области контакта и границ раздела зон сцепления и проскальзывания определяются из граничных условий и условий равновесия колеса.

Результаты расчета. В качестве тестового примера рассматривается вертикальное смещение (осадка) центра составного цилиндра под действием только вертикальной силы. При этом в области контакта выделяются центральная зона сцепления и две симметрично расположенные зоны проскальзывания. В зоне сцепления горизонтальные смещения отсутствуют. Результаты использования разработанной методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными на основе модели Винклерова основания и конечно-элементной модели контактного взаимодействия. Конечноэлементная модель реализована в программном продукте ANSYS. Показано, что использование асимптотического приближения второго порядка обеспечивает приемлемое (менее десяти процентов погрешности) соответствие результатам конечноэлементного моделирования в диапазоне значений относительной толщины покрытия до 0,5. При этом относительная толщина определяется как отношение толщины к полуширине области контакта. При использовании модели Винклерова основания соответствующий диапазон значений относительной толщины составляет до 0,15. Погрешность предложенного варианта решения контактной задачи зависит от значения коэффициента Пуассона материала обода. Наибольшее отклонение аналитических прогнозов от оценок, полученных методом конечных элементов, соответствует диапазону значений коэффициента Пуассона больше 0,45.

Также решена задача о стационарном качении моделируемого колеса под действием заданной горизонтальной силы. При этом зона сцепления распространяется до границы области контакта, соответствующей направлению движения колеса. В этой зоне относительные горизонтальные смещения точек поверхности обода линейно зависят от продольной координаты. Получены расчетные распределения контактного давления, сдвигового контактного напряжения и относительного горизонтального смещения точек в области контакта. Показано, что применимость ранее использованной методики, базирующейся на модели Винклерова основания, ограничена значениями относительной толщины обода менее 0,1.

Разработана новая аналитическая методика решения контактных задач для тел качения, имеющих тонкий упругий обод, которая основана на использовании асимптотического приближения второго порядка для тонкой полосы. Сопоставление аналитических расчетных оценок с данными конечно-элементного анализа позволило установить диапазоны значений параметров контактной поры, в которых правомерно использование разработанной методики.

Список литературы

1 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // Int. J. Mech. Sci. – 1989. – Vol. 31. – P. 229–235.

2 **Черноус, Д. А.** Расчет контактного сдвигового напряжения для колеса с деформируемой периферией / Д. А. Черноус, Е. В. Коднянко // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2021. – Вып. 14. – С. 83–89.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТОЛЩИНАМИ НЕСУЩИХ СЛОЕВ

А. В. ЧЕРНЯК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При работе трехслойных конструкций, содержащих жесткие и прочные внешние несущие слои и менее жесткий срединный заполнитель, отмечаются хорошие прочностные и жесткостные показатели при минимуме их весовых характеристик. Поэтому становится очевидной потребность в разработке эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния данного типа конструкций.

Деформирование и колебания трехслойных элементов конструкций уже были исследованы в работах многочисленных авторов. Так, динамическое деформирование трехслойных пластин рассматривалось в работах [1–7], деформирование трехслойных стержней и оболочек при квазистатических нагрузках – в работах [8–14].

Здесь приведен вывод уравнений равновесия для трехслойной круговой пластины с переменной толщиной несущих слоев $h_1 = h_1(r)$, $h_2 = h_2(r)$. Задача решается в цилиндрической системе координат r, φ, z. Для тонких несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя $h_3 = 2c$, воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. На внешний слой стержня действует осесимметричная распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Через h_k обозначена толщина k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя).

Уравнения равновесия в усилиях останутся такими же, как и для пластины со слоями постоянной толщины [4]. Однако выражения внутренних обобщенных усилий через искомые перемещения будут содержать переменные толщины $h_1(r)$, $h_2(r)$:

$$T_r = a_1^+ u,_r + a_1^- \frac{u}{r} + a_2^+ \psi,_r + a_2^- \frac{\psi}{r} - a_3^+ w,_{rr} - a_3^- \frac{w,_r}{r};$$

$$H_r = a_2^+ u,_r + a_2^- \frac{u}{r} + a_4^+ \psi,_r + a_4^- \frac{\psi}{r} - a_5^+ w,_{rr} - a_5^- \frac{w,_r}{r};$$

$$M_r = a_3^+ u,_r + a_3^- \frac{u}{r} + a_5^+ \psi,_r + a_5^- \frac{\psi}{r} - a_6^+ w,_{rr} - a_6^- \frac{w,_r}{r}.$$

где коэффициенты a_i зависят от радиальной координаты r и определяются соотношениями

$$a_1^\pm = \sum_{k=1}^{3} K_k^\pm h_k, \quad a_2^\pm = c\left(K_1^\pm h_1 - K_2^\pm h_2\right), \quad a_3^\pm = K_1^\pm h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^\pm h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right);$$

$$a_4^\pm = c^2\left(K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3}K_3^\pm c\right), \quad a_5^\pm = c\left(K_1^\pm h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + K_2^\pm h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}K_3^\pm c^2\right);$$

$$a_6^\pm = K_1^\pm h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + K_2^\pm h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right) + \frac{2}{3}K_3^\pm c^3, \quad K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+, \; K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-.$$

Соотношения для T_φ, H_φ, M_φ следуют из T_r, H_r и M_r, если поменять местами K_k^+ и K_k^-.

Подставив выражения внутренних усилий через перемещения в уравнения равновесия, получим систему линейных дифференциальных уравнений в перемещениях для определения искомых функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$:

$$a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w,_r) + a_1^+,_r u,_r + a_2^+,_r \psi,_r - a_3^+,_r w,_{rr} + a_1^-,_r \frac{u}{r} + a_2^-,_r \frac{\psi}{r} - a_3^-,_r \frac{w,_r}{r} = -p,$$

$$a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w,_r) + a_2^+,_r u,_r + a_4^+,_r \psi,_r - a_5^+,_r w,_{rr} + a_2^-,_r \frac{u}{r} + a_4^-,_r \frac{\psi}{r} - a_5^-,_r \frac{w,_r}{r} - 2cG_3\psi = 0,$$

$$a_3^+ L_3(u) + a_5^+ L_3(\psi) - a_6^+ L_3(w,_r) + 2a_3^+,_r L_2(u) + 2a_5^+,_r L_2(\psi) - 2a_6^+,_r L_2(w,_r) + (a_3^+,_{rr} + \frac{a_3^-,_r}{r})u,_r +$$

$$+(a_5^+,_{rr} + \frac{a_5^-,_r}{r})\psi,_r - (a_6^+,_{rr} + \frac{a_6^-,_r}{r})w,_{rr} + (a_3^-,_{rr} - \frac{a_3^+,_r}{r})\frac{u}{r} + (a_5^-,_{rr} - \frac{a_5^+,_r}{r})\frac{\psi}{r} - (a_6^-,_{rr} - \frac{a_6^+,_r}{r})\frac{w,_r}{r} = -q,$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; L_2, L_3 – дифференциальные операторы,

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Отметим, что если во втором уравнении равновесия пренебречь работой касательных напряжений в заполнителе ($2cG_3\psi$) и в третье уравнение добавить силы инерции, то получим систему уравнений колебаний пластины с легким заполнителем, совпадающих с приведенными в [5–7].

Автор благодарен преподавателям кафедры «Строительная механика» за помощь в проведении исследований.

Список литературы

1 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для студентов строительных спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

2 **Gorshkov, A. G.** Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, É. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, no. 9. – P. 1196–1203.

3 **Kuznetsova, E. L.** Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenkov, E. I. Starovoitov // INCAS Bulletin. – Vol. 12, Spec. is. – 2020. – P. 79–90.

4 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

5 **Маркова, М. В.** Инерционная математическая модель динамического деформирования круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2021. – № 6 (129). – С. 164–170.

6 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14 (14). – С. 147–158.

7 **Маркова, М. В.** Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – № 36. – С. 3–10.

8 Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / А. Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–22.

9 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – № 32. – С. 235–240.

10 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.

11 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы прочности. – 2007. – № 5. – С. 68–80.

12 **Старовойтов, Э. И.** Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989.– Вып. 5. – С. 114–119.

13 **Нестерович, А. В.** Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.

14 **Трацевская, Е. Ю.** Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Литосфера. – 2019. – № 2 (51). – С. 115–121.

УДК 539.3

ТРЕХСЛОЙНАЯ КРУГОВАЯ ПЛАСТИНА СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Ю. В. ШАФИЕВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Постановки и методики решения краевых задач о деформировании слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–5]. Термосиловое нагружение цилиндрических упругих и вязкоупругих оболочек исследовано в работах [6, 7]. Упругопластические пластины, связанные с основанием Пастернака, а также при неосесимметричном нагружении, рассмотрены в статьях [8, 9]. Публикации [10–18] посвящены исследованию деформирования упругих и упругопластических круглых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем при изотермических нагружениях.

Здесь приводится постановка и решение краевой задачи о деформировании круглой трехслойной пластины в температурном поле. Используется цилиндрическая система координат. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, обжатие по толщине принимается линейным. Деформации малые.

На внешний слой стержня действует осесимметричная распределенная нагрузка $q = q(r)$ и падает тепловой поток q_t. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя. Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя.