

## ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация*

Современные требования машиностроения к оценке прочностных характеристик композитных конструкций обуславливают необходимость создания расчетных моделей, описывающих их деформирование в физически нелинейной области при различного вида нагрузках, в том числе погонных. Этой проблеме посвящен ряд публикаций. В монографиях [1–2] предложены общие подходы к постановке и решению соответствующих краевых задач. Колебания неоднородных пластин и оболочек исследовались в статьях [3–11]. Отдельные задачи квазистатического деформирования упругопластических трехслойных элементов конструкций, в том числе связанных с упругим основанием, при однократных и циклических нагрузках решены в работах [12–17].

Здесь для трехслойного пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось  $z$  направлена перпендикулярно вверх, к первому слою.

К наружной поверхности первого слоя ( $z = c + h_1$ ) приложена нагрузка

$$q = q_0(H_0(b-r) - H_0(a-r)),$$

где  $H_0(x)$  функция Хевисайда нулевого порядка.

Прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$ . В дальнейшем функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  считаются искомыми. На контуре предполагается жесткая диафрагма ( $\psi = 0$  при  $r = 1$ ).

Для связи девиаторов и шаровых частей тензоров напряжений и деформаций в слоях используются нелинейные физические уравнения состояния:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)},$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(3)}))\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),$$

где  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$  – функции физической нелинейности материалов слоев.

Система уравнений равновесия рассматриваемой трехслойной пластины в случае равномерно распределенной поверхностной нагрузки  $q(r)$  известна. Ее решение при погонной поперечной силе  $Q(r)$  получено методом упругих решений, например прогиб

$$w^{(n)} = \frac{1}{b_3} \left[ b_2 \left( \frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r^{(n)} dr \right) + \int \left( \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(P_{\omega}^{(n-1)}) + L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) \right) dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} + C_6 \ln r + C_4^{(n)} \right],$$

где  $n$  – номер приближения;  $a_i$ ,  $b_i$  – постоянные коэффициенты;  $C_1^{(n)}$ , ...,  $C_8^{(n)}$  – константы интегрирования;  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  – интегральные операторы.

Явная зависимость решения от температуры при шарнирном опирании контура пластины определяется константой интегрирования

$$C_5^{(n)} = 2 \frac{a_7 a_1 + a_3^2}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} +$$

$$+ \frac{b_3}{a_6 + a_7} \frac{1}{2} (L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)})) \Big|_{r=1} - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left( 3 \sum_{k=1}^3 a_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + M_r^{(n-1)} \right) +$$

$$+ \left( b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \left( \frac{C^{(n)}}{2b_3} + 2C_+^{(n)} \right).$$

Величины  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$  называют «дополнительными» внешними нагрузками, они вычисляются по результатам предыдущего приближения.

Полученные решения позволяют исследовать НДС трехслойных круговых пластин при локальных кольцевых нагрузках. Численные результаты показали существенное влияние физической нелинейности материалов слоев и температуры на перемещения в пластине.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».*

#### Список литературы

- 1 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 2 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : МАИ, 2016. – 184 с.
- 3 Kuznetsova, E. L. Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenkov, E. I. Starovoitov // INCAS Bulletin. – Vol. 12, Spec. is. – 2020. – P. 79–90.
- 4 Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.
- 5 Gorshkov, A. G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, É. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, no. 9. – P. 1196–1203.
- 6 Горшков, А. Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
- 7 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.
- 8 Вестяк, В. А. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В. А. Вестяк, А. С. Садков, Д. В. Тарлаковский // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – Т. 46, № 2. – С. 130–140.
- 9 Tarlakovskii, D. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 46, no. 5. – P. 779–787.
- 10 Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
- 11 Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10. – С. 55–66.
- 12 Захарчук, Ю. В. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 80–87.
- 13 Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – № 32. – С. 235–240.
- 14 Козел, А. Г. Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – № 34. – С. 165–171.
- 15 Нестерович, А. В. Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 116–121.
- 16 Нестерович, А. В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 35. – С. 246–252.
- 17 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no. 4. – P. 1023–1029.