

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Системы передачи информации»

А. А. БОРТНОВСКИЙ, И. О. ЖИГАЛИН

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

Лабораторный практикум

Часть 1

Гомель 2016

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Системы передачи информации»

А. А. БОРТНОВСКИЙ, И. О. ЖИГАЛИН

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

Часть 1

*Одобрено методической комиссией электротехнического факультета
в качестве лабораторного практикума*

Гомель 2016

УДК 621.395.38(076.5)

ББК 32.811.3

Б83

Рецензент – доцент кафедры “Системы передачи информации” канд. техн. наук. *В. Н. Фомичев* (УО “БелГУТ”)

Бортновский, А. А.

Б83 Теория передачи сигналов : лабораторный практикум. В 3 ч. Ч. 1 / А. А. Бортновский, И. О. Жигалин ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2016. – 38 с.

ISBN 978-985-554-546-1 (ч.1)

Изложены цель лабораторных работ, краткие сведения из теории, порядок выполнения работ, содержание отчета и контрольные вопросы.

Лабораторные работы основаны на применении персональных компьютеров в учебном процессе.

Предназначен для студентов специальности 1-37 02 04 “Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте”.

УДК 621.395.38(076.5)

ББК 32.811.3

ISBN 978-985-554-546-1 (ч.1)

ISBN 978-985-554-545-4

© Бортновский А. А., Жигалин И. О., 2016

© Оформление. УО «БелГУТ», 2016

Лабораторная работа № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Цель работы. Путем компьютерного моделирования исследовать спектральные свойства периодической последовательности прямоугольных импульсов с помощью преобразований Фурье.

Подготовка к работе. Ознакомиться с принципами спектрального анализа временных сигналов [1, с. 42–50; 2, с. 19–27; 3, с. 49–62; 4, с. 5–11].

1 Краткие сведения из теории

С выхода источника сообщений поступают сигналы, несущие информацию, а также тактовые, используемые для синхронизации работы передатчика и приемника системы передачи. Информационные сигналы имеют вид непериодической, а тактовые – периодической последовательности импульсов.

Для правильной оценки возможности передачи таких импульсов по каналам связи определим их спектральный состав. Периодический сигнал в виде импульсов любой формы $U(t)$ можно разложить в ряд Фурье.

Для передачи по воздушным и кабельным линиям связи применяются сигналы различной формы. Выбор той или иной формы зависит от характера передаваемых сообщений, частотного спектра сигналов, частотных и временных параметров сигналов. Большое применение в технике передачи дискретных сообщений получили сигналы, близкие по форме к прямоугольным импульсам.

Вычислим спектр (формулы (1.1)–(1.4)), т. е. совокупность амплитуд постоянной $A_0/2$ и гармонических составляющих периодических прямоугольных импульсов (рисунок 1.1) длительностью t_n и периодом T .

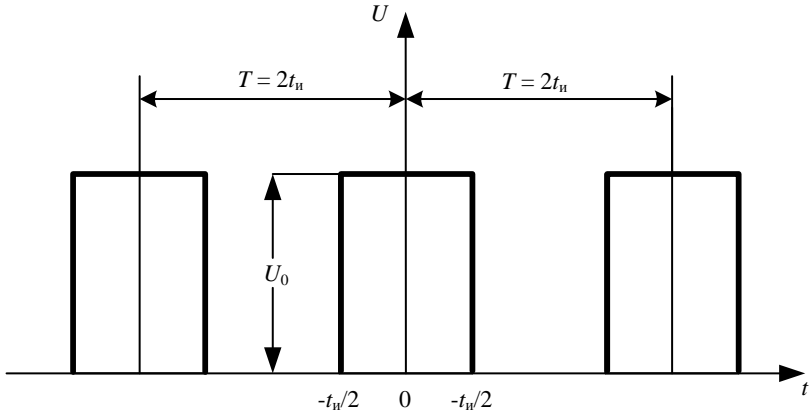


Рисунок 1.1 – Периодические прямоугольные импульсы (скважность 2)

Поскольку сигнал является четной функцией времени, то в выражении

$$U(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)) \quad (1.1)$$

все четные гармонические составляющие обращаются в нуль ($b_n = 0$), а нечетные составляющие принимают значения

$$A_k = |a_k| = \frac{2}{T} \int_{-t_n/2}^{t_n/2} U_0 \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{2t_n}{T} U_0 \left| \frac{\sin \frac{k\omega_1 t_n}{2}}{\frac{k\omega_1 t_n}{2}} \right|. \quad (1.2)$$

Постоянная составляющая

$$U_{\text{пост}} = \frac{1}{T} \int_{-t_n/2}^{t_n/2} U_0 dt = \frac{t_n}{T} U_0. \quad (1.3)$$

Для сигнала 1:1 (телеграфные точки) (см. рисунок 1.1)

$$U_{\text{пост}} = \frac{U_0}{2} \cdot A_k, \quad A_k = U_0 \left| \sin \frac{\pi k}{2} \right|. \quad (1.4)$$

Модули амплитуд спектральных составляющих последовательности прямоугольных импульсов с периодом $T = 2t_n$ приведены на рисунке 1.2 и находятся по формуле (1.5).

По оси абсцисс отложены основная частота повторения импульсов $f_1 = 1/T$ ($\omega_1 = 2\pi f_1$) и частоты нечетных гармонических составляющих $3f_1$, $5f_1$, и т. д. Огибающая спектра изменяется по закону $|\sin(x)/x|$.

При увеличении периода T (по сравнению с длительностью импульса t_n) число гармонических составляющих в спектральном составе периодического сигнала увеличивается (пример на рисунке 1.3 для $T = 6t_n$).

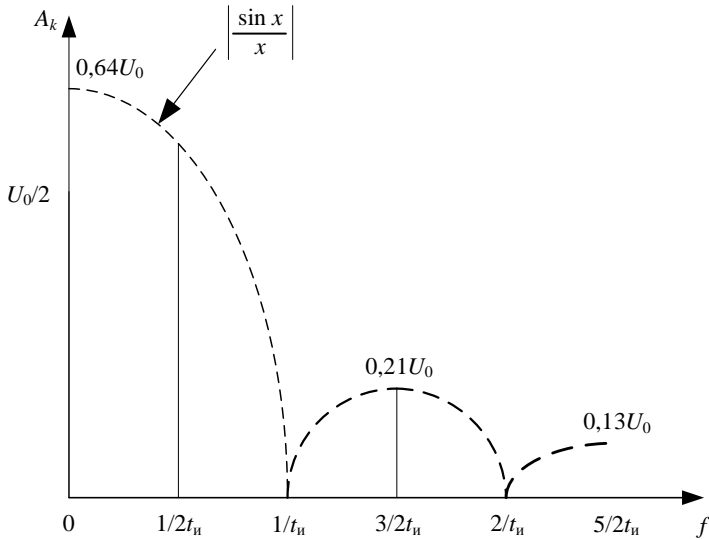


Рисунок 1.2 – Спектральные составляющие последовательных прямоугольных импульсов

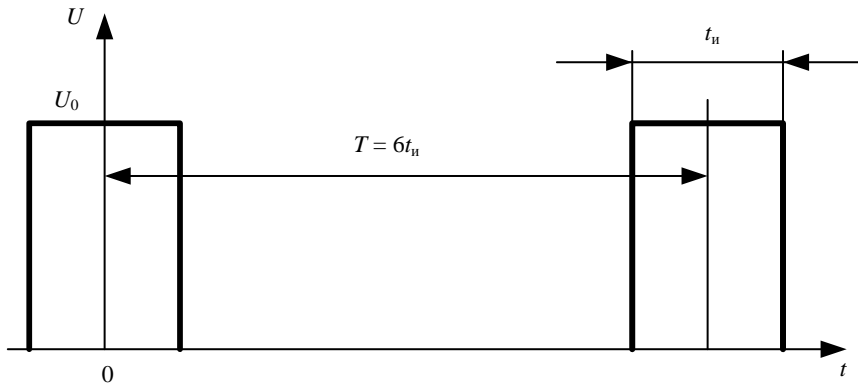


Рисунок 1.3 – Периодические прямоугольные импульсы (скважность 6)

Постоянная составляющая равна $U_0/6$ и A_k

$$A_k = \frac{U_0}{3} \left| \sin \frac{\pi k}{6} \right|. \quad (1.5)$$

В полосе частот от нуля до частоты $1/t_n$ располагается пять гармонических составляющих (рисунок 1.4), в то время как при $T = 2t_n$ лишь одна.

При дальнейшем увеличении периода повторения импульсов число гармонических составляющих становится все больше и больше. В предельном случае, когда $T \rightarrow \infty$, сигнал становится непериодической функцией времени, число его гармонических составляющих в полосе частот от нуля до частоты $1/t_n$ увеличивается до бесконечности; расположены они будут на бесконечно близких расстояниях по частоте $\omega \rightarrow d\omega_1$; спектр непериодического сигнала становится непрерывным.

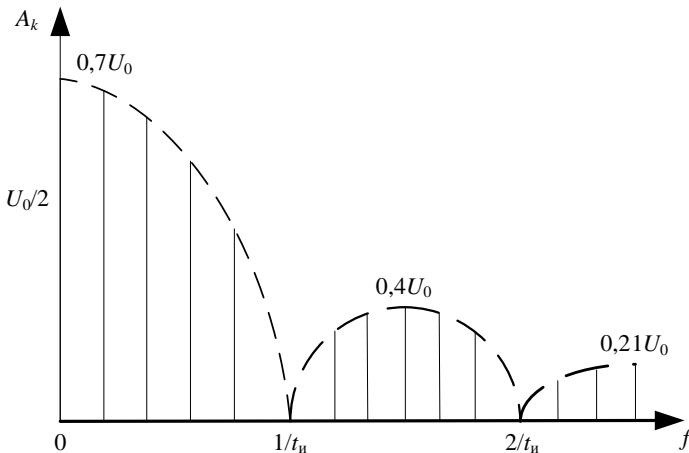


Рисунок 1.4 – Гармонические составляющие спектра периодического сигнала

2 Задание

1 Рассчитать спектральные характеристики (30 гармоник) последовательности периодических видеоимпульсов (для сигнала $Q = N + I$).

$$U_0 = 0,1HN, \text{ В}; \quad t_n = 0,1HN \cdot 10^{-3}, \text{ с},$$

где H – последние две цифры года;

N – номер студента по журналу преподавателя.

2 Построить графики последовательности периодических видеоимпульсов $U(t)$ и амплитудные спектральные составляющие последовательности периодических импульсов.

- 3 Построить графики последовательности периодических видеоимпульсов, используя обратное преобразование Фурье (30 гармоник).
- 4 Сделать выводы по результатам исследований.
- 5 Ответить на контрольные вопросы.

3 Пример выполнения

- 1 Ввести исходные данные (рисунок 1.5).
- 2 Задать функцию для построения амплитудной спектральной составляющей последовательности периодических импульсов (рисунок 1.6).
- 3 Задать функцию и построить график последовательности периодических видеоимпульсов, используя обратное преобразование Фурье (рисунок 1.7).

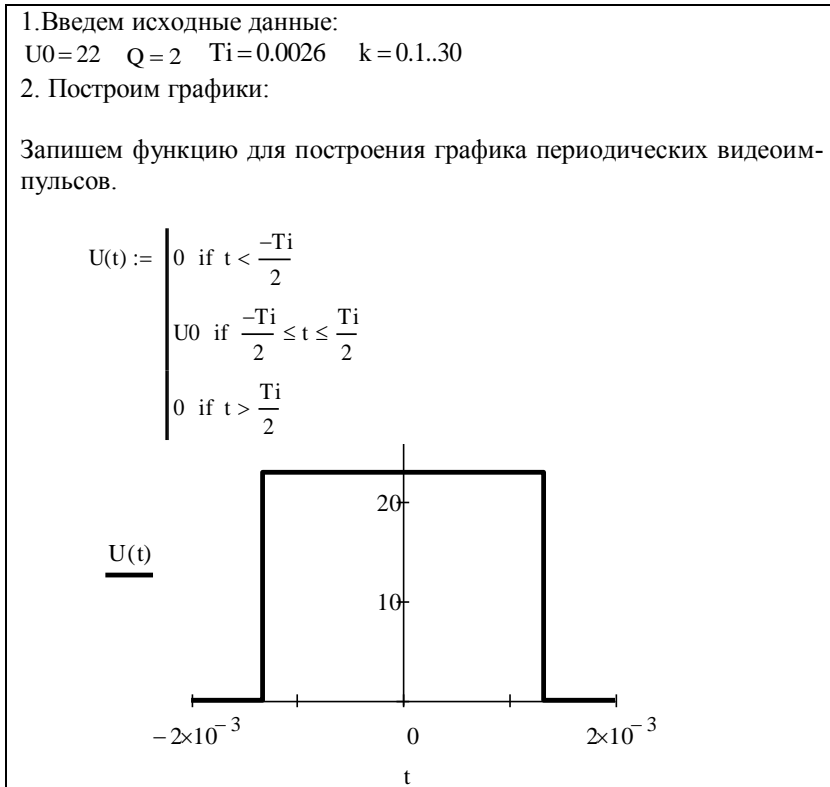


Рисунок 1.5 – Формула для построения и график прямоугольного импульса

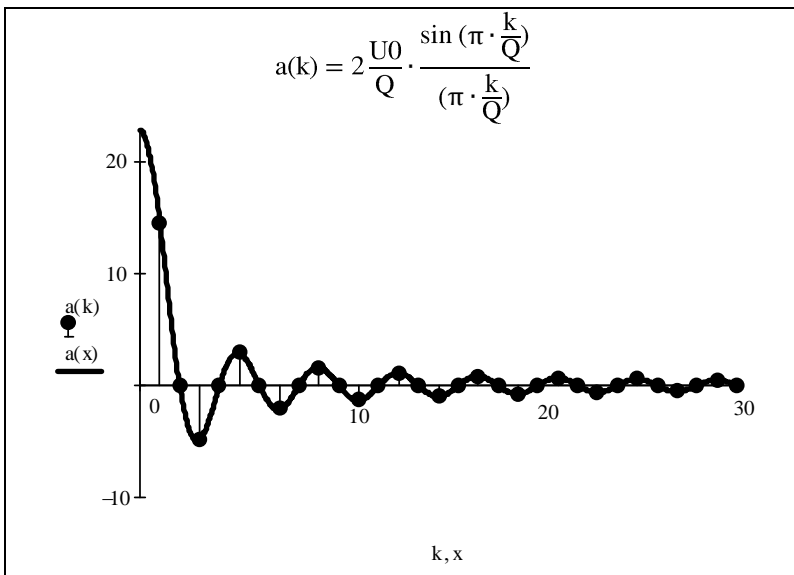


Рисунок 1.6 – Формула для построения и график спектральной составляющей последовательности периодических импульсов

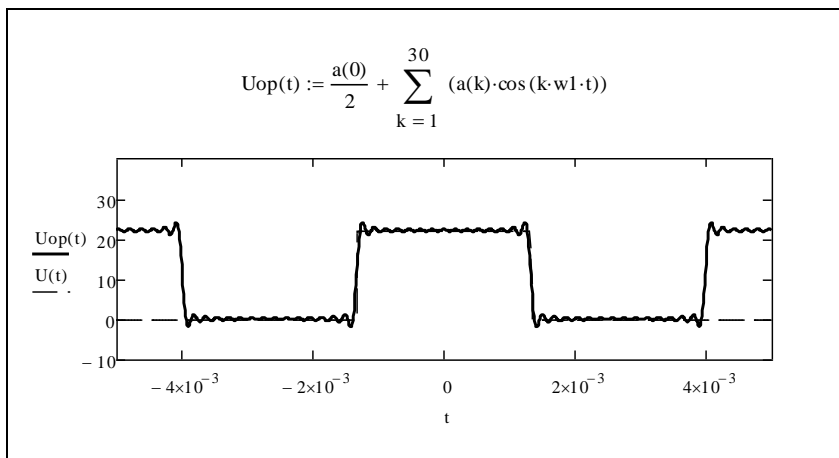


Рисунок 1.7 – Формула для построения и график восстановленной последовательности периодических импульсов

Содержание отчета

- 1 График прямоугольного импульса.
- 2 Результаты расчетов спектральной характеристики заданной периодической последовательности прямоугольных импульсов и результат восстановления при 30 гармониках в спектре.
- 3 Выводы по результатам исследований.
- 4 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 В чем отличие полезных сигналов от мешающих?
- 2 В чем особенность случайных и детерминированных сигналов? Приведите графические примеры.
- 3 Какими основными параметрами характеризуется импульс и периодическая последовательность импульсов?
- 4 Что такое скважность сигнала? Нарисуйте периодический сигнал со скважностью 3 и 5?
- 5 Что такое спектр сигнала? Что такое ширина спектра сигнала?
- 6 Что такое гармоники спектра? Какими математическими функциями они описываются?
- 7 Сколько гармоник располагается в полосе частот от 0 до $1/t_{\text{и}}$ для сигнала со скважностью 3 и 5?
- 8 Какой спектр сигнала называется дискретным?
- 9 Что такое постоянная составляющая спектра?
- 10 Какую частоту имеет постоянная составляющая спектра?
- 11 По какому закону изменяется огибающая спектра периодической последовательности импульсов?
- 12 Какие формулы называются парой преобразований Фурье?

Лабораторная работа № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДИНОЧНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Цель работы. Путем компьютерного моделирования исследовать спектральные свойства одиночного прямоугольного импульса с помощью преобразований Фурье. Исследовать энергетическую характеристику импульса с целью определения верхней частоты спектра сигнала при заданных условиях.

Подготовка к работе. Ознакомиться с принципами спектрального анализа временных сигналов [1, с. 42–50; 2, с. 19–27; 3, с. 49–62; 4, с. 11–18].

1 Краткие сведения из теории

Метод рядов Фурье допускает глубокое и плодотворное обобщение, позволяющее получать спектральные характеристики непериодических сигналов. Для этого мысленно дополним одиночный импульс такими же импульсами, периодически следующими через некоторый интервал времени T , и получим изученную ранее периодическую последовательность.

Представим одиночный импульс (2.1) как сумму периодических импульсов с большим периодом $T \rightarrow \infty$

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(t + kT), \quad (2.1)$$

где $k = 0, 1 \dots \infty$ – целые числа.

Для периодического колебания $U(t)$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(t + kT) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (2.2)$$

Для того, чтобы вернуться к одиночному импульсу, устремим к бесконечности период повторения: $T \rightarrow \infty$. При этом очевидно:

1) частота соседних гармоник $k\omega_1$ и $(k + 1)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими ($\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$), так что в формуле (2.2) дискретную переменную $k\omega_1$ можно заменить непрерывной переменной ω – текущей частотой, т. е. при увеличении периода колебаний T составляющие спектра сгущаются по частоте и спектр одиночного импульса становится сплошным;

2) амплитудные коэффициенты A_k (формула (2.3)) станут неограниченно малыми из-за наличия величины T в знаменателе формулы (2.2).

При $T \rightarrow \infty$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.3)$$

где $\omega = k\omega_1$.

Обозначим

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.4)$$

Величиной $A(j\omega)$ называется спектральная характеристика (функция) одиночного импульса (прямое преобразование Фурье). Она зависит только от временного описания импульса $U(t)$ и в общем виде является комплексной:

$$A(j\omega) = a(j\omega) - jb(\omega), \quad (2.5)$$

где коэффициенты $a(j\omega)$ и $b(j\omega)$ рассчитываются по формулам (2.6), (2.7):

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cos(\omega t) dt; \quad (2.6)$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \sin(\omega t) dt. \quad (2.7)$$

Комплекс спектральной характеристики находим из выражения

$$A(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.8)$$

где $A(\omega)$ – модуль спектральной функции (амплитудно-частотная характеристика импульса):

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}. \quad (2.9)$$

Фазовый угол, фазо-частотная характеристика импульса

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (2.10)$$

Найдем $U(t)$ для одиночного импульса по формуле (2.3), используя спектральную функцию:

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(t + kT) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{-jk\omega_1 t}. \quad (2.11)$$

Если $T \rightarrow \infty$, получим

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{-jk\omega_1 t} (\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.12)$$

Полученное выражение называется обратным преобразованием Фурье.

Интеграл Фурье определяет импульс в виде бесконечной суммы бесконечно малых гармонических составляющих, расположенных на всех частотах.

На этом основании говорят о непрерывном (сплошном) спектре, которым обладает одиночный импульс.

Полная энергия импульса (энергия, выделяемая на активном сопротивлении $R = 1 \text{ Ом}$)

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt. \quad (2.13)$$

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt. \quad (2.14)$$

Внутренний интеграл есть спектральная функция импульса $U(t)$, взятая при аргументе ω , т. е. представляет собой комплексно сопряженную с $A(j\omega)$ величину:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt = A(-j\omega) = A(j\omega). \quad (2.15)$$

Следовательно, получим

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) A^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $A^2(\omega)$ – квадрат модуля (произведение двух комплексно сопряженных чисел равно квадрату модуля).

В этом случае условно говорят, что спектр импульса является двусторонним, т. е. размещается в полосе частот от $-\infty$ до $+\infty$.

Приведенное соотношение (2.16), устанавливающее связь между энергией импульса (на сопротивлении 1 Ом) и модулем его спектральной функции известно под названием «равенство Парсеваля».

Это равенство утверждает, что энергия, заключенная в импульсе $U(t)$, равна сумме энергий всех составляющих его спектра. Равенство Парсеваля характеризует важное свойство сигналов. Если некоторая избирательная система пропускает только часть спектра сигнала, ослабляя другие её составляющие, то это означает, что часть энергии сигнала теряется.

Так как квадрат модуля является четной функцией переменной интегрирования ω , то, удвоив значение интеграла, можно ввести интегрирование в пределах от 0 до ∞ :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega. \quad (2.17)$$

При этом говорят, что спектр импульса размещается в полосе частот от 0 до $+\infty$ и называется односторонним.

Подынтегральная величина в (2.17) называется энергетическим спектром (спектральная плотность энергии) импульса:

$$W(\omega) = A^2(\omega). \quad (2.18)$$

Она характеризует распределение энергии по частоте, и её значение на частоте f равно энергии импульса, приходящейся на полосу частот, равной 1 Гц. Следовательно, энергия импульса есть результат интегрирования энергетического спектра сигнала по всему диапазону частот от $-\infty$ до $+\infty$. Иначе говоря, энергия равна площади, заключённой между кривой, изображающей энергетический спектр сигнала и осью абсцисс.

Для оценки распределения энергии по спектру пользуются относительной интегральной функцией распределения энергии (энергетической характеристикой):

$$\gamma(\omega_b) = \frac{E_1}{E}, \quad (2.19)$$

где E_1 – энергия импульса в заданной полосе частот от 0 до ω_b , которая характеризует долю энергии импульса, сосредоточенную в интервале частот от 0 до ω_b :

$$E_1(\omega_b) = 2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_b} [A(\omega)]^2 d\omega. \quad (2.20)$$

Для одиночных импульсов различной формы выполняются следующие закономерности:

1) спектры являются сплошными (непрерывными) и имеют один и тот же характер: основная энергия сосредоточена вблизи нулевой частоты; при увеличении частоты спектральная функция уменьшается;

2) спектры бесконечно широкие, однако практически можно говорить о конечной ширине спектра, если отсечь высокие частоты, которые переносят незначительную часть энергии. Поэтому вводится понятие эффективной (активной) полосы частот спектра, в пределах которой сосредоточена основная доля энергии импульса (обычно 95 % полной энергии);

3) основная часть энергии импульса расположена в полосе частот от 0 до $f = 1/t_n$;

4) чем более плавный характер имеет форма импульса, тем быстрее спадает энергия с увеличением частоты, тем более «компактно» она сосредоточивается в диапазоне от нуля до частоты $f = 1/t_n$, т. е. наибольшее влияние на форму вершины импульса оказывают низкочастотные составляющие

спектральной функции, в то время как наиболее резко меняющиеся его части (фронт, срез) определяются высокочастотными составляющими спектра.

Всегда линейчатый спектр периодических импульсов вписывается в спектр одиночного импульса этой же формы (форма огибающей спектра периодических импульсов совпадает с формой спектра одиночного импульса).

Рассчитаем сигнал прямоугольного импульса.

Исходная функция (рисунок 2.1) имеет вид

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \infty < t < \frac{-t_n}{2}, \\ U_0, & \frac{t_n}{2} \leq t \leq \frac{-t_n}{2}, \\ 0, & \frac{t_n}{2} < t < \infty. \end{cases} \quad (2.21)$$

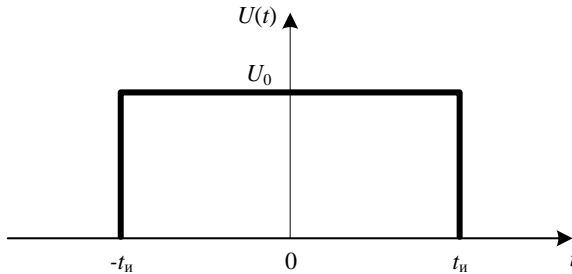


Рисунок 2.1 – График прямоугольного импульса

Спектральная характеристика $A(j\omega)$ определяется из соотношения:

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t}). \quad (2.22)$$

Преобразуем соотношение следующим образом:

$$A(j\omega) = \frac{2U_0}{\omega} e^{-\frac{j\omega t_n}{2}} \left(\frac{e^{\frac{j\omega t_n}{2}} - e^{-\frac{j\omega t_n}{2}}}{2j} \right) = \frac{2U_0}{\omega} e^{-\frac{j\omega t_n}{2}} \sin \frac{\omega t_n}{2}. \quad (2.23)$$

Функция $A(\omega)$ (2.24) представляет собой модуль комплексного выражения (рисунок 2.2).

$$A(\omega) = |A(j\omega)| = \frac{2U_0}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_n}{2} \right|. \quad (2.24)$$

В формуле (2.25) при $\omega = 0$

$$A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2U_0 \sin \frac{\omega t_n}{2}}{\omega}. \quad (2.25)$$

Согласно правилу Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (2.26)$$

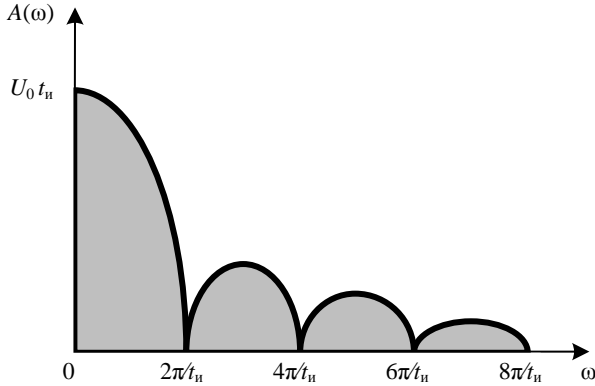


Рисунок 2.2 – Модуль комплексного выражения

Тогда получим:

$$A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2U_0 \cos \frac{\omega t_n}{2} \frac{t_n}{2}}{1} = U_0 t_n. \quad (2.27)$$

Полная энергия одиночного прямоугольного импульса длительностью t_n , выделяемая на активном сопротивлении $R = 1$ Ом, определяется из соотношения

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{2U_0}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} \right)^2 U d\omega = \\ &= \frac{4U_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega t_n}{2}}{\omega^2} d\omega = U_0^2 t_n. \end{aligned} \quad (2.28)$$

С помощью равенства Парсеваля можно вычислить энергию одиночного импульса в заданной полосе частот от 0 до ω_B по формуле

$$E_1 = \frac{2U_0^2 t_{\text{и}}}{\pi} \left[S_i(\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}) - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}}{2}}{\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}} \right], \quad (2.29)$$

где

$$S_i(\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}) = \int_0^{\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (2.30)$$

Энергетическая характеристика прямоугольного импульса (2.31) для заданной полосы частот

$$\Delta\omega = 0 \dots \omega_{\text{в}} \quad (2.31)$$

примет вид

$$\gamma(\omega_{\text{в}}) = \frac{E_1}{E} = \frac{2}{\pi} \left[S_i(\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}) - \frac{2 \sin^2 \frac{\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}}{2}}{\omega_{\text{в}} t_{\text{и}}} \right]. \quad (2.32)$$

Пример расчета $\gamma(\omega_{\text{в}})$ приведен на рисунке (2.3). По графику можно найти эффективную полосу частот $\omega_{\text{эф}}$.

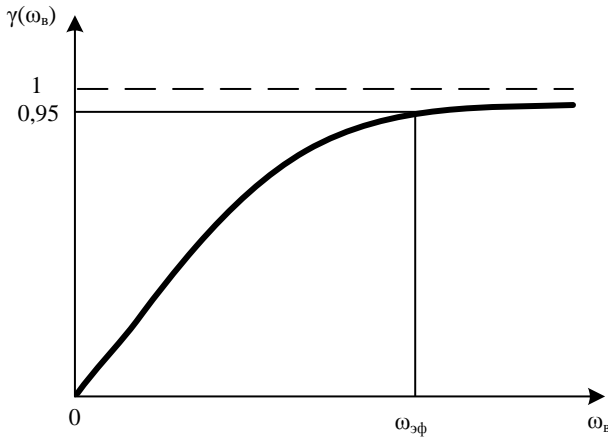


Рисунок 2.3 – Энергетическая характеристика прямоугольного импульса

Обратное преобразование Фурье

$$U_{\text{оп}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega. \quad (2.33)$$

2 Задание

1 Задать и построить график функции $U(t)$. Исходная функция прямоугольного импульса представлена формулой (2.21).

$$U_0 = 0,1HN, \text{ В}; t_{\text{и}} = 0,1HN \cdot 10^{-3}, \text{ с},$$

где H – последние две цифры года,

N – номер студента по журналу преподавателя.

2 Задать спектральную характеристику импульса $A(\omega)$ и построить ее график.

3 Задать и построить энергетическую характеристику импульса $\gamma(\omega_{\text{в}})$.

4 Определить верхнюю частоту $\omega_{\text{в}}$ спектра сигнала при: $\gamma_1 = 0,95 + 0,6N \cdot 10^{-3}$ и $\gamma_2 = 0,85 + 0,8N \cdot 10^{-3}$.

5 Построить график импульса, используя обратное преобразование в полосе частот $0 \dots \omega_{\text{в}}$.

6 Сделать выводы по результатам исследований.

7 Ответить на контрольные вопросы.

3 Пример выполнения

1 Рассчитаем и построим график функции $U(t)$, (рисунок 2.4)

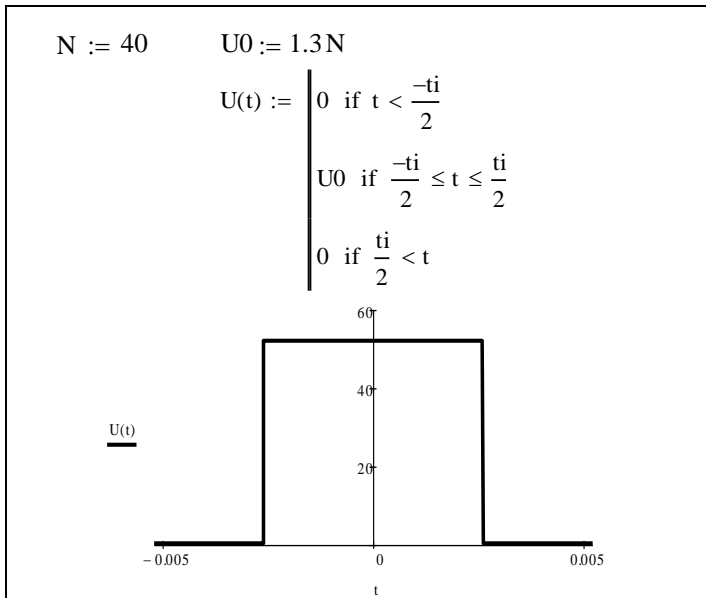


Рисунок 2.4 – Расчёт и построение функции $U(t)$

2 Рассчитаем спектральную характеристику импульса $A(\omega)$, построим ее график (рисунок 2.5).

3 Рассчитаем и построим энергетическую характеристику импульса $\gamma(\omega_B)$, (рисунок 2.6).

4 Определим верхнюю частоту ω_B спектра сигнала.

5 Построим график импульса, используя обратное преобразование в полосе частот $0 \dots \omega_B$, (рисунок 2.7).

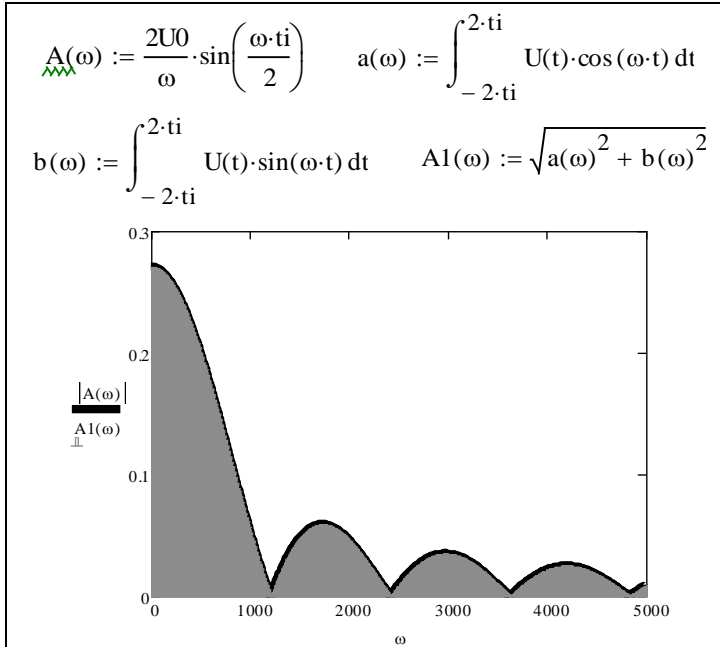


Рисунок 2.5 – Расчет и построение спектральной характеристики импульса

$$E_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} A(\omega)^2 d\omega = 14.062 \quad E(\omega_B) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_B} A(\omega)^2 d\omega$$

$$\gamma(\omega_B) := \frac{E(\omega_B)}{E_0} \quad E_{02} := U_0^2 \cdot t_i = 14.061$$

Рисунок 2.6 – Расчет и построение энергетической характеристики

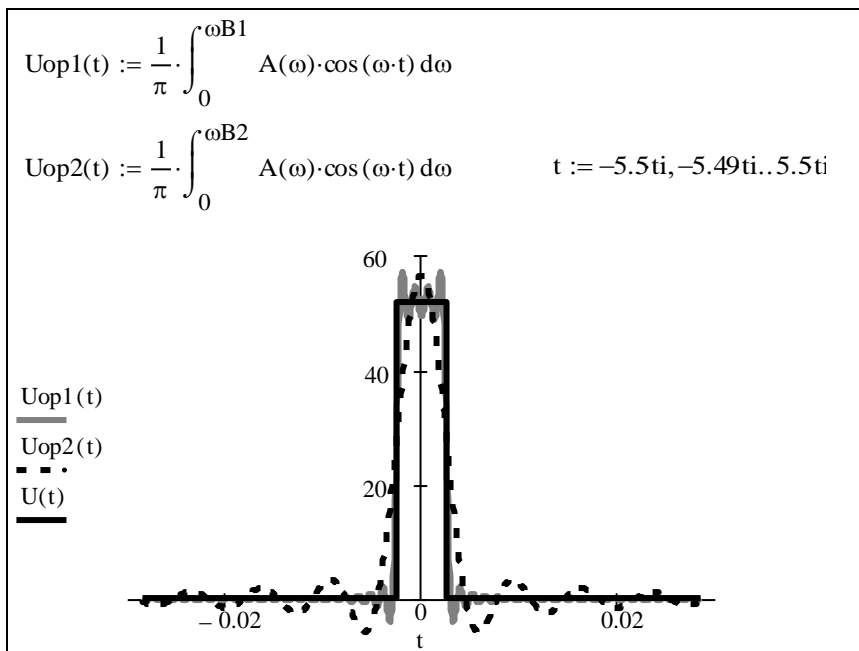


Рисунок 2.7 – Построение графика при обратном преобразовании частот

Содержание отчета

- 1 График прямоугольного импульса.
- 2 Результаты расчетов спектральной характеристики заданного прямоугольного импульса и результат восстановления в полосе частот $0 \dots \omega_B$.
- 3 Выводы по результатам исследований.
- 4 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Каким образом можно представить непериодический сигнал (одиночный импульс)?
- 2 Чему равна скважность непериодического сигнала?
- 3 Каким спектром обладает одиночный прямоугольный импульс? Объяснить, почему.
- 4 Какие выражения называются прямым и обратным преобразованием Фурье?
- 5 Что такое равенство Парсевала, что оно утверждает и характеризует?
- 6 Что такое эффективная (активная) полоса частот спектра и в каком диапазоне располагается основная часть энергии импульса?
- 8 Что такое энергетическая характеристика одиночного прямоугольного импульса?

са и как по ней можно определить активную (эффективную) полосу частот?

9 От чего зависит полная энергия одиночного прямоугольного импульса?

10 Как изменяется энергия импульса с увеличением частоты и от чего зависит характер этого изменения?

11 Что общего и чем отличается спектральная характеристика одиночного прямоугольного импульса и периодической последовательности таких импульсов?

Лабораторная работа № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО И КОЛОКОЛЬНОГО ИМПУЛЬСОВ

Цель работы. Путем компьютерного моделирования исследовать спектральные и энергетические характеристики экспоненциального и колокольного импульсов и сделать сравнительную оценку.

Подготовка к работе. Ознакомиться с принципами спектрального анализа временных сигналов [1, с. 42–50; 2, с. 19–27; 3, с. 49–62; 4, с. 18–21].

1 Краткие сведения из теории

Исходная функция экспоненциального импульса (рисунок 3.1) имеет вид

$$U(t) = \begin{cases} U_0 e^{-\beta t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

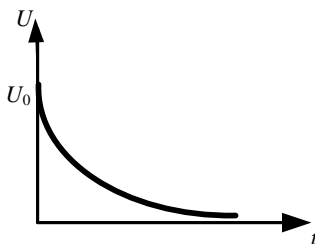


Рисунок 3.1 – Экспоненциальный импульс

Спектральная характеристика сигнала определяется из соотношения

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{\beta + j\omega}. \quad (3.1)$$

Функция $A(\omega)$ представляет собой модуль комплексного выражения (рисунок 3.2).

$$A(\omega) = |A(j\omega)| = \frac{U_0}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}. \quad (3.2)$$

При $\omega = 0$, $A(\omega) = \frac{U_0}{\beta}$.

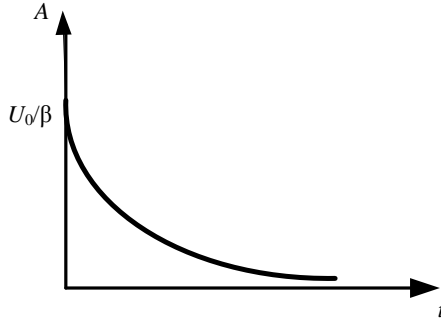


Рисунок 3.2 – Спектральная характеристика экспоненциального импульса

Полная энергия экспоненциального импульса, выделяемая на активном сопротивлении $R = 1 \text{ Ом}$, определяется из соотношения

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{U_0^2}{2\beta}. \quad (3.3)$$

Энергия сигнала с ограниченным спектром (в полосе частот от 0 до ω_B) определяется из соотношения

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_B} [A(\omega)]^2 d\omega = \frac{U_0^2}{\pi\beta} \cdot \text{arctg} \frac{\omega_B}{\beta}. \quad (3.4)$$

Энергетическая характеристика $\gamma(\omega_B)$ имеет вид

$$\gamma(\omega_B) = \frac{E_1}{E} = \frac{2}{\pi} \text{arctg} \frac{\omega_B}{\beta}. \quad (3.5)$$

Расчет спектра колокольного импульса.

Данный сигнал описывается функцией вида $U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)$,

$-\infty < t < \infty$ (рисунок 3.3), где a – коэффициент, равный половине длительности импульса ($a = t_W/2$), определяемой на уровне $0,606U_0$ (t_n называется активной длительностью).

Спектральная характеристика сигнала определяется из соотношения

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-j\omega t} dt = U_0 a \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} \quad (3.6)$$

и представлена на рисунке 3.4.

Из этого выражения видно, что спектральная плотность колокольного импульса вещественна и описывается Гауссовой функцией частоты (рисунок 3.4).

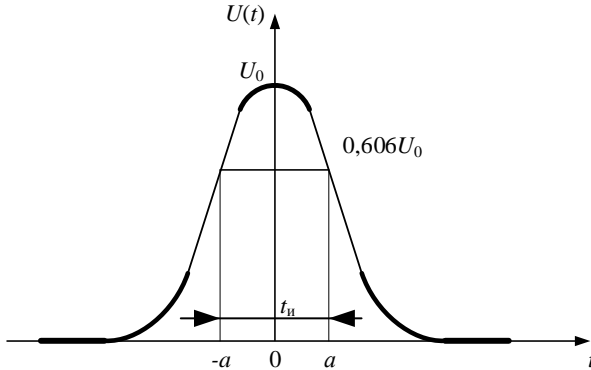


Рисунок 3.3 – Спектральная характеристика сигнала

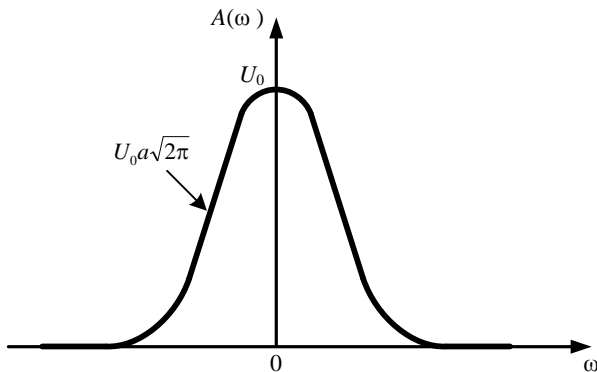


Рисунок 3.4 – Спектральная плотность колокольного импульса

Вычислим энергию колокольного импульса в полосе частот от 0 до ω_B , основываясь на равенстве Парсеваля:

$$E_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_b} \left[U_0 a \sqrt{2\pi} e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} \right]^2 d\omega = \sqrt{\pi} U_0^2 a \cdot \Phi(a\omega_b). \quad (3.7)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$ – интеграл вероятности (табулированная функция, $z = a\omega_b$).

Полная энергия колокольного импульса равна

$$E = \sqrt{\pi} U_0^2 a. \quad (3.8)$$

Энергетическая характеристика равна $\gamma(\omega_b) = \Phi(a\omega_b)$.

2 Задание

Часть 1

Исходная функция экспоненциального импульса имеет вид

$$U(t) = \begin{cases} U_0 e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

1 Рассчитать и построить график функции $U(t)$ (значение U_0 берется из лабораторной работы № 1).

$$\beta_1 = 0,1N \cdot 10^3; \beta_2 = 0,15N \cdot 10^3,$$

где N – номер студента по журналу преподавателя.

2 Рассчитать спектральную характеристику импульса $A(\omega)$ и построить её график.

3 Рассчитать энергетическую характеристику импульса $\gamma(\omega_b)$ и построить её график.

4 Определить верхнюю частоту ω_b спектра импульса при $\gamma_1 = 0,95 + 0,6N \cdot 10^{-3}$ и $\gamma_2 = 0,85 + 0,8N \cdot 10^{-3}$.

Часть 2

Исходная функция колокольного импульса имеет вид

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right).$$

1 Рассчитать и построить график функции $U(t)$ ($a = t_n / 2$, где t_n, U_0 берутся из лабораторной работы № 1).

2 Рассчитать спектральную характеристику импульса $A(\omega)$ и построить её график.

3 Рассчитать энергетическую характеристику импульса $\gamma(\omega_b)$ и построить график.

4 Определить верхнюю частоту ω_b спектра при $\gamma_1 = 0,95 + 0,6N \cdot 10^{-3}$ и $\gamma_2 = 0,85 + 0,8N \cdot 10^{-3}$.

5 Сравнить спектральную и энергетическую характеристики колокольного и прямоугольного импульсов.

6 Сделать выводы по результатам исследований.

7 Ответить на контрольные вопросы.

3 Пример выполнения

1 Рассчитаем и построим график функции $U(t)$ экспоненциального импульса (рисунок 3.5).

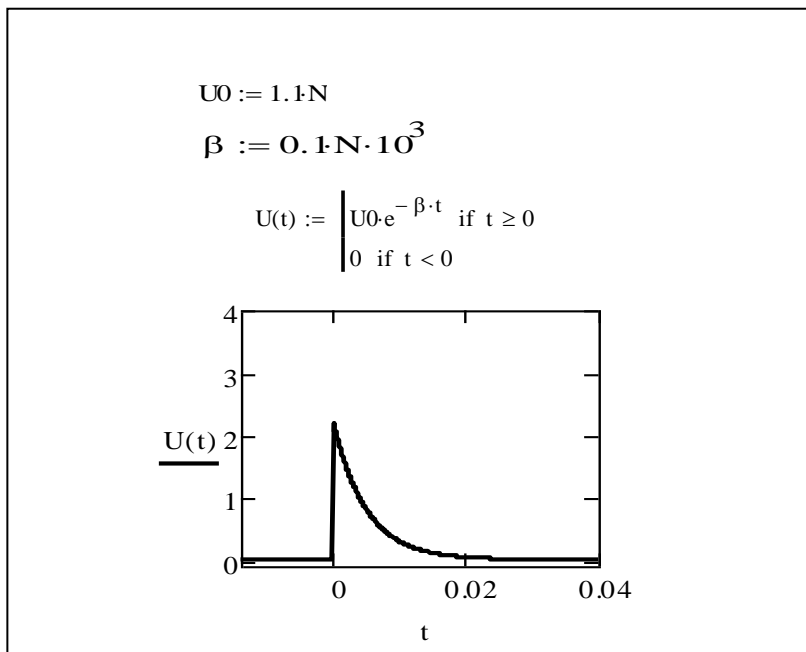


Рисунок 3.5 – Расчёт и построение графика функции $U(t)$

2 Рассчитаем спектральную характеристику экспоненциального импульса $A(\omega)$, построим ее график (рисунок 3.6).

3 Рассчитаем и построим энергетическую характеристику экспоненциального импульса $\gamma(\omega_b)$ (рисунок 3.7).

4 Определим верхнюю частоту ω_g спектра сигнала экспоненциального импульса.

5 Рассчитаем и построим график функции $U(t)$ колокольного импульса (рисунок 3.8).

6 Рассчитаем спектральную характеристику колокольного импульса $A(\omega)$, построим её график (рисунок 3.9).

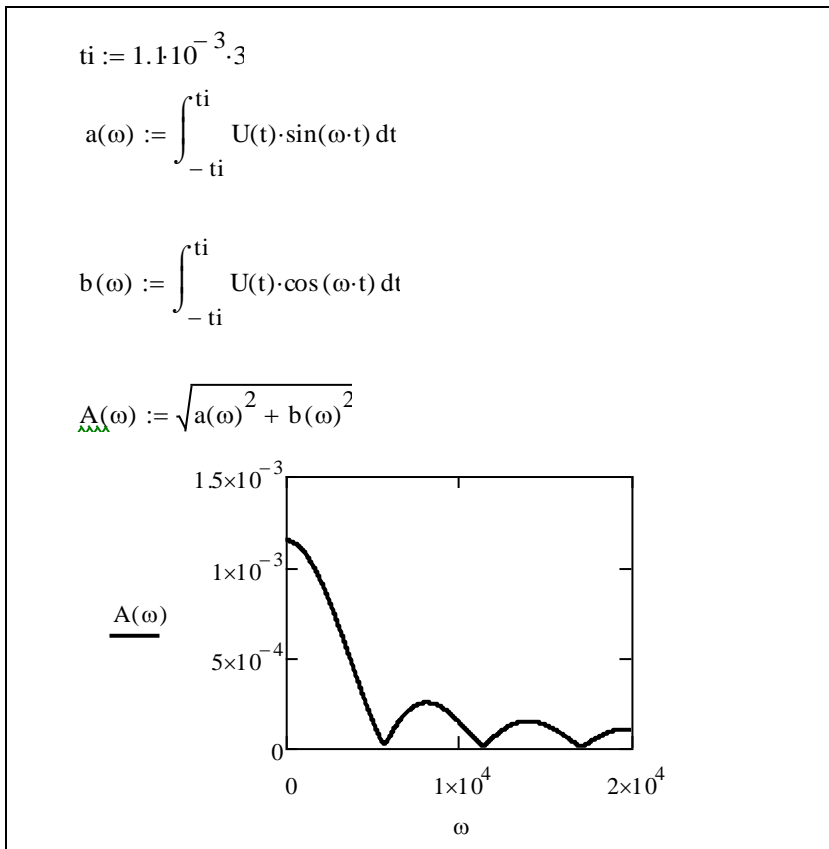


Рисунок 3.6 – Расчёт спектральной характеристики экспоненциального импульса и построение её графика

7 Рассчитаем и построим энергетическую характеристику колокольного импульса $\gamma(\omega_b)$ (рисунок 3.10).

8 Определим верхнюю частоту ω_g спектра сигнала колокольного импульса.

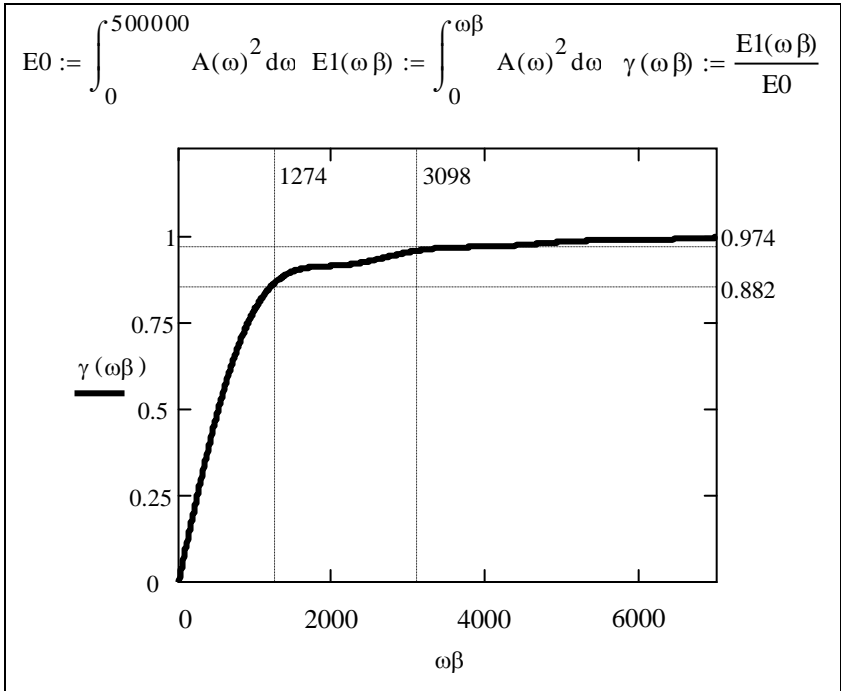


Рисунок 3.7 – Расчёт энергетической характеристики импульса и построение ее графика

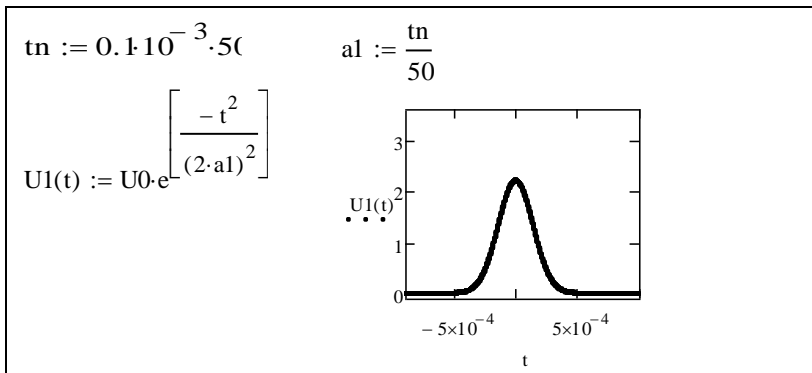


Рисунок 3.8 – Расчёт и построение графика функции колокольного импульса

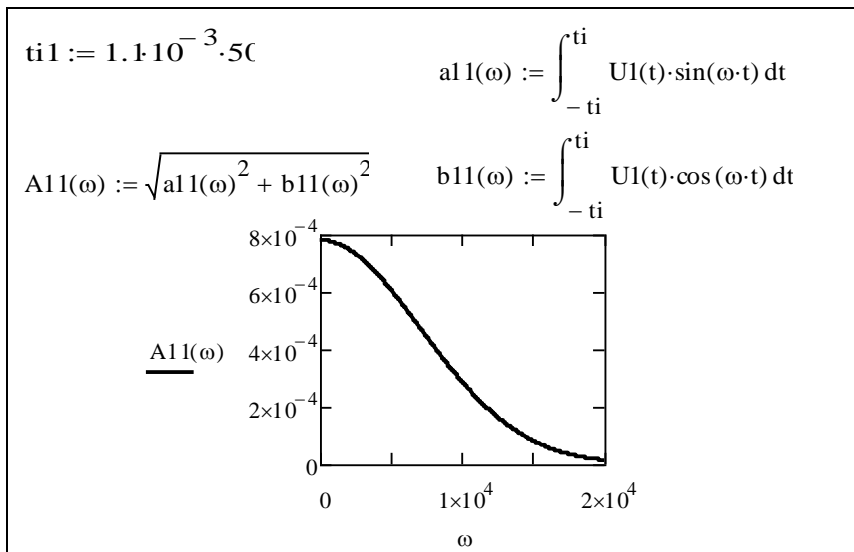


Рисунок 3.9 – Расчёт спектральной характеристики колокольного импульса и построение её графика

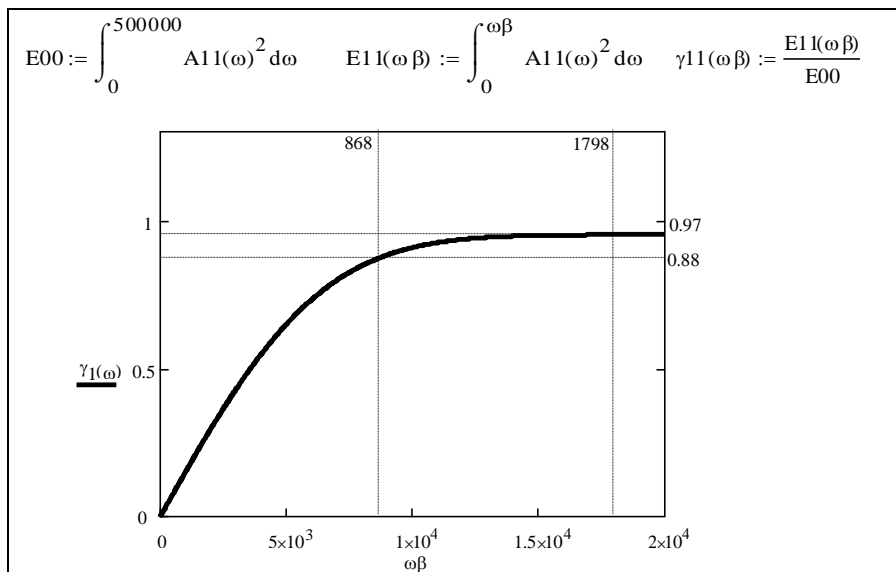


Рисунок 3.10 – Расчёт энергетической характеристики колокольного импульса и построение ее графика

Содержание отчета

- 1 Графики экспоненциального и колокольного импульса.
- 2 Результаты расчетов спектральной и энергетической характеристик заданных импульсов.
- 3 Выводы по результатам исследований.
- 4 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Где расположена основная часть энергии импульса?
- 2 Как перейти от тригонометрической формы записи ряда Фурье к экспоненциальной?
- 3 Какой функцией описывается спектральная плотность колокольного импульса?
- 4 Как рассчитывается полная энергия колокольного импульса?
- 5 Что такое интеграл вероятности?
- 6 Как рассчитываются постоянные составляющие колокольного и экспоненциального импульса?

Лабораторная работа № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ВИДЕОИМПУЛЬСОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Цель работы. Путем компьютерного моделирования исследовать спектральные и энергетические характеристики треугольного, прямоугольного, полуволны косинусоиды, трапецеидального и косинус-квадратного видеоимпульсов. Провести сравнительный анализ полученных характеристик.

Подготовка к работе. Ознакомиться с принципами спектрального анализа временных сигналов [1, с. 42–50; 2, с. 19–27; 3, с. 49–62; 4, с. 21–22].

1 Краткие сведения из теории

Различают импульсы высокочастотных колебаний, называемые радиоимпульсами, и видеоимпульсы, не связанные с высокочастотными колебаниями. В дальнейшем при отсутствии оговорок под импульсами следует понимать видеоимпульсы положительной или отрицательной полярности.

Различают одиночные импульсы и импульсные последовательности. В первом случае полезные функции импульсов не связаны с их повторяемостью. Во втором случае представляют интерес не только отдельные импульсы

сы, но также и их совокупность. При этом на практике приходится оперировать как с регулярными (периодическими), так и нерегулярными (случайными) последовательностями импульсов.

Резкий подъем импульса называется фронтом, резкий спад – срезом, а верхняя часть – вершиной. Иногда после среза импульса наблюдается выброс противоположной полярности, за которым может следовать медленно меняющаяся часть, называемая «хвостом импульса».

Основные параметры импульсов (рисунок 4.1):

- амплитуда импульса (A);
- спад вершины (ΔA);
- относительный спад ($\Delta A/A$);
- длительности импульса, фронта и среза ($t_{и}$, t_{ϕ} и $t_{с}$).

Отсчет временных интервалов производится на некоторых условных уровнях. При четкой фиксации моментов, определяющих временные интервалы, имеют в виду длительность по «основанию», $t_{ио}$, $t_{\phiо}$, $t_{со}$.

В основном говорят об активных длительностях фронта и среза, отсчитанных между уровнями $0,9A$ и $0,1A$.

Активная длительность импульса, $t_{и}$ соответствует отсчету на уровне $0,5A$. Для импульса прямоугольной формы, $t_{и} = t_{ио}$. В случае импульса более сложной (не «гладкой») формы вводятся дополнительные характеристики о величинах выбросов.

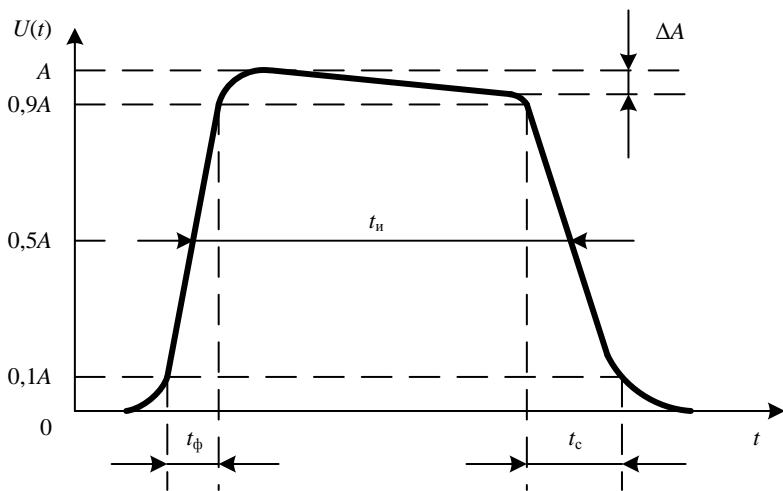


Рисунок 4.1 – Основные параметры импульса

Для удобства математического описания реальные импульсы заменяют близкими по форме идеализированными импульсами простой геометрической формы.

Периодические импульсные последовательности характеризуются периодом повторения T , частотой повторения $F = 1/T$ и скважностью $Q = T/t_{и}$.

Встречаются квазипериодические последовательности импульсов, в которых временной интервал T и, следовательно, F остаются не постоянными, а варьируются (например, при импульсно-кодовой модуляции).

Моменты t_i появления импульсов могут также быть случайными (случайные последовательности).

Сигналами в широком смысле называют всевозможные носители сообщений. В узком смысле сигналами чаще называют лишь колебания электрического тока (напряжения), электромагнитные волны или механические колебания упругой среды, распространяющиеся на расстояние и несущие сообщения.

Сигналы формируются путем изменения тех или иных параметров физического носителя по закону, определяемому сообщением.

Сигналы классифицируются по следующим признакам:

1 По роли в передаче данной конкретной информации. Разделяются на полезные и мешающие сигналы. Полезные сигналы переносят сообщения, а мешающие сигналы (помехи) искажают их.

2 По степени определенности ожидаемых значений. Выделяют случайные и детерминированные сигналы. Случайные сигналы описываются случайными функциями времени, детерминированные – заданными функциями времени. Среди детерминированных сигналов выделяются периодические и непериодические.

3 По особенности структуры временного представления. Все сигналы делятся на дискретные и непрерывные. Элементы дискретных сигналов имеют четкие границы. Математически дискретные сигналы описываются разрывными функциями времени.

4 В зависимости от особенностей спектрального представления все сигналы можно разделить на узкополосные и широкополосные (по ширине спектра сигнала относительно средней частоты спектра), а также на низкочастотные и высокочастотные (по величине частот спектральных составляющих).

5 По значению, которое имеют сигналы в процессе модуляции, их можно разделить на модулирующие (первичный сигнал, который модулирует переносчик) или модулируемые (переносчик).

6 По принадлежности к тому или иному виду связи различают телеграфные, телефонные, радиовещательные, телевизионные, радиолокационные и другие сигналы.

2 Задание

- 1 Построить графики $A(\omega)$ по своему варианту для 5 импульсов.
 $U_0 = 0,1HN$, В; $t_{и} = 0,1HN \cdot 10^{-3}$, с,
где H – последние две цифры года,
 N – номер студента по журналу преподавателя.
- 2 Произвести обратное преобразование для диапазонов:
 - 1) 300 – 3400 Гц;
 - 2) $0 - \omega_{в}$ ($\gamma(\omega_{в}) = 0,8$).
- 3 Сделать выводы по результатам исследований.
- 4 Ответить на контрольные вопросы.

Спектральные функции импульсов

Треугольный импульс

Аналитическое выражение треугольного импульса (рисунок 4.2):

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{t_{и}}{2} \\ U_0 \left(1 + \frac{2t}{t_{и}}\right), & -t_{и} < t < 0 \\ U_0 \left(1 - \frac{2t}{t_{и}}\right), & 0 < t < \frac{t_{и}}{2} \\ 0, & t > \frac{t_{и}}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

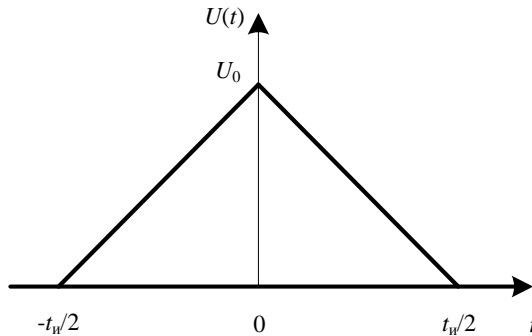


Рисунок 4.2 – График треугольного импульса

Спектральная функция $A(j\omega)$ импульса

$$A(\omega) = U_0 t_{и} \frac{1 - \cos \frac{\omega t_{и}}{2}}{\left(\frac{\omega t_{и}}{2}\right)^2} \quad (4.2)$$

Прямоугольный импульс

Аналитическое выражение прямоугольного импульса (рисунок 4.3)

$$U(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t \leq t_n \\ 0, & t > t_n \end{cases} \quad (4.3)$$

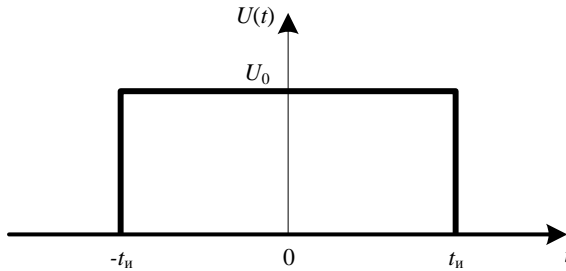


Рисунок 4.3 – График прямоугольного импульса

Спектральная функция $A(j\omega)$ импульса

$$A(\omega) = \left| \sin \frac{\omega t_n}{2} \right|. \quad (4.4)$$

Полуволна косинусоиды

Аналитическое выражение полуволны косинусоиды (рисунок 4.4)

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{t_n}{2} \\ U_0 \cos \frac{\pi t}{t_n}, & -\frac{t_n}{2} < t < \frac{t_n}{2} \\ 0, & t > \frac{t_n}{2} \end{cases} \quad (4.5)$$

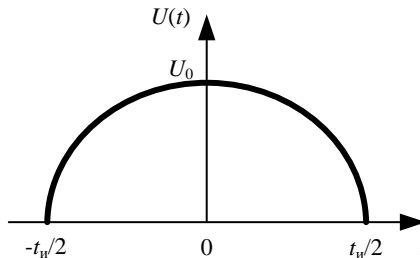


Рисунок 4.4 – График функции полуволны косинусоиды

Спектральная функция $A(j\omega)$

$$A(\omega) = \frac{\pi}{2} U_0 t_n \frac{\cos \frac{\omega t_n}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega t_n}{2}\right)^2} . \quad (4.6)$$

Трапецеидальный импульс

Аналитическое выражение трапецеидальной формы (рисунок 4.5)

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{-t_n}{2} \\ U_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{t_\phi} \left(t + \frac{3t_n}{8} \right) \right], & \frac{-t_n}{2} \leq t \leq \frac{-t_n}{4} \\ U_0, & \frac{-t_n}{4} < t < \frac{t_n}{4} \\ U_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{t_\phi} \left(t + \frac{3t_n}{8} \right) \right], & \frac{t_n}{4} \leq t \leq \frac{t_n}{2} \\ 0, & t > \frac{t_n}{2} \end{cases} . \quad (4.7)$$

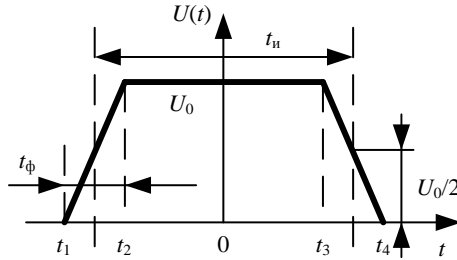


Рисунок 4.5 – График трапецеидального импульса

Спектральная функция

$$A(j\omega) = U_0 t_n \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}} \frac{\sin \frac{\omega t_\phi}{2}}{\frac{\omega t_\phi}{2}} , \quad (4.8)$$

где $t_\phi = \frac{t_n}{4}$.

«Приподнятый» косинус (косинус-квадратный)

Аналитическое выражение импульса (рисунок 4.6)

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \cos^2 \frac{\pi t}{t_n}, & |t| \leq \frac{t_n}{2} \\ 0, & |t| > \frac{t_n}{2} \end{cases} . \quad (4.9)$$

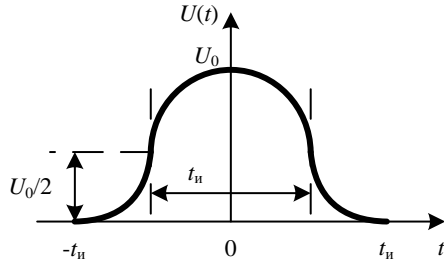


Рисунок 4.6 – График косинус-квадратного импульса

Спектральная функция

$$A(j\omega) = \frac{U_0 t_n}{1 - \left(\frac{\omega t_n}{2}\right)^2} \frac{\sin \omega t_n}{\omega t_n}. \quad (4.10)$$

3 Пример выполнения

1 Построим графики $U(t)$ и $A(\omega)$ по своему варианту (рисунки 4.7, 4.8).

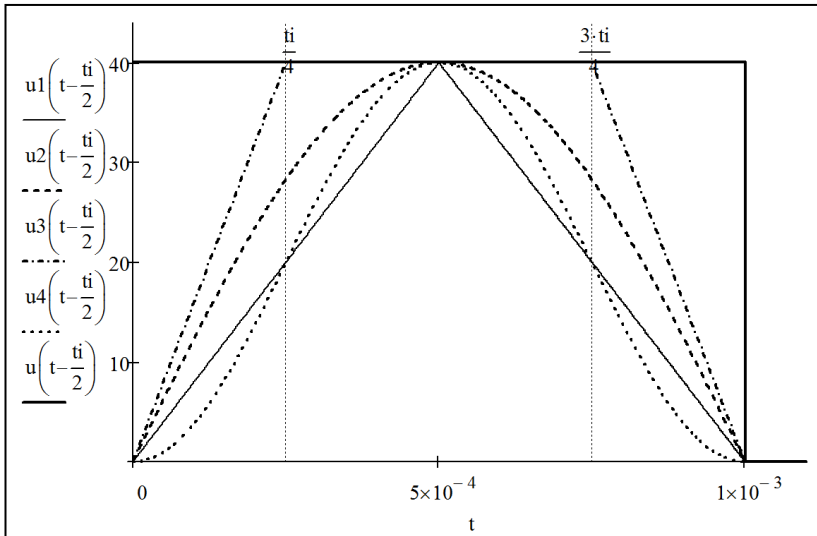


Рисунок 4.7 – Графики функций видеоимпульсов

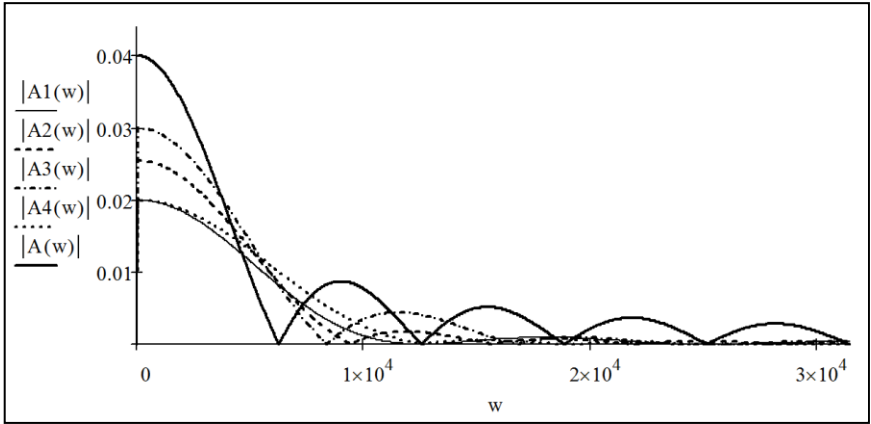


Рисунок 4.8 – Графики спектральных функций

2 Построим энергетические характеристики (рисунок 4.9).

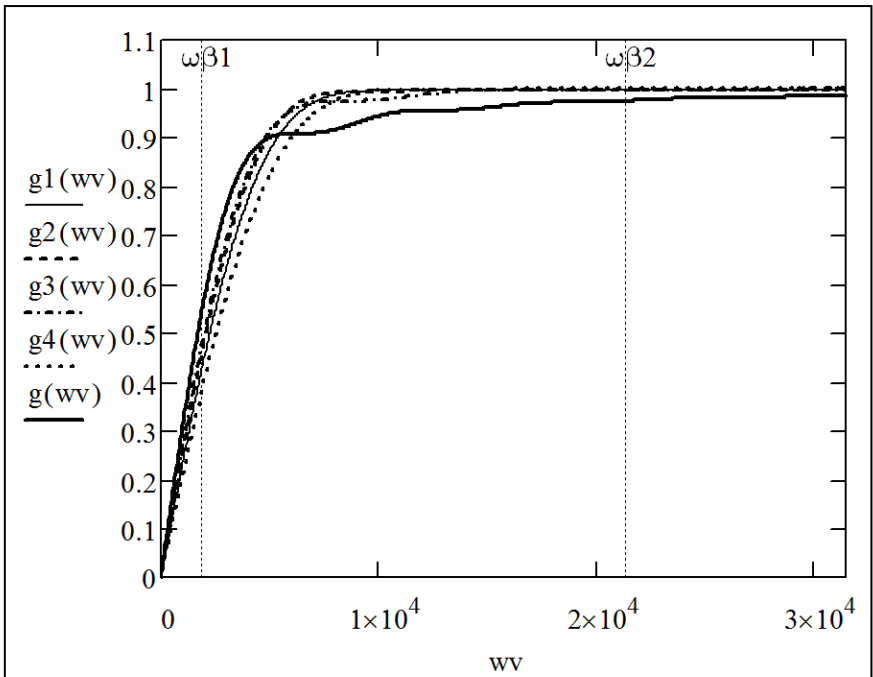


Рисунок 4.9 – Энергетические характеристики

3 Произведем обратное преобразование Фурье для импульсов (рисунок 4.10).

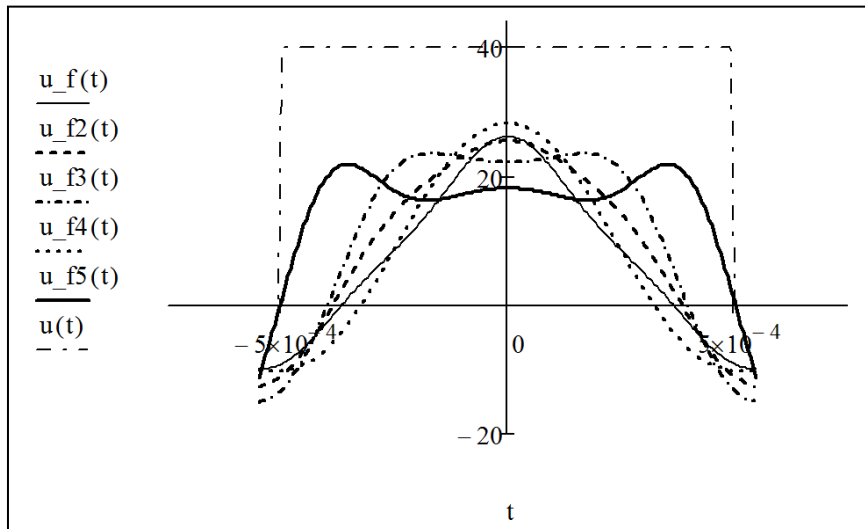


Рисунок 4.10 – Графики восстановленных импульсов

Содержание отчета

- 1 Графики видеоимпульсов.
- 2 Результаты расчетов спектральной и энергетической характеристик заданных импульсов.
- 3 Результаты восстановления видеоимпульсов в полосе частот.
- 4 Выводы по результатам исследований.
- 5 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

- 1 Как рассчитываются полная энергия одиночного прямоугольного импульса?
- 2 Какие составляющие спектральной функции оказывают наибольшее влияние на форму вершины импульса и форму фронта импульса?
- 3 Как изменится ширина спектра одиночного импульса при увеличении длительности импульса в 2 раза, при уменьшении длительности импульса в 4 раза?
- 4 Что такое интегральный синус?
- 5 Что происходит при прохождении гармонического сигнала через линейные цепи?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Теория передачи сигналов на железнодорожном транспорте / Г. В. Горелов [и др.]. – М. : Транспорт, 1999. – 415 с.

2 **Клюев, Л. Л.** Теория электрической связи / Л. Л. Клюев. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.

3 **Каллер, М. Я.** Теоретические основы транспортной связи / М. Я. Каллер, А. Ф. Фомин. – М. : Транспорт, 1989. – 388 с.

4 **Кострома, В. С.** Спектры видеоимпульсов / В. С. Кострома, В. Н. Фомичев, В. Г. Шевчук. – Гомель : БелГУТ, 1999. – 31 с.

5 **Фомичев, В. Н.** Цифровая система передачи информации : пособие по курсовому проектированию / В. Н. Фомичев. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 71 с.

6 **Семенюта, Н. Ф.** Алгоритмические основы построения систем связи / Н. Ф. Семенюта, В. Н. Фомичев. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 39 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Лабораторная работа № 1</i> Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов.....	3
<i>Лабораторная работа № 2</i> Исследование спектра одиночного прямоугольного импульса.....	9
<i>Лабораторная работа № 3</i> Исследование спектров экспоненциального и колокольного импульсов.....	20
<i>Лабораторная работа № 4</i> Исследование спектров видеоимпульсов сложной формы.....	28
Список рекомендуемой литературы.....	37

Учебное издание

Бортновский Александр Анатольевич
Жигалин Игорь Олегович

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ
Лабораторный практикум

Редактор *А. А. Павлюченкова*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 28.06.2016 г. Формат бумаги 60x84^{1/16}
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 1,87. Тираж 300 экз.
Зак № . Изд. № 88

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014
№ 2/104 от 01.04.2014
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель