 2 \frac{d \frac{x}{y}}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 133. dz &= \frac{t}{x+y} \left(t + x \operatorname{arctg} \frac{t}{y} \right)^{\frac{t-x-y}{x+y}} \left[dt + \operatorname{arctg} \frac{t}{y} dx + \frac{x(y dt - t dy)}{t^2 + y^2} \right] + \\ &+ \left(t + x \operatorname{arctg} \frac{t}{y} \right)^{\frac{t}{x+y}} \left[\log \left(t + x \operatorname{arctg} \frac{t}{y} \right) \right] \frac{(x+y) dt - t(dx + dy)}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

$$134. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = n(n-1) x^{n-2} y^{m, p}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = m p x^n y^{m-1} z^{p-1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}y^m z^p \quad \left[\text{при } n=1, 2, 3 \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \right]$$

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2} = n m (m-1)(m-2)p(p-1)x^{n-1}y^{m-3}z^{p-2}$$

Беря подрядъ полный дифференціалъ два или три раза непосредственно, или же пользуясь символическими выраженіями: $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u$; $d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 u$; — имѣемъ:

$$d^2u = n(n-1)x^{n-2}y^m z^p dx^2 + m(m-1)x^n y^{m-2} z^p dy^2 + p(p-1)x^n y^m z^{p-2} dz^2 +$$

$$+ 2nm x^{n-1} y^{m-1} z^p dx dy + 2np x^{n-1} y^m z^{p-1} dx dz + 2mp x^n y^{m-1} z^{p-1} dy dz.$$

$$d^3u = n(n-1)(n-2)x^{n-3}y^m z^p dx^3 + m(m-1)(m-2)x^n y^{m-3} z^p dy^3 + p(p-1)x^n y^m z^{p-3} dz^3 +$$

$$+ 3n(n-1)m x^{n-2} y^{m-1} z^p dx^2 dy + 3n(n-1)x^{n-2} y^m z^{p-1} dx^2 dz +$$

$$+ 3nm(m-1)x^{n-1} y^{m-2} z^p dx dy^2 + 3m(m-1)p x^n y^{m-2} z^{p-1} dy^2 dz +$$

$$+ 3np(p-1)x^{n-1} y^m z^{p-2} dx dz^2 + 3mp(p-1)x^n y^{m-1} z^{p-2} dy dz^2 + 6nmp x^{n-1} y^{m-1} z^{p-1} dx dy dz$$

$$135. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{t^2 x}{t^2 + x^2} + 2t \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \sin(2x + 4y) - \log y - 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4 \cos(2x + 4y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} = 0.$$

$$136. \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^{zx} x \log y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y^{zx} (x \log y)^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial (y^{zx} x \log y)}{\partial y} = x y^{zx-1} x \log y + y^{zx} x \frac{1}{y} = x y^{zx-1} (x \log y + 1)$$

Или $\frac{\partial u}{\partial y} = x y^{zx-1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial (x y^{zx-1})}{\partial z} = x y^{zx-1} + x y^{zx-1} (\log y) \cdot x \quad \text{То же выраженіе!}$$

$$137. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} (-1) \frac{x}{y^2} = \frac{-x}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-x) (-1) \frac{1}{(y^2 + x^2)^2} 2y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} + 2xy (-2) \frac{2y}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

138. Такъ какъ порядокъ дифференцированья не измѣняетъ искомаго выраженія, а въ выраженіе для u входитъ y два раза, z же одинъ разъ, то беремъ сначала производную по z

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a \frac{ax - by}{(cy - az)^2},$$

а потомъ по y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{-ab}{(cy - az)^2} - 2ac \frac{ax - by}{(cy - az)^3} = a \frac{bcy + abz - 2acx}{(cy - az)^3}.$$

139. $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \sqrt{}}{\partial x}$ и т. д. Надо знать частныя производныя отъ $\sqrt{}$

$$d\sqrt{ } = d\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \frac{1}{2} \frac{2(x-a)dx + 2(y-b)dy + 2(z-c)dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \\ = \frac{x-a}{\sqrt{}} dx + \frac{y-b}{\sqrt{}} dy + \frac{z-c}{\sqrt{}} dz$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{}}{\partial x} &= \frac{x-a}{\sqrt{}}; & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x-a)}{\sqrt{}} = -\frac{(x-a)}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial \sqrt{}}{\partial y} &= \frac{y-b}{\sqrt{}}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(y-b)}{\sqrt{}} = -\frac{(y-b)}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial \sqrt{}}{\partial z} &= \frac{z-c}{\sqrt{}}; & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-c)}{\sqrt{}} = -\frac{(z-c)}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - (x-a)(-3) \frac{1}{\sqrt{4}} \frac{\partial \sqrt{}}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3(x-a)(x-a)}{\sqrt{4}\sqrt{}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3(x-a)^2}{\sqrt{5}}$$

Подобнымъ образомъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3(y-b)^2}{\sqrt{5}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3(z-c)^2}{\sqrt{5}}$$

Откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -(x-a)(-3) \frac{1}{\sqrt{4}} \frac{\partial \sqrt{}}{\partial y} = \frac{3(x-a)(y-b)}{\sqrt{5}};$$

Подобнымъ образомъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{3(x-a)(z-c)}{\sqrt{5}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{3(y-b)(z-c)}{\sqrt{5}}$$

Итакъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 3 \frac{(x-a)(y-b) + (x-a)(z-c) + (y-b)(z-c)}{\sqrt{5}}$$

140. x входитъ меньшее число разъ и проще въ выраженіе для u .

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3yx^2e^z - \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 3yx^2e^z - \frac{1}{x^2}$$

141. Очевидно $u = \frac{1}{2} \left[\sin 2\sqrt{x^2+m} - \sin 2\sqrt{y^2+m} \right]$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sin 2\sqrt{x^2+m}}{\partial x}.$$

Второй одночленъ отъ x независимъ, онъ относительно x величина постоянная. $\frac{\partial \sin 2\sqrt{x^2+m}}{\partial x}$ будетъ функціей одного x , такъ какъ y совсѣмъ не вой-

дать въ ея выражение ^{*)}, а потому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \sin 2\sqrt{x^2+m}}{\partial x} = 0$$

Если непосредственно, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\cos[\sqrt{x^2+m} - \sqrt{y^2+m}] \cdot \cos[\sqrt{x^2+m} + \sqrt{y^2+m}] - \sin[\sqrt{x^2+m} - \sqrt{y^2+m}] \cdot \sin[\sqrt{x^2+m} + \sqrt{y^2+m}]}{\partial x} \right) \frac{\partial \sqrt{x^2+m}}{\partial x}$$

Въ изъясненныя скобки въ выражение косинуса суммы

$$\cos[(\sqrt{x^2+m} - \sqrt{y^2+m}) + (\sqrt{x^2+m} + \sqrt{y^2+m})] = \cos 2\sqrt{x^2+m}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos 2\sqrt{x^2+m} \frac{\partial \sqrt{x^2+m}}{\partial x} \text{ независитъ отъ } y, \text{ а потому } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

$$142. \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \log(2x+y)$$

$$143. du = \frac{2}{\sin \frac{2x}{y}} \left(\frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} \right)$$

Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}} \right) = \frac{2}{y} (-1) \frac{1}{(\sin \frac{2x}{y})^2} \cos \frac{2x}{y} \cdot \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} \right) = -2x (-2) \frac{1}{y^3 \sin \frac{2x}{y}} - 2x \frac{(-1)}{y^2 (\sin \frac{2x}{y})^2} \cos \frac{2x}{y} \cdot 2x (-1) \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{2}{y^2} \frac{\left[\sin \frac{2x}{y} - x \left(\cos \frac{2x}{y} \right) \frac{2}{y} \right]}{(\sin \frac{2x}{y})^2}$$

$$d^2 u = -\frac{4 \cos \frac{2x}{y}}{y^2 (\sin \frac{2x}{y})^2} dx^2 + 2 \frac{2x \cos \frac{2x}{y} - y \sin \frac{2x}{y}}{y^3 (\sin \frac{2x}{y})^2} dx dy + \frac{4x(y \sin \frac{2x}{y} - x \cos \frac{2x}{y})}{y^4 (\sin \frac{2x}{y})^2} dy^2$$

$$144. du = \frac{1}{1+x^2 y^6} (y^3 dx + 3xy^2 dy) = \frac{y^3}{1+x^2 y^6} dx + \frac{3xy^2}{1+x^2 y^6} dy$$

Коэффициентъ при dx есть $\frac{\partial u}{\partial x}$; взявъ отъ него производныя по x и по y ,

найдемъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{y^3}{(1+x^2 y^6)^2} 2xy^6;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3y^2(1+x^2 y^6) - y^3 \cdot 6x^2 y^5}{(1+x^2 y^6)^2} = \frac{3y^2 - 3x^2 y^8}{(1+x^2 y^6)^2}$$

*) $\frac{\partial \sin 2\sqrt{x^2+m}}{\partial x} = \cos 2\sqrt{x^2+m} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x^2+m}} 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+m}} \cos 2\sqrt{x^2+m}$

Подобнымъ образомъ, взявъ отъ коэффициента при dy производную по y , найдемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6xy(1+x^2y^6) - 3xy^2 \cdot 6x^2y^5}{(1+x^2y^6)^2} = \frac{6xy - 12x^3y^7}{(1+x^2y^6)^2}$$

А потому

$$d^2u = \frac{-2xy^8dx^2 + 6y^2(1-x^2y^6)dx dy + 6xy(1-2x^2y^6)dy^2}{(1+x^2y^6)^2}$$

145. $du = \cos(3x - y^2 + 2z)(3dx - 2ydy + 2dz)$
 $d^2u = -\sin(3x - y^2 + 2z)(3dx - 2ydy + 2dz)^2 - 2\cos(3x - y^2 + 2z)dy^2$

146. $du = \frac{3x^2dx + e^ydy}{x^3 + e^y}$
 $d^2u = \frac{(6xdx^2 + e^ydy^2)(x^3 + e^y) - (3x^2dx + e^ydy)^2}{(x^3 + e^y)^2}$

147. Здѣсь z сложная функція одного независимаго переменнаго x . Полная производная отъ z по x ($\frac{dz}{dx}$) составитъ изъ производной отъ z по x^{ca} , входящему явно ($\frac{\partial z}{\partial x}$), и изъ производной отъ z по x , входящему черезъ y^*) (Послѣднюю найдемъ, если, считая, что x , явно входящее въ выраженіе для z , не мѣняется, будемъ разсматривать z , какъ функцію отъ одного y ; а y въ свою очередь какъ функцію x^{ca}).

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} \quad (A)$$

$$dz = \left[1 - \frac{1}{y \cos^2 \frac{x}{y}} + \frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{dy}{dx} \right] dx \quad (B)$$

Можно было бы сначала отыскать dz , считая z функціей двухъ аргументовъ, явно входящаго x и y ; причемъ въ такомъ случаѣ безразлично, зависимые ли это аргументы, или нѣтъ.

$$dz = dx - \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad (C)$$

Вспомнивъ, что y функція x^{ca} , а потому подставивъ $\frac{dy}{dx}dx$ вмѣсто dy въ (C), получимъ (B). Раздѣливъ обѣ части (C) на dx получимъ $\frac{dz}{dx}$ (т. е. A).

Чтобы найти $\frac{d^2z}{dx^2}$, надо взять полную производную отъ $\frac{dz}{dx}$ по x . (A)

Но x входитъ тройко въ выраженіе для $\frac{dz}{dx}$: явно, черезъ y и черезъ $\frac{dy}{dx}$, функцію, очевидно, также x^{ca} . Слѣд. $\frac{d^2z}{dx^2}$ составитъ: во первыхъ, изъ производной отъ $\frac{dz}{dx}$ по x , входящему явно, — во вторыхъ, изъ производной по y , умноженной на $\frac{dy}{dx}$, наконецъ, въ третьихъ, изъ производной по $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, умноженной на $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

*) Детальнѣе можно было бы сказать: черезъ степени y^{ka} и черезъ \cos .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dy}{dy} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dy}{dy} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{d^2 y}{dy^2} \\ &= (-2) \frac{1}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{\sin \frac{x}{y}}{y} \right) \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{dy}{dy} + (-2) \frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{\sin \frac{x}{y}}{y} \right) \frac{1}{y} \frac{dy}{dy} \\ &+ \left[\frac{1}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{dy}{dy} \frac{y \cos^2 \frac{x}{y}}{y} \left(\frac{\sin \frac{x}{y}}{y} \right) \left(\frac{x}{y^2} \right) \frac{2x \frac{dy}{dy}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{2x^2 x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{\sin \frac{x}{y}}{y} \right) \left(\frac{x}{y^2} \right) \frac{dy}{dy} \frac{dy}{dy} \right] \\ &+ \frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{d^2 y}{dy^2} \\ &= \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{2 \sin \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \left[\frac{2}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{4x \sin \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{dy}{dy} \frac{dy}{dy} \left[\frac{2x^2 x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{2x^2 \sin \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{dy}{dy} \right)^2 \frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{d^2 y}{dy^2} \right] \right] \quad (D) \end{aligned}$$

Можно было бы дифференцировать (C), считая dx функцией аргументов: явно входящего x , y и dy , не заботясь, какие это аргументы, зависимые, ли переменные, или независимые.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{(-2)}{\cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{\sin \frac{x}{y}}{y} \right) \left(\frac{y dx - x dy}{y^2} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{dx}{y^2} \frac{dy}{dy} + \frac{dy}{y^2} \frac{dx}{dy} + 2 \frac{x}{y^2} \left(\frac{dy}{dy} \right)^2 \frac{x}{y^2} \frac{d^2 y}{dy^2} \right) \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{dx^2}{dx^2} + \left[\frac{4x \sin \frac{x}{y}}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{2}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \right] \frac{dx dy}{dx dy} + \left[\frac{2x^2 \sin \frac{x}{y}}{y^4 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{2x^2 x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \right] \frac{dy^2}{dy^2} + \frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{d^2 y}{dy^2} \end{aligned}$$

Разделив на dx^2 , получим $\frac{d^2 z}{dx^2}$ т. е. (D).

148. Такъ какъ t функция двухъ переменныхъ независимыхъ x и y , то производная отъ t по x , входящему всеми способами, будетъ всею же частной производной $\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)$; производную по x , входящему явно, отбѣтимъ двумя чертами $\frac{\partial}{\partial x}$. Въ выраженіе t переменное x входитъ явно и черезъ z (детальнѣе: черезъ $\cos z$ и черезъ $\log z$).

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \cos z} \frac{\partial \cos z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \log z} \frac{\partial \log z}{\partial x} \right] = \frac{2y}{x^2 \cos z} + \left(\frac{y \sin z}{x^2 \cos^2 z} - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial z}{\partial x}$$

Выраженіе $\frac{\partial t}{\partial x}$ тройко зависитъ отъ x : черезъ явно входящее x , черезъ z (z входитъ явно, черезъ $\sin z$, черезъ степени $\cos z$), и черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$. Итакъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \sin z} \frac{\partial \sin z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \cos z} \frac{\partial \cos z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{6y}{x^4 \cos z} + \frac{2y \sin z}{x^3 \cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{2y \sin z}{x^2 \cos^2 z} + \left(\frac{y}{x^2 \cos z} + \frac{2y \sin^2 z}{x^2 \cos^2 z} + \frac{1}{z^2} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \right] \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{y \sin z}{x^2 \cos^2 z} - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ &= \frac{6y}{x^4 \cos z} + \frac{4y \sin z}{x^3 \cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{y(1 + \sin^2 z)}{x^2 \cos^2 z} + \frac{1}{z^2} \right] \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{y \sin z}{x^2 \cos^2 z} - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Здѣсь въ выраженіе для $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ также входитъ x .

$$\frac{\partial^3 t}{\partial x^3} = -\frac{24y}{x^5 \cos z} + \frac{18y \sin z}{x^4 \cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{6y(1+\sin^2 z)}{x^3 \cos^3 z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{y \sin z (1+\sin^2 z)}{x^2 \cos^4 z} - \frac{2}{z^3} \right] \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 -$$

$$- \frac{6y \sin z}{x^2 \cos^2 z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \left[\frac{y(1+\sin^2 z)}{x^2 \cos^3 z} + \frac{1}{z^2} \right] \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{y \sin z}{x^2 \cos^2 z} - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial t^3}$$

Въ выраженіе для $\frac{\partial t}{\partial x}$ входитъ y трояко: явно, черезъ z и черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{x^3 \cos z} + \frac{\sin z}{x^2 \cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2y \sin z}{x^3 \cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial y} + \left[\frac{y(1+\sin^2 z)}{x^2 \cos^3 z} + \frac{1}{z^2} \right] \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{y \sin z}{x^2 \cos^2 z} - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

149. Можно было бы непосредственно находить производныя, каждую отдѣльно, причемъ принимать во вниманіе, какъ входитъ (и явно и неявно) въ дифференцируемое выраженіе то независимое переменное, по которому берется производная.

Но можно просто найти второй дифференціалъ отъ u , выразить его какъ однородную функцію (второго измѣренія) первыхъ дифференціаловъ независимыхъ переменныхъ; тогда сразу получатся всѣ вторыя частныя производныя отъ u .

$$du = 2y \sin \frac{z}{y} dy + y^2 \cos \frac{z}{y} \frac{(ydz - zdy)}{y^2} - \frac{1}{1+(xz)^2} (xdz + zdx)$$

$$d^2u = 2 \sin \frac{z}{y} dy^2 + 2 \cos \frac{z}{y} \frac{ydz - zdy}{y} dy - \sin \frac{z}{y} \frac{(ydz - zdy)^2}{y^2} +$$

$$+ \cos \frac{z}{y} (dydz + yd^2z - dzdy) + \frac{2xz}{(1+x^2z^2)^2} (zdx + xdz)^2 - \frac{1}{1+x^2z^2} (2dzdx + xd^2z)$$

Теперь надо замѣнить dz черезъ $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

и d^2z черезъ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$.

$$d^2u = \left[-\sin \frac{z}{y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + y \cos \frac{z}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{2 \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1+x^2z^2} + \frac{2xz \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{(1+x^2z^2)^2} \right] dx^2 +$$

$$+ 2 \left[\cos \frac{z}{y} \frac{\partial z}{\partial x} - \sin \frac{z}{y} \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{y \frac{\partial z}{\partial y} - z}{y}\right) + y \cos \frac{z}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{1+x^2z^2} + \frac{2x^2z \frac{\partial z}{\partial y} \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1+x^2z^2)^2} \right] dx dy +$$

$$+ \left[2 \sin \frac{z}{y} + 2 \cos \frac{z}{y} \frac{y \frac{\partial z}{\partial y} - z}{y} - \sin \frac{z}{y} \frac{\left(y \frac{\partial z}{\partial y} - z\right)^2}{y^2} + y \cos \frac{z}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1+x^2z^2} + \frac{2x^3z \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{(1+x^2z^2)^2} \right] dy^2$$

Коэффициентъ при dx^2 представить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

„ при dy^2 „ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

половина коэффициента при $dx dy$ даетъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

150. u функція четырехъ независимыхъ переменныхъ, входящихъ черезъ p и q ; и сверхъ того два изъ нихъ, x и z , входятъ явно.

$$du = -\sin(xz + 2p)(zdx + xdz + 2dp) + 6z^2q^2dz + 4z^3q dq$$

$$d^2u = -\cos(xz + 2p)(zdx + xdz + 2dp)^2 - \sin(xz + 2q)(2dx dz + 2d^2p) + 12zq^2dz^2 +$$

$$+ 24z^2q dz dq + 4z^3dq^2 + 4z^3q d^2q$$

Чтобы выразить d^2u въ дифференціалахъ независимыхъ переменныхъ надо вставить

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$d^2p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} dx dt +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} dy dz + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} dy dt + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} dz dt$$

Подобнымъ образомъ dq и d^2q .

Отобразивъ въ выраженіи d^2u коэффициенты при dx^2, dy^2, \dots , получимъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т. д.

Взявъ половины коэффициентовъ при $dx dy, dx dz, \dots$, получимъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т. д.

Въ ихъ выраженія будутъ входить производныя, первыя и вторыя, отъ p и q , которыя должно замѣнить въ томъ случаѣ, если данъ видъ p и q .

151. $du = yz dx + xz dy + xy dz$

$$d^2u = 2(x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

$$d^3u = 6 dx dy dz$$

$$d^4u = 0$$

152. $du = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy = x^{n-1} y^{m-1} (ny dx + mx dy)$

$$d^2u = n(n-1)x^{n-2} y^m dx^2 + 2mnx^{n-1} y^{m-1} dx dy + m(m-1)x^n y^{m-2} dy^2$$

$$d^3u = n(n-1)(n-2)x^{n-3} y^n dx^3 + 3mn(n-1)x^{n-2} y^{m-1} dx^2 dy +$$

$$+ 3mn(m-1)x^{n-1} y^{m-2} dx dy^2 + m(m-1)(m-2)x^n y^{m-3} dy^3.$$

153. $\frac{1}{a} du = \frac{xy + ydz}{\sqrt{x^2 + z^2}} - xy \cdot \frac{1}{2} \frac{2xdx + 2zdz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} = \frac{yz^2}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} dx + \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} dy - \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} dz$

Коэффициенты при дифференціалахъ суть частныя производныя отъ u по соответственнымъ переменнымъ. Поэтому

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xyz^2}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \right) = -\frac{3}{2} \frac{yz^2}{\sqrt{x^2 + z^2}^5} 2x = -\frac{3xyz^2}{\sqrt{x^2 + z^2}^5}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{xyz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \right) = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} + \frac{3}{2} \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + z^2}^5} 2z = \frac{2xyz^2 - x^3 y}{\sqrt{x^2 + z^2}^5}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz^2}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \right) = \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}^3}$$

Проще, чѣмъ $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$, гдѣ пришлось бы снова брать производную отъ корня.

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{xyz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \right) = -\frac{yz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} + \frac{3}{2} \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + z^2}^5} 2x = \frac{2x^2 yz - yz^3}{\sqrt{x^2 + z^2}^5}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{xyz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3} \right) = -\frac{xz}{\sqrt{x^2 + z^2}^3}$$

Итакъ

$$\frac{1}{a} d^2u = -\frac{3xyz^2}{\sqrt{[x^2+z^2]^5}} dx^2 + \frac{2xyz^2 - x^3y}{\sqrt{[x^2+z^2]^5}} dz^2 + 3\frac{z^2}{\sqrt{[x^2+y^2]^3}} dxdy + \\ + 3\frac{2x^2yz - yz^3}{\sqrt{x^2+z^2]^5}} dxdz - 3\frac{xz}{\sqrt{x^2+z^2]^3}} dydz.$$

Постоянный множитель перенесенъ въ лѣвую часть для сокращенія письма.
 $\sqrt{x^2+z^2}$ означенъ черезъ $\sqrt{}$ съ тою же цѣлью.

$$154. du = \frac{xdz - zdx}{x^2 + z^2} - \frac{zdx + xdz + 2ydy}{(xz + y^2)^2} + 2ydy$$

$$d^2u = -\frac{2(xdz - zdx)(xdx + zdz)}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{(zdx + xdz + 2ydy)^2 - 2(xz + y^2)(dxdz + dy^2)}{(xz + y^2)^2} + 2dy^2$$

$$155. \log u = y^x \log z; \quad \log \log u = x \log y + \log \log z$$

Дифференцируемъ послѣднее выраженіе

$$\frac{1}{\log u} \frac{1}{u} du = \log y dx + \frac{x}{y} dy + \frac{1}{\log z} \frac{1}{z} dz$$

$$du = u \log u \left[\log y dx + \frac{x}{y} dy + \frac{1}{z \log z} dz \right]$$

$$d^2u = \left[\log u \cdot du + u \frac{1}{u} du \right] \left[\log y dx + \frac{x}{y} dy + \frac{1}{z \log z} dz \right] +$$

$$+ u \log u \left[\frac{2}{y} dxdy - \frac{x}{y^2} dy^2 - \frac{\log z + z \cdot \frac{1}{z}}{(z \log z)^2} dz^2 \right]$$

$$= (1 + \log u) u \log u \left[\log y dx + \frac{x}{y} dy + \frac{1}{z \log z} dz \right]^2 +$$

$$+ u \log u \left[\frac{2}{y} dxdy - \frac{x}{y^2} dy^2 - \frac{1 + \log z}{z^2 (\log z)^2} dz^2 \right]$$

$$= u \log u \left[\begin{aligned} & (1 + y^x \log z) (\log y)^2 dx^2 + \frac{x^2 (1 + y^x \log z) - x}{y^2} dy^2 + \frac{y^x - 1}{z^2 \log z} dz^2 + \\ & + 2 \frac{1 + x \log y (1 + y^x \log z)}{y} dxdy + 2 \frac{\log y (1 + y^x \log z)}{z \log z} dxdz + 2 \frac{x (1 + y^x \log z)}{y z \log z} dydz \end{aligned} \right]$$

$$156. du = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2xy + y^2}} d(2xy + y^2) = \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}} dx + \frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}} dy$$

Откуда коэффициентъ при dx $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}};$

Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2xy + y^2}^3} 2y = -\frac{y^2}{\sqrt{2xy + y^2}^3}$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -y^2 \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2xy + y^2}^5} 2y = \frac{3y^3}{\sqrt{2xy + y^2}^5}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt{2xy + y^2}^3} - y^2 \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2xy + y^2}^5} (2x + 2y) = \frac{y^2(y - x)}{\sqrt{2xy + y^2}^5}$$

Подобнымъ образомъ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}};$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{\sqrt{2xy+y^2}} + (x+y)\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2xy+y^2}^3} (2x+2y) = -\frac{x^2}{\sqrt{2xy+y^2}^3} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &= -x^2 \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2xy+y^2}^5} (2x+2y) = \frac{3x^2(x+y)}{\sqrt{2xy+y^2}^5} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2x}{\sqrt{2xy+y^2}^3} - x^2 \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2xy+y^2}^5} 2y = \frac{-xy(x+2y)}{\sqrt{2xy+y^2}^5}\end{aligned}$$

Итакъ

$$\begin{aligned}d^3u &= \frac{3y^3}{\sqrt{2xy+y^2}^5} dx^3 + 3 \frac{y^2(y-x)}{\sqrt{2xy+y^2}^5} dx^2 dy + 3 \frac{-xy(x+2y)}{\sqrt{2xy+y^2}^5} dx dy^2 + \frac{3x^2(x+y)}{\sqrt{2xy+y^2}^5} dy^3 \\ &= 3 \frac{y^3 dx^3 - y^2(x-y) dx^2 dy - xy(x+2y) dx dy^2 + x^2(x+y) dy^3}{\sqrt{2xy+y^2}^5}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{3y^2-2xy}{\sqrt{2xy+y^2}^5} + \left(-\frac{5}{2}\right) \frac{y^2(y-x)}{\sqrt{2xy+y^2}^7} 2(y+x) = \frac{y^2(x^2+4xy-2y^2)}{\sqrt{2xy+y^2}^7}$$

Тотъ же результатъ получился бы изъ $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$

157. Такъ какъ u проще зависитъ отъ z , чѣмъ отъ y , то беремъ $\frac{\partial u}{\partial z}$

$$u = 5 \log(x+y) - 3 \log(y+z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-3}{y+z}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = + \frac{3}{(y+z)^2}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y^2} = - \frac{6}{(y+z)^3}$$

$$158. du = \frac{1}{2} \frac{2(x-a) dx + 2(y-b) dy}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{x-a}{\sqrt{}} dx + \frac{y-b}{\sqrt{}} dy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{}} - (x-a) \frac{1}{2} \frac{2(x-a)}{\sqrt{}} = \frac{(y-b)^2}{\sqrt{}}^3$$

По аналогіи $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2}{\sqrt{}}^3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x-a}{\sqrt{}} \right] = -\frac{1}{2} \frac{(x-a)}{\sqrt{}}^3 2(y-b) = -\frac{(x-a)(y-b)}{\sqrt{}}^3$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(y-b)^2}{\sqrt{}}^3 \right] = -\frac{3}{2} \frac{(y-b)^2}{\sqrt{}}^5 2(x-a) = -\frac{3(x-a)(y-b)^2}{\sqrt{}}^5$$

По аналогіи $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -\frac{3(x-a)^2(y-b)}{\sqrt{}}^5$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(y-b)^2}{\sqrt{}}^3 \right] = \frac{2(y-b)}{\sqrt{}}^3 - \frac{3}{2} \frac{(y-b)^2}{\sqrt{}}^5 2(y-b) = \frac{2(x-a)^2(y-b) - (y-b)^3}{\sqrt{}}^5$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{2(x-a)(y-b)^2 - (x-a)^3}{\sqrt{}}^5$$

$$\begin{aligned}d^3u &= \frac{-3(x-a)(y-b)^2}{\sqrt{}}^5 dx^3 + 3 \frac{2(x-a)^2(y-b) - (y-b)^3}{\sqrt{}}^5 dx^2 dy + \\ &+ 3 \frac{2(x-a)(y-b)^2 - (x-a)^3}{\sqrt{}}^5 dx dy^2 + \frac{-3(x-a)^2(y-b)}{\sqrt{}}^5 dy^3\end{aligned}$$

159. Пусть $\sin x = s$; $u = f(x, s)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, s)}{\partial s} \cos x = u' \quad (\text{см. Ерм. Д. В., ч. 1, § 20})$$

$$\left[\text{гдѣ } \cos x = \frac{ds}{dx} \right]$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{du}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{du}{dx} \cos x = u'' \quad (\text{см. тамъ же}).$$

$$\text{Но } \frac{\partial}{\partial x} \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s \partial x} \cos x + \frac{\partial f(x, s)}{\partial s} (-\sin x)$$

$$\left[\text{гдѣ } (-\sin x) = \frac{d \cos x}{dx} = \frac{d^2 \sin x}{dx^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \cos x$$

$$\text{Итакъ } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x \partial s} \cos x + \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \cos^2 x - \frac{\partial f(x, s)}{\partial s} \sin x$$

$$\text{Далѣе } \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{d^2u}{dx^2} \cos x = u''' \quad (\text{тамъ же})$$

$$\text{Но } \frac{\partial}{\partial x} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x^2 \partial s} \cos x - 2 \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x \partial s} \sin x + \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x \partial s^2} \cos^2 x -$$

$$- \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} 2 \cos x \sin x - \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x \partial s} \sin x + \frac{\partial f(x, s)}{\partial s} (-\cos x,$$

$$\left[\text{гдѣ } (-\cos x) = \frac{d(-\sin x)}{dx} = \frac{d^3 \sin x}{dx^3} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x^2 \partial s} + 2 \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x \partial s^2} \cos x + \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial s^3} \cos^2 x - \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \sin x$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x^2 \partial s} \cos x + 3 \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial x \partial s^2} \cos^2 x + \frac{\partial^3 f(x, s)}{\partial s^3} \cos^3 x - \\ & - 3 \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x \partial s} \sin x - 3 \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2} \sin x \cos x - \frac{\partial f(x, s)}{\partial s} \cos x \end{aligned} \right]_{s = \sin x}$$

Подобнымъ образомъ въ окончательное выраженіе для u' , u'' надо вставить $s = \sin x$.

Сопоставить съ (Е. Д. В. ч. 1 § 36), отбросивъ тамъ знаки равенства нулю.

$$160. \frac{du}{dx} = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x} \log x \cdot \cos x$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \cos x \cdot x^{\sin x - 1} + \sin x (\sin x - 1) x^{\sin x - 2} + \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \log x \cdot \cos x +$$

$$+ \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \log x \cos x + x^{\sin x} (\log x \cdot \cos x)^2 + x^{\sin x} \frac{\cos x}{x} + x^{\sin x} \log x (-\sin x) =$$

$$= \sin x (\sin x - 1) x^{\sin x - 2} + 2(1 + \sin x \log x) \cos x \cdot x^{\sin x - 1} + (\log^2 x \cos^2 x - \sin x \log x) x^{\sin x}$$

$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) dx^2$$

$$161. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d \left(\frac{2y}{x} \right)}{dx}$$

$\frac{2y}{x}$ здѣсь сложная функція $x^{\sin x}$ (x входитъ явно и черезъ y).

Поэтому
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{x} - \frac{2y}{x^2}$$

Вставляя вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ (или y') равное ему $\frac{2y}{x}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4y}{x^2} - \frac{2y}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

Тогда
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{x^2} - \frac{4y}{x^3} = 0.$$

Третья производная, т. е. производная отъ второй производной, обращается въ нуль; слѣд. вторая производная величина постоянная $\left[\frac{d^2y}{dx^2} = c\right]$; слѣд. $\frac{dy}{dx} = cx + c_1$;

значить $y = \frac{cx^2}{2} + c_1x + c_2$. Посмотримъ, удовлетворяють ли полученныя значенія данному уравненію; для этого вставимъ ихъ въ наше уравненіе

$$cx + c_1 = cx + 2c_1 + \frac{2c_2}{x}$$

что должно представлять изъ себя тождество при любомъ значеніи x . слѣд. коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ должны совпадать $c \equiv c$; $c_1 = 2c_1$; $0 = 2c_2$.

Слѣдовательно $c_1 = c_2 = 0$, а c произвольно.

Выраженіе для y будетъ $y = \frac{cx^2}{2}$,

или, замѣняя $\frac{c}{2}$ черезъ k , $y = kx^2$

Иначе это можно было бы заключить изъ того, что для полученія производной первоначальная функція дѣлилась на x , (т. е. какъ бы степень x^ca въ выраженіи для y понизилась на единицу) и умножалась на 2 (т. е. на постоянный множитель).

Такъ поступаютъ при дифференцированіи второй степени x^ca .

Еще иначе: перепишемъ данное соотношеніе въ видѣ $\frac{y'_x}{y} = 2 \frac{1}{x}$
Въ обѣихъ частяхъ производныя отъ логарифмовъ;

слѣдовательно $\log y = 2 \log x + \text{Const}$
$$y = e^{2 \log x + \text{Const}} = e^{\text{Const}} (e^{\log x})^2 = (\text{const}) x^2 = kx^2$$

162. $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$

163. $m = 1.$

Функціи неявныя одного независимаго переменнаго.

164. За независимое переменное въ задачѣ принято x . Любому значенію x будетъ соотвѣтствовать одно или нѣсколько значеній y , удовлетворяющихъ уравненію вмѣстѣ съ соотвѣтственнымъ значеніемъ x . Значить наше уравненіе опредѣляетъ y какъ функцію x^ca [$y = \varphi(x)$]. Возможно или

нѣтъ рѣшить уравненіе относительно y , (рѣшить въ обыденномъ смыслѣ—т. е. представить $\varphi(x)$ въ видѣ совокупности нѣкотораго числа изъ шести основныхъ алгебраическихъ, а также и общепринятыхъ трансцендентныхъ функцій*), но, если вообразимъ, что вмѣсто y подставлено $\varphi(x)$, то данное уравненіе обратится въ тождество. Слѣдовательно, лѣвая часть уравненія представляетъ изъ себя такую функцію одного независимаго переменнаго x , которая постоянно равна нулю. Значить и производная, и дифференціалъ ея равны нулю.

Если пожелаемъ написать производную отъ лѣвой части уравненія, то надо уяснить, какая это функція x^{ca} ? x входитъ явно, и черезъ y . Значить это сложная функція отъ двухъ функцій—переменныхъ, зависимыхъ отъ x^{ca} , причемъ одна изъ нихъ просто само x .

Беремъ, значить, производную какъ отъ сложной функцій и приравниваемъ ее нулю**).

$$(3y^2 - 3x)y'_x + (3x^2 - 3y) \cdot 1 = 0$$

$(3y^2 - 3x)$ — производная отъ лѣвой части уравненія по y , (какъ будто бы y было переменнымъ независимымъ) умножается на производную отъ y по x .

$(3x^2 - 3y)$ — производная отъ лѣвой части уравненія по x , входящему явно, (тоже какъ будто бы y независимо отъ x) умножается на производную отъ x по x , т. е. на единицу.

Отсюда y'_x или $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$

Иначе: если бы пожелали приравнять нулю не производную, а дифференціалъ лѣвой части, то безразлично, какія переменныя, зависимыя или нѣтъ, входятъ въ ея выраженіе. Итакъ

$$3y^2 dy + 3x^2 dx - 3x dy - 3y dx = 0$$

Откуда, по раздѣленіи на dx , опредѣлимъ $\frac{dy}{dx}$.

Такъ какъ уравненіе третьей степени разрѣшимо въ радикалахъ, то можно было бы изъ даннаго уравненія опредѣлить y въ функцій x^{ca} и находить производную какъ отъ явной функцій, но дифференцирование вышло бы непомѣрно сложно.

165. Лѣвая часть уравненія есть функція двухъ переменныхъ, зависимыхъ отъ x .

*) Основные алгебраическія функцій: сумма, разность, произведение, частное, цѣлая степень, корень цѣлой степени.

Общепринятые трансцендентныя—такія функцій, нѣкоторыя свойства которыхъ изучаются въ элементахъ, и численныя значенія коихъ для любого x могутъ быть вычислены по к. н. употребляемымъ таблицамъ, напр. Лаланда; а дифференціалы такихъ функцій даются въ курсахъ, какъ основные ($\log x$, e^x , $\sin x$, $\arctg x$ и т. п.).

**) Иногда, для краткости, мы будемъ условно выражаться въ подобныхъ случаяхъ: возьмемъ отъ даннаго уравненія производную, дифференціалъ;.. понятно, что дифференціалы либо производныя можно брать отъ величинъ, а уравненіе не величина; но повода къ недоразумѣнію подобныя выраженія послѣ сдѣланной нами оговорки; подать не могутъ.

Взявъ дифференціалъ (ея половины), какъ функции двухъ переменныхъ, приравняемъ его нулю $\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

Нѣсколько сложнѣе вышло бы дифференцирование, если опредѣлить y и находить производную явной функции x^a . Зато въ найденное выраженіе для y' не входилъ бы y , а только x .

166. Беремъ дифференціалъ половины лѣвой части и приравниваемъ его нулю

$$\frac{x dx}{a^2} - \frac{y dy}{b^2} = 0$$

Здѣсь независимымъ переменнымъ указано считать y ; поэтому, раздѣливъ на dy , найдемъ

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

167. Найдемъ $\frac{dy}{dx}$

Беремъ дифференціалъ лѣвой части, какъ функции двухъ переменныхъ (сложной, ибо одно изъ переменныхъ зависимое) и приравниваемъ его нулю.

$$3.8x^2 dx - 27.2p y dy = 0 \quad \text{Откуда} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4 x^2}{9p y}$$

На основаніи даннаго уравненія

$$\frac{x^2}{y} = \frac{27p y}{8 x}$$

Подставляя въ предыдущее, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{9p} \frac{27p y}{8 x} = 1.5 \frac{y}{x}$$

Тотъ же результатъ безъ всякой замѣны можно получить, если предварительно прологарифмировать данное уравненіе.

$$\log 8 + 3 \log x = \log 27p + 2 \log y$$

Дѣйствительно, продифференцировавъ, увидимъ $3 \frac{dx}{x} = 2 \frac{dy}{y}$

168. (Опредѣлить y черезъ x можно, но не слѣдуетъ).

$$a dx + b dy + y dx + x dy = \frac{1}{2} \frac{2x dx + 2y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Правая часть должна быть упрощенна на основаніи даннаго соотношенія: замѣнимъ $\sqrt{x^2 + y^2}$ равнымъ ему выраженіемъ.

$$\text{Тогда} \quad a dx + b dy + y dx + x dy = \frac{x dx + y dy}{ax + by + xy}$$

Откуда, раздѣливъ на dx , найдемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+y)(ax+by+xy) - x}{y - (b+x)(ax+by+xy)}$$

Вообще, слѣдуетъ замѣнять выраженія сложные равными имъ болѣе простыми на основаніи данныхъ соотношеній.

Можно было бы возвести уравнение почленно въ квадратъ

$$(ax + by + xy)^2 = x^2 + y^2$$

что по дифференцировании даетъ

$$2(ax + by + xy)(adx + bdy + xdy + ydx) = 2xdx + 2ydy$$

Откуда, раздѣливъ на dx , то же выражение для $\frac{dy}{dx}$

$$169. 3x^2dx - 2y \sin \frac{y}{x} dy - y^2 \cos \frac{y}{x} \frac{xdy - ydx}{x^2} - 2 \sin 2y dy = 0$$

$$\text{Откуда } dy = \frac{3x^4 + y^3 \cos \frac{y}{x}}{2x^2y \sin \frac{y}{x} + xy^2 \cos \frac{y}{x} + 2x^2 \sin 2y} dx.$$

$$170. dx + 2y \log(x^2 + y^2) dy + y^2 \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$dx = \frac{x - 2y^3 - 2y(x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2)}{y + x^2 + y^2 + 2xy^2} dy.$$

$$171. \cos 3y dx + x \cdot (-\sin 3y) \cdot 3dy = 5e^{\frac{x}{3} + y} \left(\frac{dx}{3} + dy \right)$$

$$dy = \frac{3 \cos 3y - 5e^{\frac{x}{3} + y}}{3(3x \sin 3y + 5e^{\frac{x}{3} + y})} dx$$

Замѣняя изъ даннаго уравненія $5e^{\frac{x}{3} + y}$ черезъ $x \cos 3y$,

$$dy = \frac{(3 - x) \cos 3y}{3x(3 \sin 3y + \cos 3y)} dx = \frac{(3 - x)}{3x(1 + 3 \operatorname{tg} 3y)} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3 - x)}{3x(1 + 3 \operatorname{tg} 3y)}$$

Проще логарифмировать при основаніи e

$$\log x + \log \cos 3y = \log 5 + \frac{x}{3} + y$$

$$\frac{dx}{x} - 3 \operatorname{tg} 3y dy = \frac{dx}{3} + dy$$

Откуда безъ всякой замѣны то же $\frac{dy}{dx}$

$$172. \text{ Упрощаемъ } e^{xy} = -\sqrt{\sec xy}$$

$$xy = \log \left[(-1) (\cos xy)^{-\frac{1}{2}} \right] = \log (-1) - \frac{1}{2} \log \cos xy$$

$$\text{Дифференцируемъ } yx^{y-1}dx + x^y \log x dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos xy} \cdot (-\sin xy) [ydx + xdy]$$

$$\text{или } yx^{y-1}dx + x^y \log x dy = \frac{x \operatorname{tg} xy}{2} dy + \frac{y \operatorname{tg} xy}{2} dx$$

$$\text{Откуда } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{2x^{y-1} - \operatorname{tg} xy}{\operatorname{tg} xy - 2x^{y-1} \log x}$$

Примѣчаніе: $\log (-1)$ есть величина, хотя и мнимая, но постоянная, — и ея дифференціалъ равенъ нулю.

Можно было бы данное уравненіе возвести въ квадратъ, чтобы избѣгнуть логарифма мнимаго количества.

Если бы непосредственно, то $e^{xy} + (\cos xy)^{-\frac{1}{2}} = 0$

$$e^{xy} d(xy) - \frac{1}{2} (\cos xy)^{-\frac{3}{2}} d \cos xy = 0$$

Замѣняя e^{xy} черезъ $-(\cos xy)^{-\frac{1}{2}}$

$$-(\cos xy)^{-\frac{1}{2}} (xy \log x dy + yx^{y-1} dx) + \frac{1}{2} (\cos xy)^{-\frac{3}{2}} \sin xy (y dx + x dy) = 0$$

Умножая на $2(\cos xy)^{\frac{1}{2}}$ и отбирая коэффициенты у дифференциаловъ,

$$(x \operatorname{tg} xy - 2xy \log x) dy + (y \operatorname{tg} xy - 2yx^{y-1}) dx = 0$$

Отсюда: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{\operatorname{tg} xy - 2xy^{-1}}{\operatorname{tg} xy - 2xy^{-1} \log x}$

173. $(y \log x)^2 = (x \log y)^2$

$$y \log x = \pm x \log y$$

$$\frac{y}{x} dx + \log x dy = \pm dx \log y \pm \frac{x}{y} dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \mp \log y}{\pm \frac{x}{y} - \log x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y \mp x \log y}{\pm x - y \log x}$$

Что можно представить, замѣняя взаимно другъ другомъ равные между собою $y \log x$ и $\pm x \log y$, въ видѣ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - y \log x}{\pm x \mp x \log y} = \pm \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{1 - \log x}{1 - \log y}$$

174. $a^x \log a dx - e^{x-y} d(x-y) = 0$

Замѣнимъ e^{x-y} равнымъ ему a^x

$$a^x (\log a dx - dx + dy) = 0$$

Откуда $dy = dx (1 - \log a)$; $\frac{dy}{dx} = 1 - \log a$

Иначе: $a^x = e^{x-y}$; $x \log a = x - y$; $\log a dx = dx - dy$; $\frac{dy}{dx} = 1 - \log a$

175. Переписавъ искомое въ видѣ $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, можно видѣть, что обѣ равныя части суть производныя отъ логариѶмовъ. Значить сами логариѶмы отличаются только постояннымъ $\log x + C = \log y$

Замѣняя C черезъ $\log k$, гдѣ $k = e^C$, $\log y = \log kx$; откуда $y = kx$ или $\frac{y}{x} = k$

Значить надо изъ даннаго уравненія вывести, что $\frac{y}{x} = \text{постоянному}$

Раздѣлимъ и числитель и знаменатель дроби, выражающей величину косеканса, на x^3 ; тогда наше уравненіе представится, въ видѣ

$$\operatorname{arc cosec} \left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 1}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{3}} = a$$

Это очевидно уравненіе относительно одного неизвѣстнаго (отношенія $\frac{y}{x}$); это неизвѣстное опредѣлится въ функціи коэффициентовъ уравненія — по-

стоянныхъ величинъ. Итакъ $\frac{y}{x}$ постоянно [=const]. Простое дифференцирование дасть искомое.

176. Данное соотношеніе есть уравненіе относительно xy , изъ коего уравненія xy можетъ быть опредѣлено, какъ величина постоянная (одно рѣшеніе или нѣсколько — безразлично).

Дифференцируя $xy = \text{const}$, получаемъ:

$$x dy + y dx = 0. \quad \text{Отсюда: } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

177. Написавъ данное уравненіе проще въ видѣ $(x-y)y^n = x+y$, дифференцируемъ его $(dx-dy)y^n + n(x-y)y^{n-1}dy = dx+dy$

Умножая уравненіе на y и замѣняя y^n черезъ $\frac{x+y}{x-y}$, получимъ:

$$y(dx-dy)(x+y) + n(x+y)(x-y)dy = y(x-y)(dx-dy)$$

$$\text{Отсюда} \quad dy = \frac{2y^2}{2yx - n(x^2 - y^2)} dx; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{2yx - n(x^2 - y^2)}.$$

$$\mathbf{178.} \quad 3x^2 dx + 2y \cos xy dy + y^2(-\sin xy)(y dx + x dy) - \left(\log y + y \cdot \frac{1}{y}\right) dy = 0$$

$$\text{Откуда} \quad dy = \frac{3x^2 - y^3 \sin xy}{1 + \log y + xy^2 \sin xy - 2y \cos xy} dx$$

179. Дифференцируемъ обѣ части уравненія.

(Если бы опредѣлили изъ даннаго уравненія x въ функціи y , и подставили бы такое значеніе x въ обѣ части нашего уравненія, то оно удовлетворилось бы; значитъ обѣ части уравненія, разсматриваемыя, какъ функціи $y^{\text{ка}}$, тождественно равны, слѣдовательно и дифференціалы обѣихъ частей также должны быть равны)

$$y^x \log y dx + xy^{x-1} dy - 3x^2 dx = \frac{1}{1+2y} 2 dy$$

$$\text{Откуда} \quad dx = \frac{2 - x(1+2y)y^{x-1}}{(y^x \log y - 3x^2)(1+2y)} dy$$

180. Лѣвая часть уравненія есть сложная функція двухъ функцій одного переменнаго: одна изъ функцій — само независимое переменное; другая — его функція y .

Приравниваемъ нулю полную производную отъ лѣвой части по $x^{\text{су}}$, какъ входящему явно, такъ и черезъ его функцію y .

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y'_x = 0 \quad \text{или} \quad y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y'_x = 0 \quad (\text{A})$$

Любому значенію x , будетъ въ силу даннаго уравненія соотвѣтствовать одно или нѣсколько значеній y и въ силу уравненія A (первой степени относительно y'_x) столько же значеній y'_x . Слѣдовательно y'_x есть также функція переменнаго x . Итакъ лѣвая часть уравненія (A) тоже сложная функція одного независимаго переменнаго x . Но здѣсь x входитъ тройко; функція трехъ функцій: $y^{\text{ка}}$ — функціи отъ x , самаго $x^{\text{са}}$ и еще

новаго переменнаго y'_x , зависимаго, какъ раньше было показано, также отъ x . Производная отъ y'_x по x , т. е. $(y'_x)_x$ означается черезъ y'' .

Беремъ отъ лѣвой части (А) полную производную по x , входящему чрезъ три различныя функціи (y , y' и явно) и приравниваемъ нулю.

$$\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} (y)'_x + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y'_x + x^{\frac{1}{3}} y'' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}} y'_x + x^{\frac{1}{3}} y'' = 0$$

Вставляя на основаніи даннаго уравненія вмѣсто $(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$ — единицу и изъ (А) вмѣсто y'_x равное ему $(-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}})$, получимъ

$$-\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y'' = 0 \quad \text{Откуда} \quad y'' = \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{xy}}$$

Если бы пожелали приравнять нулю дифференціалы лѣвыхъ частей, то безразлично было бы, какія переменныя, зависимыя или нѣтъ, входятъ въ лѣвыя части. Именно

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} dy = 0 \quad \text{или} \quad y^{\frac{1}{3}} dx + x^{\frac{1}{3}} dy = 0 \quad (B)$$

Такъ какъ x принять за независимое переменное, то dx въ теченіи всего вычисленія можно считать однимъ и тѣмъ же, слѣдовательно его дифференціалъ $d(dx)$ можно считать какъ бы дифференціаломъ постояннаго, равнымъ нулю. Слѣдовательно, лѣвая часть (B) можетъ быть разсматриваема, какъ явная функція трехъ переменныхъ: x , y и dy ; взявъ отъ нея дифференціалъ, приравниваемъ его нулю.

$$\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} d(y) dx + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} d(x) dy + x^{\frac{1}{3}} d(dy) = 0$$

$d(dy)$ называется вторымъ дифференціаломъ y . Преобразуя, получимъ

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}} dx dy + x^{\frac{1}{3}} d^2 y = 0$$

dy должно опредѣлить изъ (B) $dy = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$.

Упрощая послѣднее уравненіе на основаніи даннаго, вставляя выраженіе dy , по раздѣленіи на dx^2 опредѣлимъ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{xy}}$$

181. Беремъ дифференціалы обѣихъ частей уравненія, какъ бы отъ функцій двухъ переменныхъ x и y , входящихъ явно, и приравниваемъ ихъ другъ другу

$$dx = e^x dy + y e^x dx$$

Что по исключеніи e^x на основаніи даннаго уравненія упрощается въ $y(2-x)dx - (x-1)dy = 0$.

Лѣвая часть послѣдняго уравненія—какъ бы явная функція трехъ переменныхъ x , y и dx , входящихъ каждое само по себѣ (dy по условію остается однимъ и тѣмъ же). Приравниваемъ нулю дифференціалъ лѣвой части.

$$(2-x) dy dx - y dx^2 + y(2-x) d^2 x - dx dy = 0$$

Откуда
$$d^2x = \frac{y dx^2 + (x-1) dx dy}{y(2-x)}$$

Но изъ предыдущаго уравненія
$$dx = \frac{x-1}{y(2-x)} dy.$$

Слѣдовательно
$$d^2x = \frac{(x-1)^2(3-x)}{y^2(2-x)^3} dy^2$$

182. Избавленіе отъ ирраціональности ввело бы квадратъ трансцендентной функціи, что усложнило бы, а не упростило вычисленія. Беремъ дифференціалъ даннаго уравненія

$$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{m}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{x dy - y dx}{x^2}$$

Освобождаемъ отъ знаменателей
$$\sqrt{x^2 + y^2} (x dx + y dy) = m (x dy - y dx).$$

Перемѣнныхъ въ послѣднемъ уравненіи по условію вопроса надо считать три: x , y , dy . Снова дифференцируемъ послѣднее уравненіе

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x dx + y dy)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} (dx^2 + dy^2 + y d^2y) = m(dx dy + x d^2y - dy dx)$$

Или
$$(x dx + y dy)^2 + (x^2 + y^2) (dx^2 + dy^2) = (mx - y \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2} d^2y$$

Но изъ перваго уравненія
$$dy = \frac{my + x \sqrt{x^2 + y^2}}{mx - y \sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

А потому
$$x dx + y dy = \frac{m(x^2 + y^2)}{mx - y \sqrt{x^2 + y^2}} dx; \quad dx^2 + dy^2 = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + m^2)}{(mx - y \sqrt{x^2 + y^2})^2} dx^2$$

Итакъ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 + y^2 + 2m^2)}{(mx - y \sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

183. Беремъ первый дифференціалъ
$$\frac{x dx}{a^2} - \frac{y}{b^2} dy = 0$$

Это уравненіе снова дифференцируемъ, считая x перемѣннымъ независимымъ, а потому приписывая dx значенія вездѣ одинаковыя, благодаря чему $d^2x = 0$.

$$\frac{dx}{a^2} dx - \frac{dy}{b^2} dy - \frac{y}{b^2} d^2y = 0$$

Или
$$\frac{dx^2}{a^2} - \frac{dy^2}{b^2} = \frac{y}{b^2} d^2y$$

Изъ перваго уравненія опредѣлимъ
$$dy = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} dx.$$

Вставляемъ въ предыдущее и опредѣляемъ

$$d^2y = \frac{b^2}{a^2 y} dx^2 - \frac{1}{y} \frac{b^4}{a^4} \frac{x^2}{y^2} dx^2 = \frac{b^2(a^2 y^2 - b^2 x^2)}{a^4 y^3} dx^2$$

Но, приводя данное уравненіе къ одному знаменателю, $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$. А потому, вставляя вмѣсто $(a^2 y^2 - b^2 x^2)$ равное ему $(-a^2 b^2)$ и сокращая,

$$d^2y = -\frac{b^4}{a^2 y^3} dx^2$$

184. Дифференцируемъ, данное уравненіе

$$y^2 dy + x^2 dx - ax dy - ay dx = 0$$

или
$$(x^2 - ay) dx + (y^2 - ax) dy = 0$$

Снова дифференцируемъ, считая y независимымъ, т. е. полагая $d^2y=0$.

$$(2xdx - ady) dx + (x^2 - ay) d^2x + (2ydy - adx) dy = 0$$

Откуда, по приведеніи, $d^2x = -\frac{2}{x^2 - ay} (xdx^2 - adydx + ydy^2)$

Но изъ перваго уравненія $dx = -\frac{y^2 - ax}{x^2 - ay}$; вставляя, имѣемъ

$$\begin{aligned} d^2x &= -\frac{2}{(x^2 - ay)^3} [x(y^2 - ax)^2 + a(y^2 - ax)(x^2 - ay) + y(x^2 - ay)^2] dy^2 = \\ &= -\frac{2xy}{(x^2 - ay)^3} [y^3 + x^3 - 3axy + a^3] dy^2 \end{aligned}$$

Но на основаніи даннаго уравненія совокупность первыхъ трехъ одночленовъ въ скобкахъ равна нулю.

$$d^2x = -\frac{2a^3xy}{(x^2 - ay)^3} dy^2 = \frac{2a^3xydy^2}{(ay - x^2)^3}$$

$$185. (y^2 - x) = y^{\frac{5}{2}}; \quad x = y^2 - y^{\frac{5}{2}}; \quad dx = \left(2y - \frac{5}{2}y^{\frac{3}{2}}\right) dy; \quad (A)$$

$$d^2x = \left(2 - \frac{15}{4}y^{\frac{1}{2}}\right) dy^2;$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 2 - 3,75\sqrt{y} \quad \text{Здѣсь въ (A) мы } dy \text{ считали постояннымъ.}$$

Если будемъ считать dx постояннымъ, то дифференцированье (A) дастъ

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - 3,75\sqrt{y}) dy^2 + (2y - 2,5y\sqrt{y}) d^2y \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2 - 3,75\sqrt{y}}{y(2 - 2,5\sqrt{y})} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{2 - 3,75\sqrt{y}}{y^3(2 - 2,5\sqrt{y})^3} \end{aligned}$$

$$186. \text{Логариѣмируемъ данное уравненіе} \quad x \log y = \log(x - a)$$

$$\begin{aligned} \text{Дифференцируемъ его} \quad \log y dx + x \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x - a} \\ y[1 - (x - a) \log y] dx &= x(x - a) dy \dots (A) \end{aligned}$$

Снова дифференцируемъ, считая dy постояннымъ,

$$[1 - (x - a) \log y] dy dx - y(x - a) \frac{dy}{y} dx - y \log y dx^2 + y[1 - (x - a) \log y] d^2x = (2x - a) dy dx$$

Вставляя изъ (A) величину dx , опредѣлимъ

$$d^2x = \frac{x(x - a)}{y^2[1 - (x - a) \log y]^3} \left[(3x - 2a - 1) + 2(1 + a - x)(x - a) \log y - (x - a)^2 (\log y)^2 \right] dy^2$$

Считая dx постояннымъ, дифференцируемъ (A)

$$[1 - (x - a) \log y] dy dx - y(x - a) \frac{dy}{y} dx - y \log y dx^2 = (2x - a) dy dx + x(x - a) a^2 y$$

Вставляя изъ (A) величину dy , опредѣлимъ

$$d^2y = \frac{y}{x^2(x - a)^2} \left[(1 + 2a - 3x) + 2(x - a - 1)(x - a) \log y + (x - a)^2 (\log y)^2 \right] dx^2$$

$$187. \text{Первый дифференціалъ даннаго уравненія, сокращенный на 4,}$$

$$(x^3 - 2axy) dx = (y^3 + ax^2) dy$$

Второй дифференціалъ

$$(y^3 + ax^2) d^2y = (3x^2 - 2ay) dx^2 - 2,2ax dx dy - 3y^2 dy^2$$

Откуда
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3x^2 - 2ay)(y^3 + ax^2)^2 - 4ax(y^3 + ax^2)(x^3 - 2axy) - 3y^2(x^3 - 2axy^2)}{(y^3 + ax^2)^3}$$

188. $(4y - x^2 + 4x - 3)y' - 2(x - 2)y = 0$
 $(4y - x^2 + 4x - 3)y'' + 4y'^2 - 4(x - 2)y' - 2y = 0.$

Умножаемъ на квадратъ коэффициента производной второго порядка и замѣняемъ $(4y - x^2 + 4x - 3)y'$ черезъ $2(x - 2)y$, тогда y'' опредѣлится въ функціи x и y .

189. $1 = \frac{dy}{dx} + \cos y \frac{dy}{dx}$
 $0 = \frac{d^2y}{dx^2} (1 + \cos y) - \sin y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
 $0 = (1 + \cos y) \frac{d^2y}{dx^2} - \sin y \frac{1}{(1 + \cos y)^2}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y}{(1 + \cos y)^3}$

190. $z'(1 + x \sin z) - \cos z = 0$
 $z''(1 + x \sin z) + z'^2 x \cos z + 2z' \sin z = 0$
 $z''(1 + x \sin z)^3 + x \cos^3 z + 2 \sin z \cos z (1 + x \sin z) = 0$
 $z'' = -\frac{x \cos^3 z}{(1 + x \sin z)^3} - \frac{2 \sin z \cos z}{(1 + x \sin z)^2}$

191. $0 = 4 \cos y dx - 4x \sin y dy - 2x \cos^2 y dx + 2x^2 \cos y \sin y dy$
 $2 \cos y (2 - x \cos y) dx - 2x \sin y (2 - x \cos y) dy = 0$

Сокративъ на $2(2 - x \cos y)$, получимъ $\cos y dx - x \sin y dy = 0$
 $+ 2 \sin y dy dx + x \cos y dy^2 + x \sin y d^2y = 0$
 $2 \frac{\cos y}{x} dx^2 + \frac{\cos^3 y}{x \sin^2 y} dx^2 + x \sin y d^2y = 0$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2 \cot y + \cot^3 y}{x^2}$

Множитель, на который сократилось первое дифференціальное уравненіе, помогаетъ упростить самую задачу. Въ самомъ дѣлѣ, перенеся все съ самага начала въ лѣвую часть, могли бы замѣтить, что послѣдняя представляетъ полный квадратъ. Дѣло свелось бы къ уравненію $2 - x \cos y = 0$.

Въ данномъ случаѣ уравненіе можно было бы рѣшить $y = \arccos \frac{2}{x}$. Отвѣтъ не содержалъ бы y , но былъ бы тождествененъ съ прежде полученнымъ въ силу даннаго уравненія.

192. $2y y' = -2x \cos(a^2 - x^2)$
 $y'^2 + y y'' = -\cos(a^2 - x^2) - 2x^2 \sin(a^2 - x^2)$
 $y'' = -\frac{x^2 \cos^2(a^2 - x^2) + y^2 [\cos(a^2 - x^2) + 2x^2 \sin(a^2 - x^2)]}{y^3}$
 $d^2y = -\frac{x^2 \cos^2(a^2 - x^2) + y^2 [\cos(a^2 - x^2) + 2x^2 \sin(a^2 - x^2)]}{y^3} dx^2$

Здѣсь предварительное рѣшеніе даннаго уравненія отвѣта не упростило бы.

Дифференціальный коэффициент (коэффициент при dx^2 , т. е. вторая производная) может быть выражен алгебраически, если на основании данного уравнения исключить \sin и \cos .

$$d^2y = -\frac{x^2(1+y^4)+y^2\sqrt{1-y^4}}{y^3} dx^2$$

$$193. \quad adx + bdy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(ax + by + c)(adx + bdy) = xdx + ydy \quad (A)$$

$$[a(ax + by + c) - x] dx = [y - b(ax + by + c)] dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(ax + by + c) - x}{y - b(ax + by + c)} = y'$$

Изъ (A) имѣемъ, дифференцируя его,

$$(adx + bdy)^2 + b(ax + by + c) d^2y = dx^2 + dy^2 + y d^2y;$$

$$\text{Откуда} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a + by')^2 - 1 - y'^2}{y - b(ax + by + c)}$$

Подставивъ вмѣсто y' его значеніе, получимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\{a[y - b(ax + by + c)] + b[a(ax + by + c) - x]\}^2 - [y - b(ax + by + c)]^2 - [a(ax + by + c) - x]^2}{[y - b(ax + by + c)]^3}$$

$$\text{А по упрощеніи} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(ay - bx)^2 - [y - b(ax + by + c)]^2 - [a(ax + by + c) - x]^2}{[y - b(ax + by + c)]^3}$$

$$194. \quad xy^2dx + x^2ydy = (l + y)(m^2 - y^2)dy - (l + y)^2ydy$$

По умноженіи на y и замѣнѣ x^2y^2 изъ даннаго уравненія преобразуемъ къ виду

$$\begin{aligned} [(l + y)^2(m^2 - y^2) + (l + y)^2y^2 - (l + y)(m^2 - y^2)y]dy &= xy^3dx \\ (l + y)[m^2l + y^3]dy &= xy^3dx \end{aligned} \quad (A).$$

Замѣнивъ xy черезъ $(l + y)\sqrt{m^2 - y^2}$, сократимъ на $(l + y)$

$$(m^2l + y^3)dy = y^2\sqrt{m^2 - y^2}dx$$

что по дифференцированьи даетъ

$$3y^2dy^2 + (m^2l + y^3)d^2y = \left[2y\sqrt{m^2 - y^2} - \frac{y^3}{\sqrt{m^2 - y^2}} \right] dydx$$

Подставивъ изъ предыдущаго dy , опредѣлимъ по приведеніи

$$d^2y = \frac{m^2y^3(2m^2l - 3ly^2 - y^3)}{(m^2l + y^3)^3} dx^2$$

Можно уравненіе (A) возвести въ квадратъ, замѣнить изъ даннаго x^2y^2 и сократить на $(l + y)^2$, что дастъ $(m^2l + y^3)^2 dy^2 = (y^4m^2 - y^6)dx^2$ (B). Последнее дифференцируемъ

$$2(m^2l + y^3) \cdot 3y^2dy^3 + (m^2l + y^3)^2 2dy d^2y = (4m^2y^3 - 6y^5) dydx^2.$$

Умножаемъ послѣднее уравненіе на $\frac{m^2l + y^3}{2dy}$ и въ первомъ одночленѣ замѣняемъ правую часть уравненія (B) лѣвой. Тогда легко опредѣлимъ d^2y .

$$195. \quad \frac{dz}{z} = -\frac{1}{\sin^2x} dx \quad ; \quad zdx + \sin^2x dz = 0 \quad (A)$$

Считая dx постояннымъ, дифференцируемъ (A).

$$(1 + 2\sin x \cos x) dx dz + \sin^2x d^2z = 0$$

$$\text{Откуда } d^2z = \frac{(1+2\sin x \cos x)z}{\sin^4 x} dx^2 \quad \left[= \frac{(\sin x + \cos x)^2 z}{\sin^4 x} dx^2 \right]$$

Считая dz постояннымъ, дифференцируемъ снова (A)

$$(1+2\sin x \cos x) dx dz + z d^2x = 0$$

Откуда, по исключеніи dx на основаніи (A)

$$d^2x = \frac{(1+2\sin x \cos x) \sin^2 x}{z^2} dz^2 \quad \left\{ = \left[\frac{(\sin x + \cos x) \sin x}{z} dz \right]^2 \right\}$$

$$196. 1 = \frac{y'}{\operatorname{tg}(y+m) \cos^2(y+m)}$$

$$y' = \sin(y+m) \cos(y+m)$$

$$y'' = [\cos^2(y+m) - \sin^2(y+m)] y'$$

$$y'' = [\cos^2(y+m) - \sin^2(y+m)] \sin(y+m) \cos(y+m) = \frac{\sin 4(y+m)}{4}$$

Подставивъ изъ даннаго уравненія e^x , величину равную $\operatorname{tg}(y+m)$, въ выраженіе \sin и \cos черезъ tg той же дуги, получимъ

$$y'' = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} \quad \left[= \frac{e^{-x}-e^x}{(e^{-x}+e^x)^2} \right] \quad \text{Независитъ отъ } m!$$

Иначе: производныя отъ y не отличаются отъ производныхъ отъ $(y+m)$. Обѣ части даннаго уравненія можно разсматривать, какъ функцію отъ $(y+m)$ и отъ x , въ силу чего изъ даннаго уравненія величина $(y+m)$, а слѣд. и ея производныя опредѣляются въ функціи одного x са (независимо отъ m).

197. Беремъ дифференціалъ уравненія

$$\frac{2x dx + 2y dy}{x^2 + y^2} - m \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

$$(mx - 2y) dy = (my + 2x) dx \quad (A)$$

Дифференцируемъ во второй разъ

$$mdx dy - 2dy^2 + (mx - 2y) d^2y = mdy dx + 2dx^2$$

$$(mx - 2y) d^2y = 2(dx^2 + dy^2) \quad (B)$$

Дифференцируемъ въ третій разъ

$$mdx d^2y - 2dy d^2y + (mx - 2y) d^3y = 4dy d^2y$$

$$(mx - 2y) d^3y = (6dy - m dx) d^2y \quad (C)$$

Подставимъ изъ (B) величину d^2y .

$$\text{Тогда } d^3y = \frac{2(6dy - m dx)(dx^2 + dy^2)}{(mx - 2y)^2}$$

$$\text{Но на основаніи (A) } 6dy - m dx = \frac{6my + 12x - m^2x + 2my}{(mx - 2y)} dx = \frac{8my - (m^2 - 12)x}{mx - 2y} dx$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(mx - 2y)^2 + (my + 2x)^2}{(mx - 2y)^2} dx^2 = \frac{(m^2 + 4)(x^2 + y^2)}{(mx - 2y)^2} dx^2 \quad (D)$$

$$\text{Слѣдовательно } d^3y = \frac{2(m^2 + 4)[8y - (m^2 - 12)x](x^2 + y^2)}{(mx - 2y)^5} dx^3$$

Подставивъ въ уравненіе (B) величину $dx^2 + dy^2$ (D), опредѣлимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(m^2 + 4)(x^2 + y^2)}{(mx - 2y)^3}$$

198. Дифференцируемъ данное уравненіе

$$\frac{2}{3} \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{A} - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{B} = 0$$

$$\text{или} \quad A \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{3}} dy = B \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} dx \quad (\alpha)$$

Снова дифференцируемъ, считая dx постояннымъ,

$$\frac{1}{3} A \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{A} dy + A \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{3}} d^2y = \frac{1}{3} B \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dy}{B} dx$$

$$A \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{3}} d^2y = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{2}{3}} \right] dx dy$$

Что на основаніи уравненій (α) и даннаго упрощается

$$\left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} d^2y = \frac{B dx^2}{3A^2} \quad (\beta)$$

Дифференцируемъ въ третій разъ

$$\left[\frac{4}{3} \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{A} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dy}{B} \right] d^2y + \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} d^3y = 0$$

Исключаемъ dy и d^2y на основаніи (α) и (β)

$$\left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} d^3y = - \frac{B dx^2}{9A^2} \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{1}{3}} \left[4 \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{A} + \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{A} \right]$$

$$d^3y = - \frac{B^2}{9A^3 y} \left(\frac{A}{x} \right)^{\frac{7}{3}} \left[4 \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{A} \right)^{\frac{2}{3}} \right] dx^3 = - \frac{B}{9A^3} \left(\frac{B}{y} \right) \left(\frac{A}{x} \right)^{\frac{7}{3}} \left[1 + 5 \left(\frac{y}{B} \right)^{\frac{2}{3}} \right] dx^3$$

199. За независимое переменное принимается y . Слѣд. $d^2y = 0$

Дифференцируемъ данное уравненіе

$$-y^2 dx + 2(2a - x)y dy - 3x^2 dx = 0$$

Умноживъ на y , исключимъ $(2a - x)$

$$(y^3 + 3x^2y) dx = 2x^3 dy \quad (A)$$

Вторично дифференцируемъ

$$(3y^2 + 3x^2) dy dx + 6xy dx^2 + (y^3 + 3x^2y) d^2x = 6x^2 dy dx$$

$$(y^3 + 3x^2y) d^2x = 3x^2 dx dy - 3y^2 dx dy - 6xy dx^2 \quad (B)$$

Дифференцируемъ снова

$$3y^2 dy d^2x + 3x^2 dy d^2x + 6xy dx d^2x + (y^3 + 3x^2y) d^3x = \\ = 6x dx^2 dy + 3x^2 dy d^2x - 6y dx dy^2 - 3y^2 dy d^2x - 6y dx^3 - 6x dy dx^2 - 12xy dx d^2x$$

$$y(y^2 + 3x^2) d^3x = -6y \left[dx(dy^2 + dx^2) + (y dy + 3x dx) d^2x \right]$$

$$\text{Вставляемъ изъ (B) вмѣсто } d^2x \text{ равное ему } \frac{(-3y^2 + 3x^2) dy - 6xy dx}{(y^3 + 3x^2y)} dx$$

Тогда опредѣлимъ

$$d^3x = - \frac{6}{(y^2 + 3x^2)} \cdot \frac{(y^3 + 3x^2y)(dy^2 + dx^2) + (y dy + 3x dx)[(-3y^2 + 3x^2) dy - 6xy dx]}{(y^3 + 3x^2y)} dx$$

$$d^3x = - \frac{6}{y(y^2 + 3x^2)^2} \left[(-2y^3 + 6yx^2) dy^2 + (15y^2x - 9x^3) dx dy + (-15x^2y + y^3) dx^2 \right] dx$$

Исключая dx на основаніи (A) и сокративъ въ послѣднемъ одночленѣ на y , имѣемъ

$$d^3x = \frac{24x^3}{y^3(y^2 + 3x^2)^5} (y^8 + 3y^6x^2 - 24y^4x^4 - 65y^2x^6 + 57x^8) dy^3$$

200. Опредѣливъ y изъ даннаго уравненія, найдемъ

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24 \frac{10 - 13x + 12x^2 - x^3}{(x^2 - 4x + 3)^4}$$

Если бы представили y въ видѣ двухъ дробей, коихъ знаменатели суть сомножители многочлена $x^2 - 4x + 3$, то производныя получились бы легче

$$y''' = -3 \left[\frac{1}{(x-3)^4} - \frac{1}{(x-1)^4} \right] = -24 \frac{(x-2)[(x-2)^2 + 1]}{(x-1)^4(x-3)^4}$$

При дифференцированьи по правилу неявныхъ функцій получили бы

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 3)y' + 2y(x-2) &= 0 \\ (x^2 - 4x + 3)y'' + 4(x-2)y' + 2y &= 0 \\ (x^2 - 4x + 3)y''' + 6(x-2)y'' + 6y' &= 0 \end{aligned}$$

Умножаемъ на коэффициентъ при высшей производной послѣднее уравненіе и замѣняемъ изъ предыдущаго $(x^2 - 4x + 3)y''$ черезъ $-[4(x-2)y' + 2y]$

$$\text{Тогда } (x^2 + 4x + 3)^2 y''' - 6(3x^2 - 12x + 13)y' - 12(x-2)y = 0$$

Еще разъ умножая на тотъ же коэффициентъ и замѣняя $-(x^2 - 4x + 3)y'$ черезъ $2y(x-2)$, получимъ

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 3)^3 y''' + 12(3x^2 - 12x + 13)(x-2)y - 12(x^2 - 4x + 3)(x-2)y &= 0 \\ y''' = -24y(x-2) \frac{(x-2)^2 + 1}{(x^2 - 4x + 3)^3} \end{aligned}$$

Въ тождествѣ послѣдняго выраженія съ отвѣтами, полученными раньше, убѣдились бы, замѣнивъ y изъ даннаго уравненія.

$$201. 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} \right)'_x; \quad xy' - y = x^2 \cos^2 \frac{y}{x}$$

$$y' + xy'' - y' = 2x \cos^2 \frac{y}{x} - 2x^2 \cos^2 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} \right)'_x$$

$$y'' = 2 \cos^2 \frac{y}{x} - 2x \cos^3 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}$$

$$y''' = -2 \cos^3 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} + \left[-4 \cos^2 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} - 2x \cos^4 \frac{y}{x} + 6x \cos^2 \frac{y}{x} \sin^2 \frac{y}{x} \right] \left(\frac{y}{x} \right)'_x$$

$$= -8x \cos^6 \frac{y}{x} + 6x \cos^4 \frac{y}{x} - 6 \cos^3 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}$$

$$y^{IV} = -8 \cos^6 \frac{y}{x} + 6 \cos^4 \frac{y}{x} + \left[+48x \cos^5 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} - 24x \cos^3 \frac{y}{x} \sin^2 \frac{y}{x} + 18 \cos^2 \frac{y}{x} \sin^2 \frac{y}{x} - 6 \cos^4 \frac{y}{x} \right] \left(\frac{y}{x} \right)'_x$$

$$= 48x \cos^7 \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} - 24x \cos^5 \frac{y}{x} \sin^2 \frac{y}{x} + 24 \cos^4 \frac{y}{x} - 32 \cos^6 \frac{y}{x}$$

Если бы догадались разрѣшить относительно y , то отвѣтъ получился бы проще, и притомъ въ функціи только x .

$$y^{IV} = 8 \frac{5x^2 - 1}{(1 + x^2)^4}$$

Оба отвѣта тождественны въ силу даннаго уравненія.

$$202. dx = f'(y) dy \quad \text{Откуда} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

$$0 = f''(y) dy^2 + f'(y) d^2y$$

$$0 = f''(y) \frac{1}{f'(y)^2} dx^2 + f'(y) d^2y$$

$$\text{Откуда} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''(y)}{f'(y)^3}$$

$$203. \cos(x^2 - y^2)(2x dx - 2y dy) = -\sin(x^2 - y^2)(2x dx - 2y dy) \\ 2[\cos(x^2 - y^2) + \sin(x^2 - y^2)](x dx - y dy) = 0$$

$$\text{Сокративъ:} \quad x dx - y dy = 0$$

(A)

$$dx^2 - dy^2 - y d^2 y = 0 \quad \text{Откуда} \quad d^2 y = \frac{y^2 - x^2}{y^3} dx^2$$

Лѣвая часть уравненія (A) есть дифференціалъ отъ $\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)$, т. е. $d\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) = 0$; следовательно $x^2 - y^2 = \text{пост.}$ можетъ замѣнить данное соотношеніе. Дѣйствительно: Обѣ части даннаго уравненія можно разсматривать, какъ функціи разности $(x^2 - y^2)$; другими словами мы имѣемъ уравненіе относительно одного неизвѣстнаго $(x^2 - y^2)$. Изъ этого уравненія неизвѣстное $(x^2 - y^2)$ можетъ быть опредѣлено въ функціи остальныхъ величинъ, входящихъ въ уравненіе, (хотя бы и приближенно, но во всякомъ случаѣ), какъ постоянная величина (въ функціи, какъ говорятъ, постоянныхъ параметровъ даннаго уравненія). Значить изъ даннаго соотношенія прямо слѣдуетъ, что $x^2 - y^2 = \text{const.}$ Откуда (A) и т. д.

Здѣсь и на самомъ дѣлѣ можно показать, что это за постоянная. Дѣйствительно $\cos(x^2 - y^2) \equiv \sin\left[\frac{\pi}{2} \pm (x^2 - y^2)\right]$ на основаніи формулъ тригонометріи.

Внося въ данное соотношеніе, опредѣлимъ $\sin(x^2 - y^2) = \sin\left[\frac{\pi}{2} \pm (x^2 - y^2)\right]$; откуда $x^2 - y^2 = \frac{\pi}{2} \pm (x^2 - y^2) + 2n\pi$, гдѣ n произвольное. Взявъ (+), получили бы безконечно большое рѣшеніе; взявъ (—), опредѣлимъ $x^2 - y^2 = \frac{\pi}{4} + n\pi = \frac{4n+1}{4}\pi$.

$$204. f'\left(\frac{x}{x+y}\right)\left(\frac{x}{x+y}\right)' = 0; \quad f'\left(\frac{x}{x+y}\right) \cdot \frac{x+y-x(1+y'_x)}{(x+y)^2} = 0; \quad y = xy'.$$

Проще замѣтить, что данное соотношеніе есть уравненіе относительно одного неизвѣстнаго $\left(\frac{x}{x+y}\right)$, каковое и опредѣлится въ функціи постоянныхъ параметровъ даннаго уравненія; слѣд. $\frac{x}{x+y} = c$. (A). Взявъ производную по x , получимъ $x+y-x(1+y')=0$; откуда $y = xy'$ (B)

Снова взявъ производную по x , найдемъ

$$y' = y' + xy''; \quad y'' = 0.$$

Изъ уравненія (B) слѣдуетъ $y' = \frac{y}{x}$. (C)

Выраженіе $\frac{y}{x}$, равное y' , въ силу (A) постоянно!

Если бы (A) привели къ одному знаменателю, то имѣли бы

$$x = c(x+y) \quad (D); \quad 1 = c + cy' \quad (E); \quad 0 = 0 + cy''; \quad \text{слѣд. } y'' = 0$$

Изъ уравненія (E) $y' = \frac{1-c}{c}$ (F). Тожество (F) съ (C) обнаружится, если изъ (E) исключить c на основаніи (D). Въ самомъ дѣлѣ,

$$\text{тогда} \quad y' = \frac{1 - \frac{x}{x+y}}{\frac{x}{x+y}} = \frac{y}{x}$$

205. Перепишемъ данное соотношеніе въ видѣ

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^3} - f\left(\frac{y-1}{x-1}\right) = 0$$

Замѣчаемъ, что оно представляетъ уравненіе относительно одного сложнаго неизвѣстнаго $\left(\frac{y-1}{x-1}\right)$; это неизвѣстное, слѣдовательно, опредѣлится*) въ функціи остальныхъ (постоянныхъ) параметровъ уравненія. Данное соотношеніе, значитъ, можно замѣнить ему равнозначущимъ $\frac{y-1}{x-1} = \text{Const}$

Тогда
$$\frac{dy}{x-1} - \frac{y-1}{(x-1)^2} dx = 0 \quad \text{или} \quad (x-1) dy = (y-1) dx$$

Считая dy постояннымъ, ибо y по условію независимое перемѣнное, $dx dy = dy dx + (y-1) d^2 x$; $d^2 x = 0$

206. $f\left(x + \frac{2}{xy}\right) = \left(x + \frac{2}{xy}\right)^2$ Слѣдовательно $x + \frac{2}{xy} = \text{const}$

$$dx - \frac{2}{x^2 y} dx - \frac{2}{xy^2} dy = 0 \quad (A); \quad (x^2 y^2 - 2y) dx - 2x dy = 0$$

Такъ какъ dx постоянное, то $2xy^2 dx^2 + (2x^2 y - 4) dy dx - 2x d^2 y = 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y^2 + \frac{y}{2} \left(xy - \frac{2}{x}\right)^2$$

Если бы не замѣтили указаннаго упрощенія и дифференцировали непосредственно данное уравненіе, то перенеся всѣ члены перваго дифференціальнаго уравненія въ одну сторону и сокративъ на множителя

пришли бы къ уравненію (A)
$$\left[f'\left(x + \frac{2}{xy}\right)_{\left(x + \frac{2}{xy}\right)} - 2\left(x + \frac{2}{xy}\right) \right],$$

207. Пусть $\cos y = \beta$; $f(x, \cos y) \equiv f(x, \beta)$ — это сложная функція x^{\cos} , входящаго, во первыхъ, явно, во вторыхъ — черезъ β .

Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} y' = 0 \quad (A)$$

Лѣвая часть уравненія (A) — сложная функція независимаго перемѣннаго x^{\cos} . Въ нее x входитъ, во первыхъ, явно, во вторыхъ черезъ β , т. е. черезъ $\cos y$, въ третьихъ черезъ $\sin y$, въ четвертыхъ черезъ y' ; а потому, взявъ отъ (A) производную по x , получимъ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} (-\sin y) y' - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} (-\sin y) y'^2 - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} y'^2 - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} y'' = 0$$

Первые два члена — производная отъ лѣвой части уравненія (A) по x^{\cos} , входящему явно; вторые два — по x^{\cos} , входящему черезъ β , пятый — черезъ $\sin y$, шестой — черезъ y' . По упрощеніи

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} y' + \left(\sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) y'^2 - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} y'' = 0 \quad (B).$$

Лѣвая часть уравненія (B) — тоже сложная функція x^{\cos} . Сверхъ выше указанныхъ способовъ x входитъ еще черезъ y'' . Взявъ снова производную, получимъ

*) Безразлично, можно ли въ самомъ дѣлѣ рѣшить уравненіе, т. е. сумѣть написать выраженіе для неизвѣстнаго при помощи конечнаго числа употребительныхъ въ элементахъ дѣйствій, или нельзя.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - 2\sin y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \beta} y' + \sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \beta^2} y'^2 - \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} y'^2 - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} y'' + \\ + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \beta} (-\sin y) y' - 2\sin y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \beta^2} (-\sin y) y'^2 + \sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} (-\sin y) y'^3 - \\ - (-\sin y) \frac{\partial f}{\partial \beta} y'^3 - \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} (-\sin y) y'^3 + \sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} y' y'' - \\ - 2\cos y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} y'^2 + 2\sin y \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} y'^3 - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} y' y'' - \\ - 2\sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} y'' + 2\sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} y' y'' - 2\cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} y' y'' - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} y''' = 0. \end{aligned}$$

По упрощеніи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - 3\sin y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \beta} y' + 3 \left[\sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} \right] y'^2 + \left[-\sin^3 y \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} + 3\sin y \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] y'^3 + \\ + 3 \left[\left(\sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) y' - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} \right] y'' - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} y''' = 0 \end{aligned}$$

Изъ послѣдняго уравненія исключаемъ y'' на основаніи (B); затѣмъ въ полученномъ уравненіи исключаемъ y' на основаніи (A). Тогда опредѣлимъ изъ окончательнаго уравненія y''' .

Чтобы не считаться со сложными функціями, воспользуемся свойствомъ дифференціаловъ, что они пишутся безразлично, будутъ ли аргументы зависимыми или независимыми переменными.

Первое дифференцированіе даетъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial \beta} (-\sin y) dy = 0; \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} dy = 0 \quad (C)$$

Снова дифференцируемъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx dy - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} dy^2 - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx dy + \sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} dy^2 - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} d^2 y = 0$$

$$\text{По упрощеніи} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 - 2\sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx dy + \left[\sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] dy^2 - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} d^2 y = 0 \quad (D)$$

Третій разъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 - \sin y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \beta} dx^2 dy - 2\cos y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx dy^2 - 2\sin y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \beta} dx^2 dy + 2\sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \beta^2} dx dy^2 - \\ - 2\sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx d^2 y + 2\sin y \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} dy^3 + \sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^2 \partial x} dx dy^2 - \sin^3 y \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} dy^3 + \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} dy^3 - \\ - \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx dy^2 + \sin y \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} dy^3 + 2 \left[\sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] dy d^2 y - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} dy d^2 y - \\ - \sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} dx d^2 y + \sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} dy d^2 y - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} d^3 y = 0 \end{aligned}$$

Что дастъ по приведеніи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 - 3\sin y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \beta} dx^2 dy + 3 \left[\sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} \right] dx dy^2 + \sin y \left[\frac{\partial f}{\partial \beta} + 3\cos y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \sin^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial \beta^3} \right] dy^3 + \\ + 3 \left[\sin^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \cos y \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] dy d^2 y - 3\sin y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \beta} d^2 y - \sin y \frac{\partial f}{\partial \beta} d^3 y = 0 \end{aligned}$$

Сначала исключается $d^2 y$ на основаніи уравненія (D), затѣмъ dy на основаніи (C). Тогда $d^3 y$ опредѣлится, какъ произведеніе нѣкотораго множителя на dx^3 ; раздѣливъ на dx^3 , найдемъ выраженіе для y''' .

Примѣчаніе: Въ символѣ $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ β есть $\cos y$; поэтому $\frac{\partial f}{\partial \beta} \equiv \frac{\partial f}{\partial (\cos y)}$. Это обстоятельство наводитъ на замѣну $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ черезъ $\frac{\partial f}{\partial \sin y}$ или $-\frac{1}{\sin y} \frac{\partial f}{\partial y}$. Дѣйствительно эти выраженія всѣ тождественны, но въ данномъ примѣрѣ подобная замѣна услож-

нила бы передѣлки, ибо y въ выраженіе f входитъ только черезъ β , а потому $\frac{\partial f}{\partial y}$ не иначе могла бы быть вычислена, какъ произведеніе $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ на $\frac{\partial \beta}{\partial y}$, т.е. на $-\sin y$.
т. е. $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv (-\sin y \frac{\partial f}{\partial \beta})$

208. Здѣсь и x , и y выражены въ функціи третьяго переменнаго t . Чтобы найти y'_x , можно взглянуть исключительно съ формальной стороны; именно производная отъ y по x , по опредѣленію дифференціала y есть частное отъ дѣленія dy на dx . Поэтому, отыскавъ

$$dy = \frac{2}{(5t^2 - 4)\sqrt{t^2 - 1}} dt; \quad dx = \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt; \quad (A)$$

$$\text{опредѣлимъ } y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{5t^2 - 4}$$

Иначе: можно разсматривать y какъ функцію отъ t , функціи независимаго переменнаго x . Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$. Но изъ (A): $\frac{dt}{dx} = t\sqrt{t^2 - 1}$;

$$\text{Слѣд., } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{(5t^2 - 4)\sqrt{t^2 - 1}} \cdot t\sqrt{t^2 - 1} = \frac{2t}{5t^2 - 4}$$

$$\mathbf{209.} \quad y''_{x,x} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d \frac{2t}{5t^2 - 4}}{dt \cdot dx} = \frac{2(5t^2 - 4) - 2t \cdot 10t}{(5t^2 - 4)^2} \cdot t\sqrt{t^2 - 1} = -\frac{2t(5t^2 + 4)\sqrt{t^2 - 1}}{(5t^2 - 4)^2}$$

Иначе: считая t независимымъ переменнымъ,

$$y''_{x,x} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx \frac{dy}{dx} - a^2 x dy}{dx^3}$$

Здѣсь $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$ — символическое обозначеніе. Только при условіи, что x независимое переменное, а dx всегда одно и то же, а слѣд. $d^2 x = 0$, $y''_{x,x}$ будетъ частнымъ отъ дѣленія $d^2 y$ на dx^2 ; здѣсь же x зависитъ отъ t , а потому $d^2 x$ не равно нулю, а $d^2 t = 0$

$$d^2 y = \frac{2t(15t^2 - 14)}{(5t^2 - 4)^2 \sqrt{t^2 - 1}^3} dt^2 \quad (A); \quad d^2 x = -\frac{2t^2 - 1}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}^3} dt^2$$

$$y''_{x,x} (*) = -\frac{2t(5t^2 + 4)\sqrt{t^2 - 1}}{(5t^2 - 4)^2}$$

Еще иначе: считая x независимымъ переменнымъ, а t его функціей, какъ въ первомъ изъ предыдущихъ способовъ, можно получить $y''_{x,x}$ и дѣленіемъ $d^2 y$ на dx^2 . Но тогда $d^2 y$ будетъ равенъ другой величинѣ, чѣмъ (A), ибо здѣсь $d^2 x = 0$, а $d^2 t$ не будетъ нулемъ.

$$d^2 y = -\frac{2t(15t^2 - 14)}{(5t^2 - 4)^2 \sqrt{t^2 - 1}^3} dt^2 + \frac{2}{(5t^2 - 4)\sqrt{t^2 - 1}} d^2 t$$

$$\text{Но по предыдущему } dt = t\sqrt{t^2 - 1} dx; \quad d^2 t = \frac{2t^2 - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt dx = t(2t^2 - 1) dx^2$$

$$a^2 y = \left[-\frac{2t^3(15t^2 - 14)}{(5t^2 - 4)^2 \sqrt{t^2 - 1}} + \frac{2t(2t^2 - 1)}{(5t^2 - 4)\sqrt{t^2 - 1}} \right] dx^2; \quad \text{откуда } y''_x = d^2 y : dx^2 = -\frac{2t(5t^2 + 4)\sqrt{t^2 - 1}}{(5t^2 - 4)^2}$$

*) Здѣсь придется освободиться отъ ирраціональности въ знаменателѣ и сократить числитель и знаменатель на общаго сомножителя.

$$210. \quad dx = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt \quad (A); \quad dy = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)} dt \quad (B)$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{t^2-2t-1}{2(1-t^2)} \quad \text{безразлично, что считая независимымъ переменнымъ.}$$

Для нахождения второй производной необходимо условиться: пусть t разсматривается, какъ независимое.

$$\text{Тогда} \quad d^2x = -\frac{4t(3-t^2)}{(1+t^2)^3} dt^2; \quad d^2y = -\frac{2(t^3-3t^2-3t+1)}{(1+t^2)^3} dt^2$$

Но для t независимаго $y''_{x,x} = \frac{dx d^2y - d^2x dy}{dx^3}$. Сдѣлавъ подстановку, сокративъ и замѣнивъ (t^4+2t^2+1) черезъ равное ему $(t^2+1)^2$, опредѣлимъ

$$y''_{x,x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^3$$

Можно считать за независимое x , тогда дифференцируя (B),

$$d^2y = -\frac{2(t^3-3t^2-3t+1)}{(1+t^2)^3} dt^2 + \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)} d^2t \quad (C)$$

dt опредѣлится изъ (A); взявъ отъ полученнаго выраженія дифференціалъ, опредѣлимъ d^2t .

Или приведемъ (A) къ одному знаменателю $2(1-t^2)dt = (1+t^2)^2 dx$; тогда дифференцируемъ:

$$2(1-t^2)d^2t - 4t dt^2 = 4t(1+t^2) dt dx; \quad \text{откуда} \quad d^2t = \frac{t}{2}(3-t^2) \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^3 dx^2.$$

Вставляя въ (C),

$$d^2y = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^3 dx^2; \quad \text{Слѣд.,} \quad y''_{x,x} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^3$$

Вторую производную можно было бы опредѣлить

$$y''_{x,x} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d \frac{t^2-2t-1}{2(1-t^2)} dt}{dt dx} = -\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{2(1-t^2)}$$

Точно также первую производную изъ второго заданнаго уравненія

$$y'_x = \left(\frac{1-t}{1+t^2} \right)'_t t'_x = \frac{t^2-2t-1}{2(1+t^2)} t'_x$$

t'_x изъ перваго заданнаго уравненія, считая t неявной функціей x^{ca} ,

$$1 = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)'_t t'_x = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} t'_x \quad \text{откуда} \quad t'_x = \frac{(1+t^2)^2}{2(1-t^2)}; \quad \text{а} \quad y'_x = \frac{t^2-2t-1}{2(1-t^2)}$$

$$211. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ибо t въ обоихъ уравненіяхъ играетъ роль котангенса соотвѣтственныхъ дугъ. Значитъ y и x дуги, коихъ котангенсы равны (или отличаются только знаками). Слѣдовательно $y = n\pi \pm x$. Число n и знакъ при x избираются соотвѣтственно тому, въ какихъ четвертяхъ по условію лежитъ y и x (знакъ радикала тоже можетъ быть опредѣленъ въ условіи) Слѣдовательно $y'_x = \pm 1$; $y''_{x,x} = 0$.

Иначе изъ перваго уравненія $t^2 = \cotg^2 y$; изъ второго $t^2 = \cotg^2 x$ Слѣдовательно $\cotg^2 y = \cotg^2 x$; $\cotg y = \pm \cotg x = \cotg(\pm x)$; $y = n\pi \pm x$.

Если бы дифференцировали, то $dy = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(1+t^2)} dt$; $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(1+t^2)} dt$
Слѣдовательно $dy = \pm dx$.

Функціи неявныя многихъ независимыхъ переменныхъ.

212. По условію здѣсь z является функціей, зависящей отъ x, y, t , переменныхъ другъ отъ друга независимыхъ. Требуется отыскать производную по x . Тогда вообразивъ, что y и z не мѣняются (принявъ, впрочемъ, хоть и постоянныя, но любыя, нами напередъ заданныя, значенія), станемъ мѣнять одно x . Тогда z будетъ какъ бы функціей одного x^{ca} .

Перепишемъ наше соотношеніе въ болѣе удобной формѣ

$$z(y+2t) = x + (y+2t) \log(x^3 + 5yt^2)$$

и дифференцируемъ обѣ его части, какъ функціи одного x^{ca} *)

$$\frac{\partial z}{\partial x} (y+2t) = 1 + \frac{(y+2t) 3x^2}{x^3 + 5yt^2}; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y+2t} + \frac{3x^2}{x^3 + 5yt^2}$$

Полагая, что не мѣняются x и y , дифференцируемъ, считая z , какъ бы функціей одного t , (сложной, ибо t входитъ явно и черезъ z),

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} (y+2t) + 2z &= 2 \log(x^3 + 5yt^2) + \frac{(y+2t) \cdot 10ty}{x^3 + 5yt^2} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -2 \frac{z - \log(x^3 + 5yt^2)}{y+2t} + \frac{10ty}{x^3 + 5yt^2} \end{aligned}$$

213. Можно отыскивать каждую производную отдѣльно по каждому изъ независимыхъ переменныхъ x, y, z , считая, что остальные не мѣняются **). Но скорѣе достигнемъ цѣли и избѣжимъ повторенія однихъ и тѣхъ же дифференцированій, если отыщемъ сразу du

$$\begin{aligned} & -\frac{u^2}{u^2 + (z^2 + a^2)^2} \left(\frac{2zdz}{u} - \frac{z^2 + a^2}{u^2} du \right) + 2zudz + (z^2 - a^2) du = y^2 dx + 2xydy \\ du &= \frac{y^2 [u^2 + (z^2 + a^2)^2]}{(z^2 + a^2) + (z^2 - a^2) [u^2 + (z^2 + a^2)^2]} dx + \frac{2xy [u^2 + (z^2 + a^2)^2]}{(z^2 + a^2) + (z^2 - a^2) [u^2 + (z^2 + a^2)^2]} dy + \\ & \quad + \frac{2zu [1 - u^2 - (z^2 + a^2)^2]}{(z^2 + a^2) + (z^2 - a^2) [u^2 + (z^2 + a^2)^2]} dz \end{aligned}$$

Коэффициенты при дифференціалахъ и будутъ частными производными отъ u по соотвѣтственнымъ переменнымъ въ силу формулы:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

214. Предполагая, что y и z не мѣняются, беремъ частную производную обѣ обѣихъ частей уравненія по x .

(Правая часть — функція отъ x сложная, ибо x входитъ и явно, и черезъ u).

*) и, понятно, приравниваемъ другъ другу производныя отъ обѣихъ частей.

**) По отдѣльнымъ частнымъ производнымъ сдумѣли бы написать и полный дифференціалъ отъ u .

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right) + u \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)} \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}$$

Или $\frac{\partial u}{\partial x} \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right) - u \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)} \frac{y}{x^2} = 0$

Откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uy}{x^2 \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)} \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}$

Оставляя безъ переменны x и z , дифференцируемъ данное соотношеніе по y (φ сложная функція y , входящая черезъ оба аргумента функции, черезъ одинъ — какъ знаменатель его, черезъ второй — какъ числитель; кромѣ того y входитъ въ правую часть даннаго уравненія черезъ u).

$$ny^{n-1} = \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} \frac{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial y} + u \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)} \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}$$

$$ny^{n-1} = \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{uz}{y^2} \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} + \frac{u}{x} \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Откуда $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{ny^{n-1}}{\varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)} + \frac{uz}{y^2 \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)} \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} - \frac{u}{x \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)} \frac{\partial \varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}$

215. Беремъ полный дифференціалъ отъ обѣихъ частей даннаго соотношенія

$$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta; \quad d\theta = \frac{dr \cos \theta - dx}{r \sin \theta}$$

Чтобы выраженіе $d\theta$ не содержало зависимаго переменнаго θ , исключимъ $\cos \theta$ и $\sin \theta$ при помощи даннаго уравненія

$$\cos \theta = \frac{x}{r}; \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

Тогда $d\theta = \frac{\frac{x}{r} dr - dx}{r \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}} = \frac{x dr - r dx}{r \sqrt{r^2 - x^2}}$

То же выраженіе для $d\theta$ получили бы, рѣшивъ данное отношеніе относительно θ

$$\theta = \arccos \frac{x}{r}$$

216. Упростимъ данное уравненіе

$$e^{z - (x^2 + 2xy - y)} \sin x + y \cos x = \cos y$$

Дифференцируемъ обѣ части по y

(въ лѣвую часть y входитъ явно и черезъ z)

$$e^{z - (x^2 + 2xy - y)} \sin x + y \cos x \left[\frac{\partial z}{\partial y} - (2x - 1) \sin x + \cos x \right] = -\sin y$$

Замѣнивъ показательную функцію черезъ $\cos y$ на основаніи даннаго уравненія, опредѣлимъ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x - 1) \sin x - \cos x - \operatorname{tg} y$$

Взявъ снова производную по y ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{\cos^2 y}$$

Чтобы опредѣлить dz , беремъ отъ обѣихъ частей даннаго уравненія полный дифференціалъ, (считая что всѣ переменныя мѣняются),

$$e^{z-(x^2+2xy-y)\sin x+y\cos x} \left[dz - (2xdx + 2ydx + 2xdy - dy)\sin x - \right. \\ \left. - (x^2 + 2xy - y)\cos x dx + \cos x dx - y\sin x dx \right] = -\sin y dy$$

Замѣняя показательную функцію, опредѣлимъ

$$dz = [(2x + 3y)\sin x + (x^2 + 2xy - y)\cos x] dx + [(2x - 1)\sin x - \cos x - \operatorname{tg} y] dy.$$

Коэффициентъ при dy есть $\frac{\partial z}{\partial y}$, что мы и раньше получили. Взявъ отъ этого коэффициента частную производную по y , получили бы $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

217. Беремъ отъ обѣихъ частей даннаго уравненія частную производную по x

$$2y = -\frac{1}{\sqrt{1-(2z-1)^2}} \cdot 2z \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{или} \quad z \frac{\partial z}{\partial x} - 2y\sqrt{z-z^2} = 0$$

Снова беремъ частную производную отъ лѣвой части полученнаго уравненія, считая ее сложной функціей $x^{\cos x}$, такъ какъ x входитъ двояко, черезъ z и черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ *), и приравниваемъ ее нулю (производной отъ нуля, т. е. отъ правой части предыдущаго уравненія).

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{y(1-2z)}{\sqrt{z-z^2}} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Первый одночленъ — производная отъ лѣвой части по x , входящему черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$; вторые два — по x , входящему черезъ z .

$$\text{Вставляемъ} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y\sqrt{z-z^2}}{z} \quad \text{Тогда} \quad z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{4y^2(1-z)}{z} - \frac{2y^2(1-2z)}{z} = 0$$

$$\text{Откуда} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x^2}{z^2}$$

218. Сначала возьмемъ частную производную по x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + ye^z \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{или} \quad (1 - ye^z) \frac{\partial z}{\partial x} - 1 = 0 \quad (A).$$

Теперь беремъ отъ полученнаго частную производную по y (лѣвая часть — сложная функція отъ y , входящаго: явно, черезъ z и черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$).

$$\text{Тогда} \quad (1 - ye^z) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - e^z \frac{\partial z}{\partial x} - ye^z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Первый одночленъ — производная по y , входящему черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ (такъ какъ z функція отъ x и y , то и всѣ производныя отъ z , вообще говоря, также функціи отъ x и y); второй одночленъ — по y , входящему явно; третій — по y , входящему черезъ z . Въ послѣднее уравненіе требуется подставить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$; первая изъ этихъ частныхъ производныхъ опредѣляется изъ (A); чтобы получить выраженіе второй, приходится вернуться къ данному уравненію, взявъ отъ него частную производную по y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^z + ye^z \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{или} \quad (1 - ye^z) \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \quad (B)$$

*) Явно въ данномъ уравненіи x не входитъ.

Тогда $(1 - ye^z) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{e^z}{1 - ye^z} - \frac{ye^{2z}}{(1 - ye^z)^2} = 0$; откуда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^z}{(1 - ye^z)^3}$

На основаніи даннаго уравненія можно отвѣтъ выразить безъ показательной функціи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z - x}{y(1 + x - z)^3}$$

Освободиться отъ показательной функціи можно было бы заранѣе въ (A) и (B)

$$(1 + x - z) \frac{\partial z}{\partial x} - 1 = 0 \quad (A'); \quad (1 + x - z) \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - x}{y} \quad (B')$$

Отъ (A') надо взять частную производную по y . Замѣчаемъ, что въ лѣвую часть y входитъ черезъ z и черезъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, а явно не входитъ. Отъ этого дифференцирование упрощается

$$(1 + x - z) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z - x}{y(1 + x - z)^3}$$

При рѣшеніи предыдущаго вопроса были опредѣлены обѣ производныя перваго порядка; поэтому выраженіе dz напишется сразу.

$$dz = \frac{1}{1 + x - z} dx + \frac{z - x}{y(1 + x - z)} dy$$

Обратно, написавъ раньше dz (что иногда избавляетъ отъ повторенія однихъ и тѣхъ же дифференцированій), однимъ добавочнымъ дифференцированіемъ пришли бы къ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$dz = dx + e^z dy + ye^z dz; \quad (1 - ye^z) dz = dx + e^z dy;$$

$$dz = \frac{1}{(1 + x - z)} dx + \frac{(z - x)}{y(1 + x - z)} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{1 + x - z} = -\frac{1}{(1 + x - z)^2} \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{z - x}{y(1 + x - z)^3}$$

219. Заданное уравненіе можно упростить $xy^2z^4 = 1$ (A)

Беремъ производную по y $2xy^2z^4 + 4xy^2z^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ или $z + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (B)

Снова производную по y $3 \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3z}{4y^2}$ [= $\frac{3}{4} xz^5$]
въ силу даннаго уравненія

Чтобы написать d^2z , надо кромѣ найденной отыскать остальные двѣ производныя втораго порядка.

Беремъ частную производную по x отъ (A) $z + 4x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (C)

Снова по x $5 \frac{\partial z}{\partial x} + 4x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; откуда $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{5z}{16x^2}$

Производная по x отъ (B) $\frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

Откуда, принимая во вниманіе (C), $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z}{8xy}$

Тогда по формулѣ $d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$ опредѣлимъ

$$d^2z = \frac{5z}{16x^2} dx^2 + 2 \frac{z}{8xy} dx dy + \frac{3z}{4y^2} dy^2$$

Или, избавляясь от знаменателей при помощи (А),

$$d^2z = \frac{5}{16} y^4 z^9 dx^2 + \frac{yz^5}{4} dx dy + \frac{3}{4} x z^5 dy^2$$

Если бы требовалось найти только $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, то слѣдовало бы два раза брать частную производную по y .

Напротивъ, если бы сразу имѣли въ виду отыскать d^2z , либо всѣ частныя производныя втораго порядка, то слѣдовало бы брать полный дифференціалъ отъ (А), причемъ здѣсь полезно было бы (А) прологарифмировать $\log x + 2\log y + 4\log z = 0$.

Тогда $\frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} + \frac{4dz}{z} = 0$; $-\frac{dx^2}{x^2} - \frac{2dy^2}{y^2} - 4\frac{dz^2}{z^2} + 4\frac{d^2z}{z} = 0$

Исключая $(\frac{dz}{z})^2$, опредѣлимъ $d^2z = \frac{5z}{16x^2} dx^2 + \frac{z}{4xy} dx dy + \frac{3z}{4y^2} dy^2$

Первый и третій коэффициенты и половина втораго представили бы соотвѣтствующія вторыя производныя отъ z .

220. Беремъ полный дифференціалъ даннаго уравненія

(т. е. дифференціалы обѣихъ частей и приравниваемъ ихъ другъ другу).

$$\frac{dx}{x} = \log z dy + \frac{y}{z} dz ; \quad \text{или} \quad y x dz + x z \log z dy - z dx = 0 \quad (A)$$

Снова беремъ дифференціалъ (отъ лѣвой части (А) и приравниваемъ его нулю); причемъ лѣвая часть (А) рассматривается, какъ функція четырехъ аргументовъ: x, y, z и dz *)

$$x dy dz + y dx dz + y x d^2 z + z \log z dx dy + x (\log z + 1) dy dz - dx dz = 0$$

или $xy d^2 z = \left[(1-y) dx - x (2 + \log z) dy \right] \left[\frac{z}{xy} dx - \frac{z \log z}{y} dy \right] - z \log z dy dx$

$$d^2 z = \frac{(1-y)z}{x^2 y^2} dx^2 - 2 \frac{z(1+\log z)}{xy^2} dx dy + \frac{z \log z (2+\log z)}{y^2} dy^2 \quad (A)$$

Если бы пожелали вычислять частными производными, то имѣли бы

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{z} z'_x \quad \text{или} \quad z = x y z'_x ; \quad z'_x = \frac{z}{xy}$$

$$0 = \log z + \frac{y}{z} z'_y ; \quad z \log z + y z'_y = 0 ; \quad z'_y = -\frac{z}{y} \log z$$

$$z'_x = y z'_x + x y z''_{x,x} ; \quad z''_{x,x} = \frac{1-y}{xy} z'_x = \frac{(1-y)z}{x^2 y^2}$$

$$z'_y = x z'_x + x y z''_{x,y} ; \quad z''_{x,y} = \frac{z'_y - x z'_x}{xy} = -\frac{z}{xy^2} (1 + \log z)$$

$$z'_y (\log z + 1) + z'_y + y z''_{y,y} = 0 ; \quad z''_{y,y} = -\frac{(2 + \log z) z'_y}{y} = \frac{z \log z}{y^2} (2 + \log z)$$

Тогда по формулѣ $d^2 z = z''_{x,x} dx^2 + 2 z''_{x,y} dx dy + z''_{y,y} dy^2$ составимъ тождественное съ (А) выраженіе для $d^2 z$.

221. Здѣсь y принимается за функцію независимыхъ переменныхъ x и z .

*) dx и dy могутъ каждое оставаться одинаковымъ, ибо x и y переменныя независимыя, слѣдовательно и dx и dy независимы).

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} = 0; \quad \text{откуда} \quad dy = -\frac{b^2}{y} \left(\frac{x}{a^2} dx + \frac{z}{c^2} dz \right)$$

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{y d^2 y}{b^2} = 0;$$

$$d^2 y = -\frac{b^2}{y} \left[\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{b^2}{y^2} \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{z dz}{c^2} \right)^2 \right] = \left[-\frac{b^4(c^2 - z^2)}{a^2 c^2 y^3} \right] dx^2 + 2 \left[-\frac{b^4 x z}{a^2 c^2 y^3} \right] dx dz + \left[-\frac{b^4(a^2 - x^2)}{a^2 c^2 y^3} \right] dz^2$$

Въ квадратныхъ скобкахъ послѣдняго выраженія соотвѣтственно заключены требуемыя производныя.

Если опредѣляли бы непосредственно частныя производныя, то получили бы.

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{\partial y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

$$\frac{y}{b^2} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{z}{c^2} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{b^2}{c^2} \frac{z}{y}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{y}{b^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{b^2}{a^2 y} - \frac{1}{y} \left(-\frac{b^2 x}{a^2 y} \right)^2 = -\frac{b^4(c^2 - z^2)}{a^2 c^2 y^3}$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{b^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{b^4 x z}{a^2 c^2 y^3}$$

$$\frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \frac{y}{b^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{b^2}{c^2 y} - \frac{1}{y} \left(\frac{b^2 z}{c^2 y} \right)^2 = -\frac{b^4(a^2 - x^2)}{a^2 c^2 y^3}$$

NB: Заключение о $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ можно было бы сдѣлать по симметріи, перемѣщая взаимно въ выраженіи для $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ x съ z и a съ c .

$$222. \quad 2z - \frac{\partial y}{\partial z} \cos x + \cos y \frac{\partial y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{\cos x - \cos y}$$

$$2 - (\cos x - \cos y) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \sin y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2 - \sin y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}{\cos x - \cos y} = \frac{2(\cos x - \cos y)^2 - 4z^2 \sin y}{(\cos x - \cos y)^3}$$

Иначе:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial \left(\frac{2z}{\cos x - \cos y} \right)}{\partial z} = \frac{(\cos x - \cos y) \cdot 2 - 2z \cdot \sin y \frac{\partial y}{\partial z}}{(\cos x - \cos y)^2} = \text{idem}$$

223. Освободимъ данное уравненіе отъ знаменателей

$$x^2 \cos z \log z - y = 0 \quad (A)$$

Такъ какъ въ лѣвую часть переписаннаго равенства y входитъ проще, чѣмъ x , то беремъ частную производную по y .

$$x^2 \left(\frac{\cos z}{z} - \sin z \log z \right) \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$$

$$x^2 (\cos z - z \sin z \log z) \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0 \quad (B)$$

Теперь беремъ отъ (B) частную производную по x

$$2x(\cos z - z \sin z \log z) \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 \left[\sin z (2 + \log z) + z \cos z \log z \right] \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 (\cos z - z \sin z \log z) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (C)$$

$\frac{\partial z}{\partial y}$ опредѣляется изъ (B); для опредѣленія $\frac{\partial z}{\partial x}$ надо возвратиться къ (A).

$$2x \cos z \log z + x^2 \left(\frac{\cos z}{z} - \sin z \log z \right) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

или $x(\cos z - z \sin z \log z) \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \cos z \log z = 0$.

Тогда, по умножении (C) на $x(\cos z - z \sin z \log z)^2$, получимъ

$$x^3(\cos z - z \log z \sin z)^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2(\cos z - z \sin z \log z)^2 z + [\sin z(2 + \log z) + z \cos z \log z] 2z^2 \cos z \log z +$$

$$(\cos z - z \sin z \log z) 2z \cos z \log z = 0$$

Откуда
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \frac{2z[\cos^2 z(1 + \log z) + z^2 \log^2 z]}{x^3(\cos z - z \sin z \log z)^3}$$

224. $(yz + zx + xy)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$(yz + zx + xy) \left[(y+x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z+y) \right] = x + z \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(z+y)(yz+zx+xy) - x}{z - (y+x)(yz+zx+xy)}$$

$$\left[(y+x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z+y) \right]^2 + (yz + zx + xy) \left[2 \frac{\partial z}{\partial x} + (y+x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

но
$$\left[(y+x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z+y) \right] = \frac{x + z \frac{\partial z}{\partial x}}{(yz+zx+xy)} = \frac{(z-x)(z+y+x)}{z - (y+x)(yz+zx+xy)}$$

Вставляя, опредѣлимъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\left[\frac{(z-x)^2(z+x+y)^2 + 2[z-(y+x)(yz+zx+xy)][(z+y)(yz+zx+xy) - x](yz+zx+xy) - [z-(y+x)(yz+zx+xy)]^2 - [(z+y)(yz+zx+xy) - x]^2}{[z-(y+x)(yz+zx+xy)]^3} \right]}{[z-(y+x)(yz+zx+xy)]^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{z^2 + x^2 - 2(z-x)^2(yz+zx+xz) + 2(2y+xz-1)(x^2+y^2+z^2) + 2y^2(x^2+y^2+z^2)(yz+zx+xz)}{[z-(y+x)(yz+zx+xy)]^3}$$

225. Беремъ полный дифференціалъ отъ даннаго уравненія

$$-\sin z \, dz = -\sin 2y \, dy - \sin 2x \, dx$$

Перемѣнимъ знаки и снова беремъ дифференціалъ

$$\sin z \, d^2 z + \cos z \, dz^2 = 2 \cos 2y \, dy^2 + 2 \cos 2x \, dx^2$$

Вставляя, опредѣлимъ

но
$$dz = \frac{\sin 2y \, dy + \sin 2x \, dx}{\sin^2 z}$$

$$d^2 z = \left[\frac{2 \cos 2y}{\sin z} - \frac{\cos z \sin^2 2y}{\sin^3 z} \right] dy^2 - 2 \frac{\cos z \sin 2y \sin 2x}{\sin^3 z} dy \, dx + \left[\frac{2 \cos 2x}{\sin z} - \frac{\cos z \sin^2 2x}{\sin^3 z} \right] dx^2 \quad (A)$$

Вычисленіе по частнымъ производнымъ выйдетъ нѣсколько сложнѣе.

$$-\sin z \frac{\partial z}{\partial x} = -2 \sin x \cos x; \quad \text{или} \quad \sin z \frac{\partial z}{\partial x} = \sin 2x \quad (B)$$

$$\cos z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \sin z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cos 2x; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 \cos 2x}{\sin z} - \frac{\cos z \sin^2 2x}{\sin^3 z} \quad (C)$$

$$\text{Аналогично} \quad \sin z \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2y \quad (D)$$

Уравненіе (D), служащее для опредѣленія $\frac{\partial z}{\partial y}$, получается изъ уравненія (B), служащаго для опредѣленія $\frac{\partial z}{\partial x}$, если мы въ (B) замѣнимъ x на y^* ;

*). Подобное обстоятельство имѣетъ мѣсто потому, что z симметрично выражается черезъ x и y , т. е. если въ данномъ соотношеніи, опредѣляющемъ z , переставить x съ y мъ, то вновь полученное соотношеніе будетъ тождественнымъ съ даннымъ. (z —симметрическая функція отъ x и y). Что z въ данномъ примѣрѣ симметрично относительно x и y , убѣдимся, если въ правой части даннаго уравненія, кромѣ перестановки x и y , прибавимъ и вычтемъ по единицѣ.

слѣдовательно $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ получимъ *) изъ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если въ (C) произведемъ ту же замѣну

$$\text{Итакъ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\cos 2y}{\sin z} - \frac{\cos z \sin^2 2y}{\sin^3 z} \quad (E)$$

$$\cos z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \sin z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \frac{\cos z \sin 2x \sin 2y}{\sin^3 z} \quad (F)$$

Итакъ $d^2 z = (C) dx^2 + 2(F) dx dy + (E) dy^2$, — выражение то же, что и (A).

226. Опредѣленіе $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ слѣдуетъ вести при помощи частныхъ производныхъ

$$\cos z \frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \cos x \quad \text{Откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sin y \cos x}{\cos z}$$

$$- \sin z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \cos z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \sin y \sin x$$

Замѣняя $\sin z$ черезъ $\sin y \sin x$, а $(-\cos^2 z)$ черезъ $(\sin^2 y \sin^2 x - 1)$, опредѣлимъ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin y \sin x}{\cos^3 z} (\sin^2 y \cos^2 x - \cos^2 z) = - \frac{\sin x \sin y \cos^2 y}{\cos^3 z}$

Вычислять $d^2 z$ проще всего при помощи полныхъ дифференціаловъ

$$\cos z dz = \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy$$

$$- \sin z dz^2 + \cos z d^2 z = - \sin y \sin x dx^2 + 2 \cos y \cos x dx dy - \sin y \sin x dy^2$$

$$\cos^3 z d^2 z = \sin y \sin x (\sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy)^2 + \\ + \cos^2 z (- \sin y \sin x dx^2 + 2 \cos y \cos x dx dy - \sin y \sin x dy^2)$$

$$d^2 z = - \frac{\sin y \sin x \cos^2 y}{\cos^3 z} dx^2 + 2 \frac{\cos y \cos x}{\cos^3 z} dx dy - \frac{\sin y \sin x \cos^2 x}{\cos^3 z} dy^2$$

Если бы имѣли въ виду съ самаго начала вычисленіе $d^2 z$, то вычислять $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ частными производными не слѣдовало бы, ибо коэффициентъ при dx^2 въ выраженіи для $d^2 z$ и есть искомая $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

227. Беремъ частную производную по измѣняемости x

$$0 = \operatorname{tg} z + \frac{x}{\cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{или} \quad \sin z \cos z + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (A)$$

Снова производную по x $(\cos^2 z - \sin^2 z + 1) \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

Замѣняя $\frac{\partial z}{\partial x}$ изъ (A) и дѣлая уроченія $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 \sin z \cos^3 z}{x^2}$

$$\mathbf{228.} \quad \cotg z dy - \frac{y}{\sin^2 z} dz = dx$$

но $\cotg z = \frac{x}{y}$; слѣдовательно $\frac{1}{\sin^2 z} = \operatorname{cosec}^2 z = 1 + \cotg^2 z = \frac{y^2 + x^2}{y^2}$

$$(y^2 + x^2) dz = x dy - y dx$$

$$2(y dy + x dx) dz + (y^2 + x^2) d^2 z = [dx dy - dy dx] = 0$$

$$d^2 z = \frac{2(y dy + x dx)(y dx - x dy)}{(y^2 + x^2)^2} \quad \left[= \frac{2xy dx^2 + 2(y^2 - x^2) dx dy - 2xy dy^2}{(y^2 + x^2)^2} \right]$$

*) Можно было бы и непосредственно взять отъ (D) частную производную по y

229. Хотя y стоит множителемъ при e^z , но проще взять частную производную сначала по y , ибо показательная функція войдетъ общимъ множителемъ. Итакъ
$$e^z + ye^z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad 1 + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (A)$$

Теперь частную производную отъ (A) по t $0 + y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = 0$

Если бы раньше стали дифференцировать по t , то имѣли бы $ye^z \frac{\partial z}{\partial t} + 4t^3 = 0$

$$e^z \frac{\partial z}{\partial t} + ye^z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial t} + ye^z \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \left(1 + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial z}{\partial t} + y \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = 0$$

Но выраженіе въ скобкахъ въ силу (A) исчезаетъ, а потому $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = 0$

Второй вопросъ: $3x^2 dx + e^z dy + ye^z dz + 4t^3 dt = 0$;

$$dz = -\frac{3x^2}{ye^z} dx - \frac{1}{y} dy - \frac{4t^3}{ye^z} dt \quad \left[= \frac{3x^2}{x^3+t^4} dx - \frac{1}{y} dy + \frac{4t^3}{x^3+t^4} dt \right]$$

$$6x dx^2 + 2e^z dy dz + ye^z dz^2 + ye^z d^2 z + 12t^2 dt^2 = 0$$

$$ye^z d^2 z = -6x dx^2 + 2e^z dy \left(\frac{3x^2}{ye^z} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{4t^3}{ye^z} dt \right) - ye^z \left(\frac{3x^2}{ye^z} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{4t^3}{ye^z} \right)^2 - 12t^2 dt^2$$

$$d^2 z = -\frac{3x(3x^3+2ye^z)}{y^2 e^{2z}} dx^2 + \frac{1}{y^2} dy^2 - \frac{4t^2(3ye^z+4t^4)}{y^2 e^{2z}} dt^2 - 2 \frac{12x^2 t^3}{y^2 e^{2z}} dx dt$$

Откуда, въ силу формулы

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} dx dt + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} dy dt, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{3x(3x^3+2ye^z)}{y^2 e^{2z}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{4t^2(3ye^z+4t^4)}{y^2 e^{2z}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = -\frac{12x^2 t^3}{y^2 e^{2z}}. \end{aligned}$$

230. $y \cos z dz + \sin z dy = dx$ Откуда $dz = \frac{1}{y \cos z} dx - \frac{\tan z}{y} dy$

$$2 \cos z dy dz - y \sin z dz^2 + ye^z d^2 z = 0$$

$$d^2 z = \frac{\sin z}{y^2 \cos^3 z} dx^2 - 2 \frac{1}{y^2 \cos^3 z} dx dy + \frac{\sin z (1 + \cos^2 z)}{y^2 \cos^3 z} dy^2$$

231. $0 = 2\left(y + z \frac{\partial z}{\partial y}\right) \arctg \frac{x}{z} + \frac{(y^2 + z^2)}{1 + \frac{x^2}{z^2}} \left(-\frac{x}{z^2}\right) \frac{\partial z}{\partial y}$

Исключаемъ на основаніи даннаго соотношенія круговую функцію

$$2y(z^2 + x^2) + \left[2z(z^2 + x^2) - (y^2 + z^2)^2\right] \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y(z^2 + x^2)}{(y^2 + z^2)^2 - 2z(z^2 + x^2)}$$

$$2(z^2 + x^2) + 4[yz - (y^2 + z^2)y] \frac{\partial z}{\partial y} + 2[(z^2 + x^2) + 2z^2 - 2z(y^2 + z^2)] \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + [2z(z^2 + x^2) - (y^2 + z^2)^2] \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(z^2 + x^2)[(y^2 + z^2)^4 - 4y^2(y^2 + z^2)^3 - 4z(z^2 + x^2 - y^2)(y^2 + z^2)^2 + 4(z^2 + x^2)^2(y^2 + z^2) - 4z^2 y^2(z^2 + x^2)]}{[2z(z^2 + x^2) - (y^2 + z^2)^2]^3}$$

232. Здѣсь z выражается въ функціи только одного произведенія (xy). Поэтому можно дифференцировать z , какъ функцію одного аргумента; только при второмъ дифференцированіи надо помнить, что этотъ аргументъ — переменное зависимое.

$$d(xy) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{x^2 y^2}}} \frac{xy dz - z d(xy)}{x^2 y^2} \quad \text{или} \quad xy dz = \left[z + xy \sqrt{x^2 y^2 - z^2} \right] d(xy)$$

$$d(xy)dz + xy d^2z = dz d(xy) + \sqrt{x^2y^2 - z^2} d(xy)^2 + \frac{xy[xy d(xy) - z dz] d(xy)}{\sqrt{x^2y^2 - z^2}} + \left[z + xy \sqrt{x^2y^2 - z^2} \right] d^2(xy)$$

$$d^2z = \left[\frac{2\sqrt{x^2y^2 - z^2}}{xy} - z \right] d(xy)^2 + \left[\frac{z}{xy} + \sqrt{x^2y^2 - z^2} \right] d^2(xy)$$

но $d(xy) = ydx + xdy$; $d^2(xy) = 2dxdy$

$$d^2z = \left[\frac{2\sqrt{x^2y^2 - z^2}}{xy} - z \right] (ydx + xdy)^2 + 2 \left[\frac{z}{xy} + \sqrt{x^2y^2 - z^2} \right] dxdy \quad (A)$$

Проще въ настоящей задачѣ данное уравненіе разрѣшить относительно z .

$$z = xy \sin xy$$

$$dz = (\sin xy + xy \cos xy) d(xy)$$

$$d^2z = (2 \cos xy - xy \sin xy) d(xy)^2 + (\sin xy + xy \cos xy) d^2(xy) \quad (B)$$

(B) — выраженіе, хотя и въ тригонометрическихъ функціяхъ, но тождественное съ (A) въ силу даннаго уравненія.

233. Данное соотношеніе представляетъ собою уравненіе относительно какъ бы одного неизвѣстнаго $\left(\frac{x}{\sqrt{y^2 - z^2}}\right)$, которое и опредѣлимъ (какъ постоянное — въ функціи постоянныхъ параметровъ даннаго соотношенія) въ видѣ

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 - z^2}} = \sin m \quad \text{или} \quad x^2 = (y^2 - z^2) \sin^2 m$$

Беремъ обѣ частныя производныя

$$x = -z \sin^2 m \frac{\partial z}{\partial x} \quad (A) ; \quad 0 = y - z \frac{\partial z}{\partial y} \quad (B)$$

Остается взять еще только одну частную производную, напр. по x отъ уравненія (B)

$$0 = -\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{z^3 \sin^2 m}$$

234. Данное соотношеніе выражено въ функціи одного аргумента; слѣдоват.; мы имѣемъ уравненіе относительно одного неизвѣстнаго $\left(\frac{x+y}{z^2}\right)$

$$\text{Въ самомъ дѣлѣ} \quad \arcsin\left(\frac{x+y}{z^2}\right) = \operatorname{tg} \frac{1}{\left(\frac{x+y}{z^2}\right)}$$

Этимъ уравненіемъ $\left(\frac{x+y}{z^2}\right)$ опредѣляется, какъ постоянное.

$$\text{Слѣдовательно} \quad \frac{x+y}{z^2} = \text{const}$$

$$\text{Частное дифференцирование:} \quad \frac{1}{z^2} - 2 \frac{x+y}{z^3} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 ; \quad z - 2(x+y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2(x+y)} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{4} \frac{z}{(x+y)^2}$$

Полное дифференцирование:

$$\frac{dx+dy}{z^2} - 2 \frac{x+y}{z^3} dz = 0 ; \quad z(dx+dy) - 2(x+y)dz = 0 \quad (B)$$

$$dz(dx+dy) - 2(dx+dy)dz - 2(x+y)d^2z = 0 ; \quad d^2z = -\frac{(dx+dy)}{2(x+y)} dz = -z \left[\frac{dx+dy}{2(x+y)} \right]^2$$

Если бы имѣли въ виду вычисленіе d^2z , то отдѣльное вычисленіе $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ излишне.

Если бы не догадались сдѣлать упрощающаго преобразованія, а дифференцировали непосредственно, то уравненіе (A) либо (B) было бы въ числѣ множителей, на которыя распадались бы полученныя при непосредственномъ дифференцированьи уравненія.

235. Представимъ данное уравненіе въ видѣ $\ln \frac{xz}{x+y} + \log \frac{xz}{x+y} = 0$

Можемъ упростить $\frac{xz}{x+y} = \text{Const}$ (A)

Сначала беремъ частную производную по y

$$\frac{x}{(x+y)} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{xz}{(x+y)^2} = 0 \quad \text{или} \quad (x+y) \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

Второй разъ беремъ по x $(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Для опредѣленія $\frac{\partial z}{\partial x}$ обращаемся снова къ (A)

$$\frac{z}{x+y} - \frac{xz}{(x+y)^2} + \frac{x}{(x+y)} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad yz + x(x+y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Послѣ подстановокъ опредѣлимъ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{z}{x(x+y)}$

Въ настоящей задачѣ проще освободить (A) отъ знаменателя, не избѣгая исключенія неизвѣстнаго постояннаго, $xz = (x+y) \text{Const}$

$$x \frac{\partial z}{\partial y} = \text{Const}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Откуда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\text{Const}}{x^2} = -\frac{z}{x(x+y)}$

Если бы дифференцировали сначала по x , а потомъ по y , то не избѣжали бы все таки опредѣленія $\frac{\partial z}{\partial y}$, для чего пришлось бы сдѣлать лишнее дифференцированье; вычисляя же въ предложенномъ порядкѣ, мы обошлись безъ опредѣленія $\frac{\partial z}{\partial x}$.

236. $\frac{xz}{x+y} = \text{Const};$ или лучше $\frac{z+y}{xz} = \Pi^*)$

$$\frac{1}{xz} + \left(\frac{1}{xz} - \frac{(z+y)}{xz^2} \right) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{но} \quad -\frac{z+y}{x^2 z} - \frac{y}{xz^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \text{вставляя,} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{z(z+y)}{xy^2}$$

Иначе, освободившись отъ знаменателей, $z+y = xz\Pi$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + 1 = x\Pi \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x\Pi - 1}$$

*) Очевидно, что Π новое постоянное, ибо $\text{Const} \cdot \Pi = 1$. Преобразование сдѣлано съ цѣлью имѣть одночленный знаменатель; подобнаго преобразованія не примѣняли въ предыдущей задачѣ, ибо тогда въ знаменателѣ появилось бы зависимое переменное, котораго раньше тамъ не было, а въ настоящей задачѣ въ знаменателѣ во всякомъ случаѣ будетъ зависимое переменное.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Pi \frac{\partial z}{\partial y} + x \Pi \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\Pi}{x\Pi - 1} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Pi}{(x\Pi - 1)^2} = -\frac{z(z+y)}{xy^2}$$

Дифференцируя сначала по y освобожденное от знаменателя уравнение, избѣжали необходимости находить $\frac{\partial z}{\partial x}$, одну изъ производныхъ перваго порядка.

Можно было бы опредѣлить $z = \frac{y}{(x\Pi - 1)}$, взять послѣдовательно производныя по y и x и затѣмъ исключить Π . То же и въ предыдущей задачѣ.

$$237. \quad \frac{\log(z+1)}{y^3 - xz} = C; \quad \frac{(y^3 - xz) \frac{1}{(z+1)} \frac{\partial z}{\partial x} - (-z - x \frac{\partial z}{\partial x}) \log(z+1)}{(y^3 - xz)^2} = 0$$

Или

$$(y^3 - xz) \frac{\partial z}{\partial x} + (z+1) \log(z+1) (z + x \frac{\partial z}{\partial x}) = 0; \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z(z+1) \log(z+1)}{y^3 - xz + x(z+1) \log(z+1)}$$

$$- (z + x \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial z}{\partial x} + \log(z+1) (z + x \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + x \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial z}{\partial x} + 2(z+1) \log(z+1) \frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ [y^3 - xz + x(z+1) \log(z+1)] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$[y^3 - xz + x(z+1) \log(z+1)] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\log(z+1) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (3z + 2 + x \frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z(z+1) \log^2(z+1) (z(y^3 - xz) + 2(z+1)[y^3 - xz + x(z+1) \log(z+1)])}{[y^3 - xz + x(z+1) \log(z+1)]^3}$$

Иначе, освободивъ уравнение отъ знаменателя, $\log(z+1) = C(y^3 - xz)$

$$\frac{1}{(z+1)} \frac{\partial z}{\partial x} = -Cz - Cx \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{или} \quad [1 + Cx(z+1)] \frac{\partial z}{\partial x} + C(z^2 + z) = 0$$

$$C(3z + 2) \frac{\partial z}{\partial x} + Cx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + [1 + Cx(z+1)] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{C^2 z(z+1)(3z+2)}{[1 + Cx(z+1)]^2} = -\frac{C^3 x z^2 (z+1)^2}{[1 + Cx(z+1)]^3} = \frac{C^2 z(z+1)(z+2(z+1)[1 + Cx(z+1)])}{[1 + Cx(z+1)]^3}$$

Подставляя *) вмѣсто C равное ему $\frac{\log(z+1)}{y^3 - xz}$, получимъ то же, что и раньше, выраженіе для искомой $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$238. \quad \frac{x}{a^2} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (A); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{z}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{3}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0;$$

$$-\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (B);$$

$$-\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{z}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{3c^6 x(b^2 + y^2)}{a^4 b^2 z^5}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}$$

*) Постоянное C не входитъ въ число данныхъ, но оно опредѣляется уравненіемъ $\cotg C = (C)^{-\frac{1}{2}}$ или $C \cotg^2 C = 1$. Рѣшить это уравненіе въ конечномъ видѣ мы не умѣемъ. Можно только вычислять съ желаемой точностью числовыя значенія C , удовлетворяющія этому уравненію.

Дифференцируемъ либо (A) по y , либо (B) по x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial z}{\partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{z^2} \left[\frac{c^2}{a^2} + 3 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c^4 y (a^2 z^2 + 3 c^2 x^2)}{a^4 b^2 z^5}$$

239. $(1+x) \frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2 y^2 z; \quad (1+x) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4x^2 y z$
 $(1+x) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 8xyz; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{4xyz(2+x)}{(1+x)^2}$

Прежде чѣмъ искать полный дифференціалъ, прологариѣмируемъ для упрощенія наше уравненіе $\log(1+x) + \log u = 2\log x + 2\log y + 2\log z$

$$\frac{dx}{1+x} + \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x} + \frac{2dy}{y} + \frac{2dz}{z} \quad \text{или} \quad \frac{du}{u} = \frac{2+x}{x(1+x)} dx + \frac{2dy}{y} + \frac{2dz}{z}$$

$$\frac{d^2 u}{u} - \frac{du^2}{u^2} = -\frac{2+4x+x^2}{x^2(1+x^2)} dx^2 - \frac{2dy^2}{y^2} - \frac{2dz^2}{z^2}$$

$$\frac{d^3 u}{u} - 3 \frac{du d^2 u}{u^2} + 2 \frac{du^3}{u^3} = \frac{2(2+6x+6x^2+x^3)}{x^3(1+x)^3} dx^3 + \frac{4dy^3}{y^3} + \frac{4dz^3}{z^3}$$

но $-\frac{3du d^2 u}{u^2} + \frac{2du^3}{u^3} = -3 \frac{du}{u} \left(\frac{d^2 u}{u} - \frac{du^2}{u^2} \right) - \frac{du^3}{u^3} = -\frac{du}{u} \left[3 \left(\frac{d^2 u}{u} - \frac{du^2}{u^2} \right) + \left(\frac{du}{u} \right)^2 \right]$

и такъ какъ

$$3 \left(\frac{d^2 u}{u} - \frac{du^2}{u^2} \right) + \left(\frac{du}{u} \right)^2 = 2 \frac{3-(2+x)^2}{x^2(1+x)^2} dx^2 - \frac{2dy^2}{y^2} - \frac{2dz^2}{z^2} + \frac{4(2+x)}{yx(1+x)} dx dy + \frac{4(2+x)}{zx(1+x)} dx dz + \frac{8dy dz}{yz}$$

то
$$\frac{d^3 u}{u} = 2 \left\{ \frac{2+6x+6x^2+x^3}{x^3(1+x)^3} dx^3 + \frac{2dy^3}{y^3} + \frac{2dz^3}{z^3} + \left[\frac{(2+x)}{x(1+x)} dx + \frac{2dy}{y} + \frac{2dz}{z} \right] \left[\frac{3-(2+x)^2}{x^2(1+x)^2} dx^2 - \frac{dy^2}{y^2} - \frac{dz^2}{z^2} + \frac{2(2+x)}{yx(1+x)} dx dy + \frac{2(2+x)}{zx(1+x)} dx dz + \frac{8dy dz}{yz} \right] \right\}$$

Откуда

$$d^3 u = -\frac{6y^2 z^2}{(1+x)^4} dx^3 + \frac{12yz^2}{(1+x)^3} dx^2 dy + \frac{12y^2 z}{(1+x)^3} dx^2 dz + \frac{6xz^2(2+x)}{(1+x)^2} dx dy^2 + \frac{6xy^2(2+x)}{(1+x)^2} dx dz^2 +$$

$$+ \frac{12x^2 z}{(1+x)} dy^2 dz + \frac{12x^2 y}{(1+x)} dy dz^2 + \frac{24(2+x)xyz}{(1+x)^2} dx dy dz$$

Примѣчаніе: найденная выше $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ составляетъ шестую долю коэффиціента при $dx dy dz$ въ выраженіи для $d^3 u$, какъ и слѣдуетъ въ силу извѣстнаго соотношенія $d^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 u$ (Е. Д. В., ч. I, § 38, стр. 52).

240. $0 = \frac{v}{\cos^2 \frac{z}{x^2}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2z}{x^3} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{x} \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial v} = \frac{2}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial v}$

$0 = \operatorname{tg} \frac{z}{x^2} + \frac{v}{\cos^2 \frac{z}{x^2}} \frac{\partial z}{\partial v}$ или $2v \frac{\partial z}{\partial v} + x^2 \sin^2 \frac{2z}{x^2} = 0$

$2v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial v} + 2x^2 \cos^2 \frac{2z}{x^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ или $v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial v} + \cos^2 \frac{2z}{x^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad 1 = \frac{v}{\cos^2 \frac{z}{x^2}} \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial v} = \frac{2}{x} \left(-\frac{\cos \frac{2z}{x^2}}{v} \right) \left(\frac{x^2 \cos^2 \frac{z}{x^2}}{v} \right) = \frac{2x \sin^2 \frac{z}{x^2} \cos^2 \frac{z}{x^2} - 2x \cos^4 \frac{z}{x^2}}{v^2}$$

Если бы разрѣшили данное уравненіе относительно z , то опредѣлили бы $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial v} = \frac{2x(y^2 - v^2)}{(y^2 + v^2)^2}$, выраженіе тождественное съ прежде полученнымъ въ силу даннаго уравненія.

$$241. 1 = - \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{(x-z)^2}{x^2}}} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{2x - 2z}{\sqrt{2xz - z^2}} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\sqrt{2xz - z^2}} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{2xz - z^2}}{z} = \sqrt{\frac{2x}{z} - 1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{2x}{z^2}}{\sqrt{\frac{2x}{z} - 1}} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{z^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{z^2} + \frac{2x}{z^3} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$0 = \arccos \frac{x-z}{x} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{2xz - z^2}} \frac{x(1 - \frac{\partial z}{\partial x}) - (x-z) \cdot 1}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{2z + 2(x-z) \frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{2xz - z^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - \left(\sqrt{\frac{2x}{z} - 1} \right) \arccos \frac{x-z}{x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{z^2} + \frac{4x}{z^3} - \frac{2\sqrt{2xz - z^2}}{z^4} \arccos \frac{x-z}{x}$$

Примѣчаніе: $\arccos \frac{z-x}{x} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2xz - z^2}}{z} \right)$

Функціи неявныя, опредѣляемыя совокупными уравненіями.

242. Три переменныя связаны двумя уравненіями; въ силу послѣднихъ два переменныхъ могутъ быть опредѣлены въ функціи третьяго. Значитъ здѣсь одно независимое переменное. По условію перваго изъ вопросовъ за независимое переменное надо принять x .

Считая y и z функціями x , надо взять производныя отъ лѣвыхъ частей заданныхъ уравненій по x и приравнять ихъ нулю (мы для сокращенія рѣчи иногда выражаемся короче: возьмемъ производныя отъ данныхъ уравненій). Лѣвыя части суть сложныя функціи x , ибо x входитъ въ нихъ явно, черезъ y и черезъ z .

$$\text{Слѣдовательно} \quad \begin{aligned} (x^2 - yz) + (y^2 - zx)y' + (z^2 - xy)z' &= 0 \\ 1 + y' + z' &= 0 \end{aligned} \quad (A).$$

Рѣшая эти два уравненія относительно двухъ искомыхъ y' и z' , опредѣлимъ

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{z^2 - x^2 + y(z-x)}{y^2 - z^2 + x(y-z)} = \frac{(x+y+z)(z-x)}{(x+y+z)(y-z)} = \frac{z-x}{y-z}; \quad \text{аналогично} \quad \frac{dz}{dx} = z' = \frac{x-y}{y-z} \quad (B)$$

Этотъ результатъ можно представить въ формѣ отношеній, гдѣ независимое переменное безразлично, $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$ (C)

Удобство этого выраженія въ томъ, что изъ него можно опредѣлить любые два дифференціала черезъ третій, (и, слѣдовательно, производныя отъ любыхъ двухъ переменныхъ по измѣняемости третьяго—независимаго).

Такъ, изъ равенства двухъ послѣднихъ отношеній слѣдуетъ:

$$dz = \frac{x-y}{z-x} dy, \quad \text{что служитъ отвѣтомъ на второй вопросъ задачи.}$$

Равнымъ образомъ, для получения (C) можно было бы, не указывая независимаго переменнаго, взять дифференціалы обоихъ уравненій *):

$$\begin{aligned} (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz &= 0 \\ dx + dy + dz &= 0 \end{aligned} \quad (D)$$

Выраженіе (C) вытечетъ изъ (D) по извѣстному правилу нахожденія отношеній неизвѣстныхъ, опредѣляемыхъ однородными уравненіями **).

Если бы то же самое правило захотѣли примѣнить къ уравненіямъ (A), то вообразивъ множителя 1 для возстановленія однородности при первыхъ одночленахъ каждаго изъ уравненій, имѣли бы

$$\frac{1}{\frac{(y^2 - zx) - (z^2 - xy)}{(x + y + z)(y - z)}} = \frac{y'}{\frac{(z^2 - xy) - (x^2 - yz)}{(x + y + z)(z - x)}} = \frac{z'}{\frac{(x^2 - yz) - (y^2 - zx)}{(x + y + z)(x - y)}}$$

Тождество послѣднихъ съ (C) очевидно.

243. Здѣсь изъ двухъ уравненій два переменныхъ опредѣляются, какъ функціи третьяго независимаго. Беремъ дифференціалы уравненій:

$$\begin{aligned} (3x^2 + \cos z) dx - 2y dy - x \sin z dz &= 0 \\ z^2 dx + 2^y \log 2 dy + 2xz dz &= 0 \end{aligned} \quad (A)$$

$$\frac{dx}{(-2y)(2xz) - (2^y \log 2)(-x \sin z)} = \frac{dy}{(-x \sin z)z^2 - 2xz(3x^2 + \cos z)} = \frac{dz}{(3x^2 + \cos z)2^y \log 2 - (-2y)z^2}$$

$$\frac{dx}{x \sin z 2^y \log 2 - 4xyz} = \frac{dy}{-xz^2 \sin z - 2xz \cos z - 6x^3 z} = \frac{dz}{\cos z 2^y \log 2 + 3x^2 2^y \log 2 + 2yz^2}$$

Переставивъ средніе члены въ первыхъ двухъ отношеніяхъ и сокративъ на x , опредѣлимъ

$$\frac{dx}{dy} = x'_y = \frac{4yz - \sin z \cdot 2^y \log 2}{6x^2 z + 2z \cos z + z^2 \sin z}$$

Можно было бы брать производныя отъ уравненій по измѣняемости y , (считая лѣвыя части уравненій сложными функціями отъ y , ибо y входитъ и явно, и черезъ x и z , функціи отъ y .) Полученныя такимъ образомъ уравненія отличались бы отъ (A), очевидно, только дѣлителемъ dy .

244. Здѣсь y и z суть функціи одного независимаго переменнаго x .

Дифференцируемъ данныя уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} &= 0 \\ A dx + B dy + C dz &= 0 \end{aligned} \quad (A)$$

*) т. е. взять дифференціалы лѣвыхъ частей уравненій и каждый изъ дифференціаловъ приравнять нулю.

**) Правило это наглядно представляется слѣдующей схемой

Пусть: $\begin{matrix} A_1 \alpha + B_1 \beta + C_1 \gamma = 0 \\ A_2 \alpha + B_2 \beta + C_2 \gamma = 0 \end{matrix}$ тогда $\frac{\alpha}{B_1 C_2 - C_1 B_2} = \frac{\beta}{C_1 A_2 - A_1 C_2} + \frac{\gamma}{A_1 B_2 - B_1 A_2}$

(I) (II) (III)

Знаменатель подъ какимъ либо неизвѣстнымъ составляется накрестъ изъ коэффиціентовъ остальныхъ неизвѣстныхъ; знаменатели послѣднихъ получаются изъ перваго знаменателя круговой подстановкой коэффиціентовъ по одному направленію. (В. П. Ермаковъ. Аналитическая геометрія. Ч. I. § 26).

Откуда
$$\frac{dx}{Cy} \frac{Bz}{c^2} = \frac{dy}{Az} \frac{Cx}{c^2} = \frac{dz}{Bx} \frac{Ay}{a^2} \quad (B)$$

Слѣдовательно
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{Bx}{a^2} - \frac{Ay}{b^2}}{\frac{Cy}{b^2} - \frac{Bz}{c^2}} = \frac{c^2}{a^2} \frac{Bb^2x - Aa^2y}{Cc^2y - Bb^2z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{Az}{c^2} - \frac{Cx}{a^2}}{\frac{Cy}{b^2} - \frac{Bz}{c^2}} = \frac{b^2}{a^2} \frac{Cc^2x - Aa^2z}{Bb^2z - Cc^2y}; \quad dy = \frac{b^2}{a^2} \frac{Cc^2x - Aa^2z}{Bb^2z - Cc^2y} dx$$

Тотъ же результатъ, понятно, получили бы, если бы взяли производныя отъ уравненій, какъ отъ сложныхъ функцій x^*), и рѣшили бы полученные вновь уравненія (любымъ способомъ) относительно $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$.

245. Переменныя въ данныя уравненія входятъ только въ двухъ различныхъ комбинаціяхъ другъ относительно друга, каковыя означимъ отдѣльными буквами, а именно
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = t_1; \quad Ax + By = t_2$$

Тогда
$$\log(t_1 + t_2) + \sin t_2 = 0$$

$$\arctg 3 \frac{t_2 + 12}{t_1 + 100} = \sin t_1$$

Изъ этихъ двухъ уравненій два неизвѣстныхъ t_1, t_2 опредѣлятся какъ постоянныя величины (безразлично, будетъ ли для нихъ одна, нѣсколько или безчисленное множество паръ значений). Слѣдовательно замѣнивъ данныя уравненія имъ равносильными,
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = t_1; \quad Ax + By = t_2$$

Имѣемъ право ихъ дифференцировать, считая t_1, t_2 постоянными

$$\frac{x dx}{a^2} - \frac{y dy}{b^2} - \frac{z dz}{c^2} = 0 \quad (\text{Сокращено на 2}).$$

$$A dx + B dy = 0$$

По смыслу вопроса за независимое переменное надо принять y . Поэтому изъ втораго уравненія
$$dx = -\frac{B}{A} dy;$$

изъ перваго
$$\frac{z dz}{c^2} = -\frac{x}{a^2} \frac{B}{A} dy - \frac{y}{b^2} dy; \quad dz = -\frac{c^2(Aa^2y + Bb^2x)}{Aa^2b^2z} dy$$

Въ формѣ отношеній:
$$\frac{dx}{B} = -\frac{dy}{A} = \frac{dz}{c^2(A\frac{y}{b^2} - B\frac{x}{a^2})}$$

246. Здѣсь y и z функціи одного переменнаго x .

Беремъ дифференціалы обоихъ уравненій

$$e^z dz - \frac{dy}{y} + 6dx = 0$$

$$e^z dz + \frac{dy}{y} = 0$$

Что по освобожденіи отъ знаменателей

$$ye^z dz - dy + 6y dx = 0 \quad (A)$$

$$ye^z dz + dy = 0$$

Беремъ вторые дифференціалы, считая, что dx не мѣняется, а y, z, dz и dy суть переменныя,
$$ye^z d^2z - d^2y + e^z dy dz + ye^z dz^2 + 6dy dx = 0$$

$$ye^z d^2z + d^2y + e^z dy dz + ye^z dz^2 = 0 \quad (B)$$

*) что равносильно раздѣленію (A) на dx , равно какъ и (B).

Два уравненія (А) дадутъ возможность опредѣлить первые дифференціалы; считая ихъ поэтому извѣстными или подставляя ихъ величину, изъ двухъ уравненій (В) опредѣлимъ два вторыхъ дифференціала.

Напримѣръ, вычитая первое изъ втораго (В) опредѣлимъ $d^2y = 3dydx$

Складывая же получимъ $d^2z = -\frac{e^z dydz + ye^z dz^2 + 3dydx}{ye^z}$

Но складывая (А), найдемъ $dz = -\frac{3dx}{e^z}$; вычитая же, $dy = 3ydx$

Слѣдовательно $\frac{d^2y}{dx^2} = 9y$; $d^2z = -\frac{-9ydx^2 + \frac{9ye^z dx^2}{(e^z)^2} + 9ydx^2}{ye^z} = -\frac{9}{e^{2z}} dx^2$

Искомое могли бы найти по способу дифференцированья явныхъ функцій, если бы замѣтили, что $y = \sqrt{5} e^{3x}$; $z = \log(\log \sqrt{5} - 3x)$

Но, понятно, рѣшеніе заданныхъ уравненій не всегда возможно, а въ случаѣ возможности не всегда легко замѣтить это обстоятельство.

Можно было бы взять отъ данныхъ уравненій (считая ихъ лѣвыя части сложными функціями отъ x) производныя по x . По освобожденіи отъ знаменателей

$$\begin{aligned} ye^z \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx} + 6y &= 0 \\ ye^z \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{(Сравнить съ А)}$$

Лѣвыя части полученныхъ уравненій суть сложныя функціи отъ x ; x не входитъ явно, но черезъ y , z , $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Беремъ отъ этихъ уравненій снова производныя по x

$$\begin{aligned} ye^z \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} + e^z \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} + ye^z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + 6 \frac{dy}{dx} &= 0 \\ ye^z \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} + e^z \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} + ye^z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{(Сравнить съ В)}$$

Рѣшеніе послѣднихъ ничѣмъ не будетъ отличаться отъ (В).

(только числителями будутъ $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, 1 вмѣсто d^2z , d^2y , dx^2).

247. Здѣсь y и z функціи одного независимаго переменнаго x .

Беремъ отъ данныхъ уравненій производныя по x

$$\begin{aligned} x + y \frac{dy}{dx} - p \frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{(А)}$$

Рѣшая, напримѣръ въ формѣ отношеній, опредѣлимъ

$$\begin{aligned} \frac{1}{yz + \frac{py}{b^2}} &= \frac{\frac{dy}{dx}}{-\frac{px}{a^2} - xz} = \frac{\frac{dz}{dx}}{xy \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)} \end{aligned} \quad \text{(В)}$$

Въ лѣвую часть перваго изъ уравненій (А) x входитъ явно и черезъ y , $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$; въ лѣвую часть втораго черезъ тѣ же аргументы и, кромѣ того, черезъ z . Имѣя въ виду такія сложныя функціи независимаго переменнаго x , снова беремъ отъ (А) производныя по x

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} - p \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2} \frac{d^2y}{dx^2} + z \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \quad (C)$$

Рѣшаемъ (C) относительно вторыхъ производныхъ также въ формѣ отношеній

$$\frac{1}{y \left(z + \frac{p}{b^2}\right)} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(z + \frac{p}{a^2}\right) - \left(z + \frac{p}{b^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - p \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{y \left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]} \quad (D)$$

Откуда получимъ искомое, вставляя значенія первыхъ производныхъ изъ (B),

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 = \frac{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z + \frac{p}{b^2}} dx^2 = \frac{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \left[\left(z + \frac{p}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2\right]}{\left(z + \frac{p}{b^2}\right)^3} dx^2 = \\ &= \frac{(a^2 - b^2)(p^2 + b^4)}{b^6 \left(z + \frac{p}{b^2}\right)^3} dx^2 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= - \frac{\left(z + \frac{p}{a^2}\right) + \left(z + \frac{p}{b^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + p \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{y \left(z + \frac{p}{b^2}\right)} = \\ &= - \frac{\left(z + \frac{p}{a^2}\right) \left(z + \frac{p}{b^2}\right) \left[z(y^2 + x^2) + p \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)\right] + p x^2 y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)^2}{y^3 \left(z + \frac{p}{b^2}\right)^3} \quad (E) \\ &= - p \frac{(1 + z^2) \left(z + \frac{p}{a^2}\right) \left(z + \frac{p}{b^2}\right) + x^2 y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)^2}{y^3 \left(z + \frac{p}{b^2}\right)^3} \end{aligned}$$

Можно было бы, не указывая независимаго переменнаго, дифференцировать данныя уравненія

$$\begin{aligned} x dx + y dy - p dz &= 0 \\ \frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy + z dz &= 0 \quad (A'); \quad \text{Откуда} \quad \frac{dx}{y \left(z + \frac{p}{b^2}\right)} = - \frac{dy}{x \left(z + \frac{p}{a^2}\right)} = \frac{dz}{xy \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)} \quad (B') \end{aligned}$$

Эти уравненія надо было бы снова дифференцировать; здѣсь слѣдовало бы указать независимое переменное, въ нашей задачѣ x , для того, чтобы сказать, что dx не мѣняется, и что лѣвыя части уравненій суть функціи отъ x, y, z, dy и dz .

Тогда имѣли бы

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + y d^2y - p d^2z &= 0 \\ \frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + dz^2 + \frac{y}{b^2} d^2y + z d^2z &= 0 \quad (C') \end{aligned}$$

$$\frac{dx^2}{y \left(z + \frac{p}{b^2}\right)} = - \frac{d^2y}{\left(z + \frac{p}{a^2}\right) dx^2 + \left(z + \frac{p}{b^2}\right) dy^2 + p dz^2} = \frac{d^2z}{y \left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) dx^2 - dz^2\right]} \quad (D')$$

Откуда нашли бы искомое (E).

248. Беремъ по x первыя производныя

$$\begin{aligned} (1 - \cos x) + \sin z \cdot z' + \cos y \cdot y' &= 0 \\ \sin x + \cos z \cdot z' + \sin y \cdot y' &= 0 \quad (A) \end{aligned}$$

Снова беремъ производныя по x

$$\begin{aligned}\sin x + \cos z \cdot z'^2 - \sin y \cdot y'^2 + \sin z \cdot z'' + \cos y \cdot y'' &= 0 \\ \cos x - \sin z \cdot z'^2 + \cos y \cdot y'^2 + \cos z \cdot z'' + \sin y \cdot y'' &= 0\end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{1}{\left[\frac{\sin z \sin y - \cos z \cos y}{-\cos(z+y)} \right]} = \frac{z''}{\left[\frac{\cos y \cos x - \cos y \sin z \cdot z'^2 + \cos^2 y \cdot y'^2}{-\sin y \sin x - \sin y \cos z \cdot z'^2 + \sin^2 y \cdot y'^2} \right]} = \frac{y''}{\left[\frac{\sin x \cos z + \cos^2 z \cdot z'^2 - \sin y \cos z \cdot y'^2}{-\sin z \cos z + \sin^2 z \cdot z'^2 - \sin z \cos y \cdot y'^2} \right]}$$

Первые производные определяются изъ (А), откуда имѣемъ

$$\frac{1}{-\cos(z+y)} = \frac{z'}{\frac{\sin(x+y) - \sin y}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}+y)}} = \frac{y'}{\frac{\cos z - \cos(x-z)}{2\sin\frac{x}{2}\sin(\frac{x}{2}-z)}}$$

Вставляя въ предыдущее выраженіе первыхъ производныхъ, опредѣлимъ

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{4\sin^2\frac{x}{2}[\sin(z+y)\sin^2(\frac{x}{2}-z) - \cos^2(\frac{x}{2}+y)] - \sin(x-z)}{\cos^3(z+y)} \\ z'' &= \frac{4\sin^2\frac{x}{2}[\sin(z+y)\cos^2(\frac{x}{2}+y) - \sin^2(\frac{x}{2}-z)] - \cos(y+x)}{\cos^3(z+y)}\end{aligned}$$

249. Беремъ первые дифференціалы

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}}{\cos^2 y \sqrt{6}} dy &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x} & 2\cos^2 x dy &= \cos^2 y \sqrt{6} dx \\ \frac{\sqrt{6}}{\cos^2 z \sqrt{6}} dz &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{dy}{\cos^2 y} & 3\cos^2 y dz &= \cos^2 z \sqrt{6} dy\end{aligned} \quad \text{или} \quad (A)$$

Снова дифференцируемъ

$$\begin{aligned}\cos^2 x d^2 y &= 2\cos x \sin x dy dx - \sqrt{6} \cos y \sqrt{6} \sin y \sqrt{6} dy dx \\ 3\cos^2 y d^2 z - \cos^2 y \sqrt{6} d^2 y &= 6\cos y \sin y dz dy - 2\sqrt{6} \cos z \sqrt{6} \sin z \sqrt{6} dz dy\end{aligned}$$

Исключаемъ $d^2 y$

$$3\cos^2 x \cos^2 y d^2 z = \left[(2\cos x \sin x - \sqrt{6} \cos y \sqrt{6} \sin y \sqrt{6}) \cos^2 z \sqrt{6} dx + (3\cos y \sin y - \sqrt{6} \cos z \sqrt{6} \sin z \sqrt{6}) 2\cos^2 x dz \right] dy$$

Вставляя изъ (А) значенія dy и dz , опредѣлимъ

$$z'' = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\cos^2 z \sqrt{6} \cos^2 y \sqrt{6}}{18\cos^4 x \cos^4 y} \left[3\cos^2 y (2\cos x \sin x - \sqrt{6} \cos y \sqrt{6} \sin y \sqrt{6}) + \cos^2 y \sqrt{6} (3\cos y \sin y - \sqrt{6} \cos z \sqrt{6} \sin z \sqrt{6}) \right]$$

Иначе: Замѣняя въ (А) множители $\cos^2 y \sqrt{6}$ и $\cos^2 z \sqrt{6}$ равными имъ въ силу данныхъ уравненій выраженіями, приведемъ (А) къ виду

$$\begin{aligned}(2 + \sin^2 x) dy &= dx \\ (2 + \cos^2 y) dz &= dy\end{aligned} \quad (A')$$

Поступаемъ съ (А'), какъ раньше съ (А).

Тогда

$$\begin{aligned}(2 + \sin^2 x) d^2 y + 2\sin x \cos x dy dx &= 0 \\ (2 + \cos^2 y) d^2 z - 2\cos y \sin y dy dz &= 0\end{aligned}$$

Исключаемъ $d^2 y$

$$(2 + \cos^2 y) (2 + \sin^2 x) d^2 z = [2\cos y \sin y (2 + \sin^2 x) dz - 2\cos x \sin x] dy$$

Слѣдовательно

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = z'' = \frac{2\cos y \sin y - 2\cos x \sin x (2 + \cos^2 y)}{(2 + \sin^2 x)^2 (2 + \cos^2 y)^2}$$

Выраженіе для z'' тождественно съ полученнымъ прежде; тождество можно показать на основаніи данныхъ уравненій.

250. Проще всего найти зависимость между z и x ; съ этою цѣлью исключимъ изъ данныхъ уравненій y ; умноживъ первое на z , второе на x , вычитаемъ и сокращаемъ на y . Тогда $x\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-x^2} = 0$ (α)

Откуда $z = \pm x$

Если бы не догадались исключить y , то дифференцировали бы оба уравненія

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (A) \quad \text{Уравненіе сокращено на мно-}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (B) \quad \text{тоже на } (\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-y^2}-yz)$$

$$\text{Откуда, исключая } y, \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (C)$$

Снова дифференцируемъ, считая x независимымъ, т. е. что dx не мѣняется

$$\text{Тогда} \quad \frac{d^2z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{xdx^2}{\sqrt{[1-x^2]^3}} - \frac{zdz^2}{\sqrt{[1-z^2]^3}} \quad (D)$$

Или, исключая dz на основаніи (C), найдемъ

$$d^2z = \frac{x\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx^2 \quad (E) \quad \left[\begin{array}{l} = 0 \\ \text{въ силу } (\alpha) \end{array} \right]$$

Считая y независимымъ переменнымъ, дифференцировали бы (B) и

$$\text{опредѣлили} \quad \frac{d^2z}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{ydy^2}{\sqrt{(1-y^2)^3}} - \frac{zdz^2}{\sqrt{(1-z^2)^3}} \quad (F)$$

Исключая dz и принимая во вниманіе второе данное уравненіе, опредѣлимъ

$$d^2z = -\frac{dy^2}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}} \quad (G)$$

$$\text{Изъ уравненія (B) имѣемъ} \quad dy = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (H)$$

Если бы это выраженіе для dy подставили бы въ (G) и исключили бы въ силу данныхъ уравненій y , то все же не получили бы (E). Причина та, что (G) справедливо только, когда y независимо, ибо только въ такомъ случаѣ въ (F) пропадаетъ членъ $-\frac{d^2y}{\sqrt{1-y^2}}$. Когда же мы отъ (G) переходимъ къ (D), то независимымъ становится x , слѣдовательно y является функцией x са, а потому этотъ членъ надо въ (F) возстановить, ибо d^2y уже не равно нулю.

$$\text{Тогда} \quad \frac{d^2z}{\text{при } x \text{ неза-}} \equiv \frac{d^2z}{\text{при } y \text{ неза-}} - \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d^2y}{\text{при } x \text{ неза-}} \quad (K)$$

Принимая во вниманіе, что по аналогіи съ (G) при x независимомъ

$$\text{приведемъ (K) къ условію} \quad d^2y = -\frac{dx^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

$$(x\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Соотношеніе же это прямо вытекаетъ изъ данныхъ уравненій, исключая y , стоящій внѣ радикала.

Справедливость соотношенія (K) можно доказать чисто теоретически:

$$\frac{dz}{\text{при } x \text{ неза-}} = z'_x dx; \quad \frac{dz}{\text{при } y \text{ неза-}} = z'_y dy$$

$$\text{но } z'_x = z'_y y'_x; \quad y'_x dx = dy.$$

$$\text{Слѣдовательно} \quad \frac{dz}{\text{при } x \text{ неза-}} \equiv \frac{dz}{\text{при } y \text{ неза-}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{\text{при } x \text{ неза-}} &= \frac{d(dz)}{\text{висимомъ}} = (dz)'_x dx = (z'_x dx)'_x dx = (z'_y y'_x)'_x dx^2 = \\ &= (z'_y)'_x dy dx + z''_{y,x} dy dx^2 = z''_{y,y} dy^2 + z''_{y,x} dy dx^2 \end{aligned}$$

$$\text{но } z''_{y,y} dy^2 = \frac{d^2z}{\text{при } y \text{ неза-}} \quad \text{Слѣдовательно} \quad \frac{d^2z}{\text{при } x \text{ неза-}} = \frac{d^2z}{\text{при } y \text{ неза-}} + z''_{y,x} \frac{dy^2}{\text{при } x \text{ неза-}}$$

251. Въ данныя уравненія переменныя входятъ только черезъ два выраженія: $(x+y^2+z^3)$ и (x^3+y^2+z) . Слѣдовательно наши уравненія можно разсматривать какъ два уравненія относительно двухъ только неизвѣстныхъ [относительно $(x+y^2+z^3)$ и (x^3+y^2+z)]. Эти неизвѣстныя, значить, опредѣляются какъ величины постоянныя

$$\begin{aligned} x + y^2 + z^3 &= \text{Const} \\ x^3 + y^2 + z &= \text{Const} \end{aligned} \quad (A)$$

Первое изъ уравненій (A) (сюда одно изъ независимыхъ переменныхъ входитъ сложнѣе, чѣмъ во второе) замѣнимъ новымъ, исключая изъ (A) переменное y ,

$$(x^3 - x) - (z^3 - z) = \text{Const}$$

$$\text{Беремъ первые дифференціалы} \quad \begin{aligned} (3x^2 - 1) dx - (3z^2 - 1) dz &= 0 \\ 3x^2 dx + 2y dy + dz &= 0 \end{aligned} \quad (B)$$

$$\text{Дифференцируемъ снова} \quad \begin{aligned} 6x dx^2 - 6z dz^2 - (3z^2 - 1) d^2z &= 0 \\ 6x dx^2 + 2y dy^2 + 2y d^2y + d^2z &= 0 \end{aligned} \quad (C)$$

$$\text{Исключая } d^2z, \text{ получимъ} \quad 6x \cdot 3z^2 dx^2 + 2(3z^2 - 1) dy^2 - 6z dz^2 + 2y(3z^2 - 1) d^2y = 0$$

Остается опредѣлить dz и dy изъ (C) въ видѣ

$$dz = \frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1} dx; \quad dy = \frac{(1 - 3xz)(1 + 3xz)}{2y(3z^2 - 1)} dx$$

Тогда, вставивъ въ (D) и раздѣливъ на dx^2 , опредѣлимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12zy^2(3x^2 - 1)^2 - (3z^2 - 1)(3xz - 1)^2(3xz + 1)^2 - 36xy^2z^2(3z^2 - 1)^2}{4y^3(3z^2 - 1)^3}$$

252. Въ первое изъ данныхъ уравненій переменныя входятъ только черезъ выраженіе $(z+y^2-x^2)$. Слѣдовательно изъ перваго уравненія это выраженіе опредѣлится, какъ величина постоянная. Данныя уравненія, значить, приводятся къ

$$\begin{aligned} z + y^2 - x^2 &= \text{Const} \\ x y z &= 1 \end{aligned} \quad (A)$$

$$\text{Беремъ дифференціалы} \quad \begin{aligned} dz + 2y dy - 2x dx &= 0 \\ xy dz + xz dy - yz dx &= 0 \end{aligned} \quad (B)$$

$$\text{Снова дифференцируемъ} \quad \begin{aligned} d^2z + 2y d^2y + 2(dy^2 - dx^2) &= 0 \\ xy d^2z + xz d^2y + 2x dy dz &= 0 \end{aligned} \quad (C)$$

Первые дифференціалы изъ уравненій (B) опредѣляются въ формѣ

$$\text{отношеній} \quad \frac{dz}{-2y^2z + 2x^2z} = \frac{dy}{-2x^2y + yz} = \frac{dx}{xz - 2y^2x}$$

Помножая первое отношеніе на второе; возводя, затѣмъ, два послѣднихъ отношенія въ квадратъ и вычитая почленно изъ числителя и знаменателя перваго квадрата соотвѣтственные элементы втораго, на основаніи свойствъ производныхъ пропорцій опредѣлимъ

$$\frac{dydz}{2zy(x^2-y^2)(z-2x^2)} = \frac{dy^2-dx^2}{(x^2-y^2)(4x^2y^2-z^2)} = \frac{dx^2}{x^2(z-2y^2)^2}$$

Вставляя въ (C), [и имѣя въ виду, что $xyz=1$], приводимъ уравненія (C)

$$d^2z + 2y d^2y + (4x^2y^2-z^2) \frac{2(x^2-y^2)}{x^2(z-2y^2)^2} dx^2 = 0$$

$$xy d^2z + xz d^2y + 2(z-2x^2) \frac{2(x^2-y^2)}{x^2(z-2y^2)^2} dx^2 = 0$$

Тогда опредѣлимъ, [снова имѣя въ виду, что $xyz=1$], искомое въ формѣ отношеній

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2} dx^2}{4y(z-2x^2) - xz(4x^2y^2-z^2)} = \frac{d^2y}{4x^3y^3 - 3z + 4x^2} = \frac{2(x^2-y^2) dx^2}{x^3(z-2y^2)^3}$$

253. Здѣсь два уравненія съ пятью переменными. Слѣдовательно два переменныхъ, *напримѣръ* t и u , суть функции остальныхъ трехъ x , y и z , другъ отъ друга независимыхъ. Итакъ будемъ искать напр. $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial t}{\partial x}$. Для чего возьмемъ отъ данныхъ уравненій *) производныя по x , въ предположеніи, что y и z не мѣняются. Это будутъ частныя производныя по измѣняемости x . Въ лѣвыя части уравненій x входитъ явно, черезъ u и t **).

Поэтому $1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0$

$$(A); \quad \frac{1}{x(u-t)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u(t-x)} = \frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{t(x-u)} \quad (B)$$

$$ut + xt \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

Откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{x} \cdot \frac{t-x}{u-t}; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{t}{x} \cdot \frac{x-u}{u-t} \quad (C)$

Можно было бы взять отъ данныхъ уравненій частныя дифференціалы по измѣняемости x

$$\begin{aligned} dx + \partial_x u + \partial_x t &= 0 \\ ut dx + xt \partial_x u + xu \partial_x t &= 0 \end{aligned} \quad (D)$$

Тогда въ (B), въ числителяхъ, вмѣсто 1, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, были бы dx , $\partial_x u$, $\partial_x t$.

Въ настоящей задачѣ, вмѣсто формы (B), можно было просто рѣшить уравненія (A), умноживъ первое изъ нихъ, разъ на xt , другой — на xu и вычтя изъ второго.

254. Зависимыми переменными снова будемъ считать u и t . Полный дифференціалъ берется въ предположеніи, что всѣ независимыя переменныя мѣняются одновременно. Для того, чтобы написать полный дифференціалъ, можно отыскать предварительно частныя производныя по всѣмъ независимымъ переменнымъ, для чего пришлось бы взять отъ данныхъ уравненій сначала частныя производныя по y и изъ полученныхъ уравненій опредѣлить $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial t}{\partial y}$; подобнымъ образомъ и по z .

*) отъ ихъ лѣвыхъ частей и полученное приравняемъ нулю.

**) Возможно иногда, (что бываетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ полезно), вообразить что производная берется только по x , входящему явно, полагая, что t и u въ это время не мѣняются. Такъ какъ это на самомъ дѣлѣ не такъ, то такая производная имѣетъ только условное значеніе.

Въ данномъ частномъ случаѣ, благодаря симметріи данныхъ уравненій относительно x , y и z , можно было бы получить изъ частныхъ производныхъ по x остальные частныя производныя перестановкой x^{ca} сначала съ y , а потомъ съ z . Именно

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y} \frac{t-y}{u-t}; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{t}{y} \frac{y-u}{u-t}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{z} \frac{t-z}{u-t}; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{t}{z} \frac{z-u}{u-t} \quad (E)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{u}{x} \frac{t-x}{u-t} dx + \frac{u}{y} \frac{t-y}{u-t} dy + \frac{u}{z} \frac{t-z}{u-t} dz$$

$$dt = \frac{t}{x} \frac{x-u}{u-t} dx + \frac{t}{y} \frac{y-u}{u-t} dy + \frac{t}{z} \frac{z-u}{u-t} dz \quad (F)$$

Иначе: можно было найти искомыя дифференціалы, не прибѣгая къ частнымъ производнымъ, для чего отъ данныхъ уравненій слѣдовало бы взять полныя дифференціалы (прологариѣмировавъ, пожалуй, для упрощенія второе уравненіе).

$$dx + dy + dz + du + dt = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{1}{u} du + \frac{1}{t} dt = 0 \quad (G)$$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{u} = \frac{du}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{t}\right)dy + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right)dz} = \frac{dt}{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y}\right)dy + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{z}\right)dz} \quad (H)$$

$$du = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}} dx + \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}} dy + \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}} dz; \quad dt = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}} dx + \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}} dy + \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}} dz \quad (K)$$

Выраженія тождественныя съ (G).

255. Если бы прибѣгли къ частнымъ дифференцированьямъ, то однѣ и тѣ же передѣлки пришлось бы выполнять по нѣсколько разъ. Слѣдуетъ брать отъ данныхъ уравненій полныя дифференціалы (G пред. зад.) и изъ полученныхъ уравненій опредѣлить полныя дифференціалы зависимыхъ переменныхъ. Коэффициенты при дифференціалахъ независимыхъ переменныхъ и будутъ соотвѣтственными частными производными.

Такъ какъ при полномъ (первомъ) дифференцированьи не отмѣчалось, какія переменныя приняты за независимыя, то уравненіями (G) можно воспользоваться для рѣшенія втораго вопроса. Именно, изъ уравненій (G) опредѣлимъ

$$dy = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} dx + \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} dz + \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} dt; \quad du = \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} dx + \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} dz + \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} dt$$

Тогда, напримѣръ, $\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} = \frac{y}{t} \frac{u-t}{y-u}; \quad \frac{du}{dz} = \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{y}} = \frac{u}{z} \frac{z-y}{y-u}$

Здѣсь полученная $\frac{du}{dz}$ отличается отъ $\frac{\partial u}{\partial z}$ въ (E), ибо это двѣ различныя совершенно функции; хотя и тамъ, и здѣсь берется производная отъ u по измѣняемости z , но одинъ разъ въ предположеніи, что кромѣ z независимыя переменныя суть x и y , а другой разъ — x и t .

256. Здѣсь обращаться къ полному дифференцированью было бы громоздко. Беремъ отъ данныхъ уравненій частныя производныя по u , помня, что въ лѣвыя части уравненій u входитъ тройко: явно, черезъ x и черезъ y .

$$x^2 \frac{\partial x}{\partial u} + y^2 \frac{\partial y}{\partial u} + u^2 = 0$$

$$x^6 \frac{\partial x}{\partial u} + y^6 \frac{\partial y}{\partial u} + u^6 = 0$$

откуда $\frac{x^2 \frac{\partial x}{\partial u}}{u^4 - y^4} = \frac{u^2}{y^4 - x^4}$

Слѣдовательно $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u^2}{x^2} \frac{u^4 - y^4}{y^4 - x^4}$.

Здѣсь мы какъ бы рѣшали уравненія

$$\left. \begin{aligned} 1. (x^2 \frac{\partial x}{\partial u}) + 1. (y^2 \frac{\partial y}{\partial u}) + 1. (u^2) &= 0 \\ x^4 (x^2 \frac{\partial x}{\partial u}) + y^4 (y^2 \frac{\partial y}{\partial u}) + u^4 (u^2) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

однородныя относительно заключенныхъ въ скобки неизвѣстныхъ.

257. Необходимо было, какъ это въ условіи дѣйствительно и сдѣлано, указать, какія переменныя независимыя, ибо это вліяетъ, какъ мы видѣли въ предыдущей задачѣ, на форму частныхъ производныхъ.

Дифференцируемъ полностью данныя уравненія

$$x dx + y dy + z dz + u du + v dv + t dt = 0$$

$$x^3 dx + y^3 dy + z^3 dz + u^3 du + v^3 dv + t^3 dt = 0$$

Тогда

$$\frac{1}{vt(t^2 - v^2)} = \frac{dv}{tx(x^2 - t^2)dx + ty(y^2 - t^2)dy + tz(z^2 - t^2)dz + tu(u^2 - t^2)du} \quad \left[= \frac{dt}{N'N'} \right]^*)$$

$$dv = \frac{x}{v} \frac{x^2 - t^2}{t^2 - v^2} dx + \frac{y}{v} \frac{y^2 - t^2}{t^2 - v^2} dy + \frac{z}{v} \frac{z^2 - t^2}{t^2 - v^2} dz + \frac{u}{v} \frac{u^2 - t^2}{t^2 - v^2} du$$

Тогда, напимѣръ, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{v} \frac{y^2 - t^2}{t^2 - v^2}$.

258. Вопросъ поставленъ неопредѣленно; здѣсь два уравненія съ пятью неизвѣстными. Три изъ нихъ, значить, независимыя переменныя, а остальные два суть функціи первыхъ трехъ. Изъ вопроса ясно, что u зависимое, а x независимое; какія же изъ остальныхъ независимыя—не указано; въ зависимости же отъ послѣдняго обстоятельства $\frac{\partial u}{\partial x}$ представляетъ то одну, то другую, совершенно отличную отъ первой, функцію. Предположимъ, напимѣръ, какъ и въ задачѣ №253, что независимыя переменныя, кромѣ x , будутъ u и z . Тогда воспользуемся формулами (A) и (C) этой задачи. Прежде всего, рассматривая лѣвыя части (A), какъ сложныя функціи x , входящаго явно, черезъ u , t , $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial t}{\partial x}$, возьмемъ отъ нихъ снова производныя по измѣняемости x и приравняемъ нулю.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$$

$$2t \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial t}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + tx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ux \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$$

Исключая $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, опредѣлимъ

$$\begin{aligned} x(u-t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2t \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial t}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} = \\ &= \frac{2tu}{x(u-t)^2} \left[(t-x)(u-t) + (x-u)(u-t) + (t-x)(x-u) \right] \end{aligned}$$

*) Третьяго отношенія не дописываемъ, ибо оно излишне для рѣшенія предложеннаго вопроса.

Откуда
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{tu}{x^2(u-t)^3} [(u-t)^2 + (x-u)^2 + (t-x)^2]$$

Можно было бы, взявъ изъ (C) значеніе $\frac{\partial u}{\partial x}$, и имѣя въ виду, что въ выраженіе (C) x входитъ явно и черезъ u и t , опредѣлить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{ut-ux}{xu-xt} = \frac{x(u-t)[(t-x)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial t}{\partial x} - u] - u(t-x)[(u-t) + x\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial t}{\partial x}]}{x^2(u-t)^2} = \\ &= \frac{-(t-x)tx\frac{\partial u}{\partial x} - (x-u)ux\frac{\partial t}{\partial x} - (u-t)ut}{x^2(u-t)^2} = -\frac{ut[(t-x)^2 + (x-u)^2 + (u-t)^2]}{x^2(u-t)^3} \end{aligned}$$

Здѣсь мы избѣжали даже упоминанія о $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, но зато имѣли дѣло съ дробями. Такъ проще поступать, когда ищется вторая производная отъ одного какого либо зависимаго переменнаго, въ особенности, когда уравненія относительно вторыхъ производныхъ сложны для рѣшенія, или если дано много уравненій, опредѣляющихъ столько же зависимыхъ функцій.

259. Воспользуемся уравненіями (A) и (C) задачи №253 и уравненіями (E) задачи №254 (отбросивъ, понятно, постоянное t ; напр., давъ ему опредѣленные значенія). y входитъ въ ихъ лѣвыя части (A) черезъ u , t , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, (явно не входитъ). Имѣя это въ виду беремъ отъ (A) производныя по измѣняемости y .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0$$

$$t \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial t}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial y} + tx \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + ux \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0$$

Вставляя $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}$ и всѣ первыя производныя изъ (C) и (E), опредѣлимъ

$$x(u-t) \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{ut}{y} - \frac{ut[(x-u)(t-y) + (t-x)(y-u)]}{y(u-t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{ut}{xy(u-t)^3} [(x-u)(y-u) + (x-t)(y-t)]$$

Иначе:
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{x} \frac{tx-tu}{u-t} \right] = \frac{1}{x} \frac{(u-t)[(x-u)\frac{\partial t}{\partial y} - t\frac{\partial u}{\partial y}] - t(x-u)[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}]}{(u-t)^2} = \\ &= \frac{t(t-x)\frac{\partial u}{\partial y} + u(x-u)\frac{\partial t}{\partial y}}{x(u-t)^2} = \frac{ut}{xy(u-t)^3} [(t-x)(t-y) + (x-u)(y-u)] \end{aligned}$$

При независимыхъ переменныхъ x , y и u

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{zt}{xy(z-t)^3} [(t-x)(t-y) + (x-z)(y-z)]$$

Совсѣмъ другое выраженіе!

260. Два уравненія связываютъ четыре переменныхъ; слѣдовательно, зависимыхъ переменныхъ два. Какія именно зависимыя, условіями задачи предоставлено на нашъ выборъ; пусть, наприкладъ, u и z . Независимыми остаются x и y . Полный дифференціалъ можно написать, вычисливъ предварительно всѣ частныя производныя. Отъ данныхъ уравненій, логарифмируя

для упрощенія второе изъ нихъ, беремъ производныя одинъ разъ по x , (считая, что x входитъ явно и черезъ u и z), другой разъ по y (входитъ аналогично)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (A)$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (B)$$

Теперь, считая, что $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ суть, каждая, функціи x и y , беремъ отъ (A) производныя по x , отъ (B) — производныя по y , и, наконецъ, либо отъ (A) по y , либо, что все единственно, отъ (B) по x .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (C)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (D)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (E)$$

Изъ уравненій (C), пользуясь уравненіями (A), опредѣляемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}{\frac{1}{u} - \frac{1}{z}} = \frac{uz}{x^2(z-u)^3} \left[(z-u)^2 + (u-x)^2 + (x-z)^2 \right] \quad \left[= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]$$

Изъ уравненій (D), пользуясь (B), (или въ данной задачѣ по симметріи)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{uz}{y^2(z-u)^3} \left[(z-u)^2 + (u-y)^2 + (y-z)^2 \right]$$

Изъ уравненій (E), пользуясь (A) и (B),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{z}} = \frac{uz}{xy(z-u)^3} \left[(u-x)(u-y) + (x-z)(y-z) \right] = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= \frac{uz}{x^2(z-u)^3} \left[(z-u)^2 + (u-x)^2 + (x-z)^2 \right] dx^2 + 2 \frac{uz}{xy(z-u)^3} \left[(u-x)(u-y) + (x-z)(y-z) \right] dx dy + \\ &\quad + \frac{uz}{y^2(z-u)^3} \left[(z-u)^2 + (u-y)^2 + (y-z)^2 \right] dy^2 \end{aligned}$$

Такъ какъ всѣ вторыя производныя отъ z отличаются отъ соотвѣстныхъ вторыхъ производныхъ отъ u только знакомъ, то $d^2 z = -d^2 u$.

Можно избѣжать повторенія значительнаго числа однихъ и тѣхъ же передѣлокъ, если не вычислять отдѣльно частныхъ производныхъ, а сразу писать полные дифференціалы, полагая, что одновременно мѣняются оба независимыхъ переменныхъ x и y .

$$\begin{aligned} dx + dy + dz + du &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{1}{z} dz + \frac{1}{u} du &= 0 \end{aligned} \quad (F)$$

Такъ какъ x и y переменныя независимыя, то считаемъ dx и dy немѣняющимися. Лѣвыя части уравненій (F) суть функціи переменныхъ x, y, z, dz, u, du .

Беремъ отъ (I) снова полные дифференціалы

$$d^2z + d^2u = 0; \quad -\frac{dx^2}{x^2} - \frac{dy^2}{y^2} - \frac{dz^2}{z^2} - \frac{du^2}{u^2} + \frac{1}{z} d^2z + \frac{1}{u} d^2u = 0 \quad (G)$$

Но изъ (G) имѣемъ отношенія

$$\frac{1}{\frac{1}{u} - \frac{1}{z}} = \frac{dz}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{u}\right)dy} = \frac{du}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)dy} \quad (H)$$

Исключая изъ (G) $d^2z = -d^2u$ и вставляя изъ (H) выраженія для dz и du имѣемъ

$$d^2u = \frac{\frac{dx^2}{x^2} + \frac{dy^2}{y^2} + \frac{dz^2}{z^2} + \frac{du^2}{u^2}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{z}} = \frac{uz}{(z-u)} \left\{ \frac{dx^2}{x^2} + \frac{dy^2}{y^2} + \frac{[(u-x)ydx + (u-y)xdy]^2 + [(x-z)ydx + (y-z)xdy]^2}{x^2y^2(z-u)^2} \right\}$$

$$d^2u = \frac{uz(z-u)^2 + (u-x)^2 + (x-z)^2}{x^2(z-u)^3} dx^2 + 2\frac{uz(u-x)(u-y) + (x-z)(y-z)}{xy(z-u)^3} dx dy +$$

$$(-d^2z =) \quad + \frac{uz(z-u)^2 + (u-y)^2 + (y-z)^2}{y^2(z-u)^3} dy^2$$

261. Можно было бы раньше найти всѣ частныя производныя и по нимъ написать полные дифференціалы; но проще, какъ мы видѣли, сначала писать полные дифференціалы

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} = 0 \quad (A)$$

$$ydy + zdz + udu = 0$$

Отъ уравненій (A) снова беремъ полные дифференціалы, имѣя въ виду, что дифференціалы независимыхъ переменныхъ dx и dy по условіямъ задачи могутъ не измѣняться.

$$-\frac{dx^2}{x^2} - \frac{dz^2}{z^2} - \frac{du^2}{u^2} + \frac{1}{z} d^2z + \frac{1}{u} d^2u = 0 \quad (B)$$

$$dy^2 + dz^2 + du^2 + z d^2z + u d^2u = 0$$

Изъ (A) опредѣлимъ

$$\frac{1}{\frac{u}{z} - \frac{z}{u}} = \frac{dz}{\frac{y}{u} dy - \frac{u}{x} dx} = \frac{du}{\frac{z}{x} dx - \frac{y}{z} dy} \quad (C)$$

А изъ (B)

$$\frac{1}{\frac{u}{z} - \frac{z}{u}} = \frac{d^2z}{\frac{u}{x^2} dx^2 + \frac{1}{u} dy^2 + \left(\frac{u}{z^2} + \frac{1}{u}\right) dz^2 + \frac{2}{u} du^2} = \frac{d^2u}{-\frac{z}{x^2} dx^2 - \frac{1}{z} dy^2 - \frac{2}{z} dz^2 - \left(\frac{z}{u^2} + \frac{1}{z}\right) du^2}$$

Вставляемъ изъ (C) первые дифференціалы зависимыхъ переменныхъ и опредѣляемъ

$$\left(\frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right)^3 d^2z = \left[\left(\frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right)^2 \frac{u}{x^2} + \left(\frac{u}{z^2} + \frac{1}{u}\right) \frac{u^2}{x^2} + \frac{2z^2}{ux^2}\right] dx^2 - 2\left[\left(\frac{u}{z^2} + \frac{1}{u}\right) \frac{y}{x} + \frac{2y}{ux}\right] dx dy +$$

$$+ \left[\frac{1}{u} \left(\frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right)^2 + \left(\frac{u}{z^2} + \frac{1}{u}\right) \frac{y^2}{u^2} + \frac{2y^2}{uz^2}\right] dy^2$$

$$d^2z = \frac{zu^2}{x^2} \frac{3z^4 + 2u^4 - u^2z^2}{(u^2 - z^2)^3} dx^2 - 2\frac{yzu^2}{x} \frac{3z^2 + u^2}{(u^2 - z^2)^3} dx dy + z \frac{(u^2 - z^2)^2 + y^2(3u^2 + z^2)}{(u^2 - z^2)^3} dy^2$$

Откуда заключаемъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{zu^2}{x^2} \frac{3z^4 + 2u^4 - u^2z^2}{(u^2 - z^2)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{yzu^2}{x} \frac{3z^2 + u^2}{(u^2 - z^2)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z \frac{(u^2 - z^2)^2 + y^2(z^2 + 3u^2)}{(u^2 - z^2)^3}$$

Подобнымъ образомъ

$$d^2u = -\frac{z^2u[3u^4+2z^4-u^2z^2]}{x^2(u^2-z^2)^3}dx^2 + 2\frac{yz^2u[z^2+3u^2]}{x(u^2-z^2)^3}dxdy - \frac{u[(u^2-z^2)^2+y^2(3z^2+u^2)]}{(u^2-z^2)^3}dy^2$$

Слѣдовательно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{z^2u[3u^4+2z^4-u^2z^2]}{x^2(u^2-z^2)^3}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{yz^2u[z^2+3u^2]}{x(u^2-z^2)^3}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{u[(u^2-z^2)^2+y^2(3z^2+u^2)]}{(u^2-z^2)^3}$$

$$\begin{aligned} 262. \quad & dx + dy + dz + du + dt = 0 \\ & x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz + u^2 du + t^2 dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2-u^2} &= \frac{du}{(x^2-t^2)dx + (y^2-t^2)dy + (z^2-t^2)dz} = \frac{dt}{(u^2-x^2)dx + (u^2-y^2)dy + (u^2-z^2)dz} \\ d^2u + d^2t &= 0; \quad 2xdx^2 + 2ydy^2 + 2zdz^2 + 2udu^2 + 2tdt^2 + u^2d^2u + t^2d^2t = 0 \\ d^2u &= \frac{2x(u^2-t^2)^2 + 2u(x^2-t^2)^2 + 2t(u^2-x^2)^2}{(t^2-u^2)^3}dx^2 + \frac{2y(u^2-t^2)^2 + 2u(y^2-t^2)^2 + 2t(u^2-y^2)^2}{(t^2-u^2)^3}dy^2 + \\ &+ \frac{2z(u^2-t^2)^2 + 2u(z^2-t^2)^2 + 2t(u^2-z^2)^2}{(t^2-u^2)^3}dz^2 + \frac{4u(x^2-t^2)(y^2-t^2) + 4t(u^2-x^2)(u^2-y^2)}{(t^2-u^2)^3}dxdy + \\ &+ \frac{4u(x^2-t^2)(z^2-t^2) + 4t(u^2-x^2)(u^2-z^2)}{(t^2-u^2)^3}dx dz + \frac{4u(y^2-t^2)(z^2-t^2) + 4t(u^2-y^2)(u^2-z^2)}{(t^2-u^2)^3}dy dz \end{aligned}$$

263. Короче всего найти вторые полные дифференциалы отъ x и y и по нимъ написать производныя

$$\begin{aligned} ydx + xdy - dz - dt &= 0 \\ dx + dy - tdz - zdt &= 0 \end{aligned}$$

Откуда
$$\frac{dx}{(tx-1)dz + (zx-1)dt} = \frac{dy}{(1-ty)dz + (1-zy)dt} = \frac{-1}{y-x}$$

При второмъ дифференцировании принимаемъ, что dz и dt не мѣняются

$$\begin{aligned} yd^2x + xd^2y + 2dxdy &= 0 \\ d^2x + d^2y - 2dzdt &= 0 \end{aligned}$$

Откуда
$$\frac{d^2x}{-xdzdt - dxdy} = \frac{d^2y}{dxdy + ydzdt} = \frac{2}{y-x}$$

Вычисляемъ $dxdy$ и упрощаемъ на основаніи данныхъ уравненій.

$$\begin{aligned} d^2x &= \frac{2(1+t^3)}{(y-x)^3}dz^2 + \frac{2(2+3x^2y-x^3)}{(y-x)^3}dzdt + \frac{2(1+z^3)}{(y-x)^3}dt^2 \\ (I) \quad & \quad (II) \quad \quad (III) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{-2(1+t^3)}{(y-x)^3}dz^2 + \frac{-2(2+3xy^2-y^3)}{(y-x)^3}dzdt + \frac{-2(1+z^3)}{(y-x)^3}dt^2 \\ (IV) \quad & \quad (V) \quad \quad (VI) \end{aligned}$$

Разъ написаны полные дифференциалы, то можно считать задачу рѣшенной, даже и не выписывая, чему равна каждая производная. Ибо

(I), коэффициентъ при dz^2 въ выраженіи для dx^2 , есть $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$; (III) есть $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$; (IV) есть $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$; (VI) есть $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; половина коэффициента при $dzdt$ (II) есть

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \left[= \frac{2+3x^2y-x^3}{(y-x)^3} \right]; \quad \text{половина коэффициента (V) есть } \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} \left[= \frac{-(2+3xy^2-y^3)}{(y-x)^3} \right].$$

На эти коэффициенты слѣдуетъ приучиться смотрѣть, какъ на производныя

264. Уравненія тѣ же, что и въ предыдущей задачѣ, но вопросъ требуетъ принять за независимыя переменныя x и y , (бывшія въ предыдущей задачѣ зависимыми). Въ виду симметріи уравненій относительно паръ (x, y) и (z, t) можно, пользуясь рѣшеніями предыдущей задачи, сразу писать

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{2+3t^2z-t^3}{(z-t)^3} \quad (A); \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{2(1+x^3)}{(z-t)^3} \quad (B)$$

Если же рѣшаемъ задачу независимо отъ предыдущей, то имѣемъ

$$\begin{aligned} dz + dt - ydx - xdy &= 0 \\ t dz + z dt - dx - dy &= 0 \end{aligned} \quad (C)$$

Откуда
$$\frac{dz}{(yz-1)dx + (xz-1)dy} = \frac{dt}{(1-yt)dx + (1-xt)dy} = \frac{1}{z-t} \quad (D)$$

Полагая въ уравненіяхъ (C) $dx=0$ и раздѣливъ на dy , (т. е. переходя къ частнымъ производнымъ), исключаемъ $\frac{\partial z}{\partial y}$
$$(z-t)\frac{\partial t}{\partial y} = (1-tx) \quad (E)$$

Беремъ частную производную по y
$$(z-t)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = -x\frac{\partial t}{\partial y} \quad (F)$$

Внося въ (F) выраженія частныхъ производныхъ перваго порядка по y , опредѣленные изъ (D), и упрощая въ силу данныхъ уравненій, найдемъ искомую $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, т. е. (B).

Для опредѣленія (A) беремъ отъ (E) частную производную по x

$$(z-t)\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = -t - x\frac{\partial t}{\partial x}$$

и замѣняемъ частныя производныя перваго порядка ихъ выраженіями изъ (D).

264. bis. Опредѣлить $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ независимо отъ задачи № 263. ?

264. bis. Здѣсь тѣ же уравненія, что и въ задачѣ № 263, и тѣ же переменныя приняты за независимыя. Но опредѣлить требуется не всѣ шесть производныхъ второго порядка, а только двѣ изъ нихъ. Въ такомъ случаѣ прибѣгать къ полному дифференцированью не слѣдуетъ, такъ какъ, въ противоположность задачѣ № 263, меньшее число передѣлокъ потребуетъ частными дифференцированьями (Дифференцируя полностью, мы, кромѣ требуемаго, получили бы уравненія для опредѣленія еще четырехъ лишнихъ производныхъ).

Такимъ образомъ
$$\begin{aligned} xy_t' + xy_t' - 1 &= 0 \\ x_t' + y_t' - z &= 0 \end{aligned} \quad \text{Откуда} \quad \frac{x_t'}{zx-1} = \frac{y_t'}{1-zy} = \frac{-1}{y-x}$$

$$\begin{aligned} xy_{t't'} + xy_{t't'} + 2x_t'y_t' &= 0 \\ x_{t't'} + y_{t't'} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Откуда} \quad -y_{t't'} = x_{t't'} = -\frac{2x_t'y_t'}{y-x} = -\frac{2(zx-1)(1-zy)}{(y-x)^3} = \frac{2(1+z^3)}{(y-x)^3}$$

- (A) $dx = dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$ | $\begin{smallmatrix} \cos \phi \\ (-\sin \phi) \end{smallmatrix}$ | IV
- (B) $dy = dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$ | $\begin{smallmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{smallmatrix}$ | I
- (C) $dz = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta$ | $\begin{smallmatrix} \cos \theta \\ (-\sin \theta) \end{smallmatrix}$ |
- (I) $dx \cos \phi + dy \sin \phi = dr \sin \theta$ | $\begin{smallmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{smallmatrix}$ | II
- (II) $dx \sin \theta \cos \phi + dy \sin \theta \sin \phi + dz \cos \theta = dr$ | $\begin{smallmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 1 \end{smallmatrix}$ | III
- (III) $dx \cos \theta \cos \phi + dy \cos \theta \sin \phi - dz \sin \theta = r d\theta$ | $\begin{smallmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\sin \theta \end{smallmatrix}$ | XI
- (IV) $-dx \sin \phi + dy \cos \phi = r \sin \theta d\phi$ | $\begin{smallmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{smallmatrix}$ | IX
- (D) $0 = d^2 r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi d^2 \theta - r \sin \theta \sin \phi d^2 \phi + 2dr d\theta \cos \theta \cos \phi - 2dr d\phi \sin \theta \sin \phi -$
- (E) $0 = d^2 r \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta \sin \phi d^2 \theta + r \sin \theta \cos \phi d^2 \phi + 2dr d\theta \cos \theta \sin \phi + 2dr d\phi \sin \theta \cos \phi +$
- (F) $0 = d^2 r \cos \theta + r \sin \theta d^2 \theta - 2dr d\theta \sin \theta$ | $\begin{smallmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ (-\sin \theta) \end{smallmatrix}$ |
- (V) $0 = d^2 r \sin \theta + r \cos \theta d^2 \theta + 2dr d\theta \cos \theta - r \sin \theta [d\theta^2 + d\phi^2]$ | $\begin{smallmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ (-\sin \theta) \end{smallmatrix}$ | VI
- (VI) $0 = d^2 r - r d\theta^2 - r \sin^2 \theta d\phi^2; \quad r d^2 r = (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2$
- (VII) $r d^2 r = dx^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi) + dy^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + dz^2 \sin^2 \theta + 2dx dy (-\sin^2 \theta) + 2dxdz (-\sin \theta \cos \theta \cos \phi) +$
- (VIII) $0 = r d^2 \theta + 2dr d\theta - r \sin \theta \cos \theta d\phi^2; \quad r^2 \sin \theta d^2 \theta = (r \sin \theta d\phi)^2 \cos \theta - 2dr (r d\theta) \sin \theta$
- (IX) $r^2 \sin \theta d^2 \theta = dx^2 (\sin^2 \phi - 2\sin^2 \theta \cos^2 \phi) \cos \theta + dy^2 (\cos^2 \phi - 2\sin^2 \theta \sin^2 \phi) \cos \theta + dz^2 2\sin^2 \theta \cos \theta +$
- (X) $0 = r \sin \theta d^2 \phi + 2dr d\phi \sin \theta + 2r \cos \theta d\theta d\phi; \quad r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi = -2r \sin \theta d\phi (dr \sin \theta + r d\theta \cos \theta)$
- (XI) $dx \cos \phi + dy \sin \phi = (dr \sin \theta + r d\theta \cos \theta)$
- (G) $r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi = -2(-dx \sin \phi + dy \cos \phi) (dx \cos \phi + dy \sin \phi) = dx^2 2\sin \phi \cos \phi + 2dxdy (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) + dy^2 (-2\sin \phi \cos \phi).$

къ 265. Беремъ полные дифференціалы (A , B , C).

Умножая $^{*)}(A)$ на $\cos\psi$, а (B) на $\sin\psi$, складываемъ; исключается $d\psi$. (I)
 Умножаемъ (C) на $\cos\theta$, а (I) на $\sin\theta$ и складываемъ; опредѣлится dr . (II)
 Умножаемъ (C) на $(-\sin\theta)$, а (I) на $\cos\theta$ и складываемъ; опредѣлится $d\theta$. (III)
 Умножаемъ (A) на $(-\sin\psi)$, а (B) на $\cos\psi$ и складываемъ; опредѣлится $d\psi$. (IV)

Беремъ вторые дифференціалы (D), (E), (F).

Умножаемъ (D) на $\cos\psi$, а (E) на $\sin\psi$ и складываемъ; исключается $d^2\psi$. (V)
 Умножаемъ (F) на $\cos\theta$, а (V) на $\sin\theta$ и складываемъ; тогда d^2r выразится черезъ первые дифференціалы зависимыхъ переменныхъ; чтобы выразить его черезъ дифференціалы независимыхъ, возводимъ въ квадратъ (III) и (IV) и складываемъ; полученное соотношеніе вносимъ въ (VI), умноженное предварительно на r ; такимъ образомъ опредѣлится d^2r . (VII)
 Умножаемъ (F) на $(-\sin\theta)$, а (V) на $\cos\theta$ и складываемъ; тогда $d^2\theta$ выразится черезъ первые дифференціалы зависимыхъ переменныхъ; къ произведенію (III)-го, (III)-яго и $(-2\sin\theta)$ придаемъ произведеніе квадрата (VI) на $\cos\theta$; полученное соотношеніе вносимъ въ (VIII), умноженное на $r\sin\theta$; тогда опредѣлится $d^2\theta$. (IX) Умножаемъ (D) на $(-\sin\psi)$, а (E) на $\cos\psi$ и складываемъ; $d^2\psi$ опредѣляется черезъ первые дифференціалы зависимыхъ переменныхъ; умножаемъ (II) на $\sin\theta$, а (III) на $\cos\theta$ и складываемъ (XI); въ уравненіе (X), умноженное на $r\sin\theta$, вносимъ произведеніе (IV) и (XI); такимъ образомъ опредѣлится $d^2\psi$. (G)

$$266. dz = dr ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \psi \partial \theta} = 0$$

267. Первые дифференціалы

$$A dx + B dy + C dz = 0$$

$$\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy + \frac{z}{c^2} dz = 0$$

Откуда
$$\frac{dx}{\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2}} = \frac{dy}{\frac{Cx}{a^2} - \frac{Az}{c^2}} = \frac{dz}{\frac{Ay}{b^2} - \frac{Bx}{a^2}}$$

Здѣсь два уравненія съ тремя переменными; слѣдовательно зависимыми будутъ два изъ нихъ; чтобы брать вторые дифференціалы, необходимо условиться, какое переменное кромѣ y , зависимаго по условію, будемъ считать зависимымъ. Пусть x будетъ независимымъ (а, слѣдовательно, y и z его функциями.)

Тогда
$$B d^2 y + C d^2 z = 0$$

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{y}{b^2} d^2 y + \frac{z}{c^2} d^2 z = 0$$

откуда
$$d^2 y = \frac{C}{\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2}} \left[\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} \right]$$

Третьи дифференціалы

$$B d^3 y + C d^3 z = 0$$

$$\frac{3dy d^2 y}{b^2} + \frac{3dz d^2 z}{c^2} + \frac{y}{b^2} d^3 y + \frac{z}{c^2} d^3 z = 0$$

$^{*)}$ Всякій разъ подразумѣвается: „объ части уравненія“

Откуда

$$\begin{aligned}
 d^3y &= \frac{3C}{\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2}} \left[\frac{dy d^2y}{b^2} + \frac{dz d^2z}{c^2} \right] = \frac{3}{\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2}} \left[\frac{Cdy}{b^2} - \frac{Bdz}{c^2} \right] d^2y = \\
 &= \frac{3C}{\left[\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2} \right]^2} \left[\frac{Cdy}{b^2} - \frac{Bdz}{c^2} \right] \left[\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} \right] = \\
 &= \frac{3C}{\left[\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2} \right]^5} \left(\frac{C}{b^2} \left[\frac{Cx}{a^2} - \frac{Az}{c^2} \right] + \frac{B}{c^2} \left[\frac{Bx}{a^2} - \frac{Ay}{b^2} \right] \right) \left(\frac{1}{a^2} \left[\frac{Bz}{c^2} - \frac{Cy}{b^2} \right]^2 + \frac{1}{b^2} \left[\frac{Cx}{a^2} - \frac{Az}{c^2} \right]^2 + \frac{1}{c^2} \left[\frac{Ay}{b^2} - \frac{Bx}{a^2} \right]^2 \right) dx^3
 \end{aligned}$$

