

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТРАНСПОРТА»

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

# **ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

**ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ.  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ**

Учебно-методическое пособие

Гомель 2021

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТРАНСПОРТА»

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

# ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по  
образованию  
в области транспорта и транспортной деятельности для  
обучающихся по специальности 1-37 02 04 «Автоматика,  
телемеханика и связь на железнодорожном транспорте»  
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2021

УДК 621.313 (075.8)

ББК 31.261

Г15

Рецензенты: доцент кафедры «Физика и электротехника»  
канд. техн. наук, доцент *Л. Г. Бычкова* (УО ГГТУ  
им. П. О. Сухого);  
доцент кафедры «Автоматика и телемеханика»  
канд. техн. наук, доцент *Ф. Е. Сатырев* (УО  
БелГУТ)

**Волков Н. П.**

Г15 Теория линейных электрических цепей. Четырехполюсники.  
Электрические фильтры: учеб.-метод. пособие / Н. П. Волков ;  
М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос.  
ун-т трансп. – Гомель :  
БелГУТ, 2021. – 129 с.  
ISBN 978-985-554-931-5

Представленный в пособии материал содержит вопросы теории четырехполюсников и базирующихся на их основе задач построения и исследования свойств и характеристик электрических фильтров. Предназначено для студентов специальности 1-37 02 04 «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте», обучающихся по дневной и заочной формам.

УДК 621.313 (075.8)

ББК 31.261

ISBN 978-985-554-931-5

© Волков Н. П. 2021

© Оформление. БелГУТ, 2021

«Теория линейных электрических цепей» (ТЛЭЦ) является одним из базовых курсов в системе подготовки инженеров-электриков по специальности

1-37 02 04 «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте», дневной и заочной форм обучения. Курс ТЛЭЦ фактически является продолжением курса «Теоретические основы электротехники», излагаемые в курсе методы анализа цепей и прохождения сигналов использует тот же математический аппарат.

В основе курса лежит исследование электромагнитных процессов в электрических цепях и установление связей между напряжениями и токами в различных частях цепи, а также частотные характеристики цепей. Для передачи информации используют различные каналы связи, представляющие совокупность электрических и электронных устройств, обладающих определенными свойствами.

Задача данного курса – научить студентов уметь описывать математически физические стороны изучаемых электромагнитных процессов и составлять соответствующие математические модели.

Курс ТЛЭЦ включает основные разделы, в которых исследуют двухполюсные и многополюсные цепи, электрические фильтры, длинные линии, рассматриваются вопросы синтеза линейных цепей с заданными частотными или временными характеристиками. Данный курс направлен на углубленное изучение теории электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами и решение практических задач, связанных с передачей сигналов в устройствах железнодорожной телемеханики и связи.

## 1 ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

В различных областях электротехники, радиотехники, автоматики и электроники для передачи энергии или информации часто применяются устройства с двумя парами зажимов (*полюсов*), с помощью которых они могут быть соединены с внешними по отношению к ним цепями, в частности, с источником энергии и нагрузкой. Такие устройства, внутренняя электрическая цепь которых может быть достаточно сложной, называются *четырёхполюсниками*. Четырёхполюсники делят на активные и пассивные. *Активными* называются четырёхполюсники, в состав которых входят активные элементы, т. е. транзисторы, микросхемы, операционные усилители с источниками питания и др. Четырёхполюсники, содержащие только пассивные элементы, т. е.  $r, L, C$ -элементы, называются *пассивными*. К их числу относятся линии передачи сигналов, трансформаторы, электрические фильтры. Если в режиме холостого хода между какими-либо зажимами четырёхполюсника имеется напряжение, отличное от нуля, то такой четырёхполюсник называют *автономным*, а если не имеется – *неавтономным*. Таким образом, к неавтономным относятся все пассивные четырёхполюсники, а также активные, которые не содержат независимых источников энергии.

Условно четырёхполюсники изображаются в виде прямоугольников с двумя парами зажимов (рисунок 1.1). Одну пару зажимов 1–1' называют *первичной*, или *входной*, а другую 2–2' – *вторичной*, или *выходной*. Если четырёхполюсник активный, то внутри прямоугольника ставится буква *A*, а если буква *A* отсутствует, то это значит, что четырёхполюсник пассивный.

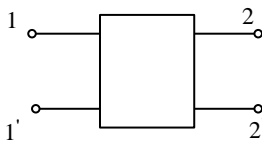


Рисунок 1.1

Будем считать, что генераторы, приемники, двухполюсники, четырёхполюсники и любые участки электрической цепи могут присоединяться только к зажимам, которые обозначены одинаковыми цифрами. Такие четырёхполюсники называют *проходными*. Если у четырёхполюсников выполняется принцип взаимности, то они называются *обратимыми*.

Некоторые общие свойства четырёхполюсников можно изучать безотносительно к схемам конкретных цепей. Рассмотрим методы анализа и общие методы расчета проходных четырёхполюсников с произвольной схемой.

При этом будем полагать, что четырёхполюсники не содержат нелинейных элементов, т. е. являются *линейными*. Напряжения и токи источников

питания, которые могут подключаться к выводам 1–1' и 2–2', а следовательно, напряжения и токи на всех участках цепи будем считать синусоидальными и все уравнения записывать в комплексной форме.

## 1.1 Уравнения четырехполюсников

При исследовании четырехполюсников устанавливают зависимость между четырьмя величинами, определяющими режим их работы: напряжениями и токами на первичных и вторичных зажимах ( $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{I}_2$ ). Соотношения, которые связывают эти четыре переменные, называют *уравнениями передачи четырехполюсника*, а коэффициенты при переменных – его *первичными параметрами*. Любые две величины определяют через две другие. Так как число сочетаний из четырех по два равно шести, то возможны шесть форм записи систем уравнений пассивного четырехполюсника. Все шесть систем уравнений описывают один и тот же четырехполюсник, следовательно, любую из них можно получить из другой системы линейным преобразованием.

В зависимости от решаемой задачи, положительные направления токов относительно входных и выходных зажимов четырехполюсников можно выбрать различным образом (рисунок 1.2). Общему случаю включения четырехполюсника соответствует схема на рисунке 1.2, а; при питании четырехполюсника со стороны входных зажимов с нагрузкой, подключенной к выходным, используют схему на рисунке 1.2, б (схема с *прямым* питанием). Если источник подключен со стороны выходных зажимов, а нагрузка подключена к входным, то для анализа работы четырехполюсника применяют схему на рисунке 1.2, в (схема с *обратным* питанием).

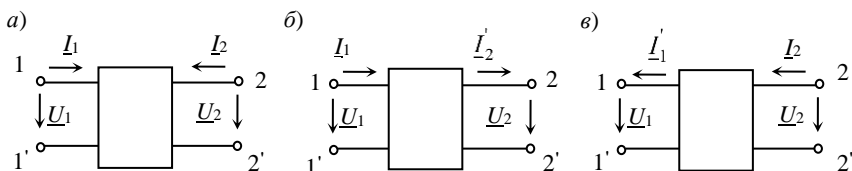


Рисунок 1.2

### 1.1.1 Уравнения в формах $Y$ и $Z$

Рассмотрим пассивный линейный четырехполюсник, к первичным зажимам 1–1' которого подключен источник с напряжением  $\underline{U}_1$ , а к вторичным зажимам 2–2' – источник с напряжением  $\underline{U}_2$  (рисунок 1.3). Применим к этой схеме принцип наложения и выразим входной  $\underline{I}_1$  и выходной  $\underline{I}_2$  токи через напряжения источников  $\underline{U}_1$  и  $\underline{U}_2$ :

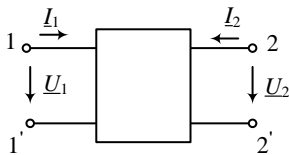


Рисунок 1.3

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Полученные уравнения четырехполосника содержат коэффициенты, которые называются *Y-параметрами*. Каждый из этих параметров имеет определенный физический смысл и может быть найден из рассмотрения режима короткого замыкания четырехполосника со стороны его входных или выходных зажимов.

Постоянные коэффициенты  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Y}_{21}$  и  $\underline{Y}_{22}$  зависят от значений параметров элементов, входящих в состав двухполосника, и конфигурации его схемы. Они имеют размерность проводимости и определяются из следующих соотношений:

$\underline{Y}_{11} = \underline{I}_1 / \underline{U}_1$  при  $\underline{U}_2 = 0$  (входная проводимость со стороны входных зажимов при закороченных выходных);

$\underline{Y}_{22} = \underline{I}_2 / \underline{U}_2$  при  $\underline{U}_1 = 0$  (входная проводимость со стороны выходных зажимов при закороченных входных);

$\underline{Y}_{12} = \underline{I}_1 / \underline{U}_2$  при  $\underline{U}_1 = 0$  (взаимная проводимость при закороченных входных зажимах);

$\underline{Y}_{21} = \underline{I}_2 / \underline{U}_1$  при  $\underline{U}_2 = 0$  (взаимная проводимость при закороченных выходных зажимах).

Уравнения (1.1) записаны в так называемой *форме Y*. Их можно записать также в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix},$$

где  $\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = [\underline{Y}]$  – матрица *Y*-параметров.

Выразим напряжения  $\underline{U}_1$  и  $\underline{U}_2$  через токи  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , решая систему уравнений (1.1) методом Крамера:

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{I}_1 & \underline{Y}_{12} \\ \underline{I}_2 & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Y}_{22}\underline{I}_1 - \underline{Y}_{12}\underline{I}_2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{I}_2 \end{vmatrix} = -\underline{Y}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Y}_{11}\underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_Y} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y} \underline{I}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta_Y} \underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_Y} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y} \underline{I}_1 + \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y} \underline{I}_2.$$

Обозначив коэффициенты в полученных уравнениях

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y}; \quad \underline{Z}_{12} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta_Y}; \quad \underline{Z}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y}; \quad \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y},$$

имеющие размерность сопротивления, получим уравнения четырехполосника в *форме Z*:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

где  $\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = [\underline{Z}]$  – матрица Z-параметров четырехполосника.

### 1.1.2 Уравнения в формах A и B

Наиболее распространенной формой записи уравнений четырехполосника является такая, при которой входные величины  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$  выражаются через выходные  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ . Этому случаю соответствует схема на рисунке 1.4, где входные зажимы четырехполосника включены под напряжение  $\underline{U}_1$ , а к вторичным зажимам присоединена нагрузка с сопротивлением  $\underline{Z}_2$  и по ней течет ток  $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$ . В результате совместного решения уравнений (1.1) относительно  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$  находим:

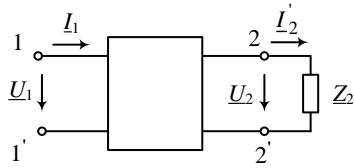


Рисунок 1.4

$$\underline{U}_1 = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}'_2;$$

$$\underline{I}_1 = -\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}'_2.$$

Вводя обозначения

$$\underline{A}_{11} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}; \quad \underline{A}_{12} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}; \quad \underline{A}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}}; \quad \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}},$$

получим уравнения четырехполосника в *форме A*:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$



Параметры  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{22}$  – безразмерные коэффициенты,  $\underline{A}_{12}$  имеет размерность сопротивления, а  $\underline{A}_{21}$  – проводимости. Запишем уравнения (1.3) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы  $[\underline{A}]$ :

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix} = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = \frac{\underline{Y}_{22}\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}\underline{Y}_{21}} - \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}\underline{Y}_{21}} + \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}\underline{Y}_{21}} = \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}.$$

В соответствии с принципом взаимности для линейных электрических цепей  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ , следовательно,

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \quad (1.4)$$

Из соотношения (1.4) следует, что из четырех  $A$ -параметров четырехполюсника только три являются независимыми.

Рассмотрим режим четырехполюсника при питании со стороны вторичных зажимов. Пусть источник с напряжением  $\underline{U}_2$  подключен к выходным зажимам 2–2', а к входным зажимам 1–1' присоединена нагрузка с сопротивлением  $\underline{Z}_1$  (рисунок 1.5). Уравнения (1.3) с учетом изменившихся направлений токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  можно записать так:

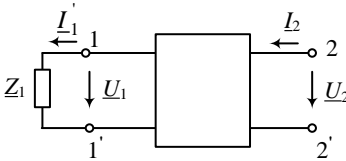


Рисунок 1.5

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2;$$

$$-\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2.$$

Решая эту систему уравнений относительно  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ , находим

$$\underline{U}_2 = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1'; \quad (1.5)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1'.$$

Сравнивая уравнения (1.3) и (1.5), приходим к выводу, что при замене первичных зажимов четырехполюсника вторичными параметры  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{22}$  в уравнениях меняются местами. При равенстве  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{22}$  свойства четырехполюсника одинаковы как со стороны входных, так и со стороны выходных зажимов. Такие четырехполюсники называются *симметричными*, а уравнение (1.4) принимает вид:

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \quad (1.6)$$

Уравнения четырехполюсника, в которых напряжение и ток на выходных зажимах выражаются через напряжение и ток на входных, называются уравнениями в *форме В*:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{B}_{11} \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}'_1; \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21} \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \underline{I}'_1,\end{aligned}\tag{1.7}$$

где  $\underline{B}_{11} = \underline{A}_{22}$ ;  $\underline{B}_{22} = \underline{A}_{11}$ ;  $\underline{B}_{12} = \underline{A}_{12}$ ;  $\underline{B}_{21} = \underline{A}_{21}$ .

Уравнения (1.7) могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = [\underline{B}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix}.$$

### 1.1.3 Уравнения в формах *H* и *F*

Существуют еще две так называемые *гибридные* формы записи уравнений четырехполюсника. С помощью одной из них, которая называется формой *H*, устанавливается связь между величинами  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_2$ , с одной стороны, и  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$  – с другой. Такая форма уравнений оказывается удобной при составлении схем замещения полупроводниковых триодов. Она может быть получена путем преобразования системы уравнений (1.1).

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} \underline{I}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}} \underline{U}_2; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} \underline{I}_1 + \frac{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} \underline{U}_2.$$

Обозначим коэффициенты, стоящие перед  $\underline{I}_1$  и  $\underline{U}_2$ :

$$\underline{H}_{11} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}; \quad \underline{H}_{12} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}; \quad \underline{H}_{21} = \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}; \quad \underline{H}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}.$$

Получим уравнения четырехполюсника в форме *H*:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Уравнения в *форме F* устанавливают связь между  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$  и  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_2$ .

Из системы уравнений (1.1) выразим ток  $\underline{I}_1$  и напряжение  $\underline{U}_2$  в зависимости от  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_2$ .

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} \underline{U}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_{22}} \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} \underline{U}_1 + \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}} \underline{I}_2.\end{aligned}$$

Получим уравнения четырехполюсника в форме  $F$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \underline{F}_{11} U_1 + \underline{F}_{12} I_2; \\ U_2 &= \underline{F}_{21} U_1 + \underline{F}_{22} I_2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\underline{F}_{11} = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}}$ ;  $\underline{F}_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ ;  $\underline{F}_{21} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$ ;  $\underline{F}_{22} = \frac{1}{Y_{22}}$ .

Следует отметить, что для каждой системы основных параметров четырехполюсников имеется своя область применения, определяемая структурой и значениями параметров элементов цепи, а также способом соединения ее выводов с внешней цепью.

Таким образом, при составлении уравнений передачи четырехполюсника в формах  $Y$ ,  $Z$ ,  $H$  и  $F$  положительные направления токов и напряжений выбирают в соответствии с рисунком 1.2, *а*; при составлении уравнений в форме  $A$  – в соответствии с рисунком 1.2, *б*; при составлении уравнений в форме  $B$  – в соответствии с рисунком 1.2, *в*.

В дальнейшем при исследовании четырехполюсников будем в основном пользоваться уравнениями в форме  $A$ .

## 1.2 Входные сопротивления четырехполюсников

Как правило, четырехполюсник включается между генератором и приемником при прямом и обратном питании (см. рисунки 1.4 и 1.5 соответственно). Режим источника питания в этом случае зависит от входного сопротивления четырехполюсника. А входные сопротивления четырехполюсника как со стороны входных зажимов, так и со стороны выходных, в свою очередь, определяются структурой четырехполюсника, параметрами элементов его схемы и сопротивлением подключенного к нему приемника. Входные сопротивления легко выразить из систем уравнений (1.3) и (1.5).

Отношение напряжения  $U_1$  к току  $I_1$  при питании четырехполюсника со стороны первичных зажимов и сопротивлении нагрузки  $Z_2$  на вторичных (см. рисунок 1.4) называется *входным сопротивлением* четырехполюсника со стороны первичных зажимов и обозначается  $Z_{1\text{вх}}$ .

Используя уравнения (1.3) и учитывая, что  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}'_2$ , находим:

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}U_2 + A_{12}I'_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I'_2} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}. \quad (1.10)$$

В частных случаях при отключенном или замкнутым приемнике входные сопротивления будут определяться только первичными параметрами четырехполюсника.

В режиме холостого хода ( $Z_2 \rightarrow \infty$ ,  $I'_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21} = Z_{1x} e^{j\varphi_{1x}}. \quad (1.11)$$

При коротком замыкании зажимов 2 – 2' ( $Z_2 = 0$ ,  $U_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22} = Z_{1к} e^{j\varphi_{1к}}. \quad (1.12)$$

При питании четырехполюсника со стороны вторичных зажимов и сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_1$  на первичных (см. рисунок 1.5) отношение напряжения  $\underline{U}_2$  к току  $\underline{I}_2$  называется *входным сопротивлением* четырехполюсника со стороны вторичных зажимов и обозначается  $\underline{Z}_{2вх}$ . В соответствии с уравнениями (1.5) и соотношением  $\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1'$  получим:

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1'}{\underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1'} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_1 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_1 + \underline{A}_{11}}. \quad (1.13)$$

При холостом ходе на первичных зажимах ( $Z_1 \rightarrow \infty$ ,  $I_1 = 0$ ) входное сопротивление

$$\underline{Z}_{2х} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21} = Z_{2х} e^{j\varphi_{2х}}, \quad (1.14)$$

а при коротком замыкании

$$\underline{Z}_{2к} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11} = Z_{2к} e^{j\varphi_{2к}}. \quad (1.15)$$

Выражения для  $\underline{Z}_{1вх}$  и  $\underline{Z}_{2вх}$  можно записать через сопротивления холостого хода и короткого замыкания при прямом и обратном питании:

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11}(\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11})}{\underline{A}_{21}(\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21})} = \underline{Z}_{1х} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2к}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2х}}; \quad (1.16)$$

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{A}_{22}(\underline{Z}_1 + \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22})}{\underline{A}_{21}(\underline{Z}_1 + \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21})} = \underline{Z}_{2х} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1к}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1х}}.$$

(1.17)

Полученные выражения (1.16) и (1.17) связывают между собой сопротивления на входных и выходных зажимах четырехполюсника и показывают одно из его свойств – способность преобразовывать сопротивления.

В общем случае  $A$ -параметры четырехполюсников, а также сопротивления, на которые они нагружены, зависят от частоты. Следовательно, и входные сопротивления четырехполюсников также являются функциями частоты.

### 1.3 Определение коэффициентов четырехполюсников

Комплексные коэффициенты несимметричного пассивного четырехполюсника можно рассчитать, если известны параметры элементов, из кото-

рых он составлен, и схема их соединения (внутренняя схема четырехполюсника). Их можно также определить опытным путем, производя измерения напряжений и токов на первичных и вторичных зажимах четырехполюсника. Наиболее просто значения этих коэффициентов вычисляются по данным опытов холостого хода и короткого замыкания. Например, из уравнений (1.3) следует, что при питании четырехполюсника со стороны первичных зажимов и холостом ходе на вторичных ( $I_2 = 0$ )

$$\underline{A}_{11} = \underline{U}_{1x} / \underline{U}_{2x};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{I}_{1x} / \underline{U}_{2x},$$

а при коротком замыкании вторичных зажимов ( $U_2 = 0$ )

$$\underline{A}_{12} = \underline{U}_{1к} / \underline{I}'_{2к};$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{I}_{1к} / \underline{I}'_{2к}.$$

При этом должны быть измерены не только модули соответствующих величин, но и их фазы.

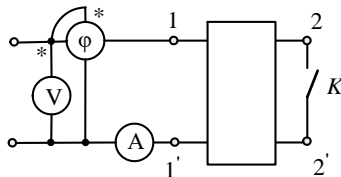
Таким образом, измеряя модули и фазы  $\underline{U}_{1x}$ ,  $\underline{I}_{1x}$  и  $\underline{U}_{2x}$  в режиме холостого хода,  $\underline{U}_{1к}$ ,  $\underline{I}_{1к}$  и  $\underline{I}'_{2к}$  при коротком замыкании, легко определить все четыре коэффициента четырехполюсника.

Коэффициенты четырехполюсника можно найти и по данным опытов холостого хода и короткого замыкания при питании со стороны вторичных зажимов, т. е. из уравнений (1.5).

Их можно также рассчитать по данным экспериментов, измеряя в каждом случае напряжения и ток только на первичных или только на вторичных зажимах. В этом случае необходимо иметь данные трех опытов, из которых два опыта проводятся при питании четырехполюсника со стороны первичных зажимов и один опыт – при питании со стороны вторичных или наоборот.

При работе четырехполюсника в цепи постоянного тока достаточно измерить вольтметрами напряжения и амперметрами токи. В цепи синусоидального тока необходимо еще определять угол сдвига фаз между соответствующими величинами, что затрудняет экспериментальное определение коэффициентов, особенно на высоких частотах.

Точнее и проще произвести измерение комплексных сопротивлений четырехполюсника относительно входных и выходных зажимов в режиме холостого хода ( $\underline{Z}_{1x}$ ,  $\underline{Z}_{2x}$ ) и режиме короткого замыкания ( $\underline{Z}_{1к}$ ,  $\underline{Z}_{2к}$ ), а затем по их значениям найти коэффициенты  $\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22}$ . Сопротивления холостого хода и короткого замыкания могут быть измерены теми же методами, что и любые другие сопротивления, например, при помощи амперметра, вольтметра и фазометра, включенных со стороны первичных зажимов (рисунок 1.6). При холо-



стом ходе ключ  $K$  разомкнут, а в режиме короткого замыкания он замыкается. Аналогичным образом можно измерить входное сопротивление со стороны выходных зажимов. Вместо фазометра можно применить ваттметр.

Выразим, например,  $A$ -параметры четырехполюсника через комплексные сопротивления  $\underline{Z}_{1x}$ ,  $\underline{Z}_{2x}$  и  $\underline{Z}_{2k}$  из соотношений (1.4), (1.11), (1.14) и (1.15):

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \quad \underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}.$$

Решим совместно эти уравнения:

$$\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}} = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}; \quad \frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}} = \underline{A}_{11}^2,$$

откуда

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}}}; \quad (1.18)$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{2k}\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{2k} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}}}; \quad (1.19)$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1x}(\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k})}}; \quad (1.20)$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{2x}\underline{A}_{21} = \frac{\underline{Z}_{2x}}{\sqrt{\underline{Z}_{1x}(\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k})}}. \quad (1.21)$$

Расчеты по формулам, в которые входят комплексные сопротивления, дают два значения для каждого из коэффициентов. При извлечении квадратного корня из комплексного числа получаются две комплексные величины, аргументы которых отличаются на  $180^\circ$ :

$$\underline{A}_{11}'' = -\underline{A}_{11}' = \underline{A}_{11}' e^{j180^\circ}.$$

Это объясняется тем, что коэффициенты зависят не только от параметров схемы четырехполюсника, но и от выбора положительных направлений напряжений и токов относительно его зажимов.

## 1.4 Схемы замещения четырехполюсников

### 1.4.1 Канонические Т- и П-образные схемы

Как было установлено, пассивный четырехполюсник характеризуется только тремя независимыми первичными параметрами. Следовательно, используя три двухполюсника с комплексными сопротивлениями  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ , можно получить простейшие эквивалентные схемы четырехполюсника с

заданными свойствами. Такие схемы с минимальным количеством элементов называются *каноническими*.

Для получения канонических схем пассивных четырехполюсников указанные двухполюсники можно соединить двумя способами: *звездой* и *треугольником*. При этом получаются Т-образная (рисунок 1.7, а) и П-образная (рисунок 1.7, б) канонические схемы четырехполюсников. Найдем зависимости между коэффициентами уравнений четырехполюсника в форме *A* и параметрами  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  его канонических Т-образной и П-образной схем, для чего выразим  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$  через  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}'_2$  по законам Кирхгофа.

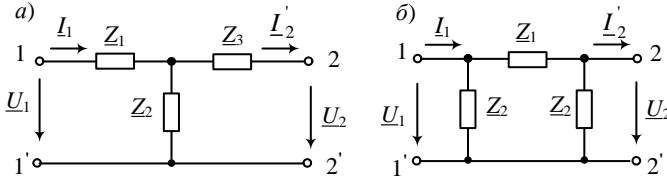


Рисунок 1.7

### Т-образная схема (Т-схема)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}'_2 + \underline{Z}_1 \underline{I}_1; \\ \underline{I}_1 &= (\underline{U}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}'_2) \frac{1}{\underline{Z}_2} + \underline{I}'_2. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим уравнения в форме *A*:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\right) \underline{U}_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right) \underline{I}'_2 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}'_2; \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right) \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}'_2. \end{aligned}$$

Сопоставляя коэффициенты, стоящие перед  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}'_2$ , находим:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}. \quad (1.22)$$

Выразим параметры Т-схемы через *A*-параметры четырехполюсника:

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}. \quad (1.23)$$

### П-образная схема (П-схема)

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3} + \underline{I}'_2 \right) \underline{Z}_1; \\
\underline{I}_1 &= \left[ \underline{U}_2 + \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3} + \underline{I}'_2 \right) \underline{Z}_1 \right] \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3} + \underline{I}'_2; \\
\underline{U}_1 &= \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \right) \underline{U}_2 + \underline{Z}_1 \underline{I}'_2 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}'_2; \\
\underline{I}_1 &= \left( \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3} \right) \underline{U}_2 + \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right) \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}'_2.
\end{aligned}$$

Из полученных соотношений найдем выражения для  $A$ -параметров четырехполюсника и комплексных сопротивлений  $\Pi$ -схемы:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1; \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}; \quad (1.24)$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{A}_{12}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1}. \quad (1.25)$$

### 1.4.2 Симметричные Т- и $\Pi$ -образные четырехполюсники

У симметричных четырехполюсников равны параметры  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{22}$ . Следовательно, в их канонических схемах в соответствии с соотношениями (1.23) и (1.25) должны быть равными сопротивления продольных ветвей Т-схемы ( $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$ ) и сопротивления поперечных ветвей  $\Pi$ -схемы ( $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$ ).

В таком случае схемы этих четырехполюсников становятся симметричными относительно поперечной (вертикальной) оси.

Симметричные Т- и  $\Pi$ -образная схемы представлены на рисунке 1.8 и имеют следующие матрицы  $A$ -параметров:

$$\text{для Т-схемы} \quad [\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & 2\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1^2}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}; \quad (1.26)$$

$$\text{\(\Pi\)-схемы} \quad [\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2^2} & 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$



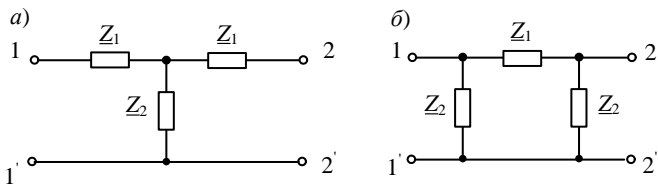


Рисунок 1.8

У рассмотренных Т-, П-образной схем замещения нижние продольные ветви имеют нулевые сопротивления в отличие от верхних. Такие четырехполосники называются *неуравновешенными* и применяются на практике в цепях, для которых нужно иметь общую точку.

Т- и П-образные схемы можно сделать *уравновешенными*, включив в верхние и нижние продольные ветви двухполосники с сопротивлениями, равными  $Z_1/2$ , как показано на рисунке 1.9. Условием уравновешенности четырехполосника является симметричность его схем относительно продольной (горизонтальной) оси.

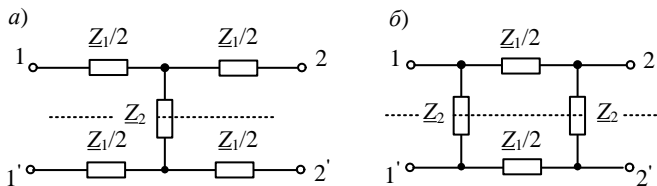


Рисунок 1.9

### 1.4.3 Мостовые четырехполосники

Кроме двух канонических схем, отмеченных выше, часто используется также каноническая *мостовая* схема замещения симметричного четырехполосника, которая является уравновешенной (рисунок 1.10).

Определим  $A$ -параметры этого четырехполосника, исходя из анализа поведения цепи в режимах холостого хода (см. рисунок 1.10, а) и короткого замыкания (см. рисунок 1.10, б).

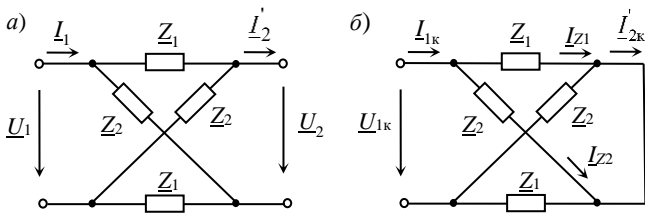


Рисунок 1.10

Параметры  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{21}$  найдем из рассмотрения уравнений (1.3) в режиме холостого хода:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1x}, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2x}, \quad \underline{I}'_2 = 0.$$

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_{2x}}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{1x}}{\underline{U}_{2x}}.$$

Выразим  $\underline{U}_{2x}$  и  $\underline{I}_{1x}$  через  $\underline{U}_{1x}$ :

$$\underline{U}_{2x} = \frac{\underline{U}_{1x} \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{U}_{1x} \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{U}_{1x} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{1x} = 2 \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Получаем 
$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}.$$

В режиме короткого замыкания:  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{1к}, \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}'_{2к}, \quad \underline{U}_2 = 0$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}'_{2к}}.$$

Найдем выражение для  $\underline{I}'_{2к}$  в схеме на рисунке 1.10,  $\bar{b}$ , применив законы Ома и Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1к} &= \frac{\underline{U}_{1к}}{2 \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}; \quad \underline{I}_{z1} = \underline{I}_{1к} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{z2} = \underline{I}_{1к} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \\ \underline{I}'_{2к} &= \underline{I}_{z1} - \underline{I}_{z2} = \frac{\underline{U}_{1к}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)}{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\underline{A}_{12} = \frac{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}.$$

Таким образом, матрицу  $A$ -параметров симметричного мостового четырехполюсника можно записать так:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

#### 1.4.4 Одноэлементные четырехполюсники

Простейшие симметричные одноэлементные четырехполюсники состоят из одного двухполюсника, включенного в продольную или поперечную ветвь (рисунок 1.11), и являются симметричными.

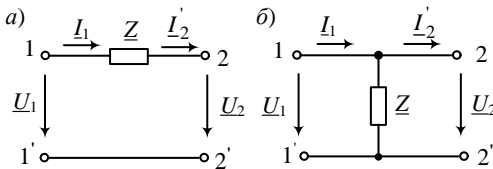


Рисунок 1.11

Уравнения первого из них в форме  $A$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}'_2; \\ \underline{I}_1 &= 0 + \underline{I}'_2 \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad [\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Запишем уравнения для второго четырехполюсника:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + 0; \\ I_1 &= \frac{1}{\underline{Z}} \underline{U}_2 + \underline{I}'_2, \end{aligned}$$

в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

## 1.5 Характеристические параметры симметричного четырехполюсника

### 1.5.1 Характеристическое сопротивление

*Характеристическим* называется такое сопротивление  $\underline{Z}_c$ , которое будучи подключенным к выходным зажимам симметричного четырехполюсника, обуславливает входное сопротивление, также равное  $\underline{Z}_c$  (рисунок 1.12):

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_1}{I_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}'_2}.$$

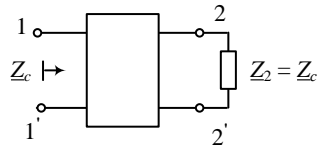


Рисунок 1.12

Подставив в формулу (1.10)  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$  и  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$ , получаем:

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_c + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_c + \underline{A}_{11}},$$

откуда

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}. \quad (1.31)$$

В том случае, когда сопротивление нагрузки равно характеристическому, имеем *режим четырехполюсника с согласованной нагрузкой*. Входное сопротивление четырехполюсника в режиме согласованной нагрузки зависит только от его параметров  $\underline{A}_{12}$  и  $\underline{A}_{21}$ , а следовательно, может также служить одним из параметров четырехполюсника.

### 1.5.2 Характеристическая постоянная передачи

Запишем уравнения в форме  $A$  для симметричного четырехполюсника в режиме согласованной нагрузки, заменив  $\underline{I}'_2$  на  $\underline{U}_2/\underline{Z}_c$  и принимая в расчет соотношение (1.31):

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2 = (\underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_c})\underline{U}_2 = (\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}})\underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_2 = (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_c)\underline{I}'_2 = (\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}})\underline{I}'_2.$$

Из этих уравнений получаются простые соотношения между входными и выходными напряжениями и токами:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \underline{M} = Me^{jB}, \quad (1.32)$$

т. е. отношение напряжений и токов равно комплексному числу  $\underline{M}$ , модуль  $M$  которого показывает, во сколько раз изменились выходные величины по сравнению с входными, а аргумент  $B$  (прописная греческая буква *бета*) – сдвиг фаз между входными и выходными величинами. Величина  $B$  называется *постоянной фазы*, измеряется в радианах или градусах.

Напряжения и ток на выходе четырехполюсника нередко значительно отличаются от их значений на входе. Поэтому отношение  $U_1/U_2$  или  $I_1/I'_2$  принято оценивать в логарифмическом масштабе, для чего вместо величины  $M$  вводится *постоянная ослабления*  $A$  (прописная греческая буква *альфа*).

$$A = \ln M = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I'_2},$$

следовательно,

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I'_2} = M = e^A.$$

Заменив в соотношении (1.32)  $M$  на  $e^A$ , получим

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} = e^A e^{jB} = e^{(A+jB)} = e^\Gamma. \quad (1.33)$$

Комплексное число  $\Gamma$  (прописная греческая буква *гамма*) характеризует изменение напряжения или тока как по значению, так и по фазе и называется *постоянной передачи* четырехполюсника. *Постоянная передачи* может рассматриваться в качестве еще одного параметра симметричного четырехполюсника. Она полностью определяется параметрами элементов, входящих в состав четырехполюсника, и схемой их соединения.

Выразим постоянную передачи  $\Gamma$  через  $A$ -параметры четырехполюсника:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = e^\Gamma$$

или

$$\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}). \quad (1.34)$$

Постоянная передачи  $\Gamma$  является вторым характеристическим параметром симметричного четырехполюсника.

Характеристическое сопротивление  $Z_c$  и постоянную передачи  $\Gamma$  называют *вторичными параметрами* симметричного четырехполюсника.

### 1.5.3 Единицы измерения постоянной ослабления

*Постоянная ослабления*  $A$  – физическая безмерная величина. Ее единицей измерения служит *непер* (Нп). Она названа по имени шотландского математика Д. Непера. Постоянной ослабления  $A = 1$  Нп обладает четырехполюсник, у которого при согласованной нагрузке напряжение на выходе в  $e$  раз меньше, чем на входе.

Таким образом, при согласованной нагрузке

$$U_1 = U_2 e^A; \quad I_1 = I_2' e^A.$$

Постоянную ослабления можно вычислить по известным полным или активным мощностям на входе и выходе четырехполюсника. Действительно,

$$A = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{I_1}{I_2'} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2'} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}$$

или

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1 \cos \varphi}{U_2 I_2' \cos \varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}, \quad (1.35)$$

т. е. угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током на входе и выходе один и тот же.

В ряде случаев постоянную ослабления принято вычислять в *белах* (Б) или *децибелах* (дБ), которые определяются следующим образом. Если полная мощность на выходе четырехполюсника в 10 раз меньше мощности на его входе, то ослабление составляет 1 Б; если мощность уменьшается в 100 раз, то ослабление оценивается в 2 Б и т. д. Таким образом,

$$A_B = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2'}.$$

При согласованной нагрузке симметричного четырехполюсника

$$\frac{S_1}{S_2} = \left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2 = \left( \frac{I_1}{I_2'} \right)^2$$

и, следовательно,

$$A_B = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2'}.$$

*Децибел* – единица ослабления в 10 раз меньшая бела. Ослабление 1 дБ соответствует уменьшению полной мощности в 1,26 раза или уменьшению значений напряжения и тока в 1,12 раза.

Для перехода от неперов к децибелам или обратно воспользуемся приведенным выше условием:

$$A_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg e^{A(\text{Нп})} = 20 A_{\text{Нп}} \lg e = 8,686 A_{\text{Нп}},$$

т. е.  $1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ}$  или  $1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}$ .

#### 1.5.4 Уравнения симметричного четырехполюсника с гиперболическими функциями

Выразим коэффициенты  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$  и  $\underline{A}_{21}$  уравнений симметричного четырехполюсника через его вторичные параметры  $\underline{Z}_c$  и  $\underline{\Gamma}$ , используя для этой цели полученную ранее формулу

$$\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = e^{\underline{\Gamma}}. \quad (1.36)$$

Из соотношения  $\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = (\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}})(\underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = 1$  следует, что

$$\underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}} = e^{-\underline{\Gamma}}. \quad (1.37)$$

Решим систему уравнений (1.36) и (1.37) относительно  $\underline{A}_{11}$  и  $\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}$ :

$$\underline{A}_{11} = \frac{1}{2} (e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}) = \text{ch} \underline{\Gamma}; \quad (1.38)$$

$$\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \frac{1}{2} (e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}) = \text{sh} \underline{\Gamma}. \quad (1.39)$$

Умножив и разделив последнее выражение на  $\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_c$ , найдем:

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \text{sh} \underline{\Gamma}; \quad (1.40)$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\text{sh} \underline{\Gamma}}{\underline{Z}_c}. \quad (1.41)$$

Если подставить найденные выражения (1.38), (1.40) и (1.41) в уравнения (1.3), то получим уравнения симметричного четырехполюсника с гиперболическими функциями:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\Gamma} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \text{sh} \underline{\Gamma}; \quad (1.42)$$

$$I_1 = \frac{U_2}{Z_c} \operatorname{sh} \Gamma + I_2 \operatorname{ch} \Gamma.$$

### 1.5.5 Определение параметров $Z_c$ и $\Gamma$ через входные сопротивления

Характеристическое сопротивление  $Z_c$  и постоянную передачи  $\Gamma$  симметричного четырехполюсника можно вычислить непосредственно через его входные сопротивления из опытов холостого хода и короткого замыкания,  $Z_x$  и  $Z_k$  соответственно. Из уравнений (1.42) находим:

$$\text{при } I_2' = 0 \quad Z_x = \frac{U_{1x}}{I_{1x}} = \frac{Z_c}{\operatorname{th} \Gamma}, \quad \text{а при } U_2 = 0 \quad Z_k = Z_c \operatorname{th} \Gamma,$$

$$\text{откуда} \quad \operatorname{th} \Gamma = \sqrt{Z_k / Z_x}; \quad Z_c = \sqrt{Z_x Z_k}. \quad (1.43)$$

Чтобы выразить постоянную передачи  $\Gamma$  через  $Z_x$  и  $Z_k$ , воспользуемся гиперболическими функциями от аргумента  $\Gamma$ .

$$\operatorname{th} \Gamma = \frac{\operatorname{sh} \Gamma}{\operatorname{ch} \Gamma} = \frac{e^\Gamma - e^{-\Gamma}}{e^\Gamma + e^{-\Gamma}} = \sqrt{Z_k / Z_x}.$$

Произведем некоторые элементарные преобразования с записанной формулой.

$$e^\Gamma - e^{-\Gamma} = \sqrt{Z_k / Z_x} e^\Gamma + \sqrt{Z_k / Z_x} e^{-\Gamma};$$

$$e^\Gamma (1 - \sqrt{Z_k / Z_x}) = e^{-\Gamma} (1 + \sqrt{Z_k / Z_x}); \quad e^{2\Gamma} = \frac{1 + \sqrt{Z_k / Z_x}}{1 - \sqrt{Z_k / Z_x}}.$$

В итоге получим

$$\Gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{Z_k / Z_x}}{1 - \sqrt{Z_k / Z_x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{Z_x} + \sqrt{Z_k}}{\sqrt{Z_x} - \sqrt{Z_k}}. \quad (1.44)$$

## 1.6 Характеристические параметры несимметричного четырехполюсника

Несимметричные четырехполюсники определяются тремя независимыми коэффициентами любого типа уравнений. Следовательно, вторичных параметров у несимметричного четырехполюсника три: характеристическое сопротивление со стороны входных зажимов  $Z_{1c}$ , характеристическое сопротивление со стороны выходных зажимов  $Z_{2c}$  и постоянная передачи  $\Gamma$ .

### 1.6.1 Характеристические сопротивления



Характеристическое сопротивление со стороны вторичных зажимов  $Z_{2c}$  равно такому сопротивлению нагрузки  $Z_2$  на вторичных зажимах, при котором входное сопротивление со стороны первичных зажимов равно  $Z_{1c}$  (рисунок 1.13, а). Другими словами, при  $Z_2 = Z_{2c}$  имеем  $Z_{1вх} = Z_{1c}$ . Аналогично при обратном питании и сопротивлении нагрузки на первичных зажимах  $Z_1 = Z_{2c}$  (рисунок 1.13, б) получим  $Z_{2вх} = Z_{2c}$ .

Условие, когда несимметричный четырехполосник нагружен соответствующим характеристическим сопротивлением, называется *условием согласованной нагрузки*, или *согласованного включения*, при прямом или обратном питании четырехполосника.

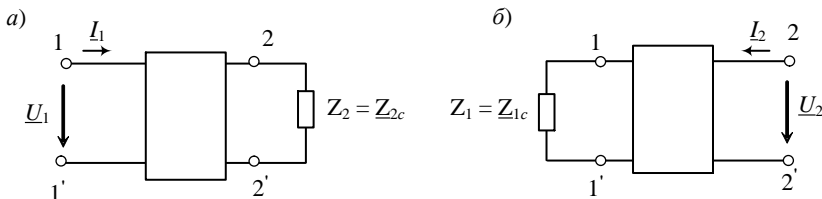


Рисунок 1.13

Выразим  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$  через  $A$ -параметры четырехполосника. Положив в соотношениях (1.10) и (1.13)  $Z_{1вх} = Z_1 = Z_{1c}$  и  $Z_{2вх} = Z_2 = Z_{2c}$ , получим:

$$Z_{1c} = \frac{A_{11}Z_{2c} + A_{12}}{A_{21}Z_{2c} + A_{22}}; \quad Z_{2c} = \frac{A_{22}Z_{1c} + A_{12}}{A_{21}Z_{1c} + A_{11}}.$$

Находим решение этих уравнений относительно  $Z_{1c}$  и  $Z_{2c}$ :

$$Z_{1c} Z_{2c} A_{21} = A_{11} Z_{2c} + A_{12} \square Z_{1c} A_{22};$$

$$Z_{1c} Z_{2c} A_{21} = A_{22} Z_{1c} + A_{12} \square Z_{2c} A_{11}.$$

Приравняв правые части соотношений, находим:

$$Z_{2c} A_{11} \square Z_{1c} A_{22} = Z_{1c} A_{22} \square Z_{2c} A_{11} \quad \text{или} \quad Z_{2c} A_{11} = Z_{1c} A_{22};$$

$$Z_{1c} = \frac{A_{11}}{A_{22}} Z_{2c}; \quad Z_{2c} = \frac{A_{11}Z_{2c} + A_{12}}{A_{21} \frac{A_{11}}{A_{22}} Z_{2c} + A_{11}}; \quad \frac{A_{11}A_{21}}{A_{22}} Z_{2c} = A_{12}.$$

В итоге получаем 
$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{22}A_{21}}}; \tag{1.45}$$

$$Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{11}A_{21}}}. \tag{1.46}$$

С учетом соотношений (1.11), (1.12), (1.14) и (1.15)

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}} ; \quad \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2k}} .$$

(1.47)

Характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{1c}$  и  $\underline{Z}_{2c}$  в общем случае являются комплексными величинами.

### 1.6.2 Характеристическая постоянная передачи

Для несимметричного четырехполосника выполняется условие

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1.$$

Этому соотношению соответствует тригонометрическая формула

$$\operatorname{ch}^2 \underline{\Gamma} - \operatorname{sh}^2 \underline{\Gamma} = 1.$$

Сопоставляя эти соотношения, приходим к выводу, что

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} ; \quad \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} . \quad (1.48)$$

Комплексный параметр  $\underline{\Gamma} = A + jB$  и его составляющие имеют такой же физический смысл, как и для симметричного четырехполосника. Выразим  $\underline{\Gamma}$  через  $A$ -параметры, используя соотношения (1.48):

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} + \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2} + \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = e^{\underline{\Gamma}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} ,$$

откуда постоянная передачи несимметричного четырехполосника

$$\underline{\Gamma} = \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \right) . \quad (1.49)$$

### 1.6.3 Уравнения несимметричного четырехполосника с гиперболическими функциями

Пользуясь соотношениями (1.45), (1.46) и (1.48), выразим  $A$ -параметры четырехполосника через характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{1c}$ ,  $\underline{Z}_{2c}$  и постоянную передачи  $\underline{\Gamma}$ . Запишем две пары соотношений, в которые входят элементы матрицы  $[\underline{A}]$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} &= \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} ; \quad \operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} ; \\ \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} &= \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} ; \quad \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} , \end{aligned}$$

из которых выразим формулы для  $A$ -параметров четырехполосника:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma} ; \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma} ; \quad \underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma} ; \quad \underline{A}_{21} = \frac{\operatorname{sh} \underline{\Gamma}}{\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}} . \quad (1.50)$$

После подстановки полученных выражений для  $A$ -параметров в уравнения (1.3) получаем систему уравнений несимметричного четырехполюсника с гиперболическими функциями:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma} + \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}} \underline{I}'_2 \operatorname{sh} \underline{\Gamma};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\operatorname{sh} \underline{\Gamma}}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \underline{U}_2 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \underline{I}'_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma}$$

или

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} (\underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma} + \underline{Z}_{2c} \underline{I}'_2 \operatorname{sh} \underline{\Gamma}); \\ \underline{I}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2c}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma} + \underline{I}'_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma} \right). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Для схемы четырехполюсника с прямым питанием и согласованной нагрузкой ( $\underline{Z}_{2н} = \underline{Z}_{2c}$ ) имеет место равенство  $\underline{Z}_{2c} \underline{I}'_2 = \underline{U}_2$  или  $\underline{U}_2 / \underline{Z}_{2c} = \underline{I}'_2$ .

С учетом этих соотношений, а также принимая во внимание, что

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} + \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = e^{\underline{\Gamma}},$$

упростим уравнения (1.51):

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \underline{U}_2 e^{\underline{\Gamma}}; \quad (1.52)$$

$$\underline{I}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \underline{I}'_2 e^{\underline{\Gamma}}. \quad (1.53)$$

Из полученных формул следует, что

$$\underline{\Gamma} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} \cdot \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}. \quad (1.54)$$

Перемножив левые и правые части соотношений (1.52) и (1.53), получим еще одну формулу для определения постоянной передачи четырехполюсника, которая выражается через комплексные напряжения и токи на его входе и выходе:

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2}. \quad (1.55)$$

Запишем комплексные величины, входящие в приведенные выше формулы:

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_{u1}}; \underline{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_{u2}}; \underline{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_{i1}}; \underline{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_{i2}};$$

$$\underline{Z}_{1c} = Z_{1c} e^{j\varphi_{1c}}; \underline{Z}_{2c} = Z_{2c} e^{j\varphi_{2c}}.$$

Тогда, подставив их в формулу (1.54), можем записать:

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \ln \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} + j \left[ (\varphi_{u1} - \varphi_{u2}) - \frac{1}{2} (\varphi_{1c} - \varphi_{2c}) \right]. \quad (1.56)$$

Аналогичным образом можно выразить  $\underline{\Gamma}$  через токи четырехполосника:

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \ln \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} + j \left[ (\varphi_{i1} - \varphi_{i2}) + \frac{1}{2} (\varphi_{1c} - \varphi_{2c}) \right]. \quad (1.57)$$

Из полученных соотношений получаем формулу для расчета постоянной ослабления четырехполосника

$$A = \ln \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} = \ln \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}}. \quad (1.58)$$

Из формул (1.55) и (1.58) следует, что постоянная передачи  $\underline{\Gamma}$  и постоянная ослабления  $A$  не могут быть выражены только через напряжения или только через токи, как у симметричных четырехполосников. Точно также постоянная фазы  $B$  не показывает сдвиг фаз между напряжениями или между токами на входе и выходе четырехполосника.

Руководствуясь выражениями (1.56) и (1.57), можем заключить, что фазовый сдвиг напряжения на входе относительно напряжения на выходе определяется значением

$$\varphi_{u1} - \varphi_{u2} = B + (\varphi_{1c} - \varphi_{2c})/2,$$

а фазовый сдвиг тока на входе относительно тока на выходе — значением

$$\varphi_{i1} - \varphi_{i2} = B - (\varphi_{1c} - \varphi_{2c})/2.$$

Выразим характеристическую постоянную передачи  $\underline{\Gamma}$  через сопротивления четырехполосника в режимах холостого хода и короткого замыкания. Используя соотношения (1.11), (1.12) и (1.48)

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \underline{Z}_{1k} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{A_{11} A_{22}}; \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \sqrt{A_{12} A_{21}},$$

получим:

$$\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \frac{\operatorname{sh} \underline{\Gamma}}{\operatorname{ch} \underline{\Gamma}} = \sqrt{\frac{A_{12} \cdot A_{21}}{A_{11} \cdot A_{22}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}}} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}},$$

откуда

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{th} \underline{\Gamma}}{1 - \operatorname{th} \underline{\Gamma}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_{1k} / \underline{Z}_{1x}}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_{1k} / \underline{Z}_{1x}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\underline{Z}_{1x}} + \sqrt{\underline{Z}_{1k}}}{\sqrt{\underline{Z}_{1x}} - \sqrt{\underline{Z}_{1k}}}. \quad (1.59)$$

### 1.6.4 Вносимое ослабление четырехполюсника

Характеристические параметры  $\underline{Z}_{1c}$ ,  $\underline{Z}_{2c}$  и  $\Gamma$  дают возможность легко определять напряжения и токи в том случае, когда четырехполюсник находится в режиме согласованной нагрузки. На практике четырехполюсник часто имеет несогласованную нагрузку. При отсутствии согласований на входе или выходе расчеты становятся затруднительными. В таком случае следует пользоваться рабочими (эксплуатационными) параметрами четырехполюсника.

Сопоставим два случая питания нагрузки с сопротивлением  $\underline{Z}_2$ . В первом случае он получает энергию от источника питания с напряжением  $\underline{U}$  и внутренним сопротивлением  $\underline{Z}_1$ , когда между источником и нагрузкой включен четырехполюсник (рисунок 1.14). Во втором случае нагрузка подключается непосредственно к источнику питания (рисунок 1.15). Оценим изменение условий передачи при переходе от одной схемы к другой.

Под *вносимым ослаблением* следует понимать значение, определяемое формулой

$$A_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}, \quad (1.60)$$

где  $S_1 = \frac{U^2 Z_2}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|^2}$  – полная мощность, которую источник отдает непосредственно в нагрузку  $\underline{Z}_2$ ;

$S_2 = (I_2')^2 Z_2$  – полная мощность, которую этот же источник отдает нагрузке  $\underline{Z}_2$ , подключенной к нему через данный четырехполюсник.

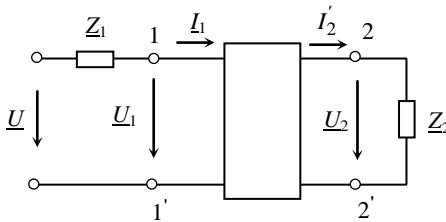


Рисунок 1.14

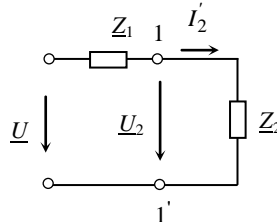


Рисунок 1.15

Таким образом,

$$A_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \frac{U^2}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|^2 (I_2')^2} = \ln \frac{U}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| I_2'}. \quad (1.61)$$

Выразим соотношение  $\frac{U}{I_2}$  через  $A$ -параметры четырехполюсника и сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ . В соответствии со вторым законом Кирхгофа для контура на рисунке 1.14 и с учетом того, что  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$ , запишем:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2 + \underline{Z}_1 (\underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2) = \underline{A}_{11} \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2 + \\ &+ \underline{Z}_1 \underline{A}_{21} \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{Z}_1 \underline{I}_2 = (\underline{A}_{11} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21} \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22} \underline{Z}_1) \underline{I}_2, \end{aligned}$$

откуда 
$$\frac{U}{I_2} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21} \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22} \underline{Z}_1.$$

Воспользуемся формулами (1.50), в которых коэффициенты  $A$  четырехполюсника выражены через его характеристические параметры:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2};$$

$$\underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\operatorname{sh} \underline{\Gamma}}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2};$$

$$\underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2}$$

и подставим их в отношение  $\frac{U}{I_2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{U}{I_2} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \cdot \underline{Z}_2 \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{2} + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \cdot \underline{Z}_2 \cdot \frac{e^{-\underline{\Gamma}}}{2} + \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{2} - \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}} \cdot \frac{e^{-\underline{\Gamma}}}{2} + \\ &+ \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{2} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \cdot \frac{e^{-\underline{\Gamma}}}{2} + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \cdot \underline{Z}_1 \cdot \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{2} + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \cdot \underline{Z}_1 \cdot \frac{e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = \\ &= \left[ \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \left( \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c} + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{1c}} + \frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}} \underline{Z}_1 \right) \right] \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \left( \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{1c}} + \frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}} \underline{Z}_1 \right) \right] \frac{e^{-\Gamma}}{2} = \\
& = \left[ \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \left( \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c} + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{1c}} + \frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}} \underline{Z}_1 \right) \right] \frac{e^{\Gamma}}{2} + \\
& + \left[ \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \left( \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{1c}} + \frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}} \underline{Z}_1 \right) \right] \frac{e^{-\Gamma}}{2} = \\
& = \left( \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \cdot \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{1c} + \underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c} \underline{Z}_1}{\underline{Z}_{1c}} \right) \frac{e^{\Gamma}}{2} + \\
& + \left( \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \cdot \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{1c} - \underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c} - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c} \underline{Z}_1}{\underline{Z}_{1c}} \right) \frac{e^{-\Gamma}}{2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \left[ \underline{Z}_{1c} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}) + \underline{Z}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}) \right] \frac{e^{\Gamma}}{2} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \left[ \underline{Z}_{1c} (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c}) - \underline{Z}_1 (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c}) \right] \frac{e^{-\Gamma}}{2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \left[ (\underline{Z}_{1c} + \underline{Z}_1) (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}) \frac{e^{\Gamma}}{2} - (\underline{Z}_{1c} - \underline{Z}_1) (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c}) \frac{e^{-\Gamma}}{2} \right] = \\
& = \frac{e^{\Gamma} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}) (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c})}{2 \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \left[ 1 - \frac{(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{1c}) (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c})}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}) (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c})} e^{-2\Gamma} \right].
\end{aligned}$$

После всех преобразований получили следующее выражение:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_2} = \frac{e^{\Gamma} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}) (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c})}{2 \sqrt{\underline{Z}_{1c} \underline{Z}_{2c}}} \left[ 1 - \frac{(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{1c}) (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c})}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}) (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c})} e^{-2\Gamma} \right]. \quad (1.62)$$

В полученном соотношении разность  $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{1c}$  представляет собой несогласованность сопротивлений со стороны входных зажимов четырехполюсника, а разность  $\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c}$  – несогласованность на выходе. Относительная величина несогласованности определяется *коэффициентами отражения* (несогласованности) на входе  $\underline{u}_1$  и на выходе  $\underline{u}_2$ :

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}}, \quad \underline{n}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}}. \quad (1.63)$$

Умножим числитель и знаменатель выражения (1.62) на  $2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$  и перегруппируем элементы формулы с учетом зависимостей (1.63):

$$\frac{U}{I_2} = e^\Gamma 2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_{1c}}} \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_2\underline{Z}_{2c}}} [1 - \underline{n}_1 \underline{n}_2 e^{-2\Gamma}] \quad (1.64)$$

Тогда формулу (1.61) можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{\text{вн}} = \ln \frac{1}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|} \cdot \frac{U}{I_2} = & -\ln|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| + \ln|e^\Gamma| + \ln|2\underline{Z}_1\underline{Z}_2| + \\ & + \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_2\underline{Z}_{2c}}} \right| + \ln|1 - \underline{n}_1 \underline{n}_2 e^{-2\Gamma}|. \end{aligned}$$

В итоге выражение (1.61) принимает следующий вид:

$$A_{\text{вн}} = A + \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_2\underline{Z}_{2c}}} \right| + \ln|1 - \underline{n}_1 \underline{n}_2 e^{-2\Gamma}| - \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}} \right|. \quad (1.65)$$

Вносимое ослабление состоит из пяти слагаемых. Первое слагаемое – собственное ослабление четырехполосника; второе – ослабление вследствие несогласованности сопротивлений на входе четырехполосника; третье – ослабление вследствие несогласованности сопротивлений на выходе; четвертое – ослабление вследствие взаимодействия несогласованностей на входе и выходе с знаком минус – ослабление вследствие несогласованности сопротивлений источника и приемника. В случае согласованного включения сопротивлений на входе и выходе, т. е. при  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1c}$  и  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2c}$  вносимое ослабление равно собственному ослаблению четырехполосника. В случае, когда сопротивление приемника  $\underline{Z}_2$  равно внутреннему сопротивлению источника, ослабление называется *рабочим*:

$$A_{\text{раб}} = A + \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1c}}{2\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_{1c}}} \right| + \ln \left| \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2c}}{2\sqrt{\underline{Z}_2\underline{Z}_{2c}}} \right| + \ln|1 - \underline{n}_1 \underline{n}_2 e^{-2\Gamma}|. \quad (1.66)$$

## 1.7 Передаточные функции четырехполосников



*Передаточной функцией* называется зависимость от частоты отношений комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин на выходе и входе четырехполюсника при заданном режиме передачи. Различают четыре вида передаточных функций:

- *передаточная функция по напряжению*  $\underline{F}_U(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega) / \underline{U}_1(j\omega)$ ;
- *передаточная функция по току*  $\underline{F}_I(j\omega) = \underline{I}_2(j\omega) / \underline{I}_1(j\omega)$ ;
- *передаточное сопротивление*  $\underline{F}_Z(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega) / \underline{I}_1(j\omega)$ ;
- *передаточная проводимость*  $\underline{F}_Y(j\omega) = \underline{I}_2(j\omega) / \underline{U}_1(j\omega)$ .

Передаточные функции в общем случае представляют собой комплексные величины, зависящие от частоты:

$$\underline{F}(j\omega) = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}.$$

Зависимость модуля передаточной функции  $F(\omega)$  от частоты называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а зависимость аргумента передаточной функции от частоты  $\psi(\omega)$  – *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ) четырехполюсника.

Выразим передаточные функции по напряжению  $\underline{F}_U(j\omega)$  и по току  $\underline{F}_I(j\omega)$  четырехполюсника, нагруженного произвольным комплексным сопротивлением  $\underline{Z}_2$ , через  $A$ -параметры:

$$\underline{F}_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{I}_2' \underline{Z}_2}{\underline{A}_{11} \underline{I}_2' \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2'} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}};$$

$$\underline{F}_I(j\omega) = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2'}{\underline{A}_{21} \underline{I}_2' \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2'} = \frac{1}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}.$$

Для безразмерных передаточных функций  $F_U(j\omega)$  и  $F_I(j\omega)$  можно получить логарифмическую амплитудно-фазовую характеристику

$$\ln \underline{F}(j\omega) = \ln[F(\omega) e^{j\psi(\omega)}] = \ln F(\omega) + j\psi(\omega).$$

## 1.8 Соединение четырехполюсников

Четырехполюсники могут соединяться друг с другом своими зажимами. Четырехполюсник, который может быть представлен в виде соединения нескольких более простых (элементарных) четырехполюсников, называется *составным*. Если при соединении элементарных четырехполюсников не происходит изменение соотношений между напряжениями и токами на их зажимах, то первичные параметры составного четырехполюсника могут быть выражены через первичные параметры исходных четырехполюсников.

Различают три основных вида соединения элементарных четырехполюсников: *каскадное*, *параллельное* и *последовательное*.

Кроме того, существуют два вида смешанного соединения четырехполюсников: *параллельно-последовательное* и *последовательно-параллельное*.

Рассмотрим эти виды соединений элементарных четырехполюсников и найдем соотношения между их первичными параметрами и параметрами составных четырехполюсников.

### 1.8.1 Каскадное соединение

Этот способ соединения наиболее распространен. При *каскадном*, или *цепочечном*, соединении четырехполюсников входные зажимы каждого последующего четырехполюсника присоединяются к выходным зажимам предыдущего. Примеры такого способа соединения можно найти в схемах электрических фильтров, в линиях передачи сигналов или электроэнергии, при каскадном включении трансформаторов, усилителей и т. п. На рисунке 1.16 дана схема каскадного соединения двух элементарных четырехполюсников  $\alpha$  и  $\beta$ . Пунктиром обведен составной четырехполюсник.

При каскадном соединении этих четырехполюсников

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^\alpha; I_1 = I_1^\alpha; \underline{U}_2^\alpha = \underline{U}_1^\beta; I_2^\alpha = I_1^\beta; I_2' = I_2'^\beta; \underline{U}_2 = \underline{U}_2^\beta. \quad (1.67)$$

Чтобы найти параметры составного четырехполюсника воспользуемся уравнениями в форме  $A$  для элементарных четырехполюсников:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ I_1^\alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}^\alpha & \underline{A}_{12}^\alpha \\ \underline{A}_{21}^\alpha & \underline{A}_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^\alpha \\ I_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^\alpha \\ I_2^\alpha \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ I_1^\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}^\beta & \underline{A}_{12}^\beta \\ \underline{A}_{21}^\beta & \underline{A}_{22}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^\beta \\ I_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^\beta \\ I_2^\beta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

С учетом соотношений (1.67) и системы уравнений (1.68) получим уравнения в матричной форме для составного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{A}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^\alpha \\ I_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ I_1^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^\beta \\ I_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ I_2' \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ I_2' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

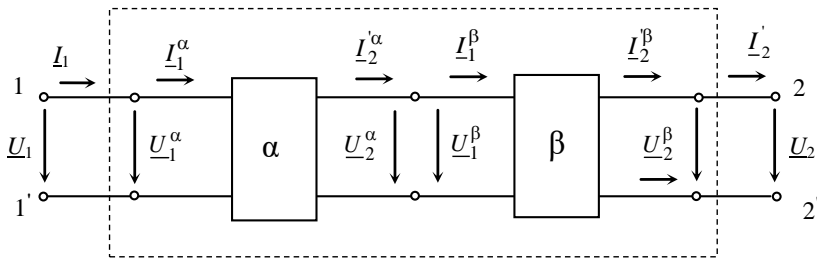


Рисунок 1.16

Из полученной системы уравнений следует, что матрица  $[A]$  эквивалентного составного четырехполюсника равна произведению матриц  $A$ -параметров входящих в него элементарных четырехполюсников  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
 [A] &= [A^\alpha][A^\beta] = \begin{bmatrix} A_{11}^\alpha & A_{12}^\alpha \\ A_{21}^\alpha & A_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^\beta & A_{12}^\beta \\ A_{21}^\beta & A_{22}^\beta \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11}^\alpha A_{11}^\beta + A_{12}^\alpha A_{21}^\beta & A_{11}^\alpha A_{12}^\beta + A_{12}^\alpha A_{22}^\beta \\ A_{21}^\alpha A_{11}^\beta + A_{22}^\alpha A_{21}^\beta & A_{21}^\alpha A_{12}^\beta + A_{22}^\alpha A_{22}^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.69)
 \end{aligned}$$

Каскадное соединение четырехполюсников, выполненное по принципу согласования характеристических сопротивлений, заключается в том, что входное сопротивление на зажимах любого четырехполюсника равно характеристическому. На рисунке 1.17 представлено согласованное каскадное соединение трех несимметричных четырехполюсников с заданными параметрами.

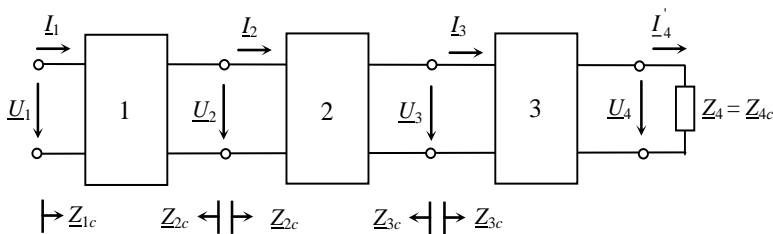


Рисунок 1.17

Комплексное сопротивление нагрузки согласовано с характеристическим сопротивлением третьего четырехполюсника ( $Z_4 = Z_{4c}$ ), входное сопротивление этого четырехполюсника равно характеристическому  $Z_{3c}$ , которое одновременно служит согласованной нагрузкой для второго четырехполюс-

ника. Нагрузка первого четырехполосника равна  $\underline{Z}_{2c}$ , а его входное сопротивление равно  $\underline{Z}_{1c}$ .

Обозначим через  $\underline{\Gamma}_1$ ,  $\underline{\Gamma}_2$  и  $\underline{\Gamma}_3$  постоянные передачи четырехполосников 1, 2 и 3 соответственно. Тогда в соответствии с выражениями (1.52) и (1.53) можно записать:

$$\underline{U}_3 = \sqrt{\underline{Z}_{3c}/\underline{Z}_{4c}} \underline{U}_4 e^{\underline{\Gamma}_3}; \quad \underline{I}_3 = \sqrt{\underline{Z}_{4c}/\underline{Z}_{3c}} \underline{I}'_4 e^{\underline{\Gamma}_3};$$

$$\underline{U}_2 = \sqrt{\underline{Z}_{2c}/\underline{Z}_{3c}} \underline{U}_3 e^{\underline{\Gamma}_2}; \quad \underline{I}_2 = \sqrt{\underline{Z}_{3c}/\underline{Z}_{2c}} \underline{I}'_3 e^{\underline{\Gamma}_2};$$

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\underline{Z}_{1c}/\underline{Z}_{2c}} \underline{U}_2 e^{\underline{\Gamma}_1}; \quad \underline{I}_1 = \sqrt{\underline{Z}_{2c}/\underline{Z}_{1c}} \underline{I}'_2 e^{\underline{\Gamma}_1},$$

откуда 
$$\underline{U}_1 = \sqrt{\underline{Z}_{1c}/\underline{Z}_{4c}} \underline{U}_4 e^{(\underline{\Gamma}_1+\underline{\Gamma}_2+\underline{\Gamma}_3)}; \quad \underline{I}_1 = \sqrt{\underline{Z}_{4c}/\underline{Z}_{1c}} \underline{I}'_4 e^{(\underline{\Gamma}_1+\underline{\Gamma}_2+\underline{\Gamma}_3)}.$$

Из полученных выражений следует, что результирующий четырехполосник имеет характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{1c}$  и  $\underline{Z}_{4c}$  и постоянную передачи

$$\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}_1 + \underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_3.$$

Соответственно, постоянная ослабления

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

а постоянная фазы

$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

Если каскадно соединены несколько одинаковых четырехполосников, то такое соединение называют *однородной цепной схемой*. Цепная схема, состоящая из  $n$  одинаковых симметричных пассивных четырехполосников, также является симметричным пассивным четырехполосником, и ее свойства определяются двумя параметрами: характеристическим сопротивлением  $\underline{Z}_{цн}$  и постоянной передачи  $\underline{\Gamma}_{цн}$ . Если характеристическое сопротивление каждого элементарного четырехполосника равно  $\underline{Z}_c$ , а постоянная передачи равна  $\underline{\Gamma}$ , то при согласованной нагрузке цепная схема имеет характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_{цн} = \underline{Z}_c$  и постоянную передачи  $\underline{\Gamma}_{цн} = n\underline{\Gamma}$ .

В каскад соединяют несколько четырехполосников, чтобы увеличить постоянную ослабления передаваемых по устройству сигналов.

### 1.8.2 Параллельное соединение

При *параллельном* соединении четырехполосников (рисунок 1.18) напряжения на входных и выходных зажимах составного четырехполосника равны соответствующим напряжениям на входных и выходных зажимах элементарных четырехполосников

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix}, \quad (1.70)$$

а токи его входных и выходных зажимов – сумме токов входных и выходных зажимов элементарных четырехполосников:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha + \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\alpha + \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix}. \quad (1.71)$$

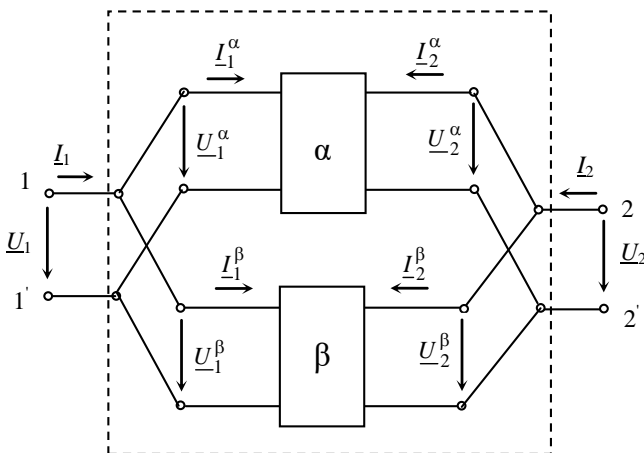


Рисунок 1.18

Для определения параметров составного четырехполосника воспользуемся уравнениями элементарных четырехполосников в форме  $Y$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}^\alpha & \underline{Y}_{12}^\alpha \\ \underline{Y}_{21}^\alpha & \underline{Y}_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} = \underline{Y}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix}; \quad (1.72)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}^\beta & \underline{Y}_{12}^\beta \\ \underline{Y}_{21}^\beta & \underline{Y}_{22}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \underline{Y}^\beta \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (1.70)–(1.72), выразим токи, протекающие относительно входных и выходных зажимов составного четырехполосника через соответствующие напряжения на этих зажимах:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \underline{Y}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} + \underline{Y}^\beta \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \left[ \underline{Y}^\alpha + \underline{Y}^\beta \right] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Y} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix},$$

откуда следует, что матрица  $[Y]$  составного четырехполосника равна сумме матриц  $Y$ -параметров элементарных четырехполосников:

$$[Y] = [Y^\alpha] + [Y^\beta] = \begin{bmatrix} Y_{11}^\alpha + Y_{11}^\beta & Y_{12}^\alpha + Y_{12}^\beta \\ Y_{21}^\alpha + Y_{21}^\beta & Y_{22}^\alpha + Y_{22}^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.73)$$

### 1.8.3 Последовательное соединение

Последовательное соединение четырехполосников представлено на рисунке 1.19. При данном способе соединения четырехполосников можно записать соотношения для напряжений и токов:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^\alpha + U_1^\beta \\ U_2^\alpha + U_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^\alpha \\ U_2^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^\beta \\ U_2^\beta \end{bmatrix}; \quad (1.74)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^\alpha \\ I_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^\beta \\ I_2^\beta \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

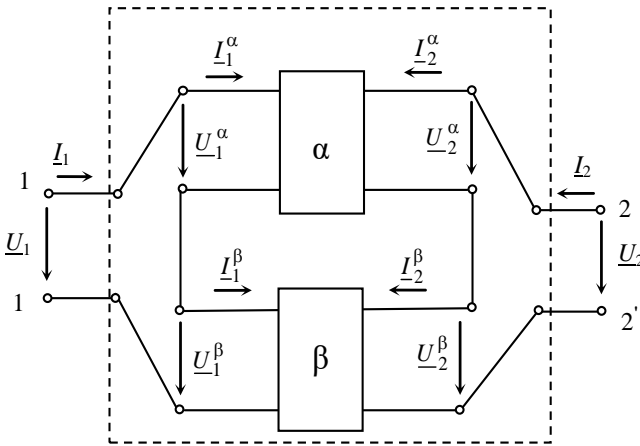


Рисунок 1.19

Для расчета параметров эквивалентного четырехполосника применим уравнения элементарных четырехполосников в форме  $Z$ :

$$\begin{bmatrix} U_1^\alpha \\ U_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^\alpha & Z_{12}^\alpha \\ Z_{21}^\alpha & Z_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^\alpha \\ I_2^\alpha \end{bmatrix} = [Z^\alpha] \begin{bmatrix} I_1^\alpha \\ I_2^\alpha \end{bmatrix}, \quad (1.76)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^\beta & \underline{Z}_{12}^\beta \\ \underline{Z}_{21}^\beta & \underline{Z}_{22}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \underline{[Z]}^\beta \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix}.$$

Подставляя в соотношения (1.74) и (1.75) уравнения (1.76), получаем:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{[Z]}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} + \underline{[Z]}^\beta \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \left[ \underline{[Z]}^\alpha + \underline{[Z]}^\beta \right] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{[Z]} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\underline{[Z]}$  составного четырехполосника равна сумме матриц  $Z$ -параметров элементарных четырехполосников:

$$\underline{[Z]} = \underline{[Z]}^\alpha + \underline{[Z]}^\beta = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^\alpha + \underline{Z}_{11}^\beta & \underline{Z}_{12}^\alpha + \underline{Z}_{12}^\beta \\ \underline{Z}_{21}^\alpha + \underline{Z}_{21}^\beta & \underline{Z}_{22}^\alpha + \underline{Z}_{22}^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.77)$$

#### 1.8.4 Параллельно-последовательное соединение

При данном способе соединения (рисунок 1.20) входные зажимы четырехполосников  $\alpha$  и  $\beta$  соединяются параллельно, а выходные – последовательно. Следовательно, можно записать следующие соотношения для токов и напряжений элементарных и эквивалентного четырехполосников согласно законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_1^\alpha = \underline{U}_1^\beta; & \underline{I}_1 &= \underline{I}_1^\alpha + \underline{I}_1^\beta; \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_2^\alpha + \underline{U}_2^\beta; & \underline{I}_2 &= \underline{I}_2^\alpha = \underline{I}_2^\beta. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Таким образом, при смешанном регулярном соединении четырехполосников следует выбирать основные уравнения, определяющие суммируемые входные токи и выходные напряжения.

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha + \underline{I}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\alpha + \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

Для описания отдельных четырехполосников воспользуемся уравнениями в форме  $F$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11}^\alpha & \underline{F}_{12}^\alpha \\ \underline{F}_{21}^\alpha & \underline{F}_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} = \underline{[F]}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix}; \quad (1.80)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11}^\beta & \underline{F}_{12}^\beta \\ \underline{F}_{21}^\beta & \underline{F}_{22}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \underline{F}^\beta \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix}.$$

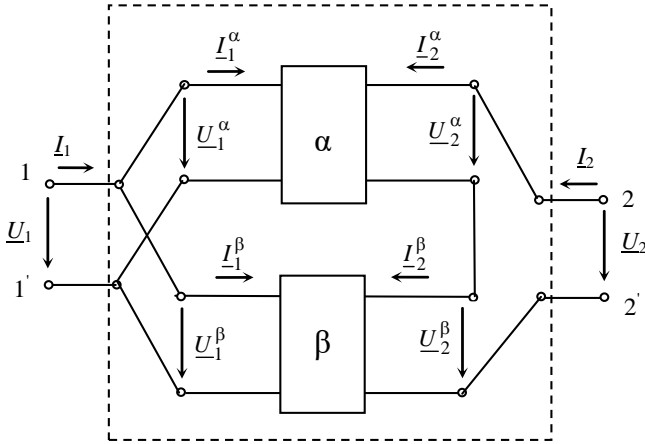


Рисунок 1.20

Подставив в соотношения (1.79) уравнения (1.80), получим уравнения в матричной форме для эквивалентного четырехполюсника:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{F}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} + \underline{F}^\beta \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \left[ \underline{F}^\alpha + \underline{F}^\beta \right] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{F} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\underline{F}$  составного четырехполюсника равна сумме матриц  $F$ -параметров элементарных четырехполюсников:

$$\underline{F} = \underline{F}^\alpha + \underline{F}^\beta = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11}^\alpha + \underline{F}_{11}^\beta & \underline{F}_{12}^\alpha + \underline{F}_{12}^\beta \\ \underline{F}_{21}^\alpha + \underline{F}_{21}^\beta & \underline{F}_{22}^\alpha + \underline{F}_{22}^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

### 1.8.5 Последовательно- параллельное соединение

Этот способ характеризуется последовательным соединением четырехполюсников со стороны входных зажимов и параллельным соединением со стороны выходных зажимов (рисунок 1.21).

Соотношения между токами и напряжениями схемы имеют следующий вид:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^\alpha = \underline{I}_1^\beta; \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_1^\alpha + \underline{U}_1^\beta; \quad (1.82)$$



$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2^\alpha = \underline{U}_2^\beta; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^\alpha + \underline{I}_2^\beta.$$

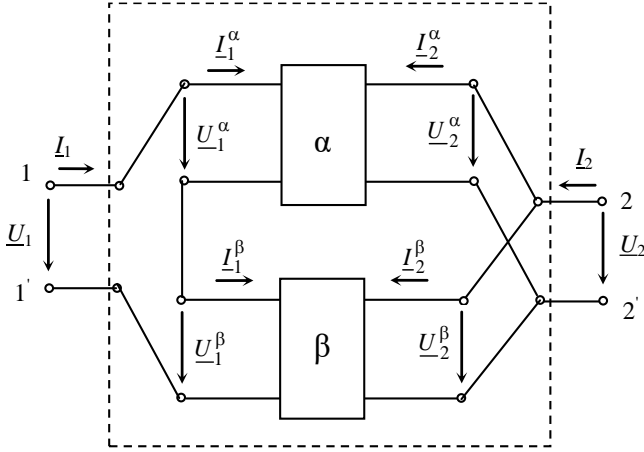


Рисунок 1.21

При рассматриваемом способе соединения четырехполосников следует выбирать основные уравнения, определяющие суммируемые входные напряжения и выходные токи:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha + \underline{U}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\alpha + \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix}. \quad (1.83)$$

Уравнения для четырехполосников  $\alpha$  и  $\beta$  запишем в форме  $H$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^\alpha \\ \underline{I}_2^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11}^\alpha + \underline{H}_{12}^\alpha \\ \underline{H}_{21}^\alpha + \underline{H}_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} = \underline{H}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix}; \quad (1.84)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^\beta \\ \underline{I}_2^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11}^\beta + \underline{H}_{12}^\beta \\ \underline{H}_{21}^\beta + \underline{H}_{22}^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \underline{H}^\beta \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix}.$$

Тогда входное напряжение и выходной ток результирующего четырехполосника определяются следующим соотношением в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{H}^\alpha \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} + \underline{H}^\beta \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\beta \\ \underline{U}_2^\beta \end{bmatrix} = \left[ \underline{H}^\alpha + \underline{H}^\beta \right] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^\alpha \\ \underline{U}_2^\alpha \end{bmatrix} = \underline{H} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\underline{H}$  составного четырехполосника равна сумме матриц  $H$ -параметров элементарных четырехполосников:

$$[\underline{H}] = [\underline{H}^\alpha] + [\underline{H}^\beta] = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11}^\alpha + \underline{H}_{11}^\beta & \underline{H}_{12}^\alpha + \underline{H}_{12}^\beta \\ \underline{H}_{21}^\alpha + \underline{H}_{21}^\beta & \underline{H}_{22}^\alpha + \underline{H}_{22}^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

Подводя итоги рассмотренного выше, можно отметить, что каждому из рассмотренных способов соединения четырехполюсников соответствует определенная система первичных параметров, применяя которую, можно получить наиболее простые соотношения между первичными параметрами составного четырехполюсника и первичными параметрами входящих в него элементарных четырехполюсников.

При работе четырехполюсников предполагается равенство токов обоих входных зажимов 1–1' и пары выходных зажимов 2–2'. Соединение элементарных четырехполюсников, удовлетворяющее такому условию, называется *регулярным*.

При регулярном соединении четырехполюсников матрица каждого из них не должна изменяться по сравнению с той, какой она была до соединения этого четырехполюсника при соединении с другими.

Рассмотрим последовательное соединение двух четырехполюсников  $\alpha$  и  $\beta$ , схемы которых приведены на рисунке 1.22, *a* и *б* соответственно. На рисунке 1.22, *в* приведено их нерегулярное соединение, так как элементы  $C_2$  и  $L_2$  четырехполюсника  $\beta$  соединены параллельно, чего не было в исходной схеме.

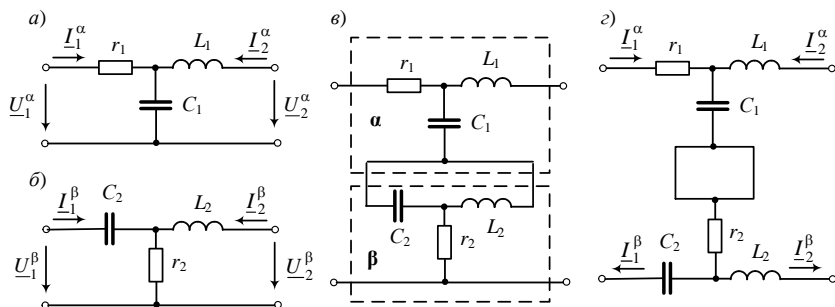


Рисунок 1.22

В таком случае матрица  $Z$ -параметров четырехполюсника  $\beta$  на рисунке 1.22, *в* не равна матрице  $Z$ -параметров четырехполюсника на рисунке 1.22, *б*. Правильное, т. е. регулярное последовательное соединение четырехполюсников дано на рисунке 1.22, *з*. Ни в одном из четырехполюсников не возникло дополнительных связей по сравнению с исходными схемами. Однако следует принять во внимание, что в схеме 1.22, *з* изменились направления токов второго четырехполюсника относительно его входных и выходных зажимов с одновременным изменением знаков напряжений на входе и выходе. При этом элементы  $A$ -матрицы и других матриц не меняют знак.

Следует отметить, что при каскадном соединении четырехполюсников условие регулярности выполняется всегда.

### 1.9 Г-образные четырехполюсники

В теории электрических фильтров часто в качестве отдельных звеньев используют несимметричные четырехполюсники Г-образной формы, имеющие в своем составе одну продольную и одну поперечную ветви с комплексными сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно (рисунок 1.23).

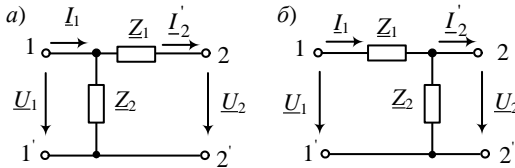


Рисунок 1.23

Запишем уравнения в форме  $A$  Г-образного четырехполюсника, изображенного на рисунке 1.23, *a*, путем непосредственного применения законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 + Z_1 I_2'; \\ I_1 &= \frac{U_2 + Z_1 I_2'}{Z_2} + I_2' = \frac{1}{Z_2} U_2 + \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) I_2'. \end{aligned}$$

Матрица  $A$ -параметров этого четырехполюсника имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}. \quad (1.86)$$

Вторичные параметры данного четырехполюсника можно вычислить по формулам (1.45), (1.46) и (1.48):

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{22} A_{21}}} = Z_2 \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{11} A_{21}}} = \sqrt{Z_1 (Z_1 + Z_2)}. \quad (1.87)$$

$$\operatorname{ch} \Gamma = \sqrt{A_{11} A_{22}} = \sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}; \quad \operatorname{sh} \Gamma = \sqrt{A_{12} A_{21}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (1.88)$$

Для схемы Г-образного четырехполюсника на рисунке 1.23, *б* соответствующие формулы можно записать следующим образом:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.89)$$

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}; \quad \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}}} = \underline{Z}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}; \quad (1.90)$$

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}; \quad \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}. \quad (1.91)$$

Симметричный Т- или П-образный четырехполюсник можно представить в виде согласованного каскадного соединения двух Г-образных четырехполюсников (рисунок 1.24).

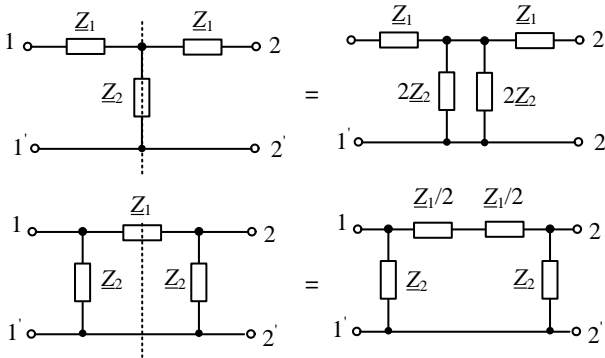


Рисунок 1.24

В ряде случаев, в частности при расчете фильтров, за исходные схемы Г-образных четырехполюсников принимают схемы на рисунке 1.25.

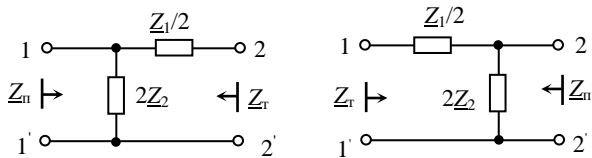


Рисунок 1.25

Постоянная передачи Г-образного четырехполюсника обозначается через  $\underline{\Gamma}/2$  для того, чтобы при согласованном каскадном соединении двух четырехполюсников получался Т- или П-образный четырехполюсник с постоянной передачи  $\underline{\Gamma}$ . При этом характеристическое сопротивление со

стороны поперечной ветви обозначается через  $\underline{Z}_n$ , а со стороны продольной ветви – через  $\underline{Z}_r$ .

На основании соотношений (1.89) и (1.90) можно записать:

$$\underline{Z}_n = 2\underline{Z}_2 \sqrt{\frac{1/2\underline{Z}_1}{1/2\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{4\underline{Z}_1\underline{Z}_2^2}{\underline{Z}_1 + 4\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}; \quad (1.92)$$

$$\underline{Z}_r = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{Z}_1\left(\frac{1}{2}\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\underline{Z}_1^2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}. \quad (1.93)$$

$$\operatorname{ch} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}; \quad \operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}. \quad (1.94)$$

### 1.10 Активные автономные четырехполюсники

Если в структуру четырехполюсника входят независимые источники, то режим его работы не может быть описан системами уравнений (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.8) и (1.9). Другими словами, для описания работы такого четырехполюсника недостаточно четырех основных параметров, входящих в эти уравнения. Уравнения необходимо дополнить слагаемыми, учитывающими наличие независимых источников.

Рассмотрим активный автономный четырехполюсник на рисунке 1.26 и запишем для него уравнения в форме  $A$ . У такого четырехполюсника напряжения на входных и выходных зажимах могут появляться даже при отсутствии внешних источников, а токи на входе и выходе – при одновременном закорачивании входных и выходных зажимов. С учетом этих обстоятельств введем в уравнения (1.3) две комплексные постоянные  $\underline{M}$  и  $\underline{N}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2 + \underline{M}; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2 + \underline{N}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Постоянные  $\underline{M}$  и  $\underline{N}$  можно определить либо из режима холостого хода, либо из режима короткого замыкания четырехполюсника, если осуществлять их одновременно на его первичных и вторичных зажимах.

В режиме холостого хода ( $I_1 = 0$ ,  $I'_2 = 0$ ) вместо соотношений (1.94) получим

$$\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{2x} + \underline{M}; \quad 0 = \underline{A}_{21}\underline{U}_{2x} + \underline{N},$$

откуда

$$\underline{M} = \underline{U}_{1x} - \underline{A}_{11}\underline{U}_{2x}; \quad \underline{N} = -\underline{A}_{21}\underline{U}_{2x}.$$

Подставив найденные выражения для  $\underline{M}$  и  $\underline{N}$  в уравнения (1.94), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 - \underline{U}_{1x} &= \underline{A}_{11}(\underline{U}_2 - \underline{U}_{2x}) + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}(\underline{U}_2 - \underline{U}_{2x}) + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2. \end{aligned} \quad (1.96)$$

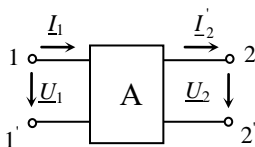


Рисунок 1.26

Полученной системе уравнений (1.95) соответствует схема замещения активного четырехполюсника на рисунке 1.27 с дополнительными источниками ЭДС  $\underline{E}_{1x} = \underline{U}_{1x}$  и  $\underline{E}_{2x} = \underline{U}_{2x}$ .

Постоянные  $\underline{M}$  и  $\underline{N}$  можно также определить из опыта одновременного короткого замыкания входных и выходных зажимов ( $U_1 = 0, U_2 = 0$ ):

$$0 = \underline{A}_{12}\underline{I}'_{2к} + \underline{M};$$

$$\underline{I}_{1к} = \underline{A}_{22}\underline{I}'_{2к} + \underline{N}.$$

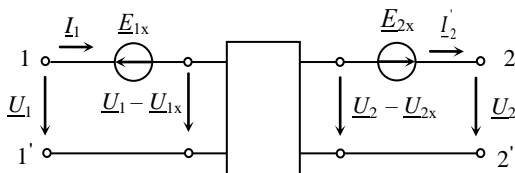


Рисунок 1.27

В результате получим:

$$\underline{M} = -\underline{A}_{12}\underline{I}'_{2к};$$

$$\underline{N} = \underline{I}_{1к} - \underline{A}_{22}\underline{I}'_{2к}.$$

Система уравнений автономного четырехполюсника в форме  $A$  приводится к виду:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}(\underline{I}'_2 - \underline{I}'_{2к}); \quad (1.97)$$

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_{1к} = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}(\underline{I}'_2 - \underline{I}'_{2к}),$$

которой соответствует схема замещения с источниками тока  $\underline{J}_{1к} = \underline{I}_{1к}$  и  $\underline{J}_{2к} = \underline{I}'_2 - \underline{I}'_{2к}$  на рисунке 1.28.

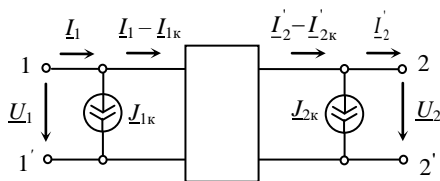


Рисунок 1.28

### 1.11 Зависимые (управляемые) источники напряжения и тока

При исследовании цепей с четырехполюсниками, содержащими, например, транзисторы, операционные усилители, идеальные трансформаторы и т.п., нельзя построить эквивалентную схему замещения, состоящую только из комплексных сопротивлений и независимых источников с постоянными параметрами. Для построения эквивалентных схем необходимо ввести в их состав управляемые источники.

*Зависимый (управляемый) источник напряжения или тока* – это идеализированный активный элемент, параметр (ЭДС или ток) которого является определенной функцией напряжения или тока некоторого участка цепи. Он имеет пару входных и пару выходных выводов, которые являются выводами двух ветвей. Входная ветвь в зависимости от типа источника представляет либо короткозамкнутый участок, либо разрыв, а выходная – источник напряжения или тока. Короткозамкнутая входная ветвь имеет ток  $I_1$  и нулевое напряжение, а разомкнутая входная ветвь – напряжение  $U_1$  и нулевой ток. Входные величины (ток или напряжение) называются *управляющими*.

Выходная ветвь в виде источника напряжения (тока) имеет напряжение  $U_2$  (ток  $I_2$ ), пропорциональные управляющему напряжению или управляющему току входной ветви. Для четырех возможных сочетаний входной и выходной величин вводят следующие четыре типа зависимых источников (рисунок 1.29).

1 *Источник напряжения, управляемый напряжением* (ИНУН, см. рисунок 1.29, а). Управляющей величиной является напряжение  $U_1$  между выводами 1–1' входной ветви, представляющей разрыв. Входной ток  $I_1$  равен нулю, входное сопротивление бесконечно велико. Выходной ветвью является источник напряжения, напряжение которого пропорционально  $U_1$ . Уравнения элемента имеют вид:

$$I_1 = 0; \quad U_2 = \mu U_1. \quad (1.98)$$

Они могут быть заменены уравнениями четырехполюсника типа  $F$  в матричной форме:

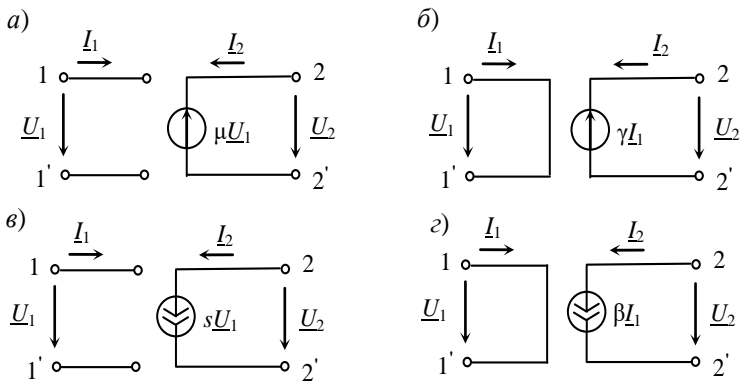


Рисунок 1.29

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{F}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{F}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{F}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}.$$

При переходе к уравнениям четырехполосника в форме  $A$  получим

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } [\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{\underline{F}_{21}}.$$

2 *Источник напряжения, управляемый током* (ИНУТ, см. рисунок 1.29, б). Управляющей величиной является ток  $I_1$  короткозамкнутой входной ветви. Входные напряжение и сопротивление элемента равны нулю. Выходной ветвью является источник напряжения, напряжение которого пропорционально току  $I_1$ . Уравнения элемента можно записать в виде

$$\underline{U}_1 = 0; \quad \underline{U}_2 = \gamma \underline{I}_1. \quad (1.99)$$

ИНУТ может быть представлен уравнениями четырехполосника в форме  $Z$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{Z}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}.$$

Матрица  $A$ -коэффициентов четырехполосника

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{A}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}.$$



3 *Источник тока, управляемый напряжением* (ИТУН, см. рисунок 1.29, в). Управляющей величиной является напряжение  $\underline{U}_1$  разомкнутой входной ветви. Входной ток равен нулю, а входное напряжение бесконечно велико. Выходной ветвью является источник тока, ток которого пропорционален входному напряжению  $\underline{U}_1$ . Уравнения элемента:

$$\underline{I}_1 = 0; \quad \underline{I}_2 = s \underline{U}_1. \quad (1.100)$$

К данному элементу целесообразно применить уравнения четырехполюсника в форме  $Y$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{[Y]} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \underline{[Y]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{Y}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}.$$

Матрица  $A$ -коэффициентов четырехполюсника

$$\underline{[A]} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \underline{A}_{12} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{\underline{Y}_{12}}.$$

4 *Источник тока, управляемый током* (ИТУТ, см. рисунок 1.29 г). Управляющей величиной является ток  $\underline{I}_1$  короткозамкнутой входной ветви. Входные напряжение и сопротивление равны нулю. Выходной ветвью является источник тока, ток которого пропорционален току  $\underline{I}_1$  входной ветви. Уравнения элемента:

$$\underline{U}_1 = 0; \quad \underline{I}_2 = \beta \underline{I}_1. \quad (1.101)$$

Для описания ИТУТ можно воспользоваться уравнениями четырехполюсника в форме  $H$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{[H]} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \underline{[H]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{H}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{H}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}.$$

Матрица  $A$ -коэффициентов четырехполюсника

$$\underline{[A]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\underline{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{\underline{H}_{12}}.$$

Величины  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $s$ ,  $\beta$  часто называют *коэффициентами управления* зависимых источников.

На входе независимых источников мощность равна нулю, т. к. для каждой из схем на рисунке 1.29 равен нулю либо входной ток  $\underline{I}_1$ , либо входное напряжение  $\underline{U}_1$ .

## 1.12 Четырехполюсники с операционными усилителями

При проектировании различных электрических цепей широкое распространение получили операционные усилители (ОУ). Интегральный операционный усилитель представляет собой электронный блок с очень большим входным ( $R_{вх} \sim 10^6$  Ом), малым выходным ( $R_{вых} \sim 0,1$  Ом) сопротивлениями и высоким ( $\mu \sim 10^4-10^6$ ) коэффициентом усиления по напряжению. ОУ изготавливают в виде интегральных микросхем и применяют во многих электронных устройствах различного назначения, реализации управляемых источников, а также в ЭВМ и устройствах автоматики для выполнения различных математических операций (суммирование, дифференцирование, интегрирование и т. д.).

На рисунке 1.30 показано условное обозначение ОУ, которое в простейшем случае имеет вид треугольника с тремя выводами: двумя входными и одним выходным. В некоторых случаях может быть показан и четвертый вывод, который соединяют с общей точкой схемы, чаще всего с корпусом. Один из входных зажимов обозначают кружочком и знаком «-» и называют *инвертирующим*. Около второго входного зажима указывают знак «+» или не указывают никакого знака, он называется *неинвертирующим*. Сигнал, поданный на инвертирующий вход, усиливается по значению и меняет свою полярность (фазу).

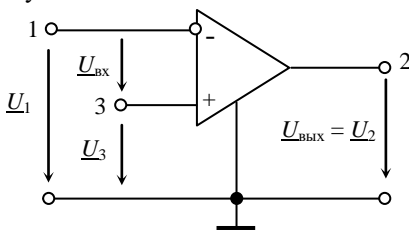


Рисунок 1.30

Неинвертирующий вход полярность (фазу) не изменяет. Сигнал может быть одновременно подан на оба входа, тогда при расчетах учитывается их сумма (разность)  $U_{вх} = U_1 - U_3$ .

Эту величину называют *дифференциальным* входным сигналом. Схема замещения ОУ в линейном режиме представлена на рисунке 1.31.

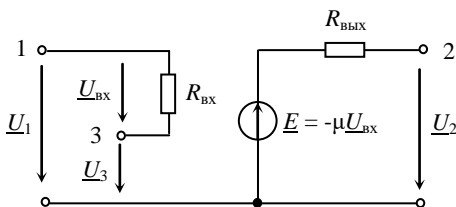


Рисунок 1.31

В линейном режиме ОУ работает, как правило, при наличии *отрицательной обратной связи* (ОС). *Обратной связью* называют подачу на вход усилителя некоторой части сигнала с его выхода, как показано на рисунке 1.32, а.

Обратная связь называется *отрицательной*, если она обеспечивает в усилителе уменьшение его коэффициента усиления, при этом его значение можно регулировать. Сопротивление  $Z_2$ , связывающее входные и выходные зажимы, называется *сопротивлением обратной связи*. Схема замещения операционного усилителя с обратной связью представлена на рисунке 1.32, б.

С целью упрощения схем с ОУ последние часто идеализируют. У идеального ОУ считают входное сопротивление  $R_{вх}$  бесконечно большим, выходное сопротивление  $R_{вых} = 0$  и коэффициент усиления  $\mu \rightarrow \infty$ . У такого усилителя  $I_{вх} = 0$ , и при любом напряжении на выходе  $U_{вых}$  можно считать  $U_{вх} = U_1 - U_3 = 0$ .

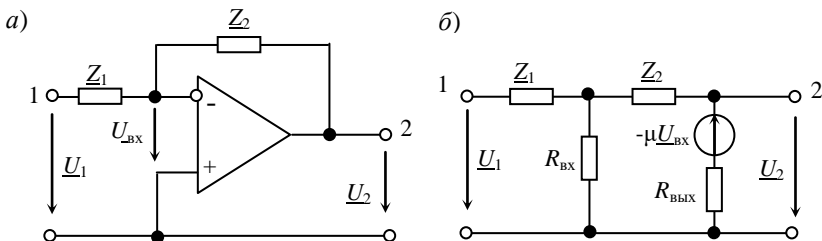


Рисунок 1.32

При такой идеализации ОУ удовлетворяет свойствам ИНУН с матрицей  $A$ -коэффициентов

$$[A] = \begin{bmatrix} -1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 1.13 Примеры решения задач

**Пример 1.1** На рисунке 1.33 представлены схемы одноэлементных четырехполюсников. Определить:

- 1) матрицы  $[Y]$ ,  $[Z]$  и  $[H]$  четырехполюсника на рисунке 1.33, а;
- 2) матрицы  $[Z]$ ,  $[Y]$ , и  $[F]$  четырехполюсника на рисунке 1.33, б.

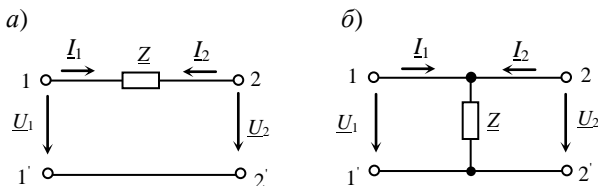


Рисунок 1.33

*Решение.* 1 Матрица  $[Y]$  одноэлементного четырехполюсника на рисунке 1.33, а может быть получена, если записать систему уравнений четырехполюсника в форме  $Y$ , применив к схеме закон Ома:

$$I_1 = (U_1 - U_2)/Z = U_1/Z - U_2/Z;$$

$$I_2 = (U_2 - U_1)/Z = -U_1/Z + U_2/Z,$$

следовательно,

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\underline{Z} & -1/\underline{Z} \\ -1/\underline{Z} & 1/\underline{Z} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\underline{Z}]$  для данного четырехполюсника не существует.

Для получения матрицы  $[\underline{H}]$  рассматриваемого четырехполюсника запишем систему уравнений в форме  $H$ :

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2 = \underline{Z} \underline{I}_1 + \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2 = -\underline{I}_1,$$

откуда 
$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 Матрицы  $[\underline{Z}]$  и  $[\underline{F}]$  одноэлементного четырехполюсника на рисунке 1.33, б могут быть определены аналогичным образом, записав соответствующие уравнения по законам Кирхгофа.

Для данной схемы выполняется соотношение

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{Z} \underline{I}_1 + \underline{Z} \underline{I}_2.$$

В соответствии с уравнениями (1.2) запишем матрицу  $[\underline{Z}]$ :

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{bmatrix}.$$

Уравнения в форме  $F$ :

$$\underline{U}_2 = \underline{F}_{11} \underline{U}_1 + \underline{F}_{12} \underline{I}_2 = \underline{U}_1;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{F}_{21} \underline{U}_1 + \underline{F}_{22} \underline{I}_2 = \underline{U}_1/\underline{Z} - \underline{I}_2;$$

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z} & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\underline{Y}]$  не имеет смысла.

**Пример 1.2.** Определить матрицы  $[\underline{Z}]$  и  $[\underline{Y}]$  Т- и П-образной схем замещения четырехполюсников (рисунок 1.34).

*Решение.* 1 Рассмотрим Т-образную схему четырехполюсника. Для получения матрицы  $Z$ -параметров составим для рассматриваемой схемы уравнения по второму закону Кирхгофа для двух независимых контуров:

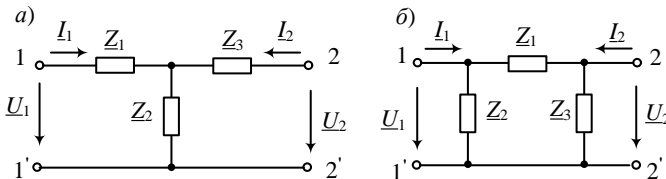


Рисунок 1.34

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_3 \underline{I}_2 + \underline{Z}_2 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \underline{Z}_2 \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_2,$$

откуда

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}.$$

Для определения  $Y$ -параметров четырехполосника запишем систему уравнений в форме  $Y$ :

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2$$

и рассмотрим схему в режиме короткого замыкания поочередно со стороны выходных и входных зажимов. Обозначим  $\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}$ ;  $\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}$ ;  $\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3}$ .

При коротком замыкании выходных зажимов ( $\underline{U}_2 = 0$ )

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_{1к}}{\underline{U}_{1к}} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\left( \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \right) \underline{U}_{1к}} = \frac{\underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

Параметр  $\underline{Y}_{11}$  представляет собой входную проводимость четырехполосника относительно зажимов 1-1'. Параметр  $\underline{Y}_{21}$  находим из соотношения:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{21} &= \frac{\underline{I}_{2к}}{\underline{U}_{1к}} = - \frac{\underline{U}_{1к}}{\left( \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \right) \underline{U}_{1к}} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3} = \\ &= - \frac{1/\underline{Y}_2}{\frac{1}{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2} + \frac{1}{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3} + \frac{1}{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}} = - \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \end{aligned}$$

При коротком замыкании входных зажимов ( $\underline{U}_1 = 0$ ) собственная проводимость четырехполосника относительно выходных зажимов равна коэффициенту  $\underline{Y}_{22}$ :

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{1/\underline{Y}_3 + 1/(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)} = \frac{\underline{Y}_3 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{12} &= \frac{\underline{I}_{1к}}{\underline{U}_{2к}} = -\frac{1}{\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \\ &= -\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}} = -\frac{1}{\frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_3} + \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}} = -\frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \end{aligned}$$

Запишем матрицу  $[\underline{Y}]$  T-образного четырехполюсника:

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} & -\frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ -\frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} & \frac{\underline{Y}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \end{bmatrix}.$$

2 Для определения Z-параметров П-образного четырехполюсника запишем систему уравнений в форме Z и рассмотрим схему в режиме холостого хода поочередно со стороны входных и выходных зажимов:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2.$$

При питании четырехполюсника со стороны первичных зажимов и разомкнутых вторичных ( $\underline{I}_2 = 0$ ) определяем коэффициенты  $\underline{Z}_{11}$  и  $\underline{Z}_{21}$ :

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{1к}} = \underline{Z}_{1к} = \frac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_{2к}}{\underline{I}_{1к}} = \frac{\underline{U}_{1к} \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \cdot \frac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{U}_{1к}} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

При питании четырехполюсника со стороны вторичных зажимов и разомкнутых первичных определяем коэффициенты  $\underline{Z}_{12}$  и  $\underline{Z}_{22}$ :

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{2к}} = \frac{\underline{U}_2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3};$$

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_{2к}}{\underline{I}_{2к}} = \underline{Z}_{2к} = \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Матрица  $Z$ -параметров  $\Pi$ -образного четырехполюсника:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $[Y]$   $\Pi$ -образного четырехполюсника найдем, записав систему уравнений (1.1) в форме  $Y$  для схемы на рисунке 1.34, б по законам Кирхгофа:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_2} + \frac{U_1 - U_2}{Z_1} = (Y_1 + Y_2)U_1 - Y_1 U_2;$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_3} + \frac{U_2 - U_1}{Z_1} = -Y_1 U_1 + (Y_1 + Y_2)U_2.$$

Итак, 
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix}.$$

**Пример 1.3.** Для мостовой схемы симметричного четырехполюсника на рисунке 1.10, а известны параметры  $A_{11} = -j$  и  $A_{12} = 200 - j200$  Ом. Найти значения сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$  схемы, а также параметр  $A_{12}$ .

*Решение.* Согласно формуле (1.28) матрица  $A$ -параметров мостового четырехполюсника

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ 2 & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с исходными данными можем записать уравнения с искомыми величинами  $Z_1$  и  $Z_2$ :

$$A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}; \quad A_{12} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}.$$

Решим эту систему уравнений и найдем сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$ , выраженные через параметры  $A_{11}$  и  $A_{12}$ :

$$(A_{11} - 1)Z_2 = (A_{11} + 1)Z_1; \quad Z_2 = \frac{A_{11} + 1}{A_{11} - 1} Z_1;$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{2\underline{Z}_1 \frac{\underline{A}_{11}+1}{\underline{A}_{11}-1} \underline{Z}_1}{\frac{\underline{A}_{11}+1}{\underline{A}_{11}-1} \underline{Z}_1 - \underline{Z}_1} = (\underline{A}_{11}+1)\underline{Z}_1,$$

откуда 
$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}+1} = \frac{200 - j200}{-j+1} = 200 \text{ Ом.}$$

Находим 
$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{11}+1}{\underline{A}_{11}-1} \underline{Z}_1 = \frac{-j+1}{-j-1} 200 = j200 \text{ Ом;}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} = \frac{2}{j200 - 200} = -0,005 - j0,005 \text{ См.}$$

Произведем проверку найденных значений  $A$ -параметров в соответствии с уравнением (1.6)

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = (-j)^2 - (200 - j200)(-0,005 - j0,005) = 1.$$

**Пример 1.4.** Определить  $A$ -параметры и характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_c$  симметричного четырехполюсника, схема которого дана на рисунке 1.35, если  $r = \omega L = 1/2\omega C = 10 \text{ Ом}$ . Проверить найденное значение  $\underline{Z}_c$  путем расчета входного сопротивления схемы в режиме согласованной нагрузки четырехполюсника, при котором  $\underline{Z}_{2н} = \underline{Z}_c$ .

*Решение.* Определим  $A$ -параметры четырехполюсника, используя уравнения (1.5) последовательно для режима холостого хода ( $\underline{I}'_2 = 0$ ) и режима короткого замыкания ( $\underline{U}_2 = 0$ ). В первом случае уравнения запишутся так:

$$\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{2x};$$

$$\underline{I}_{1x} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{2x}.$$

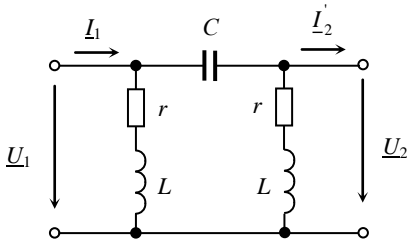


Рисунок 1.35

Путем непосредственного применения законов Кирхгофа к данной схеме получим

$$\underline{U}_{2x} = \frac{\underline{U}_{1x}(r + j\omega l)}{r + j\omega L - j/\omega C} = \underline{U}_{1x} \frac{r + jr}{r - jr} = j\underline{U}_{1x};$$

$$\underline{I}_{1x} = \frac{\underline{U}_{1x}}{r + j\omega L} + \frac{\underline{U}_{2x}}{r + j\omega L} = \frac{\underline{U}_{1x} + \underline{U}_{2x}}{r + j\omega L} = \frac{\underline{U}_{1x} + j\underline{U}_{1x}}{r + jr} = \frac{\underline{U}_{1x}}{jr};$$



откуда 
$$\underline{A}_{11} = \frac{U_{1x}}{U_{2x}} = -j; \quad \underline{A}_{21} = \frac{I_{1x}}{U_{2x}} = \frac{U_{1x}}{rjU_{1x}} = \frac{1}{jr} = -j0,1 \text{ См.}$$

При коротком замыкании выходных зажимов четырехполосника

$$\underline{U}_{1к} = \underline{A}_{12} I'_{2к};$$

$$I'_{2к} = \frac{U_{1к}}{-j/\omega C}; \quad \underline{A}_{12} = \frac{U_{1к}}{I'_{2к}} = -j/\omega C = -j20 \text{ Ом.}$$

Проверка: 
$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = (-j)^2 - (-j20)(-j0,1) = 1.$$

Характеристическое сопротивление четырехполосника  $\underline{Z}_c$  определим по формуле (5.1).

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{-j20}{-j0,1}} = 10\sqrt{2} \text{ Ом.}$$

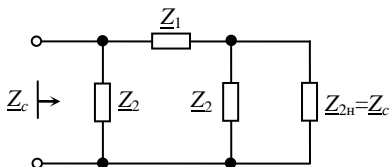


Рисунок 1.36

Для проверки найденного значения  $\underline{Z}_c$  найдем входное сопротивление четырехполосника в режиме согласованной нагрузки (рисунок 1.36). Согласно приведенному ранее определению, при согласованном режиме четырехполосника  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_c = \underline{Z}_{2н}$ .

Обозначим сопротивления

$$\underline{Z}_1 = -j/\omega C = -j20 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = r + j\omega L = 10 + j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_c (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}.$$

Тогда можем записать следующее соотношение:

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_2 \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_c (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}}{\underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_c (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2^2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_c (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_2^2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_c + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_c (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}.$$

Решив полученное уравнение, найдем значение  $\underline{Z}_c$ :

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2}} = (10 + j10) \sqrt{\frac{-j20}{-j20 + 20 + j20}} = 10\sqrt{2} \text{ Ом.}$$

**Пример 1.5.** Определить матрицы  $[Z]$ ,  $[Y]$  и  $[A]$  мостового Т-образного четырехполосника, схема которого дана на рисунке 1.37. Найти численные значения коэффициентов этих матриц, если  $Z_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $Z_2 = -j10 \text{ Ом}$ ,  $Z_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $Z_4 = j10 \text{ Ом}$ .

*Решение.* Данный четырехполосник можно представить в виде последовательно соединенных П-образного и одноэлементного четырехполосников (рисунок 1.38). Если  $[Z^\alpha]$  – матрица Z-параметров П-образного четырехполосника, а  $[Z^\beta]$  – матрица Z-параметров одноэлементного четырехполосника, то матрица  $[Z]$  мостового Т-образного четырехполосника будет определена в виде суммы:  $[Z] = [Z^\alpha] + [Z^\beta]$ .

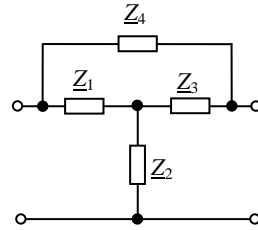


Рисунок 1.37

Найдем матрицу  $[Z^\alpha]$  П-образного четырехполосника, для чего воспользуемся решением примера 1.2:

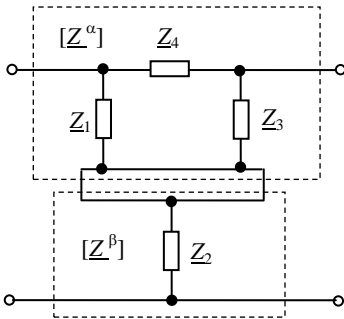


Рисунок 1.38

$$[Z^\alpha] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \\ \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \end{bmatrix}$$

После подстановки числовых значений сопротивлений получаем

$$[Z^\alpha] = \begin{bmatrix} 7 + j & 6 - j2 \\ 6 - j2 & 8 + j4 \end{bmatrix}$$

Матрицу  $[Z^\beta]$  одноэлементного четырехполосника определим, используя решение примера 1.1:

$$[Z^\beta] = \begin{bmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j10 & -j10 \\ -j10 & -j10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Таким образом, } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = [Z^\alpha] + [Z^\beta] = \begin{bmatrix} 7 - j9 & 6 - j12 \\ 6 - j12 & 8 - j6 \end{bmatrix}$$

Этот же мостовой Т-образный четырехполосник может быть представлен в виде параллельного соединения двух четырехполосников: одноэлементного и Т-образного (рисунок 1.39).

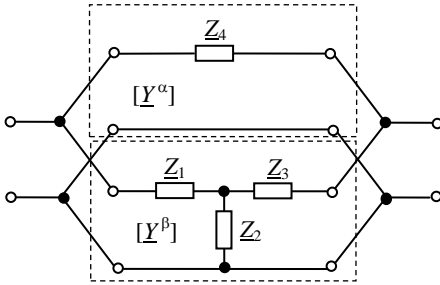


Рисунок 1.39

Если  $[Y^\alpha]$  – матрица одноэлементного четырехполюсника, а  $[Y^\beta]$  – матрица Т-образного четырехполюсника, то матрица  $[Y]$  мостового Т-образного четырехполюсника определяется как

$$[Y] = [Y^\alpha] + [Y^\beta].$$

Матрицы  $[Y^\alpha]$  и  $[Y^\beta]$  запишем по аналогии с формулами, полу-

ченными в примерах 1.1 и 1.2.

Обозначим:  $Y_1 = 1/Z_1$ ,  $Y_2 = 1/Z_2$ ,  $Y_3 = 1/Z_3$ ,  $Y_4 = 1/Z_4$ .

$$[Y^\alpha] = \begin{bmatrix} Y_4 & -Y_4 \\ -Y_4 & Y_4 \end{bmatrix},$$

$$[Y^\beta] = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & -\frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \\ -\frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \end{bmatrix}.$$

Подставив числовые значения параметров элементов схемы, получим:

$$[Y^\alpha] = \begin{bmatrix} -j0,1 & j0,1 \\ j0,1 & -j0,1 \end{bmatrix};$$

$$[Y^\beta] = \begin{bmatrix} 0,054 + j0,031 & -0,023 + j0,015 \\ -0,023 + j0,015 & 0,038 + j7,692 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix};$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = [Y^\alpha] + [Y^\beta] = \begin{bmatrix} 0,054 - j0,069 & -0,023 + j0,115 \\ -0,023 + j0,115 & 0,038 - j0,092 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы  $[A]$  заданной схемы четырехполюсника можно найти следующими способами:

*Первый способ.* Воспользуемся формулами перехода (1.5) от  $Y$ -параметров к  $A$ -параметрам.

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = 0,833 + j0,167;$$

$$\underline{A}_{12} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} = 1,667 + j8,333 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}} = 0,033 + j0,067 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = 0,667 + j0,333.$$

*Второй способ.* Вычислим  $A$ -параметры через входные сопротивления холостого хода и короткого замыкания при прямом и обратном питании четырехполюсника.

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} + \underline{Z}_2 = 7 - j9 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} + \underline{Z}_2 = 8 - j6 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{Z}_4[\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)]}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} = 3,846 + j9,231 \text{ Ом}.$$

Коэффициенты  $A$  найдем по формулам (3.1) – (3.4).

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} + \underline{Z}_{2k}}} = 0,833 + j0,167 ;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{2k} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} + \underline{Z}_{2k}}} = 1,667 + j8,333 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1x}(\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k})}} = 0,033 + j0,067 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_{2x}}{\sqrt{\underline{Z}_{1x}(\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k})}} = 0,667 + j0,333.$$

*Третий способ.* Произведем преобразование исходной схемы четырехполюсника, заменив треугольник сопротивлений  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_3$ ,  $\underline{Z}_4$  эквивалентным соединением звездой. Получим каноническую Т-образную схему четырехполюсника (рисунок 1.40) и применим к ней формулы (1.22).

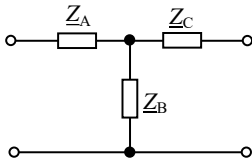


Рисунок 1.40

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = 1 + j3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} + \underline{Z}_2 = 6 - j12 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = 2 + j6 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_A}{\underline{Z}_B} = 0,833 + j0,167; \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_B} = 0,333 + j0,067 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_A \underline{Z}_C}{\underline{Z}_B} = 1,167 + j8,333 \text{ Ом}; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_B} = 0,667 + j0,333.$$

**Пример 1.6.** К входным клеммам симметричного четырехполюсника подключен источник напряжения  $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ , а к выходным клеммам – нагрузка с сопротивлением  $\underline{Z}_{2н}$  (рисунок 1.41). Дано:  $U_{1m} = 100\sqrt{2}$  В;  $r = \omega L = 1/\omega C = 10$  Ом;  $\underline{Z}_{2н} = 20 + j20$  Ом. Определить:

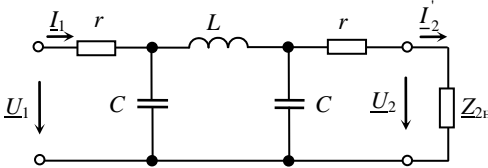


Рисунок 1.41

1)  $A$ -параметры, характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_c$ , постоянные передачи  $\underline{\Gamma}$ , ослабления  $A$  и фазы  $B$  четырехполюсника.

2) напряжение  $\underline{U}_2$ , токи  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , активные мощности на входе  $P_1$  и на выходе  $P_2$

цепи, коэффициент полезного действия  $\eta$ .

*Решение.* Представим рассматриваемый симметричный четырехполюсник в виде каскадного соединения Т-образного ( $\alpha$ ) и Г-образного ( $\beta$ ) четырехполюсников (рисунок 1.42). Запишем матрицы  $A$ -параметров  $[\underline{A}^\alpha]$  и  $[\underline{A}^\beta]$  этих четырехполюсников в соответствии с формулами (1.24) и (1.86):

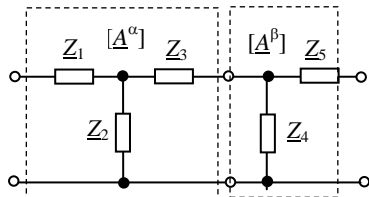


Рисунок 1.42

$$[\underline{A}^\alpha] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix},$$

где  $\underline{Z}_1 = r = 10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_2 = 1/j\omega C = -j10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_3 = j\omega L = j10 \text{ Ом}$ .

$$[\underline{A}^\beta] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_5 \\ \frac{1}{\underline{Z}_4} & 1 + \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4} \end{bmatrix},$$

где  $\underline{Z}_4 = 1/j\omega C = -j10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_5 = r = 10 \text{ Ом}$ .

После подстановки числовых значений сопротивлений получим:

$$[\underline{A}^\alpha] = \begin{bmatrix} 1+j & j10 \\ j0,1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{A}^\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ j0,1 & 1+j \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $[\underline{A}]$  составного (исходного) четырехполюсника при каскадном соединении четырехполюсников  $\alpha$  и  $\beta$  найдем в виде произведения соответствующих матриц  $A$ -параметров:

$$[\underline{A}] = [\underline{A}^\alpha] \cdot [\underline{A}^\beta] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & j20 \\ j0,1 & j \end{bmatrix}.$$

Характеристическое сопротивление четырехполюсника находим по формуле (1.31):

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j20}{j0,1}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ Ом}.$$

Постоянная передачи четырехполюсника может быть определена по формуле (1.34):

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}) = \ln(1 + \sqrt{2})e^{j\pi/2} = \ln(1 + \sqrt{2}) + j\pi/2.$$

Следовательно, постоянная ослабления

$$A = \ln(1 + \sqrt{2}) = \ln 2,414 = 0,881 \text{ Нп},$$

а постоянная фазы  $B = \pi/2$  рад.

Вычислим входное сопротивление четырехполюсника со стороны входных зажимов по формуле (1.10):

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{2\text{н}} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{2\text{н}} + A_{22}} = 12,308 - j1,538 \text{ Ом}$$

и найдем входной ток  $I_1 = \frac{U_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = 8 + j \text{ А.}$

Ток  $I_2$  и напряжение  $U_2$  найдем из уравнений:

$$\underline{U}_1 = A_{11}\underline{U}_2 + A_{12}I_2'; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_{2\text{н}}I_2';$$

$$I_2' = \frac{\underline{U}_1}{A_{11}\underline{Z}_{2\text{н}} + A_{12}} = \frac{100}{j(20 + j20) + j20} = -1 - j2 \text{ А;}$$

$$\underline{U}_2 = (20 + j20)(-1 - j2) = 20 - j60 \text{ В.}$$

Активная мощность источника  $P_1 = \text{Re}[\underline{U}_1 I_1^*] = \text{Re}[100(8 - j)] = 800 \text{ Вт.}$

Мощность нагрузки  $P_2 = \text{Re}[\underline{U}_2 I_2'^*] = \text{Re}[(20 - j60)(-1 + j2)] = 100 \text{ Вт.}$

Коэффициент полезного действия  $\eta = P_1/P_2 = 0,125$ .

**Пример 1.7.** Т-образная схема четырехполюсника на рисунке 1.43 имеет следующие значения сопротивлений элементов:  $r = 50 \text{ Ом}$ ,  $x_L = \omega L = 100 \text{ Ом}$ ,  $x_C = 1/\omega C = 50 \text{ Ом}$ . Определить характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{1c}$ ,  $\underline{Z}_{2c}$  и постоянную передачи  $\underline{\Gamma}$ .

*Решение.* Параметры  $\underline{Z}_{1c}$ ,  $\underline{Z}_{2c}$  и  $\underline{\Gamma}$  можно найти, определив сопротивления холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных и вторичных зажимов схемы.

При прямом питании четырехполюсника

$$\underline{Z}_{1\text{х}} = r - jx_C = 50 + j100 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{1\text{к}} = r + \frac{jx_L(-jx_C)}{j(x_L - x_C)} = 50 - j100 \text{ Ом,}$$

а при обратном питании

$$\underline{Z}_{2\text{х}} = jx_L - jx_C = j50 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{2\text{к}} = r + \frac{rjx_L}{r + jx_L} = 40 - j30 \text{ Ом.}$$

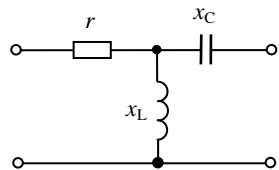


Рисунок 1.13.11

Характеристические сопротивления рассчитаем по формулам (1.47):

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{х}}\underline{Z}_{1\text{к}}} = \sqrt{(50 + j100)(50 - j100)} = 50\sqrt{2} = 111,803 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2к}} = \sqrt{j50(40 - j30)} = 544,721 + j22,361 = 50e^{j26,57^\circ} \text{ Ом.}$$

Для определения постоянной передачи воспользуемся формулой (1.49), для чего предварительно найдем по формулам (1.18)–(1.21)  $A$ -параметры четырехполюсника:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2к}}} = \sqrt{\frac{50 + j100}{j50 - 40 + j30}} = 1 - j0,5;$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}} \underline{A}_{11} = 0,5.$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{2к} \underline{A}_{11} = 25 - j50 \text{ Ом;}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1x}} = -j0,01 \text{ См;}$$

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln(0,899 - j0,899) = \ln 1,271e^{-j\pi/4} = \\ = \ln 1,271 - j\pi/4 = 0,24 - j\pi/4; \quad A = 0,24 \text{ Нп;} \quad B = -\pi/4 \text{ рад} = -45^\circ.$$

**Пример 1.8.** Четырехполюсник имеет следующие вторичные параметры: постоянную передачи  $\underline{\Gamma} = 0,441 + j0,785$ , характеристические сопротивления  $\underline{Z}_{1c} = 5\sqrt{2}$  Ом и  $\underline{Z}_{2c} = 10\sqrt{2}(1 + j)$  Ом. Найти  $A$ -параметры четырехполюсника и сопротивления  $\Pi$ -образной схемы замещения.

*Решение.* Значения искоемых  $A$ -параметров найдем по формулам (1.50):

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \text{ch}\underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} \text{sh}\underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}} \text{sh}\underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \text{ch}\underline{\Gamma}.$$

Вычислим значения  $\text{sh}\underline{\Gamma}$  и  $\text{ch}\underline{\Gamma}$ .

$$\text{sh}\underline{\Gamma} = \text{sh}(0,441 + j0,785) = \text{sh} 0,441 \cos 0,785 + j \text{ch} 0,441 \sin 0,785 = \\ = 0,322 + j0,777;$$

$$\text{ch}\underline{\Gamma} = \text{ch}(0,441 + j0,785) = \text{ch} 0,441 \cos 0,785 + j \text{sh} 0,441 \sin 0,785 = \\ = 0,777 + j0,322.$$

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}(1+j)}} (0,777 + j0,322) = 0,5;$$

$$\underline{A}_{12} = \sqrt{5\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}(1+j)} (0,322 + j0,777) = j10 \text{ Ом;}$$



$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{5\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}(1+j)}} (0,322 + j0,777) = 0,05 + j0,05 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{10\sqrt{2} \cdot (1+j)}{5\sqrt{2}}} (0,777 + j0,322) = 1 + j \text{ Ом}.$$

Проверка:  $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 0,5(1+j) - j10(0,05 + j0,05) = 1.$

Параметры П-образной схемы замещения четырехполюсника (рисунок 1.7, б) вычислим по формулам (1.25):

$$\underline{Z}_1 = \underline{A}_{12} = j10 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1} = 10 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1} = -j20 \text{ Ом}.$$

## 2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

### 2.1 Общие сведения

Электрическим *фильтром* называют четырехполюсник, с помощью которого из множества сигналов, занимающих широкий спектр частот, можно выделить один или несколько сигналов с более узким спектром. Другими словами под электрическими фильтрами следует понимать четырехполюсники, которые обладают избирательными свойствами. Фильтрующие свойства таких четырехполюсников обусловлены, как правило, резонансными режимами, возникающими в них.

Применение фильтров в системах автоматики, телемеханики, радиотехники, устройствах связи и передачи информации весьма широко. Так, среди многочисленных работающих радиостанций радиоприемник с помощью фильтра выделяет сигнал только одной принимающей станции. При использовании линий электропроводной связи для осуществления одновременных телефонных разговоров на приемной станции устанавливают фильтры для разделения сигналов отдельных абонентов. В ряде случаев для передачи высокочастотных сигналов в качестве каналов связи используют линии электропередачи высокого напряжения. В этих случаях электрические фильтры отделяют эти сигналы от токов промышленной частоты.

Электрический фильтр условно можно изобразить на рисунке 2.1 в виде четырехполюсника с напряжением  $\underline{U}_1$  и током  $\underline{I}_1$  на входе, сопротивлением нагрузки  $\underline{Z}_н$ , подключенным к выходным зажимам. Напряжение и ток нагрузки обозначены соответственно  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ .

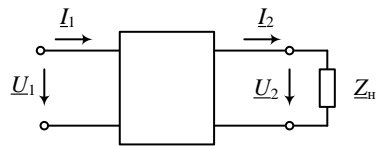


Рисунок 2.1

В качестве фильтров чаще всего применяются пассивные четырехполюсники специального вида. Такие четырехполюсники пропускают некоторую определенную полосу частот, так называемую *полосу пропускания (прозрачности)* при весьма малом коэффициенте ослабления  $A$  (порядка  $0,1 \dots 3,0$  дБ). За пределами этой полосы частот, в *полосе задерживания (непропускания или непрозрачности)*, ослабление имеет гораздо большее значение, в несколько десятков дБ. Полоса пропускания с обеих сторон огра-

ничена предельными (граничными) частотами, называемыми *частотами среза*  $\omega_c$ .

В зависимости от типа элементов, из которых фильтры собраны, выделяют реактивные (содержащие только конденсаторы и катушки), безындуктивные, электромеханические, пьезоэлектрические, активные и т. п.

В зависимости от диапазона частот, пропускаемых фильтром, различают:

1 Фильтры нижних частот, ФНЧ (низкочастотные). Они пропускают малые частоты в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \omega_c$  и задерживают большие частоты.

2 Фильтры верхних частот, ФВЧ (высокочастотные). Эти фильтры пропускают большие частоты в диапазоне  $\omega_c \leq \omega < \infty$  и задерживают малые.

3 Полосовые фильтры, ПФ, пропускающие только определенную полосу частот  $\omega_{1c} \leq \omega \leq \omega_{2c}$ .

4 Заграждающие или *режекторные* фильтры, ЗФ, пропускающие колебания вне интервала  $[\omega_{1c}, \omega_{2c}]$  и задерживающие колебания внутри этого интервала частот.

Идеальным фильтром будем называть находящийся в согласованном режиме четырехполосник, содержащий только реактивные элементы и у которого в полосе пропускания коэффициент ослабления  $A = 0$ .

Общий характер частотных характеристик коэффициента ослабления  $A$  идеальных электрических фильтров и их условно-графические изображения приведены на рисунке 2.2.

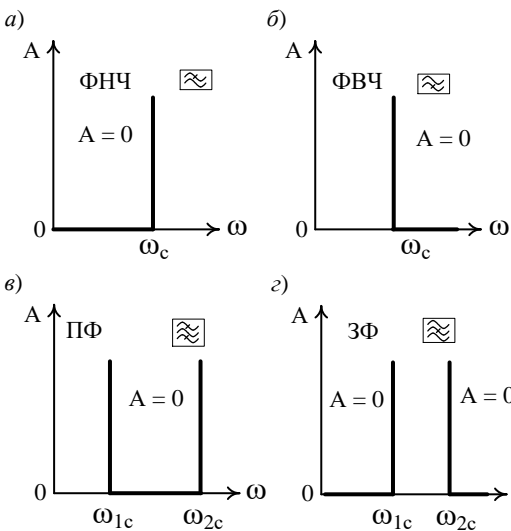


Рисунок 2.2

В полосе прозрачности такого фильтра вся мощность поступает в нагрузку, в полосе задерживания мощность полностью отражается к источнику, поэтому сопротивление идеального фильтра является чисто активным в полосе прозрачности и чисто реактивным в полосе задерживания.

Как правило, электрические фильтры представляют собой каскадное согласованное включение Т-, П- и Г-образных звеньев четырехполосников, приведенное на рисунке 2.3. В этом случае получается

лестничная схема соединения элементов. К входу первого звена подключают источник, а к выходу последнего – нагрузку. При лестничной схеме формирования фильтров элементы звеньев должны быть такими, чтобы при соединении звеньев продольные сопротивления лестничной цепи имели бы сопротивления  $Z_1$ , а поперечные ветви – сопротивление  $Z_2$ . В состав фильтров могут входить и симметричные мостовые четырехполюсники. По числу звеньев фильтры могут быть однозвенными, двухзвенными и многозвенными.

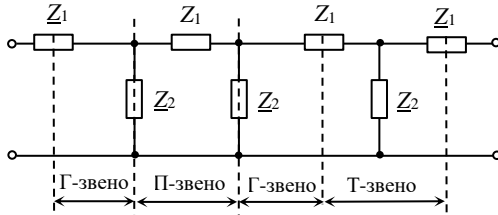


Рисунок 2.3

## 2.2 Характеристические параметры Т-, П- и Г-образных звеньев электрических фильтров

Рассмотрим Т- и П-образную симметричные схемы четырехполюсников, которые наиболее часто применяются в качестве звеньев электрических фильтров (рисунок 2.4, а и б).

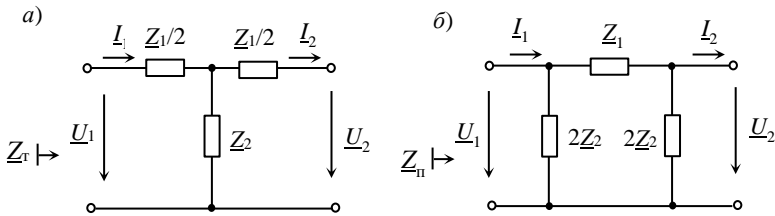


Рисунок 2.4

Анализ цепочечных схем пассивных электрических фильтров будем проводить с использованием характеристических параметров четырехполюсников. Для описания работы симметричных четырехполюсников воспользуемся уравнениями в форме  $A$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

и уравнениями с гиперболическими функциями

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \Gamma + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \Gamma; \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \Gamma + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\underline{Z}_c$  – характеристическое сопротивление четырехполюсника;  
 $\Gamma = \alpha + j\beta$  – характеристическая постоянная передачи;  
 $\alpha$  – коэффициент ослабления;  
 $\beta$  – коэффициент фазы.

Запишем матрицу А-параметров Т-образной схемы четырехполюсника:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right) \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Характеристическое сопротивление Т-схемы:

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_T = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right)} \quad (2.4)$$

Формулы для аналогичных величин П-образной схемы:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right) & 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{21}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \quad (2.6)$$

Из сопоставления уравнений (2.1) и (2.2) и формул (2.3) и (2.5) можно заключить, что для Т- и П-схем

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = \operatorname{ch} \Gamma. \quad (2.7)$$

Фильтры, содержащие Т- и П-образные звенья, можно рассматривать в виде комбинаций, составленных из Г-образных звеньев (рисунок 2.5, а и б).

Г-образные четырехполюсники – несимметричные, поэтому они имеют три характеристических параметра: постоянную передачи  $\underline{\Gamma} = A + jB$  и два характеристических сопротивления,  $\underline{Z}_{1c}$  со стороны входа и  $\underline{Z}_{2c}$  со стороны выхода. Характеристическое сопротивление со стороны продольной ветви Г-образной схемы (Т-входа) будем обозначать  $\underline{Z}_T$ , а со стороны поперечной (П-входа) –  $\underline{Z}_\Pi$ .

Для Г-образного четырехполюсника на рисунке 2.5, а приведем следующие формулы:

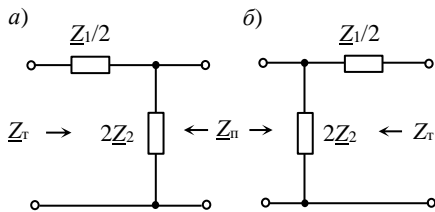


Рисунок 2.5

матрица  $A$ -параметров 
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{2} \\ \frac{1}{2\underline{Z}_2} & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.8)$$

характеристическое сопротивление со стороны Т-входа

$$\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_T = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}; \quad (2.9)$$

характеристическое сопротивление со стороны П-входа

$$\underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \quad (2.10)$$

Г-образный четырехполюсник на рисунке 2.5, б имеет следующие характеристики:

матрица  $A$ -параметров 
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\underline{Z}_1}{2} \\ \frac{1}{2\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

характеристическое сопротивление со стороны П-входа

$$\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \quad (2.12)$$

характеристическое сопротивление со стороны Т-входа

$$\underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}. \quad (2.13)$$

Как видим, формулы для расчета характеристических сопротивлений  $\underline{Z}_{\Gamma}$  и  $\underline{Z}_{\Pi}$  обеих схем  $\Gamma$ -образных четырехполосников одинаковы. Это обусловлено тем, что обе схемы на рисунке 2.5, *a* и *б* фактически являются схемой одного и того же четырехполосника с прямым (*a*) и обратным (*б*) включением.

В качестве постоянной передачи  $\Gamma$ -образного четырехполосника будем использовать величину  $\frac{1}{2}\underline{\Gamma} = \frac{1}{2}\underline{A} + j\frac{1}{2}\underline{B}$  для того, чтобы при согласованном каскадном соединении таких четырехполосников получался  $\Gamma$ - или  $\Pi$ -образный четырехполосник с постоянной передачи  $\underline{\Gamma} = \underline{A} + j\underline{B}$ .

$A$ -параметры несимметричных четырехполосников связаны между собой уравнением

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1,$$

которому соответствует тригонометрическая формула

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\underline{\Gamma}}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\underline{\Gamma}}{2} = 1.$$

Из сопоставления этих формул следует, что

$$\operatorname{ch} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}, \quad \operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}.$$

Подставляя в эти формулы значения  $A$ -параметров, увидим, что для обеих схем  $\Gamma$ -образных четырехполосников имеем идентичные выражения:

$$\operatorname{ch} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}. \quad (2.15)$$

## 2.3 Условия пропускания и задерживания реактивного фильтра

Основное назначение электрического фильтра – пропускать сигналы некоторого диапазона частот и задерживать сигналы других частот. В диапазоне частот пропускаемого сигнала, т. е. в полосе прозрачности, коэффициент ослабления должен быть как можно меньшим, а в идеале равным нулю. В полосе непрозрачности коэффициент ослабления должен быть достаточно большим. Получить идеальный фильтр практически не представляется возможным, но иметь в полосе пропускания теоретически равный нулю коэффициент ослабления возможно, если фильтр выполнить из реактивных элементов, т. е. катушек и конденсаторов с малыми потерями. С этой целью на практике используют катушки и конденсаторы с достаточно большими добротностями.

Рассмотрим вопрос по определению полосы пропускания для Т- и П-образных схем фильтров, составленных из реактивных элементов. Как отмечалось выше, эти фильтры представляют собой согласованное каскадное соединение Г-образных звеньев, каждое из которых состоит из минимального числа элементов, равного двум.

Пусть схема Г-образного звена фильтра состоит из реактивных сопротивлений

$$\underline{Z}_1 = \pm jx_1 \text{ и } \underline{Z}_2 = \pm jx_2.$$

Знак «+» соответствует индуктивным, а знак «-» – емкостным элементам.

Под *полосой пропускания* реактивного фильтра будем рассматривать диапазон частот, внутри которого собственное ослабление фильтра равно нулю ( $A = 0$ ).

Воспользуемся соотношением (2.15) и запишем его в расширенном виде:

$$\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \operatorname{sh} \left( \frac{A}{2} + j \frac{B}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + j \operatorname{ch} \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим два варианта. В первом будем полагать, что сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  имеют одинаковый характер, индуктивный или емкостный. В этом случае правая часть этого соотношения представляет вещественное число, из чего следует, что

$$\operatorname{ch} \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = 0, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{sh} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (2.18)$$



Гиперболический косинус действительного аргумента отличен от нуля,  $\operatorname{ch} \frac{A}{2} \geq 1$ . Следовательно, для выполнения условия, определяемого уравнением (2.17), необходимо, чтобы  $\sin \frac{B}{2} = 0$ . Это условие выполняется, когда  $\frac{B}{2} = 0$  или  $\frac{B}{2} = \pm\pi$ . В этом случае  $\cos \frac{B}{2} = \pm 1$  и

$$\operatorname{sh} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} \neq 0, \text{ т. е. } A > 0.$$

Из полученного соотношения следует, что при одинаковом характере сопротивлений  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  ослабление фильтра не может принимать нулевые значения. *Такой фильтр не имеет полосы пропускания.*

Рассмотрим вариант, когда сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  имеют разный характер:

$$\underline{Z}_1 = \pm jx_1, \text{ а } \underline{Z}_2 = \mp jx_2.$$

В этом случае соотношение (2.16) следует записать так:

$$\operatorname{sh} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + j \operatorname{ch} \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (2.19)$$

Правая часть этого уравнения представляет мнимое число, и мы можем записать, что

$$\operatorname{sh} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 0; \quad (2.20)$$

$$\operatorname{ch} \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}.$$

(2.21)

Равенство (2.20) имеет место, если  $\operatorname{sh} \frac{A}{2} = 0$  или  $\cos \frac{B}{2} = 0$ . Условие  $\operatorname{sh} \frac{A}{2} = 0$  выполняется при  $A = 0$ . В этом случае  $\operatorname{ch} \frac{A}{2} = 1$ , а  $\sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}$ .

Получаем закон, по которому в полосе пропускания изменяется коэффициент фазы, полагая, что значения  $x_1$  и  $x_2$  зависят от частоты.

$$B(\omega) = 2\arcsin\left(\pm \sqrt{\frac{x_1(\omega)}{4x_2(\omega)}}\right). \quad (2.22)$$

Если выполняется условие, когда  $\cos \frac{B}{2} = 0$ , то  $B = \pm \pi$ , а  $\sin \frac{B}{2} = \pm 1$ .

Выбор положительного или отрицательного знака коэффициента фазы  $B$  зависит от конкретной схемы фильтра.

В полосе задерживания амплитудно-частотная характеристика фильтра, т. е. зависимость коэффициента ослабления  $A$  от частоты, будет меняться по закону

$$A(\omega) = 2\text{Arch} \sqrt{\frac{x_1(\omega)}{4x_2(\omega)}}. \quad (2.23)$$

Приведенный выше анализ был осуществлен для  $\Gamma$ -образного звена реактивного фильтра. При рассмотрении  $T$ - или  $\Pi$ -образного звена фильтра, состоящего из двух согласованно соединенных  $\Gamma$ -образных звеньев, следует иметь в виду, что собственная постоянная передачи такого фильтра удваивается, т. е. будет равна  $\underline{\Gamma} = A + jB$ .

Для любого симметричного реактивного фильтра в полосе пропускания, т. е. при  $A = 0$ , первичный параметр  $\underline{A}_{11}$  и характеристический параметр передачи четырехполюсника  $\underline{\Gamma}$  зависят от частоты и связаны соотношением:

$$\underline{A}_{11}(\omega) = \text{ch} \underline{\Gamma} = \text{ch}(A + jB) = \text{ch} jB = \cos B. \quad (2.24)$$

Так как значение  $\cos B$  изменяется в диапазоне от  $-1$  до  $+1$ , то

$$-1 \leq \underline{A}_{11}(\omega) \leq +1.$$

В случае  $T$ - или  $\Pi$ -образного фильтра это условие принимает вид:

$$-1 \leq 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leq 1$$

или

$$-2 \leq \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leq 0.$$

Поделив на 2 все компоненты соотношения, получим

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leq 0. \quad (2.25)$$

Полученное неравенство носит название *условия пропускания реактивного фильтра*. Предельные частоты, лежащие на границе полосы пропускания (частоты среза), удовлетворяют условиям:

$$\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2; \quad \underline{Z}_1 = 0. \quad (2.26)$$

Частоты среза находятся из уравнений (2.26) аналитически, если заданы функциональные выражения  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  в зависимости от частоты, или графически, если заданы частотные характеристики  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ .

## 2.4 Реактивные фильтры типа $k$

Фильтрами типа  $k$  называют такие фильтры, у которых сопротивления продольных и поперечных ветвей в Т- и П-образных схемах представляют собой взаимно обратные двухполюсники, т. е.

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = k^2,$$

где  $k$  – вещественное число, не зависящее от частоты, которое называется *номинальным характеристическим сопротивлением*. При расчетах значение коэффициента  $k$  выбирают из условия согласования сопротивления нагрузки с характеристическим сопротивлением фильтра при определенной частоте.

### 2.4.1 Фильтры нижних частот

Рассмотрим простейшие симметричные реактивные Т- и П-образные звенья фильтров, которые представлены на рисунке 2.6, *а* и *б*. Продольные ветви имеют сопротивления  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1 = jx_1$ , а поперечные – сопротивления

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2} = -jx_2. \quad \text{Фильтры такого типа имеют значение } k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}.$$

Схемы фильтров образуются путем цепочечного соединения Г-образных схем полувеньев. Их соединение выполняется входами с одинаковыми характеристическими сопротивлениями  $\underline{Z}_Г$  или  $\underline{Z}_П$ . Будем полагать, что фильтры находятся в режиме согласованной нагрузки. Найдем полосу пропускания и характеристические параметры обеих схем.

Полоса пропускания находится из условия прозрачности фильтра, определяемого соотношением (2.25). Подставив в это соотношение значения сопротивлений  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$  и  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$ , получим

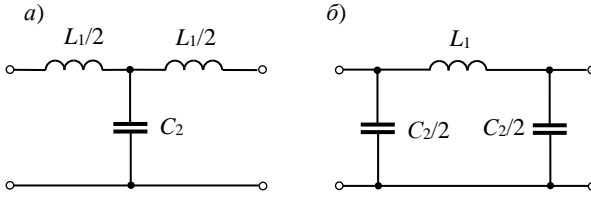


Рисунок 2.6

$$-1 \leq -\frac{\omega^2 L_1 C_2}{4} \leq 0,$$

откуда запишем условие прозрачности:

$$0 \leq \omega \leq \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}. \quad (2.27)$$

Из полученного соотношения следует, что полоса пропускания фильтра находится в диапазоне от 0 до частоты среза

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (2.28, a)$$

или

$$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{L_1 C_2}}. \quad (2.28, б)$$

б)

Обе схемы фильтра имеет прямой путь для протекания постоянного тока. Таким образом, фильтр, который пропускает сигналы в полосе частот от  $f = 0$  до  $f = f_c$ , называется *низкочастотным*. Выше этой частоты начинается полоса непропускания.

В полосе пропускания коэффициент ослабления  $A = 0$ , а коэффициент фазы  $B$  определяется уравнением (2.22):

$$B = 2 \arcsin \left( \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} \right).$$

Подставив в формулу  $x_1 = \omega L_1$  и  $x_2 = \frac{1}{\omega C_2}$ , получим

$$B = 2\arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{\omega L_1 \cdot \omega C_2}{4}}\right) = 2\arcsin\left(\pm\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 2\arcsin(\pm\Omega), \quad (2.29)$$

где  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$  – нормированная частота.

При  $\omega = 0$   $B = 0$ , а при  $\omega = \omega_c$  коэффициент фазы  $B$  может принимать значение либо  $\pi$ , либо  $-\pi$ .

В зоне непропускания ослабление отлично от нуля ( $A > 0$ ), следовательно,  $\operatorname{sh}\frac{A}{2} \neq 0$ . Для выполнения условия (2.20) необходимо, чтобы  $\cos\frac{B}{2} = 0$ .

В этом случае  $\frac{B}{2} = \pm\frac{\pi}{2}$ ,  $B = \pm\pi$ ,  $\sin\frac{B}{2} = \pm 1$  и на основании (2.21)

$$\operatorname{ch}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} = \frac{\omega}{\omega_c} = \Omega. \quad (2.30)$$

Закон, по которому изменяется в полосе задерживания коэффициент ослабления, записывается следующим образом

$$A = 2\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} = 2\operatorname{Arch}\Omega. \quad (2.31)$$

Для симметричных четырехполюсников выполняется условие:

$$A = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}.$$

В фильтре, который состоит только из реактивных элементов, нет потерь ( $P_1 = P_2$ ). Поэтому в полосе прозрачности равны модули напряжений и токов на входных и выходных зажимах:

$$U_1 = U_2 \text{ и } I_1 = I_2.$$

Для определения знака коэффициента фазы в полосе прозрачности проведем анализ Т-образной схемы фильтра для одной из частот в режиме согласованной нагрузки (рисунок 2.7). В этом режиме  $r_n = Z_T$ , следовательно, напряжение  $U_2$  на нагрузке совпадает по фазе с током  $I_2$ .

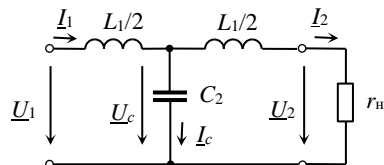


Рисунок 2.7

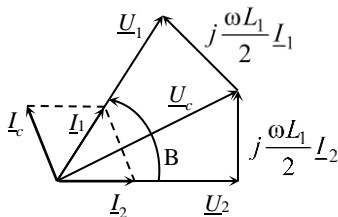


Рисунок 2.8

На рисунке (2.8) представлена качественная векторная диаграмма напряжений и токов для рассматриваемой схемы. При построении диаграммы было учтено, что в полосе пропускания равны комплексные напряжения и комплексные токи на входе и выходе ( $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$ ,  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$ ), угол сдвига фаз между напряжением и током на входе равен нулю, т. е. векторы  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$  совпадают по фазе.

Из векторной диаграммы видно, что напряжение  $\underline{U}_1$  и ток  $\underline{I}_1$  на входе схемы опережают по фазе на угол  $B$  напряжение  $\underline{U}_2$  и ток  $\underline{I}_2$  на выходе соответственно. Из этого следует, что коэффициент фазы  $B > 0$  и в зоне прозрачности изменяется от 0 до  $\pi$ .

Графики изменения коэффициентов  $A$  и  $B$  в функции частоты, т. е. амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики для звеньев Т- и П-образного фильтра нижних частот одинаковы и приведены на рисунке 2.9.

Найдем выражения для характеристических сопротивлений схем на рисунке 2.6,  $a$  и  $b$ , используя для этой цели формулы (2.12) и (2.13):

$$\underline{Z}_T = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2} \right)};$$

$$\underline{Z}_\Pi = \frac{\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2}}}.$$

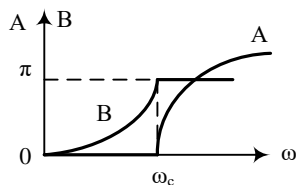


Рисунок 2.9

Выразим характеристические сопротивления фильтра через параметры элементов схемы.

$$k = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \sqrt{j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}.$$

$$\sqrt{\left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2} \right)} = \sqrt{\left( 1 + \frac{j\omega L_1 \cdot j\omega C_2}{4} \right)} = \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2 L_1 C_2}{4} \right)} = \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)} = \sqrt{(1 - \Omega^2)}.$$

Таким образом, характеристические сопротивления можем записать так:

$$\underline{Z}_T = k \sqrt{(1 - \Omega^2)}; \quad (2.32)$$

$$\underline{Z}_{\Pi} = \frac{k}{\sqrt{(1-\Omega^2)}}. \quad (2.33)$$

Частотные характеристики характеристических сопротивлений Т- и П-образных схем фильтров нижних частот приведены на рисунке 2.10.

В диапазоне изменения частот от 0 до  $\omega_c$ , сопротивления  $\underline{Z}_T$  и  $\underline{Z}_{\Pi}$  имеют активный характер, а при  $\omega > \omega_c$  они представляют реактивные сопротивления, при этом  $\underline{Z}_T$  является индуктивным,  $\underline{Z}_{\Pi}$  – емкостным.

Произведение характеристических сопротивлений симметричных Т- и П-образных звеньев фильтров равно  $k^2$ :

$$\underline{Z}_T \underline{Z}_{\Pi} = k^2.$$

Для определения параметров элементов  $L_1$  и  $C_2$  схемы фильтра нижних частот необходимо знать частоту среза  $\omega_c$  и сопротивления нагрузок, при которых фильтр должен работать. Однако, при постоянном сопротивлении нагрузки ( $\underline{Z}_H = r_H$ ) согласованный режим возможен только на одной фиксированной частоте. Поэтому в ряде случаев  $r_H$  выбирают близким по значению к  $k$ .

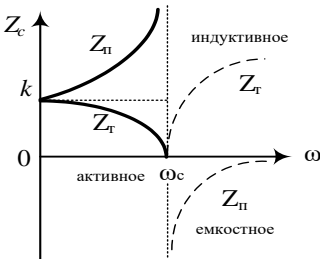


Рисунок 2.10

Исходя из соотношений

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \quad \text{и} \quad \omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}},$$

получим:

$$L_1 = \frac{2k}{\omega_c} = \frac{k}{\pi f_c}; \quad C_2 = \frac{2}{k\omega_c} = \frac{1}{k\pi f_c}.$$

#### 2.4.2 Фильтры верхних частот

Как отмечалось выше, фильтр верхних частот предназначен для того, чтобы беспрепятственно пропускать все гармоники с частотами выше заданной ( $\omega > \omega_c$ ) и препятствовать прохождению постоянного тока и токов с частотами  $\omega < \omega_c$ .

С этой целью в продольные ветви цепочечных схем Т-, П- и Г-образных звеньев фильтра включают емкости, а в поперечные ветви – индуктивности.

Схемы Т- и П-образных звеньев фильтра приведены на рисунке 2.11.

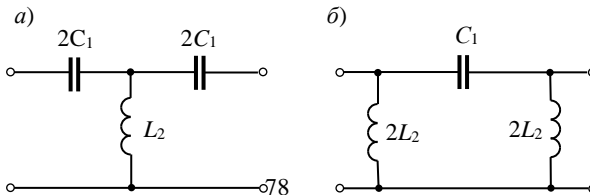


Рисунок 2.11

Сопротивления продольных и поперечных ветвей схем фильтра:

$$\underline{Z}_1 = 1 / j\omega C_1 = -jx_1; \quad \underline{Z}_2 = j\omega L_2 = jx_2. \text{ Номинальное характеристическое}$$

сопротивление  $k = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$ .

Определим диапазон частот полосы прозрачности фильтра в соответствии с формулой (2.26):

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leq 0,$$

где 
$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = \frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j4\omega L_2} = -\frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1}.$$

Получим неравенство

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1} \leq 0 \quad \text{или} \quad 1 \geq \frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1} \geq 0.$$

Частоту среза находим из равенства

$$1 = \frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1},$$

откуда 
$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}} \quad (2.34, a)$$

или 
$$f_c = \frac{1}{4\pi\sqrt{L_2 C_1}}. \quad (2.34, б)$$

В случае, когда  $\frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1} = 0$ , частота  $\omega$  стремится к бесконечности.

Таким образом, высокочастотные фильтры типа  $k$  пропускают все частоты, превышающие частоту среза ( $\omega > \omega_c$ ).



Запишем выражение  $\frac{Z_1}{4Z_2}$  в функции частоты.

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1} = -\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 = -\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 = -\frac{1}{\Omega^2}.$$

Исследуем условия прохождения сигнала в полосе пропускания, в соответствии с формулой (2.15)

$$\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{-jx_1}{4jx_2}} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} = \pm j \frac{1}{\Omega}.$$

В расширенном виде

$$\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \operatorname{sh} \left( \frac{A}{2} + j \frac{B}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + j \operatorname{ch} \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (2.35)$$

Из приведенной формулы можно записать следующие соотношения:

$$\operatorname{sh} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 0. \quad (2.36)$$

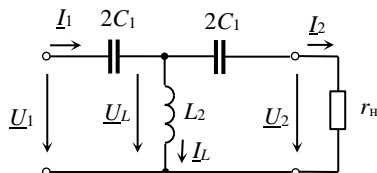
$$\operatorname{ch} \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (2.37)$$

В полосе пропускания  $A = 0$ ,  $\operatorname{sh} \frac{A}{2} = 0$ ,  $\operatorname{ch} \frac{A}{2} = 1$ . Следовательно, получим закон изменения коэффициента фазы:

$$B = 2 \arcsin \left( \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} \right) = 2 \arcsin \left( \pm \frac{1}{\Omega} \right).$$

При  $\Omega = 1$   $B = \pm \pi$ . Чтобы определиться со знаком  $B$ , построим качественную векторную диаграмму напряжений и токов Т-образной схемы высокочастотного фильтра в режиме согласованной нагрузки (рисунок 2.12).

Принцип построения векторной диаграммы, представленной на рисунке 2.13, такой же, как и в рассмотренном выше случае. Из диаграммы следует, что входное напря-



жение  $\underline{U}_1$  отстает по фазе от выходного напряжения  $\underline{U}_2$ . Следовательно, коэффициент фазы В высокочастотного фильтра в полосе прозрачности изменяется в диапазоне от  $-\pi$  до 0.

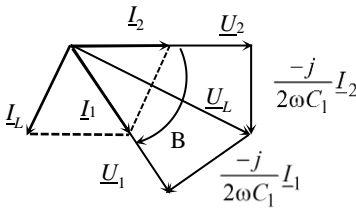


Рисунок 2.13

В полосе задерживания коэффициент  $A > 0$ ,  $\text{sh}A \neq 0$  и условие (2.36) примет вид:

$$\cos \frac{B}{2} = 0.$$

Аргумент  $B/2$  может принимать значения либо  $+\pi/2$ , либо  $-\pi/2$ , в этом случае  $\text{sh} \frac{B}{2} = \pm 1$ . С учетом отмеченно-

го выше, делаем вывод: в зоне непрозрачности коэффициент фазы В остается неизменным и равным  $-\pi$ .

Уравнение (2.37) для полосы задерживания упрощается до

$$\text{ch} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}},$$

в силу чего получаем закон изменения коэффициента ослабления:

$$A = 2 \text{Arch} \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} = 2 \text{Arch} \frac{\omega_c}{\omega} = 2 \text{Arch} \frac{1}{\Omega}. \quad (2.38)$$

Амплитудно-частотная  $A(\omega)$  и фазо-частотная  $\varphi(\omega)$  характеристики фильтра представлены на рисунке 2.14.

Установим законы изменения характеристических сопротивлений схем  $\underline{Z}_r$  и  $\underline{Z}_n$  высокочастотного фильтра в функции частоты  $\omega$  и построим соответствующие графики.

Для Т-образной схемы

$$\begin{aligned} \underline{Z}_r &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \cdot \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\omega L_2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{j4\omega C_1 \cdot j\omega L_2}} = \\ &= \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 L_2 C_1}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}. \end{aligned}$$

С учетом сделанных ранее обозначений получаем

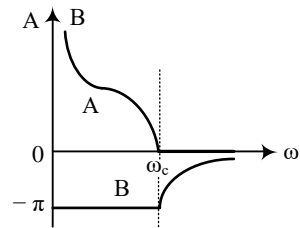


Рисунок 2.14

$$\underline{Z}_T = k \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}. \quad (2.39)$$

Для П-образной схемы

$$\underline{Z}_\Pi = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}}. \quad (2.40)$$

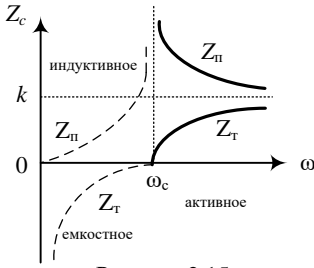


Рисунок 2.15

Графики зависимостей  $\underline{Z}_T(\omega)$  и  $\underline{Z}_\Pi(\omega)$  приведены на рисунке 2.15.

Найдем расчетные формулы для определения параметров схем ФВЧ при согласовании фильтра, приравнявая сопротивление нагрузки номинальному характеристическому сопротивлению. Из

формул  $k = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$  и  $\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}}$  находим

$$C_1 = \frac{1}{2k\omega_c} = \frac{1}{4k\pi f_c}; \quad L_2 = \frac{k}{2\omega_c} = \frac{k}{4\pi f_c}.$$

### 2.4.3 Полосовые фильтры

Для получения полосового фильтра необходимо составить электрическую схему, которая бы сочетала в себе свойства низкочастотного и высокочастотного фильтров и пропускала сигналы в диапазоне изменения частоты от  $\omega_{1c}$  до  $\omega_{2c}$ . Такие две схемы, Т- и П-образной формы соответственно, изображены на рисунке 2.16.

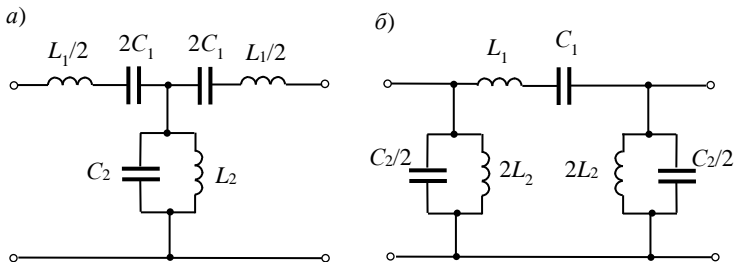


Рисунок 2.16

Продольные ветви схем представлены последовательным колебательным контуром с резонансной частотой  $\omega_{10} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ , а поперечные ветви – параллельным колебательным контуром с резонансной частотой  $\omega_{20} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ . Параметры элементов схем должны быть выбраны такими, чтобы эти резонансные частоты совпадали:  $\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_0$ .

На частотах, близких к резонансным, сопротивление  $Z_1$  продольных ветвей будет весьма малым, в то время, как сопротивление  $Z_2$  поперечных ветвей – большим. Резонанс в обеих ветвях наступает одновременно на частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (2.41)$$

Из полученного соотношения следует, что

$$L_1 C_1 = L_2 C_2. \quad (2.42)$$

Для рассматриваемых схем фильтра продольные и поперечные ветви, с сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно, представляют обратные двухполюсники, т. е. имеющие различный характер на любой частоте.

Запишем выражения для комплексных сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$ .

$$Z_1 = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1}; \quad Z_2 = \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = \frac{L_2}{j\left(\omega L_2 C_2 - \frac{1}{\omega}\right)}.$$

Произведем в записанных выше выражениях следующие замены, вытекающие из формулы (2.41):

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1} \text{ и } L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C_2}.$$

Получим 
$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 - j \frac{\omega_0^2}{\omega} L_1 = j\omega_0 L_1 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = jx_1; \quad (2.43)$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega_0^2 C_2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega} \right)} = \frac{1}{j\omega_0 C_2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = -jx_2. \quad (2.44)$$

При этом 
$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = x_1 x_2 = k^2 = \frac{L_1}{C_2}.$$

С учетом равенства (2.42) получим следующее выражение:

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}. \quad (2.45)$$

В соответствии с условием пропускания реактивного фильтр (2.26) запишем

$$-1 \leq -\frac{x_1}{4x_2} \leq 0 \quad \text{или} \quad 1 \geq \frac{x_1}{4x_2} \geq 0.$$

Предельные частоты, определяющие границу полосы пропускания фильтра, т. е. частоты среза, найдем из условия  $x_1 = 4x_2$  или  $x_2 = x_1/4$ .

Подставив  $x_2$  в соотношение  $x_1 x_2 = k^2$ , получим квадратное уравнение относительно  $x_1$

$$x_1^2 = 4k^2,$$

решение которого дает два корня:  $x_1 = \mp 2k$ .

Каждому корню соответствует определенная частота среза:  $\omega_{1с}$  и  $\omega_{2с}$ . Первому значению корня  $x_1 = -2k$  соответствует частота  $\omega_{1с}$ , а второму значению  $x_1 = 2k$  — частота  $\omega_{2с}$ . Используя выражение для сопротивления  $\underline{Z}_1$  (2.43), получим соотношение,

$$\omega_0 L_1 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \mp 2k,$$

которое трансформируется в квадратное уравнение относительно частоты  $\omega$

$$\omega^2 \pm 2 \frac{k}{L_1} \omega - \omega_0^2 = 0.$$

Физический смысл имеют только положительные частоты, поэтому частоты среза находим в виде следующих соотношений:

$$\omega_1 = \omega_{1c} = -\frac{k}{L_1} + \sqrt{\frac{k^2}{L_1^2} + \omega_0^2};$$

$$\omega_2 = \omega_{2c} = \frac{k}{L_1} + \sqrt{\frac{k^2}{L_1^2} + \omega_0^2};$$

Заменяя  $\omega_0$  и  $k$  соотношениями (2.41) и (2.43), получим

$$\omega_{1c} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}. \quad (2.46)$$

$$\omega_{2c} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}. \quad (2.47)$$

Из полученных формул следует, что фильтр пропускает сигналы в диапазоне частот от  $\omega_{1c}$  до  $\omega_{2c}$ .

Из формул (2.46) и (2.47) получаем два новых и важных соотношения:

$$\omega_{1c} \omega_{2c} = \frac{1}{L_1 C_1} = \omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{1c} \omega_{2c}}. \quad (2.48)$$

$$\omega_{2c} - \omega_{1c} = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}. \quad (2.49)$$

Резонансная частота  $\omega_{1c} < \omega_0 < \omega_{2c}$  и равна среднему геометрическому из граничных частот.

Для определения частотных зависимостей коэффициента ослабления  $A$ , коэффициента фазы  $B$ , характеристических сопротивлений  $\underline{Z}_T$  и  $\underline{Z}_n$  в полосах пропускания и задерживания фильтра запишем соотношение  $\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}$ , в котором заменим сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  зависимостями (2.43) и (2.44), а также используем соотношение (2.41).

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\frac{\omega_0^2 L_1 C_2}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = -\frac{C_2}{4C_1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2; \quad (2.50, a)$$

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = \pm j \sqrt{\frac{C_2}{4C_1}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (2.50, б)$$

Введем обозначение  $\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = m^2$ , тогда согласно этому соотношению (2.50, б) примет вид:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = \pm j \frac{m}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (2.51)$$

Используя введенную ранее нормированную частоту  $\Omega = \omega/\omega_0$ , получим

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = \pm j \frac{m}{2} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right) = \pm jm \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega}.$$

Параметры А, В,  $\underline{Z}_r$  и  $\underline{Z}_n$  полосового фильтра можно определить по тем же формулам, что и параметры ФНЧ и ФВЧ.

Уравнение, определяющее изменение коэффициента А в полосе задерживания, записывается в виде

$$A = 2\text{Arch} \sqrt{\left| \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right|} = 2\text{Arch} \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} = 2\text{Arch} m \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega}. \quad (2.52)$$

Уравнение фазовой характеристики в полосе пропускания имеет следующий вид:

$$B = 2\arcsin \left( \pm \sqrt{\left| \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right|} \right) = \pm 2\arcsin \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} = \pm 2\arcsin \left( m \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega} \right). \quad (2.53)$$

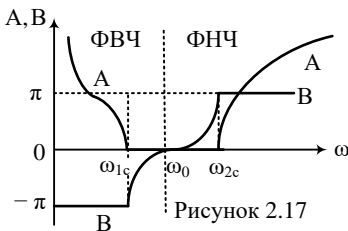


Рисунок 2.17

При изменении частоты от  $\omega_{1с}$  до  $\omega_0$  зависимость  $B(\omega)$  аналогична фазо-частотной характеристике фильтра верхних частот, при этом В изменяется от  $-\pi$  до 0. Когда частота изменяется от  $\omega_0$  до  $\omega_{2с}$  характеристика  $B(\omega)$  подобна характе-

ристике фильтра нижних частот, а коэффициент В меняется от 0 до π. Соответствующие графики А(ω) и В(ω) приведены на рисунке 2.17.

Характеристические сопротивления для Т- и П-образных схем фильтров верхних частот определим по формулам (2.9) и (2.10).

$$\begin{aligned} \underline{Z}_T &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2} \right)} = k \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 L_1 C_2}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \\ &= k \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega_{2c} - \omega_{1c})^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \end{aligned}$$

При частоте  $\omega = \omega_{1c}$  характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_T$  равно нулю:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_T &= k \sqrt{1 - \frac{\omega_{1c} \omega_{2c}}{(\omega_{2c} - \omega_{1c})^2} \left( \frac{\omega_{1c}}{\sqrt{\omega_{1c} \omega_{2c}}} - \frac{\sqrt{\omega_{1c} \omega_{2c}}}{\omega_{1c}} \right)^2} = \\ &= k \sqrt{1 - \frac{\omega_{1c} \omega_{2c}}{(\omega_{2c} - \omega_{1c})^2} \left( \sqrt{\frac{\omega_{1c}}{\omega_{2c}}} - \sqrt{\frac{\omega_{2c}}{\omega_{1c}}} \right)^2} = \\ &= k \sqrt{1 - \frac{\omega_{1c} \omega_{2c}}{(\omega_{2c} - \omega_{1c})^2} \left( \frac{\omega_{1c}}{\omega_{2c}} - 2 + \frac{\omega_{2c}}{\omega_{1c}} \right)} = k \sqrt{1 - \frac{\omega_{1c} \omega_{2c}}{(\omega_{2c} - \omega_{1c})^2} \cdot \frac{(\omega_{1c} - \omega_{2c})^2}{\omega_{1c} \omega_{2c}}} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать, что при частоте  $\omega = \omega_{2c}$  характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_T$  также равно нулю. На резонансной частоте  $\omega_0$  оно достигает максимального значения, равного  $k$ .

Характеристическое сопротивление для П-образной схемы определяется по формуле

$$\underline{Z}_\Pi = \frac{k}{\underline{Z}_T} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega_{2c} - \omega_{1c})^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Зависимости характеристических сопротивлений  $\underline{Z}_T$  и  $\underline{Z}_\Pi$  от частоты показаны на рисунке 2.18. В полосе пропускания оба сопротивления являются активными. В области низких частот ( $\omega < \omega_c$ ) сопротивление  $\underline{Z}_T$  имеет емкостной характер, а со-

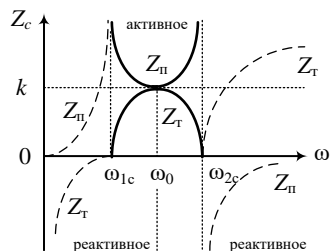


Рисунок 2.18



противление  $Z_{\Pi}$  – индуктивный. При частотах, превышающих  $\omega_c$ ,  $Z_{\Gamma}$  имеет индуктивный характер, а  $Z_{\Pi}$  – емкостный.

Найдем расчетные формулы для определения параметров  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  полосового фильтра. Полагаем сопротивление нагрузки  $r_{\text{н}}$ , равным номинальному характеристическому  $k$  при резонансной частоте  $\omega_0$ . Используя полученные ранее соотношения

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}; \quad \omega_{2c} - \omega_{1c} = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{1c} \omega_{2c}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

искомые параметры найдем по следующим формулам:

$$L_1 = \frac{2k}{\omega_{2c} - \omega_{1c}} = \frac{k}{\pi(f_{2c} - f_{1c})}; \quad (2.54)$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1} = \frac{\omega_{2c} - \omega_{1c}}{2k\omega_{1c}\omega_{2c}} = \frac{f_{2c} - f_{1c}}{4\pi k f_{1c} f_{2c}}; \quad (2.55)$$

$$L_2 = k^2 C_2 = k \frac{\omega_{2c} - \omega_{1c}}{2\omega_{1c}\omega_{2c}} = k \frac{f_{2c} - f_{1c}}{4\pi f_{1c} f_{2c}}; \quad (2.56)$$

$$C_2 = \frac{L_1}{k^2} = \frac{2}{k(\omega_{2c} - \omega_{1c})} = \frac{1}{k\pi(f_{2c} - f_{1c})}. \quad (2.57)$$

#### 2.4.4 Заграждающие (режекторные) фильтры

Заграждающий фильтр предназначен для подавления сигналов с определенным спектром частот, т. е. в диапазоне изменения частоты от  $\omega_{1c}$  до  $\omega_{2c}$  у него находится полоса непрозрачности, которая как бы разделяет полосу пропускания на две части: левую с частотами от 0 до  $\omega_{1c}$  и правую, в которой частота меняется от  $\omega_{2c}$  до  $\infty$ .

Схемы заграждающего фильтра представлены на рисунке 2.19, а и б.

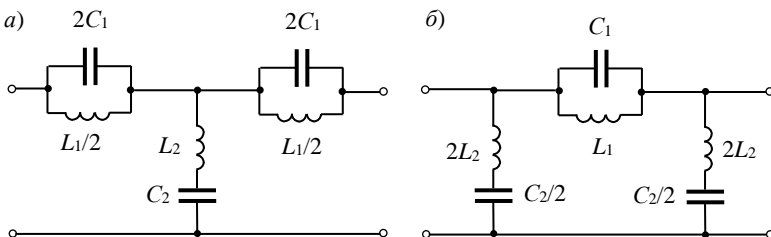


Рисунок 2.19

Эти схемы отличаются от соответствующих схем полосового фильтра тем, что в продольные ветви схем включены параллельные колебательные контуры, а в поперечные – последовательные контуры. В силу чего на резонансной частоте  $\omega_0$ , одинаковой для обоих контуров, продольные ветви представляют разрывы, а поперечные – короткозамкнутые участки.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}; \quad (2.58)$$

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Анализ схем заграждающего фильтра будем осуществлять аналогично тому, как это выполнялось для полосового фильтра.

$$\underline{Z}_1 = \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)} = \frac{L_1}{jC_1\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)}; \quad \underline{Z}_2 = j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2};$$

Выполним преобразования формул с учетом соотношения (2.57).

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{jC_1\left(\omega - \frac{1}{\omega L_1 C_1}\right)} = \frac{1}{jC_1\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)} = \frac{1}{j\omega_0 C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = -jx_1. \quad (2.59)$$

$$\underline{Z}_2 = jL_2\left(\omega - \frac{1}{\omega L_2 C_2}\right) = jL_2\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right) = j\omega_0 L_2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = jx_2; \quad (2.60)$$

При этом 
$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = x_1 x_2 = k^2 = \frac{L_2}{C_1}.$$

С учетом равенства (2.42) получим следующее выражение:

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}. \quad (2.61)$$

В соответствии с условием пропускания реактивного фильтр (2.26) запишем

$$-1 \leq -\frac{x_1}{4x_2} \leq 0 \quad \text{или} \quad 1 \geq \frac{x_1}{4x_2} \geq 0.$$

Найдем частоты среза из следующих условий.

При  $x_1 = 0$  или  $x_2 = \infty$  частота среза  $\omega = 0$ .

При  $\frac{x_1}{4x_2} = 1$  с учетом соотношения  $x_1x_2 = k^2$  получим квадратное уравнение  $x_1^2 = 4k^2$ , решение которого дает два корня:  $x_1 = \mp 2k$ .

Используя выражение для сопротивления  $\underline{Z}_1$  (2.57), получим соотношение,

$$\frac{1}{\omega_0 C_1} \frac{1}{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \mp 2k.$$

Выполнив необходимые преобразования, приведем его к квадратному уравнению относительно частоты  $\omega$

$$\omega^2 \pm \frac{1}{2kC_1} \omega - \omega_0^2 = 0.$$

Решение этого уравнения с учетом записанных выше соотношений дает два корня, каждый из которых соответствует одной из частот среза и принимает только положительные значения.

$$\omega_{1c} = \sqrt{\frac{1}{16L_2C_1} + \frac{1}{L_1C_1}} - \frac{1}{4\sqrt{L_2C_1}}; \quad (2.62)$$

$$\omega_{2c} = \sqrt{\frac{1}{16L_2C_1} + \frac{1}{L_1C_1}} + \frac{1}{4\sqrt{L_2C_1}}. \quad (2.63)$$

Из формул (2.59) и (2.60) получаем следующие соотношения:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{1c}\omega_{2c}}. \quad (2.64)$$

$$\omega_{2c} - \omega_{1c} = \frac{1}{2\sqrt{L_2C_1}}. \quad (2.65)$$

Рассмотрим зависимость от частоты соотношения

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\frac{x_1}{4x_2} = -\frac{1}{4\omega_0^2 L_2 C_1} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = -\frac{L_1}{4L_2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2},$$

тогда

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = \pm j \frac{m}{2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \pm jm \frac{\Omega}{2(\Omega^2 - 1)}.$$

В полосе прозрачности коэффициент фазы изменяется по закону

$$B = \pm 2 \arcsin \frac{m}{2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \pm 2 \arcsin \frac{m\Omega}{2(\Omega^2 - 1)}.$$

В полосе задерживания

$$A = 2 \operatorname{Arch} \frac{m}{2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = 2 \operatorname{Arch} \frac{m\Omega}{2(\Omega^2 - 1)}.$$

Характер изменения коэффициентов А и В заграждающего фильтра иллюстрируют кривые на рисунке 2.20.

$$\underline{Z}_r = k \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = k \sqrt{1 - \frac{m^2}{4} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = k \sqrt{1 - \left( \frac{m\Omega}{2(\Omega^2 - 1)} \right)^2};$$

$$\underline{Z}_{\Pi} = \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \left( \frac{m\Omega}{2(\Omega^2 - 1)} \right)^2}}.$$

Графики частотных зависимостей характеристических сопротивлений даны на рисунке 2.21.

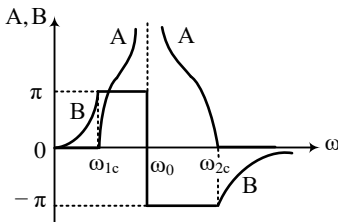


Рисунок 2.20

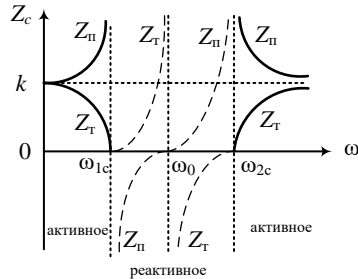


Рисунок 2.21

Расчетные формулы для определения параметров элементов схем ЗФ по заданным частотам среза  $\omega_{1c}$ ,  $\omega_{2c}$  и значения  $k$  с учетом выражений (2.58), (2.61), (2.62) и (2.63).

$$L_2 = \frac{k}{2(\omega_{2c} - \omega_{1c})} = \frac{k}{4\pi(f_{2c} - f_{1c})}; \quad (2.66)$$

$$C_1 = \frac{1}{2k(\omega_{2c} - \omega_{1c})} = \frac{1}{4\pi k(f_{2c} - f_{1c})}; \quad (2.67)$$

$$L_1 = \frac{2k(\omega_{2c} - \omega_{1c})}{\omega_{2c}\omega_{1c}} = \frac{k(f_{2c} - f_{1c})}{\pi f_{2c}f_{1c}}; \quad (2.68)$$

$$C_2 = \frac{2(\omega_{2c} - \omega_{1c})}{k\omega_{2c}\omega_{1c}} = \frac{f_{2c} - f_{1c}}{\pi k f_{2c}f_{1c}}. \quad (2.69)$$

## 2.5 Реактивные фильтры типа $m$

Все рассмотренные ранее фильтры типа  $k$  имеют существенные недостатки. Из графиков зависимостей  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  следует, что в широком диапазоне частот реальные фильтры не имеют требуемые характеристики.

В полосе задерживания коэффициент ослабления  $A$  растет довольно медленно, особенно в диапазоне частот, примыкающих к границам полос прозрачности. Для увеличения крутизны характеристики можно применять многосвязные фильтры, но это будет приводить к существенному усложнению схемы.

Фазо-частотная характеристика в полосе пропускания нелинейна, что неизбежно может приводить к искажению сигналов, передаваемых через фильтр.

Из приведенных выше рисунков видно, что характеристические сопротивления фильтров типа  $k$  в полосе пропускания в значительной степени зависят от частоты, что затрудняет согласование фильтра с нагрузкой.

Для получения хорошего согласования фильтра с нагрузкой необходимо подобрать параметры элементов фильтра таким образом, чтобы характеристическое сопротивление фильтра оставалось по возможности неизменным во всем диапазоне частот полосы пропускания.

Рассмотрим пути решения этой задачи на примере  $\Gamma$ -образной схемы фильтра, так как  $T$ - и  $\Pi$ -образные схемы по видам частотных характеристик не отличаются от  $\Gamma$ -образной.

Изменим сопротивление  $Z_1$  продольной и  $Z_2$  поперечной ветвей  $\Gamma$ -

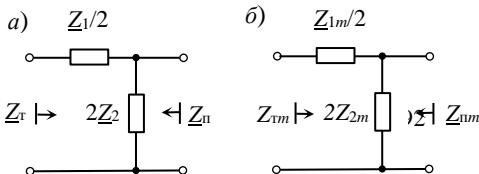


Рисунок 2.22

образного звена типа  $k$ , называемого *прототипом*, таким образом, чтобы получившаяся схема нового Г-образного звена имела неизменное по значению характеристическое сопротивление в полосе прозрачности. При этом второе характеристическое сопротивление этого звена должно оставаться равным соответствующему характеристическому сопротивлению звена-прототипа, т. е. звену типа  $k$ . Фильтры с такими свойствами называются фильтрами типа  $m$ .

На рисунке 2.22, *a* приведена схема Г-образного звена фильтра типа  $k$ , а на рисунке 2.22 *б* – соответствующая ему схема с измененными сопротивлениями продольной и поперечной ветвей, т. е. звена фильтра типа  $m$ , параметры которого нужно определить.

Принимая во внимание, что Г-образный прототип имеет два характеристических сопротивления, рассмотрим два возможных варианта.

В первом варианте будем полагать, что остаются неизменными характеристические сопротивления со стороны продольных ветвей. Изменим сопротивление продольной ветви, полагая, что

$$\underline{Z}_{1m} = m\underline{Z}_1, \quad (2.70)$$

где  $0 < m < 1$ .

Значение сопротивления поперечной ветви  $\underline{Z}_{2m}$  определим из условия, при котором характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_{cm}$  остается равным характеристическому сопротивлению Г-образного фильтра типа  $k$ , т. е.  $\underline{Z}_r = \underline{Z}_{cm}$ .

Запишем последнее соотношение, используя соответствующие выражения для схем на рисунке 2.22.

$$\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right)} = \sqrt{\underline{Z}_{1m} \underline{Z}_{2m} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} \right)} \quad \text{или}$$

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right) = \underline{Z}_{1m} \underline{Z}_{2m} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} \right).$$

Решая полученное уравнение с учетом соотношения (2.69), получим значение  $\underline{Z}_{2m}$ , выраженное через параметры схемы-прототипа:

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \underline{Z}_1. \quad (2.71)$$

Из полученного выражения следует, что сопротивление поперечной ветви  $\underline{Z}_{2m}$  состоит из двух последовательно соединенных сопро-

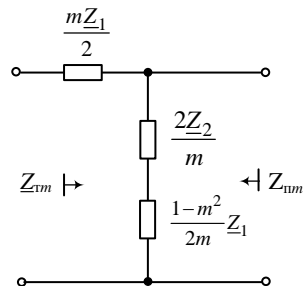


Рисунок 2.23

тивлений  $\frac{Z_2}{m}$  и  $\frac{1-m^2}{4m}Z_1$ . Таким образом, получаем схему Г-образного *последовательно-производного* фильтра типа  $m$  (рисунок 2.23).

При рассмотрении второго варианта примем в схеме Г-образного фильтра на рисунке 2.22 сопротивление поперечной ветви  $Z_{2m} = \frac{Z_2}{m}$ . Значение сопротивления продольной ветви  $Z_{1m}$  определим из условия, что характеристическое сопротивление  $Z_{nm}$  остается равным характеристическому сопротивлению  $Z_n$  Г-образного фильтра типа  $k$ , т. е.

$$\sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}} \quad \text{или} \quad \frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \frac{Z_{1m} Z_{2m}}{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}$$

Выразим из последнего соотношения сопротивление  $Z_{1m}$  через параметры схемы-прототипа.

$$\frac{Z_1}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \frac{Z_{1m}}{m \left( 1 + \frac{Z_{1m} m}{4Z_2} \right)}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{4Z_2}} = \frac{1}{\frac{m}{Z_{1m}} + \frac{m^2}{4Z_2}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{4Z_2} = \frac{m}{Z_{1m}} + \frac{m^2}{4Z_2}$$

Разделив обе части этого равенства на  $m$  и выполнив небольшие преобразования, получим выражение для комплексной проводимости продольной ветви схемы фильтра:

$$\frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{Z_2} \quad (1.71)$$

Как следует из полученного выражения, продольную ветвь с комплексным сопротивлением  $Z_{1m}$  можно рассматривать в виде параллельного соединения двух ветвей с сопротивлениями  $mZ_1$  и  $\frac{4m}{1-m^2}Z_2$  соответственно. Таким образом, получаем схему Г-образного звена *параллельно-производного* фильтра, представленного на рисунке 2.24.

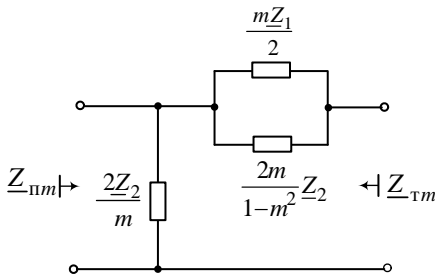


Рисунок 2.24

### 2.5.1 Характеристики производных фильтров

Определим диапазон полос пропускания производных фильтров в соответствии с формулой (2.26) и с учетом параметров элементов схемы.

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} \leq 0. \quad (2.72)$$

Найдем соотношение  $\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}$  для последовательно-производного фильтра.

$$\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} = \frac{m\underline{Z}_1}{4\left(\frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m}\underline{Z}_1\right)} = \frac{m^2}{\frac{4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} + 1 - m^2}. \quad (2.73)$$

Для параллельно-производного фильтра

$$\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} = \frac{m}{4\left(\frac{1}{m\underline{Z}_1} + \frac{1-m^2}{4m}\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{Z}_2} = \frac{m^2}{\frac{4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} + 1 - m^2}.$$

Как следует из полученных соотношений, для обоих типов фильтров, последовательно-производного и параллельно-производного, выражения для определения диапазона частот полос пропускания (2.72) идентичны.

Частоты среза производных фильтров удовлетворяют условиям:

$$\underline{Z}_{1m} = 0 \text{ или } m\underline{Z}_1 = 0; \quad \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} = -1 \text{ или } \frac{m^2}{\frac{4\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} + 1 - m^2} = -1,$$

что приводит к соотношениям:  $\underline{Z}_1 = 0$  и  $\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2$ .

*Полосы пропускания фильтров типа k и полученных на их основе фильтров типа m совпадают.*

Найдем выражения для характеристических сопротивлений производных фильтров.

Для последовательно-производного фильтра:  $\underline{Z}_{1m} = \underline{Z}_1$ ;

$$\underline{Z}_{1m} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}}{1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}}}; \quad \underline{Z}_{1m} = m\underline{Z}_1; \quad \underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m}\underline{Z}_1;$$



$$\begin{aligned}
\sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}} &= \sqrt{m\underline{Z}_1 \left( \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \underline{Z}_1 \right)} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \frac{1-m^2}{4} \underline{Z}_1^2} = \\
&= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \cdot \sqrt{1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}; \\
\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}} &= \sqrt{1 + \frac{m\underline{Z}_1}{4 \left( \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \underline{Z}_1 \right)}} = \sqrt{1 + \frac{m^2 \underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1}} = \\
&= \sqrt{\frac{4\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}{1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}; \\
\underline{Z}_{vm} &= \frac{\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}} \cdot \left[ 1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right] = \underline{Z}_n \left[ 1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right]. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Для параллельно-производного фильтра:  $\underline{Z}_{vm} = \underline{Z}_n$ ;

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{vm} &= \sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}}; \\
\underline{Z}_{1m} &= \left( \frac{1}{m\underline{Z}_1} + \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_2} \right)^{-1} = \frac{4m\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1}; \quad \underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m}; \\
\sqrt{\underline{Z}_{1m}\underline{Z}_{2m}} &= \sqrt{\frac{4m\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{m}} = \frac{\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\sqrt{1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}; \\
\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}} &= \sqrt{1 + \frac{4m\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1} \cdot \frac{m}{4\underline{Z}_2}} = \sqrt{1 + \frac{m^2 \underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1}} =
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{4\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 - m^2 \underline{Z}_1 - m^2 \underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2 + (1-m^2)\underline{Z}_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}{1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}};$$

$$\underline{Z}_{1m} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}{\left[1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right]^2}} = \frac{\underline{Z}_T}{1 + (1-m^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}.$$

### 2.5.2 Фильтры нижних частот типа $m$

На рисунке 2.25 приведены схема Г-образного звена фильтра нижних частот типа  $k$  (а) и соответствующие ей производные схемы типа  $m$ : последовательно-производная (б) и параллельно-производная (в).

Проведем анализ схемы на рисунке 2.25, б. Построим частотные характеристики продольной ветви с сопротивлением  $\underline{Z}_{1m}$  и поперечной с сопротивлением  $\underline{Z}_{2m}$  (рисунок 2.26).

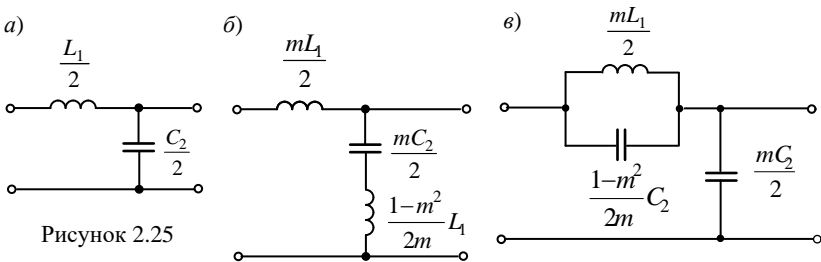


Рисунок 2.25

$$\underline{Z}_{1m} = j\omega L_1 = jx_{1m}; \quad \underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \underline{Z}_1 = -j \frac{1}{m\omega C_2} + j \frac{1-m^2}{4m} \omega L_1 =$$

$$= -j \left( \frac{1}{m\omega C_2} - \frac{1-m^2}{4m} \omega L_1 \right) = -jx_{2m}.$$

Сопротивление продольной ветви  $x_{1m}$  для всего диапазона частот имеет неизменный индуктивный характер. Поперечная ветвь, пред-

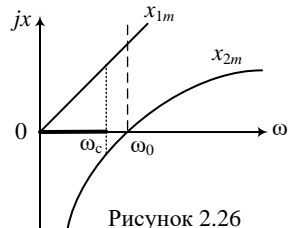


Рисунок 2.26

ставляющая собой последовательный колебательный контур, имеет резонансную частоту  $\omega_0$ , при которой сопротивление ветви принимает нулевое значение.

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \underline{Z}_1 = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{1}{m\omega C_2} + \frac{1-m^2}{4m} \omega L_1 = 0,$$

откуда 
$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}. \quad (2.75)$$

Граничные частоты полосы пропускания определяем из условий в соответствии с формулой (2.72):

при  $\underline{Z}_{1m} = jm\omega L_1 = 0 \quad \omega = 0;$

при  $\underline{Z}_{1m} = -4\underline{Z}_{2m} \quad j\omega m L_1 = j \frac{4}{m\omega C_2} - j \frac{1-m^2}{m} \omega L_1; \quad \omega L_1 = \frac{4}{\omega C_2},$

откуда 
$$\omega = \omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}.$$

Как отмечалось выше, низкочастотные фильтры типа  $k$  и типа  $m$  имеют одинаковые значения частоты среза  $\omega_c$ .

Как следует из рисунка 2.26, при частотах в диапазоне  $0 < \omega < \omega_0$  сопротивления  $x_{1m}$  и  $x_{2m}$  имеют разный характер:  $x_{1m}$  — индуктивный, а  $x_{2m}$  — емкостный. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} &= -\frac{x_{1m}}{4x_{2m}} = -\frac{m\omega L_1}{4\left(\frac{1}{m\omega C_2} - \frac{1-m^2}{4m} \omega L_1\right)} = \\ &= -\frac{m^2 \omega L_1}{\frac{4}{\omega C_2} - (1-m^2) \omega L_1} = -\frac{m^2}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - (1-m^2)} = -\frac{m^2 \Omega^2}{1 - (1-m^2) \Omega^2}. \end{aligned}$$

При частотах, превышающих  $\omega_0$ , обе ветви имеют одинаковый, индуктивный, характер. При этом

$$\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} = \frac{x_{1m}}{4x_{2m}} = \frac{m^2}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - (1-m^2)} = \frac{m^2 \Omega^2}{1 - (1-m^2) \Omega^2}.$$

Для определения зависимости коэффициента ослабления  $A$  от частоты в полосе задерживания ( $\omega_c < \omega < \omega_0$ ) воспользуемся формулой

$$\operatorname{ch} \frac{A}{2} = \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|} = \frac{m}{\sqrt{\left| \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 - (1-m^2) \right|}} = \frac{m\Omega}{\sqrt{|1-(1-m^2)\Omega^2|}};$$

$$A = 2\operatorname{Arch} \frac{m}{\sqrt{\left| \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 - (1-m^2) \right|}} = 2\operatorname{Arch} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1-(1-m^2)\Omega^2|}}.$$

При резонансе в поперечной ветви, т. е. при частоте  $\omega = \omega_0$ ,  $x_{2m} = 0$ . В этот момент коэффициент ослабления  $A$  имеет бесконечно большое значение. Резонансная частота, при которой коэффициент  $A$  принимает бесконечно большое значение, обозначается  $\omega_\infty$  ( $f_\infty$ ) и называется *частотой бесконечно большого ослабления* или *частотой всплеска*.

$$\omega_\infty = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Резкое увеличение коэффициента  $A$  при резонансной частоте называют *всплеском коэффициента ослабления*.

Зависимость коэффициента фазы  $B$  фильтра от частоты  $\omega$  определяется соотношением

$$B = 2\operatorname{arcsin} \frac{m}{\sqrt{\left| \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 - (1-m^2) \right|}} = 2\operatorname{arcsin} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1-(1-m^2)\Omega^2|}}.$$

На рисунке 2.27 изображены графики частотных характеристик ФНЧ типа  $m$ .

Графики зависимости коэффициента ослабления ФНЧ от частоты при разных значениях параметра  $m$  ( $m_1 > m_2 > m_3$ ) приведены на рисунке 2.28. Чем меньше значение параметра  $m$ , тем более резко растет коэффициент  $A$  вблизи частоты всплеска  $\omega_\infty$ . Однако, в области частот, превышающих  $\omega_\infty$ , коэффициент  $A$  уменьшается.

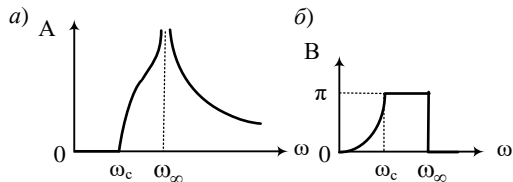


Рисунок 2.27

При переходе параметра  $m$  от меньших значений к большому значению  $\omega_\infty$  перемещается по оси  $\omega$  вправо. При значении  $m = m_1 = 1$  график  $A(\omega)$  на рисунке соответствует фильтру типа  $k$ , т. е. фильтр типа  $m$  превращается в фильтр типа  $k$ .

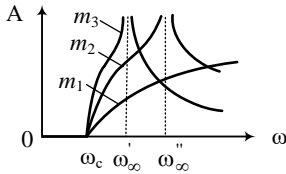


Рисунок 2.28

В диапазоне частот  $\omega > \omega_\infty$  сопротивления  $x_{1m}$  продольной и  $x_{2m}$  поперечной ветвей имеют одинаковые знаки, следовательно, схема представляет собой делитель напряжения и не обладает свойствами фильтра.

Поэтому для записи зависимости  $A(\omega)$  в этом случае следует пользоваться выражением:

$$A = 2 \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}} = 2 \operatorname{Arsh} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega^2|}}.$$

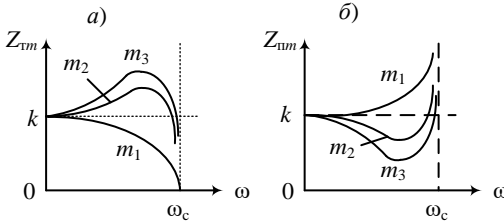


Рисунок 2.29

Характеристические сопротивления фильтров типа  $m$  зависят от значения параметра  $m$ . Кривые  $Z_{tm}(\omega)$  и  $Z_{nm}(\omega)$  низкочастотного фильтра при разных значениях  $m$  показаны на рисунке 2.29.

Фильтры типа  $m$  вследствие малых значений коэффициента  $A$  в полосе задерживания при частотах  $\omega > \omega_\infty$  чаще всего применяют не самостоятельно, а в комбинации с фильтрами типа  $k$ . Звенья типа  $m$  повышают значения коэффициента  $A$  вблизи граничных частот, а звенья  $k$  обеспечивают большое затухание на других частотах полосы пропускания.

Фильтры типа  $m$  вследствие малых значений

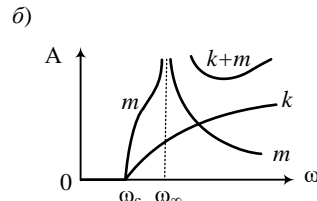
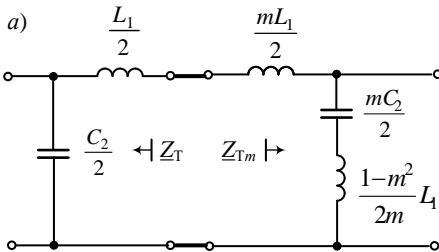


Рисунок 2.30

На рисунке 2.30, *a* приведена схема низкочастотного фильтра, выполненного путем согласованного каскадного соединения полузвеньев типов *k* и *m*, а на рисунке 2.30, *б* – частотные характеристики полузвеньев и самой схемы.

### 2.5.3 Фильтры верхних частот типа *m*

На рисунке 2.31 приведены схема Г-образного звена фильтра верхних частот типа *k* (*a*) и соответствующие ей производные схемы типа *m*: последовательно-производная (*б*) и параллельно-производная (*в*).

Исследуем схему последовательно-производного полузвена фильтра и построим частотные характеристики сопротивлений продольной и поперечной ветвей.

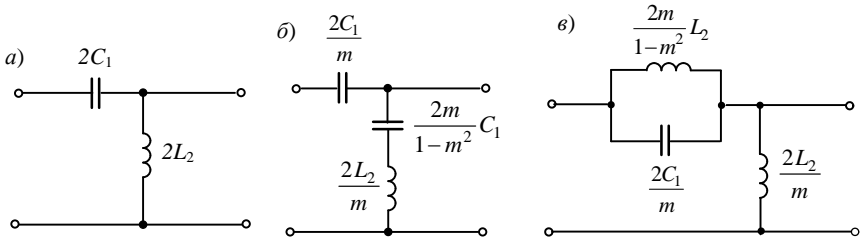


Рисунок 2.31

Продольная ветвь с сопротивлением  $Z_{1m} = mZ_1 = m \frac{1}{j\omega C_1} = -jx_{1m}$  во всем диапазоне изменения частоты  $\omega$  имеет емкостный характер. В поперечной ветви индуктивный и емкостный элементы образуют последовательный колебательный контур, резонансная частота  $\omega_0$  которого находится из условия равенства нулю сопротивления  $Z_{2m}$  этой ветви.

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} Z_1 = j \left( \frac{\omega L_2}{m} - \frac{1-m^2}{4m} \frac{1}{\omega C_1} \right) = jx_{2m}. \quad (2.76)$$

$$\frac{\omega L_2}{m} - \frac{1-m^2}{4m} \frac{1}{\omega C_1} = 0,$$

откуда 
$$\omega = \omega_0 = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2\sqrt{L_2C_1}}. \quad (2.77)$$

Сопротивление  $\underline{Z}_{2m}$  – емкостное в диапазоне частот  $0 < \omega < \omega_0$  и индуктивное при  $\omega > \omega_0$ . Частотные характеристики сопротивлений ветвей даны на рисунке 2.32.

Условие пропускания фильтра:

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} \leq 0.$$

Предельные частоты полосы пропускания удовлетворяют условиям:

$$\underline{Z}_{1m} = 0 \text{ при } \omega \rightarrow \infty.$$

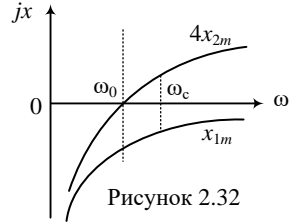


Рисунок 2.32

При  $\underline{Z}_{1m} = -4\underline{Z}_{2m}$  или  $x_{1m} = 4x_{2m}$  получаем 
$$\frac{m}{\omega C_1} = \frac{4\omega L_2}{m} - \frac{1-m^2}{m} \frac{1}{\omega C_1};$$

$$m^2 = 4\omega^2 L_2 C_1 - (1-m^2),$$

откуда находим частоту среза 
$$\omega = \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}}.$$

Используя полученное выражение, получим соотношение, связывающее частоту среза  $\omega_c$  с резонансной частотой (2.77).

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2\sqrt{L_2 C_1}} = \omega_c \sqrt{1-m^2} \quad \text{или} \quad \omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Построим АЧХ  $A(\omega)$  и ФЧХ  $B(\omega)$  фильтра, для чего выразим отношение  $\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}$  через параметры элементов схемы фильтра и частоту  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}} &= \frac{m}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j4 \left( \frac{\omega L_2}{m} - \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{\omega C_1} \right)} = -\frac{m^2}{4\omega^2 L_2 C_1 - (1-m^2)} = \\ &= -\frac{m^2}{\left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - (1-m^2)}; \quad \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1m}}{4\underline{Z}_{2m}}} = \pm j \frac{m}{\sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - (1-m^2)}}. \end{aligned}$$

В полосе непропускания коэффициент ослабления  $A$  рассчитывается по двум вариантам. В диапазоне частот  $\omega_0 < \omega < \omega_c$

$$A = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}} = 2 \operatorname{Arch} \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - (1-m^2)}},$$

а при изменении частоты 0 до  $\omega_0$

$$A = 2 \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}} = 2 \operatorname{Arsh} \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - (1-m^2)}}.$$

Когда  $x_{2m} = 0$ , имеет место всплеск коэффициента  $A$ , при этом частота всплеска

$$\omega_\infty = \omega_0 = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2\sqrt{L_2 C_1}} = \omega_c \sqrt{1-m^2}.$$

В полосе прозрачности  $\omega_c < \omega < \infty$   $A = 0$ , сопротивления  $Z_{1m}$  и  $Z_{2m}$  разные по характеру: первое – емкостное, второе – индуктивное. В таком случае коэффициент фазы изменяется следующим образом. В диапазоне  $0 < \omega < \omega_\infty$  постоянная  $B = 0$ . Когда частота изменяется от  $\omega_\infty$  до  $\omega_c$   $B$  сохраняет неизменное значение, равное  $-\pi$ . При частотах  $\omega > \omega_c$

$$B = -2 \operatorname{arc} \sin \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - (1-m^2)}}.$$

Графики амплитудно-частотной  $A(\omega)$  и фазо-частотной  $B(\omega)$  характеристик фильтра приведены на рисунке 2.33.

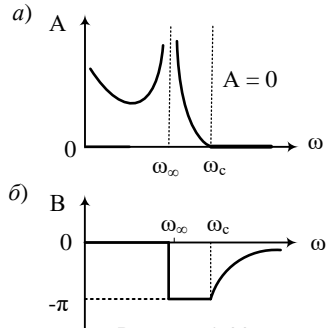


Рисунок 2.33

## 2.6 Мостовые фильтры

В различного рода устройствах автоматики, телемеханики и связи часто применяются симметричные мостовые фильтры, которые по своим характе-



ристикам отличаются от цепочечных. Принцип работы цепочечных фильтров базируется на том, что схемы фильтров не пропускают колебания путем обрыва или шунтирования цепи, а мостовые схемы не пропускают колебаний при уравнивании моста.

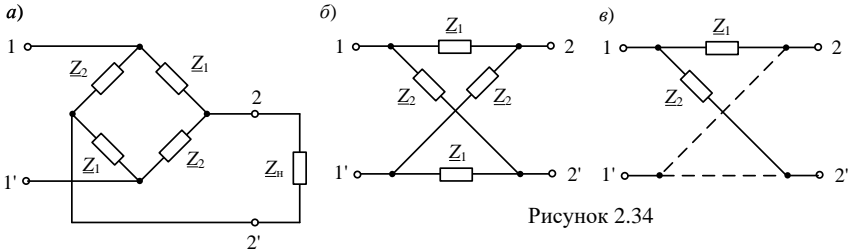


Рисунок 2.34

На рисунке 2.34, *a* показана схема включения мостового фильтра между источником и нагрузкой, а на рисунке 2.34, *б* – эквивалентная схема симметричного, уравновешенного мостового фильтра, продольные ветви которого имеют сопротивления  $Z_1$ , а диагональные – сопротивления  $Z_2$ . Часто для упрощения рисунка на схеме указывают одну продольную ветвь и одну диагональную, а остальные ветви изображают пунктирными линиями (рисунк 2.34, *в*).

Матрица  $A$ -параметров мостовой схемы определена формулой (1.28)

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ 2 & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{bmatrix}.$$

Найдем соотношения для характеристических параметров мостового фильтра, выраженные через сопротивления схемы замещения. Характеристическое сопротивление схемы будем обозначать  $Z_M$

$$Z_c = Z_M = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (2.78)$$

Характеристическая постоянная передачи

$$\Gamma = \ln \left( A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}} \right) = \ln \left( \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} + \sqrt{\frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \cdot \frac{2}{Z_2 - Z_1}} \right) =$$

$$= \ln \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} = \ln \frac{(\sqrt{\underline{Z}_2} + \sqrt{\underline{Z}_1})^2}{(\sqrt{\underline{Z}_2} + \sqrt{\underline{Z}_1})(\sqrt{\underline{Z}_2} - \sqrt{\underline{Z}_1})} = \ln \frac{\sqrt{\underline{Z}_2} + \sqrt{\underline{Z}_1}}{\sqrt{\underline{Z}_2} - \sqrt{\underline{Z}_1}}.$$

Разделив в последнем выражении числитель и знаменатель под знаком  $\ln$  на  $\sqrt{\underline{Z}_2}$ , получим

$$\underline{\Gamma} = \ln \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2}}. \quad (2.79)$$

Установим условия пропускания и задерживания сигналов для мостовой схемы фильтра.

Для всех симметричных четырехполюсников справедливо соотношение:

$$\underline{A}_{11} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma}.$$

Применим его к схеме мостового фильтра.

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \operatorname{ch} \underline{A} \cos \underline{B} + j \operatorname{sh} \underline{A} \sin \underline{B} = \underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}; \quad (2.80)$$

Выполним некоторые простейшие операции с гиперболическими функциями, имеющими комплексный аргумент

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \left( \frac{e^{\underline{\Gamma}/2} - e^{-\underline{\Gamma}/2}}{2} \right)^2 = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}} - 2}{4} = \frac{\operatorname{ch} \underline{\Gamma} - 1}{2}; \quad \operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \underline{\Gamma} - 1}{2}};$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \left( \frac{e^{\underline{\Gamma}/2} + e^{-\underline{\Gamma}/2}}{2} \right)^2 = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}} + 2}{4} = \frac{\operatorname{ch} \underline{\Gamma} + 1}{2}; \quad \operatorname{ch} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \underline{\Gamma} + 1}{2}}.$$

Подставим в записанные выше формулы выражение  $\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}$ .

$$\operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}};$$

$$\operatorname{ch} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} + 1 \right)} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}}.$$

В итоге получаем

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}. \quad (2.81)$$

Будем считать, что фильтр состоит из чисто реактивных элементов. В этом случае соотношение  $\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}$  представляет собой вещественное число.

Выделяя в выражении (2.79) вещественные и мнимые части, получим два соотношения:

$$\operatorname{ch} A \cos B = \pm \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}; \quad (2.82)$$

$$\operatorname{sh} A \sin B = 0. \quad (2.83)$$

Найдем полосу пропускания мостового фильтра.

В полосе пропускания коэффициент ослабления  $A = 0$ , следовательно,  $\operatorname{sh} A = 0$ ,  $\operatorname{ch} A = 1$ . Из уравнения (2.81) следует, что

$$\cos B = \pm \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}.$$

В силу того, что  $\cos B$  не может быть больше 1, в полосе пропускания сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  должны быть разными по характеру; если  $\underline{Z}_1$  — индуктивное, то  $\underline{Z}_2$  должно быть емкостным, и наоборот.

Граничные частоты полосы пропускания определяются предельными значениями косинуса:

$$\text{если } \cos B = 1, \text{ то } \underline{Z}_1 = 0; \text{ а если } \cos B = -1, \text{ то } \underline{Z}_2 = 0. \quad (2.84)$$

В полосе задерживания  $A \neq 0$ ;  $\operatorname{sh} A \neq 0$ , из уравнения (2.82) вытекает, что

$$\sin B = 0.$$

Принимаем во внимание, что  $\sin B = 0$  при значениях  $B = 0$  или  $B = \pm\pi$ .

$$\text{В этом случае} \quad \cos B = \pm 1.$$

Коэффициент ослабления  $A$  определяется в соответствии с ранее полученной формулой

$$\operatorname{ch} A = \pm \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}.$$

Так как  $\text{ch}A \geq 1$ , то в полосе непропускания знаки сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$  должны быть одинаковыми, т. е. оба сопротивления должны иметь либо индуктивный, либо емкостный характер. Тогда

$$\text{ch}A = \left| \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} \right|. \quad (2.85)$$

В первом случае, если  $B = 0$ , то  $\Gamma = A$  и формула (2.80) примет следующий вид:

$$\text{th} \frac{\Gamma}{2} = \text{th} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}.$$

Это решение соответствует условию  $|Z_1| < |Z_2|$ , т. к. гиперболический тангенс не может иметь значения, превышающие единицу. Во втором случае, когда  $B = \pi$ ,  $\Gamma/2 = A/2 + j\pi/2$ . Тогда

$$\text{th} \frac{\Gamma}{2} = \frac{\text{sh}(\Gamma/2)}{\text{ch}(\Gamma/2)} = \frac{\text{sh}(A/2 + j\pi/2)}{\text{ch}(A/2 + j\pi/2)} = \frac{\text{sh}(A/2)\cos(\pi/2) + j\text{ch}(A/2)\sin(\pi/2)}{\text{ch}(A/2)\cos(\pi/2) + j\text{sh}(A/2)\sin(\pi/2)} = \frac{\text{ch}(A/2)}{\text{sh}(A/2)}.$$

Получаем 
$$\text{cth} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}.$$

Полученное решение соответствует условию  $|Z_1| > |Z_2|$ , т. к. гиперболический котангенс не может быть меньше единицы.

При равенстве сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$  мост уравновешен, и коэффициент ослабления становится бесконечно большим. Этому режиму фильтра соответствует частота всплеска  $\omega_\infty$  или  $f_\infty$ .

Рассмотрим симметричные реактивные четырехполюсники простейшего вида, в продольных и диагональных ветвях которых имеется по одному сопротивлению, но разных по характеру, например,  $Z_1 = j\omega L$  и  $Z_2 = -j/\omega C$  (рисунок 2.35, а) или наоборот (рисунок 2.35, б). Такие четырехполюсники не будут обладать фильтрующими свойствами, т. к. знаки этих сопротивлений будут различны при любой частоте и будут пропускать сигналы всех частот без затухания.

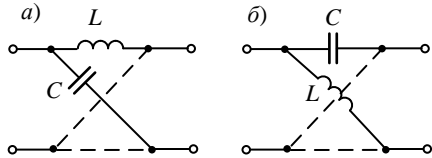


Рисунок 2.35

Таким образом, чтобы реализовать мостовую схему фильтра, сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  нужно выбирать таким образом, чтобы в диапазоне частот

полосы пропускания они были реактивными сопротивлениями разных знаков, а при частотах полосы задерживания – реактивными сопротивлениями одного знака. Для этого необходимо иметь в продольных и диагональных ветвях двухполюсники  $Z_1$  и  $Z_2$ , состоящие из разного числа элементов, катушек и конденсаторов. При одинаковом числе элементов двухполюсников, но не менее двух, двухполюсники должны иметь разные резонансные частоты.

### 2.6.1 Простейший мостовой реактивный фильтр нижних частот

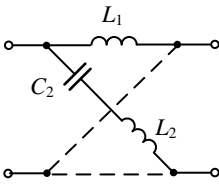


Рисунок 2.36

Схема фильтра дана на рисунке 2.36. В продольные ветви схемы включены катушки с сопротивлениями

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 = jx_1,$$

а в диагональные – двухполюсники, представляющие последовательные колебательные контуры с сопротивлениями

$$\underline{Z}_2 = j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = jx_2.$$

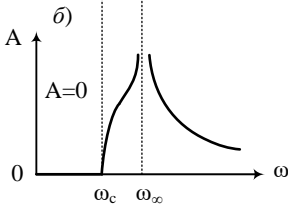
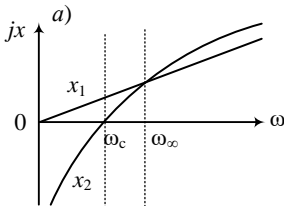


Рисунок 2.37

Полоса пропускания фильтра определяется приведенными выше условиями (2.83):

если  $Z_1 = \omega L_1 = 0$ , то  $\omega = 0$ ; а когда

$Z_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0$ , то частота среза  $\omega_c$  будет

равна резонансной частоте  $\omega_0$  последовательного колебательного контура в диагональной ветви:

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Полосу пропускания можно определить графически. На рисунке 2.37, а изображены частотные характеристики сопротивлений  $x_1(\omega)$  продольной и  $x_2(\omega)$  диагональной ветвей.

В диапазоне частот от 0 до  $\omega_c$  сопротивления имеют разные знаки, следовательно, имеем полосу пропускания, которая при частотах, превышающих  $\omega_c$ , переходит в полосу задержания.

Коэффициент ослабления  $A$  рассчитывается по формуле (2.84). График  $A(\omega)$  приведен на рисунке 2.37, б.

При  $Z_1 = Z_2$  мост уравновешен, и коэффициент ослабления  $A$  становится бесконечно большим. Соответствующая этому частота всплеска  $\omega_\infty$  находится из соотношения

$$\omega_\infty L_1 = \omega_\infty L_2 - \frac{1}{\omega_\infty C_2},$$

откуда

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{(L_2 - L_1)C_2}}.$$

Характеристическое сопротивление фильтра

$$\begin{aligned} Z_M &= \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{j\omega L_1 \left( j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{L_1}{C_2} (-\omega^2 L_2 C_2 + 1)} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)}. \end{aligned}$$

Обозначив  $\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = k$  и  $\frac{\omega}{\omega_c} = \Omega$ , получим

$$Z_M = k \sqrt{1 - \Omega^2}.$$

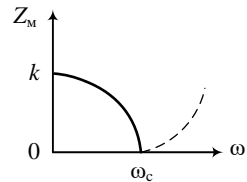


Рисунок 2.38

График зависимости  $Z_M(\omega)$  дан на рисунке 2.38. Найдем характеристику передачи фильтра.

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{\omega L_1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}} = \sqrt{\frac{\omega L_1}{\omega L_2 \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2} \right)}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}.$$

Введя обозначения  $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = m$  и  $\frac{\omega}{\omega_c} = \Omega$ , получим

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} = \frac{m\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}}.$$

Частота бесконечного ослабления ( $A = \infty$ ) имеет место при  $Z_1 = Z_2$ , т. е. когда  $\operatorname{th} \frac{\Gamma}{2} = 1$ . В таком случае относительная частота всплеска  $\Omega_\infty$  удовлетворяет условию  $\frac{m\Omega_\infty}{\sqrt{\Omega_\infty^2 - 1}} = 1$ , откуда  $m = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega_\infty^2}}$ .

Вид характеристик мостового ФНЧ указывает на эквивалентность его однозвенному фильтру типа  $m$ .

При выбранных значениях индуктивностей  $L_1$ ,  $L_2$  и емкости  $C_2$  можно получить заданную полосу пропускания фильтра ( $\omega_c$ ), бесконечно большое затухание на выбранной частоте ( $\omega_\infty$ ) и необходимое значение параметра  $k$ .

### 2.6.2 Простейший мостовой реактивный фильтр верхних частот

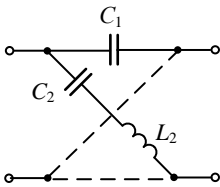


Рисунок 2.39

В отличие от мостового низкочастотного фильтра в схеме анализируемого фильтра (рисунок 2.39) в продольные ветви вместо катушек включены емкости с сопротивлениями  $Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} = -jx_1$ , а диагональные ветви, как и в предыдущей схеме, представляют собой последовательные колебательные контуры с сопротивлениями

$$Z_2 = j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = jx_2.$$

Полоса пропускания фильтра определяется условиями (2.83): при  $Z_1 = 1/\omega C_1 = 0$   $\omega \rightarrow \infty$ , а когда  $Z_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0$ , то частота среза  $\omega_c$  будет равна резонансной частоте  $\omega_0$  колебательного контура в диагональной ветви:

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

На рисунке 2.40, *a* приведены частотные характеристики сопротивлений продольной и диагональной ветвей, т. е.  $x_1(\omega)$  и  $x_2(\omega)$  соответственно. В диапазоне частот

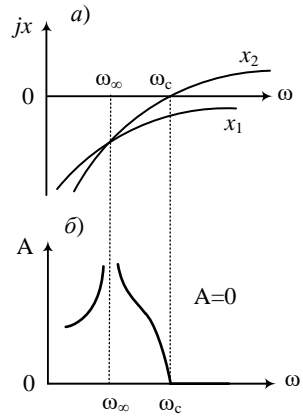
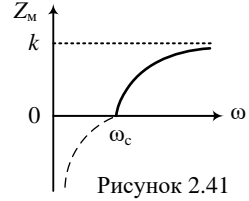


Рисунок 2.40

от 0 до  $\omega_c$  сопротивления имеют одинаковые знаки, следовательно, имеем полосу задерживания фильтра. При частотах, превышающих  $\omega_c$ , находится полоса пропускания фильтра.

Характеристическое сопротивление фильтра:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_M &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{L_2}{C_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}. \end{aligned}$$



Обозначим  $\sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = k$ ,  $\frac{\omega}{\omega_c} = \Omega$  и запишем:

$$\underline{Z}_M = k \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}.$$

График зависимости  $Z_M(\omega)$  приведен на рисунке 2.41.

Найдем характеристику передачи фильтра.

$$\begin{aligned} \text{th} \frac{\Gamma}{2} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{1}{1 - \omega^2 L_2 C_2}} = \\ &= \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \Omega^2}}, \end{aligned}$$

где  $\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = m$ ;  $\frac{\omega}{\omega_c} = \Omega$ .

Найдем соотношение между частотой всплеска  $\omega_\infty$  и параметром  $m$  при  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ , когда  $\text{th} \frac{\Gamma}{2} = 1$ .

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \Omega_\infty^2}} = 1, \text{ откуда } m = \sqrt{1 - \Omega_\infty^2} \text{ или } \Omega_\infty = \sqrt{1 - m^2}.$$



## 2.7 БЕЗЫНДУКТИВНЫЕ $rC$ -ФИЛЬТРЫ

Используемые в реактивных фильтрах катушки индуктивности являются дорогими и громоздкими элементами, особенно в фильтрах, работающих в диапазоне низких частот. Для увеличения индуктивности катушек их размещают на сердечниках из ферромагнитных материалов, в силу чего они представляют собой нелинейные элементы. Кроме того, такие катушки характеризуются низкой добротностью и большими потерями, как в обмотках, так и в сердечниках. В результате этих факторов ухудшаются основные характеристики фильтров. Рассмотрим схемы фильтров, в которых катушки индуктивности заменяют активными сопротивлениями, т. е. схемы  $rC$ -фильтров.

### 2.7.1 Т-образный фильтр нижних частот

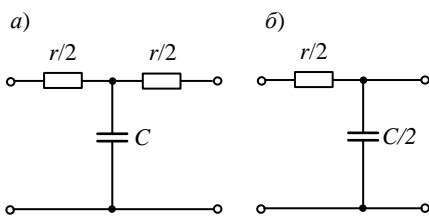


Рисунок 2.42

На рисунке 2.42, *a* изображена схема Т-образного  $rC$ -фильтра, а на рисунке 2.42, *б* – его Г-образное звено.

В соответствии с формулой (2.7) запишем выражение для параметра  $\underline{A}_{11}$  Т-образного четырехполюсника

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = \text{ch}\underline{\Gamma}.$$

Подставив в эту формулу значения  $\underline{Z}_1 = r/2$  и  $\underline{Z}_2 = 1/j\omega C$ , получим

$$\underline{A}_{11} = 1 + j \frac{r\omega C}{2} = \text{ch}(A + jB) = \text{ch}A \cos B + j \text{sh}A \sin B.$$

Сопоставляя вещественные и мнимые части записанного соотношения, получаем:

$$\text{ch}A \cos B = 1; \quad (2.86)$$

$$\text{sh}A \sin B = \frac{r\omega C}{2}. \quad (2.87)$$

У  $rC$ -фильтра нет области частот, в которой коэффициент ослабления  $A = 0$ , поэтому во всем диапазоне частот ( $\omega > 0$ )  $A > 0$ ,  $\text{sh}A > 0$  и  $\text{ch}A > 1$ .

При протекании постоянного тока, т. е. при  $\omega = 0$ , коэффициент  $A = 0$ , а  $\text{ch}A = 1$ . Поэтому согласно соотношению (2.85)  $\cos B = 1$ , что имеет место при  $B = 0$ .

Если  $\omega > 0$ , то  $\sin B > 0$ , т. к.  $A > 0$  и  $\operatorname{sh} A > 0$ . Из уравнений (2.85) и (2.86) можно найти зависимость  $A$  от  $\omega$ .

Из соотношения  $\operatorname{ch}^2 A - \operatorname{sh}^2 A = 1$  выразим  $\operatorname{ch}^2 A = 1 + \operatorname{sh}^2 A$ , а из соотношения  $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$  выразим  $\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$  и подставим в уравнение (2.85).

$$(1 + \operatorname{sh}^2 A)(1 - \sin^2 B) = 1;$$

Если в это соотношение подставить значение  $\sin B = \frac{r\omega C}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} A}$ , найденное из уравнения (2.86), то получим биквадратное уравнение относительно  $\operatorname{sh} A$ :

$$\operatorname{sh}^4 A - \left(\frac{r\omega C}{2}\right)^2 \operatorname{sh}^2 A - \left(\frac{r\omega C}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{sh} A = \sqrt{\frac{(r\omega C)^2}{8} + \frac{r\omega C}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{r\omega C}{4}\right)^2}.$$

В области низких частот  $\frac{r}{2} \ll \frac{1}{\omega C}$  или  $\frac{r\omega C}{2} \ll 1$ . В таком случае

$$\operatorname{sh} A = A \approx \sqrt{\frac{r\omega C}{2}}.$$

За частоту среза  $\omega_c$   $rC$ -фильтра нижних частот условно принимают такое значение, при котором активное и реактивное сопротивления ветвей соответствующего  $\Gamma$ -образного звена (рисунок 2.40, б) равны.

$$\frac{2}{\omega_c C} = \frac{r}{2} \quad \text{или} \quad \frac{r\omega_c C}{4} = 1.$$

В этом случае  $\operatorname{sh} A = 2,2$ , откуда  $A = 1,53$  Нп. На рисунке 2.43 приведена частотная характеристика коэффициента ослабления  $A$   $\Gamma$ -образного  $rC$ -фильтра.

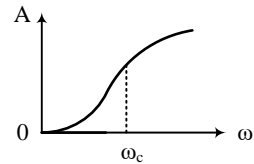


Рисунок 2.43

### 2.7.2 Т-образный фильтр верхних частот

Схема фильтра дана на рисунке 2.44, а. Конденсатор в продольной ветви на низких частотах имеет большое сопротивление. При этом напряжение на выходных зажимах получается небольшим, в силу чего коэффициент

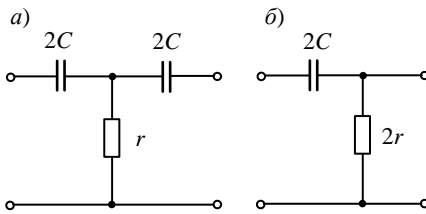


Рисунок 2.44

ослабления  $A$  характеризуется большими значениями. На постоянном токе ( $\omega = 0$ )  $A$  равен бесконечно большому значению.

С увеличением частоты емкостное сопротивление уменьшается, напряжение на выходе фильтра увеличивается, что приводит к уменьшению коэффициента ослабления  $A$ , а при  $\omega = \infty$   $A = 0$  (рисунок 2.45).

нок 2.45).

Параметр  $\underline{A}_{11}$  находим по формуле

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = 1 - j \frac{1}{2r\omega C} = \text{ch}\Gamma_-, \text{ после чего}$$

переходим к соотношению

$$\text{chAcosB} + j\text{shAsinB} = 1 - j \frac{1}{2r\omega C}.$$

Сопоставляя левые и правые части, получим

$$\text{chAcosB} = 1; \quad (2.88)$$

$$\text{shAsinB} = -\frac{1}{2r\omega C}. \quad (2.89)$$

При  $\omega = \infty$  условия  $A = 0$  и  $B = 0$  выполняются одновременно.

При  $0 < \omega < \infty$  соотношение  $\text{shAsinB} < 0$ , так как  $A > 0$  и  $B < 0$ . Совместное решение уравнений (2.87) и (2.88) приводит к биквадратному уравнению относительно  $\text{shA}$ .

$$(1 + \text{sh}^2 A)(1 - \sin^2 B) = 1.$$

Подставив в это соотношение  $\sin B = -\frac{1}{2r\omega C} \cdot \frac{1}{\text{shA}}$ , получим

$$\text{sh}^4 A - \frac{1}{(2r\omega C)^2} \text{sh}^2 A - \frac{1}{(2r\omega C)^2} = 0,$$

откуда

$$\text{shA} = \sqrt{\frac{1}{8(r\omega C)^2} + \frac{1}{2r\omega C} \sqrt{1 + \frac{1}{(4r\omega C)^2}}}.$$

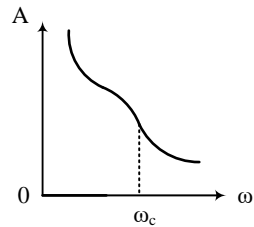


Рисунок 2.45

Для  $\omega \gg 1/2rC$  
$$\text{sh}A \approx \frac{1}{\sqrt{2r\omega C}}.$$

Если за частоту среза  $\omega_c$  условно принять частоту, определяемую из равенства сопротивлений Г-образного звена (рисунок 2.42, б):

$$2r = \frac{1}{2\omega_c C} \quad \text{или} \quad \omega_c = \frac{1}{4rC}, \quad \text{то получим } \text{sh}A = 2,2; \quad A = 1,53 \text{ Нп.}$$

## 2.8 Примеры решения задач.

**Пример 2.8.1** Между источником напряжения с внутренним сопротивлением  $Z_{и}$  и нагрузкой  $Z_{н}$  включен Г-образный фильтр, согласующий источник и приемник (рисунок 2.8.1). Найти параметры  $Z_1$  и  $Z_2$  фильтра.

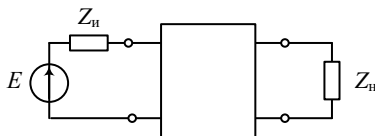


Рисунок 2.8.1

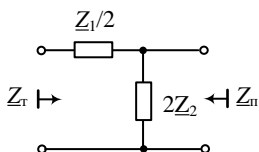


Рисунок 2.8.2

*Решение.* Схема Г-образного фильтра приведена на рисунке 2.8.2. В режиме согласования внутреннее сопротивление источника должно быть равно характеристическому сопротивлению фильтра со стороны его продольной ветви ( $Z_{и} = Z_{т}$ ), а также должны быть равными сопротивление нагрузки и характеристическое сопротивление

фильтра со стороны его поперечной ветви ( $Z_{н} = Z_{и}$ ). Сопротивления  $Z_{т}$  и  $Z_{и}$  задаются формулами (2.4) и (2.6) соответственно. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$Z_{и} = Z_{т} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left( 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)}; \quad Z_{н} = Z_{и} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}.$$

Решаем полученную систему уравнений и найдем значения  $Z_1$  и  $Z_2$ , выразив их через  $Z_{и}$  и  $Z_{н}$ .

$$Z_{и} Z_{н} = Z_1 Z_2; \quad Z_2 = \frac{Z_{и} Z_{н}}{Z_1};$$

$$\frac{Z_{н}}{Z_{и}} = 1 + \frac{Z_1^2}{4Z_{и} Z_{н}}; \quad Z_1^2 = 4Z_{и}^2 - 4Z_{и} Z_{н},$$

откуда

$$\underline{Z}_1 = 2\sqrt{\underline{Z}_н(\underline{Z}_н - \underline{Z}_н)}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_н \underline{Z}_н}{2\sqrt{\underline{Z}_н(\underline{Z}_н - \underline{Z}_н)}}.$$

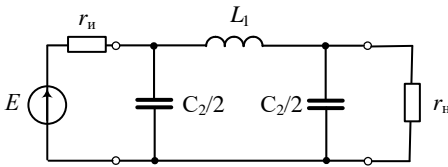


Рисунок 2.8.3

**Пример 2.8.2** На рисунке 2.8.3 П-образный фильтр нижних частот типа  $k$  подключен к источнику с внутренним сопротивлением  $r_n = 10$  Ом и нагружен на приемник сопротивлением  $r_n = 10$  Ом. Определить параметры элементов схемы

фильтра, если частота среза фильтра  $\omega_c = 10^3$  с<sup>-1</sup>.

*Решение.* Фильтр находится в режиме согласованной нагрузки и имеет коэффициент  $k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = 10$  Ом. Частота среза  $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} = 10^3$  с<sup>-1</sup>. Используя эти соотношения, получаем:

$$L_1 = \frac{2k}{\omega_c} = 0,02 \text{ Гн}; \quad C_2 = \frac{2}{k\omega_c} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}.$$

**Пример 2.8.3** Определить параметры элементов Т-образной схемы ФНЧ типа  $k$  (рисунок 2.6, а), если номинальное характеристическое сопротивление  $k = 500$  Ом, а частота среза  $f_c = 1600$  Гц. Полагая, что фильтр нагружен на характеристическое сопротивление, найти на частоте  $f_1 = 2f_c$  коэффициент ослабления А, выразив его в неперах и децибелах. Определить отношение напряжений на входе и выходе фильтра.

*Решение.* Параметры  $L_1$  и  $C_2$  найдем, решая систему уравнений,:

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \quad \text{и} \quad f_c = \frac{1}{\pi\sqrt{L_1 C_2}}.$$

$$L_1 = \frac{k}{\pi f_c} = 0,1 \text{ Гн}; \quad C_2 = \frac{L_1}{k^2} = 0,4 \text{ мкФ}.$$

$$\text{Коэффициент ослабления } A = 2\text{Arch} \frac{f_1}{f_c} = 2,63 \text{ Нп} = 22,8 \text{ дБ}.$$

Найдем отношение напряжения на входе фильтра к напряжению на выходе:

$$\frac{U_1}{U_2} = e^A = 13,9.$$

**Пример 2.8.4** П-образный фильтр нижних частот типа  $k$  (рисунок 2.6, б) имеет параметры элементов:  $L_1 = 0,1$  мГн,  $C_2 = 0,64$  мкФ. Определить частоту среза фильтра  $\omega_c$ . Найти:

- а) частоту  $\omega_1$ , при которой коэффициент ослабления  $A$  равен 3 дБ;
- б) частоту  $\omega_2$ , при которой коэффициент фазы  $B = \pi/3$ .

*Решение.* Частоту среза находим по формуле (2.28, а):

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения частот, при которых заданы коэффициенты ослабления и фазы, используем формулы (3.30) и (2.29). Ослабление 3 дБ соответствует 0,345 Нп.

$$A = 2 \operatorname{Arch} \frac{\omega_1}{\omega_c}; \text{ и } B = 2 \arcsin \frac{\omega_2}{\omega_c}.$$

$$0,345 = 2 \operatorname{Arch} \frac{\omega_1}{2,5 \cdot 10^5}, \text{ откуда } \omega_1 = 2,54 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\pi}{3} = 2 \arcsin \frac{\omega_2}{\omega_c}, \text{ } \omega_2 = 1,36 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 2.8.5** ФНЧ типа  $k$ , составленный из двух одинаковых звеньев с номинальным характеристическим сопротивлением  $k = 600$  Ом, имеет коэффициент ослабления  $A = 64$  дБ при частоте  $f_1 = 3000$  Гц. Определить частоту среза, индуктивность и емкость элементов одного звена.

*Решение.* Если для составного четырехполюсника с каскадным соединением Т- или П-звеньев коэффициент ослабления  $A = 36$  дБ = 4,14 Нп, то для каждого звена он будет в два раза меньше и равен  $A/2 = 2,07$  Нп.

Рассмотрим П-образную схему звена на рисунке 2.6, б.

$$\text{В таком случае } \frac{A}{2} = 2 \operatorname{Arch} \frac{f_1}{f_c} = 2,07.$$

$$\frac{f_1}{f_c} = 1,585 \text{ откуда } f_c = 1892,5 \text{ Гц.}$$

Для определения параметров элементов схемы  $L_1$  и  $C_2$  запишем систему уравнений

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}; f_c = \frac{1}{\pi\sqrt{L_1 C_2}} \text{ и решим ее.}$$

$$\text{Получим } L_1 = \frac{k}{\pi f_c} = 0,064 \text{ Гн}; C_2 = \frac{1}{k\pi f_c} = 0,176 \text{ мкФ}; C_2/2 = 0,088 \text{ мкФ.}$$

**Пример 2.8.6** П-образный ФВЧ типа  $k$ , схема которого приведена на рисунке 2.11, б, имеет следующие параметры элементов:  $C_1 = 0,8$  мкФ,  $2L_2 = 0,6$  Гн. Определить частоту среза фильтра  $f_c$ . Найти значение коэффициента ослабления  $A$  при частоте  $f = 0,5 f_c$ .

*Решение.* Частоту среза  $f_c$  фильтра определяем по формуле (2.34, б):

$$f_c = \frac{1}{4\pi\sqrt{L_2 C_1}} = 162,44 \text{ Гц.}$$

По формуле (2.38) найдем коэффициент ослабления

$$A = 2\text{Arch} \frac{\omega_c}{\omega} = 2\text{Arch} \frac{f_c}{f} = 2\text{Arch} 2 = 2,63 \text{ Нп} = 22,87 \text{ дБ.}$$

**Пример 2.8.7** ФНЧ типа  $k$  состоит из трех каскадно включенных П-образных звена. На частоте  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  при согласованной нагрузке известно отношение напряжений на входе и выходе  $U_1/U_2 = 10$ . Определить частоту среза фильтра  $\omega_c$ .

*Решение.* Определим коэффициент ослабления фильтра

$$\frac{U_1}{U_2} = e^A, \text{ откуда } A = \ln \frac{U_1}{U_2} = 2,3 \text{ Нп.}$$

При однородной цепной схеме соединения звеньев коэффициент ослабления одного звена  $A_1 = A/3 = 0,77 \text{ Нп}$ .

$$A_1 = 2\text{Arch} \frac{\omega}{\omega_c} = 0,77 \text{ Нп}; \frac{\omega}{\omega_c} = 1,075; \omega_c = 1860 \text{ с}^{-1}; f_c = 296,1 \text{ Гц.}$$

**Пример 2.8.8** Определить граничные частоты полосы пропускания и характеристические сопротивления  $Z_{\Gamma}$  и  $Z_{\Pi}$  Г-образного полувзена полосового фильтра типа  $k$  (рисунок 2.8.4) на частоте  $\omega = 2000 \text{ с}^{-1}$ . Найти постоянную ослабления  $A$  и коэффициент фазы  $B$  на этой частоте, если известны пара-

метры элементов фильтра:  $L_1 = 0,4$  Гн,  $L_2 = 0,05$  Гн,  $C_1 = 0,1$  мкФ,  $C_2 = 0,8$  мкФ.

*Решение.* Сопротивления продольной и поперечной ветвей соответственно равны:

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = -j4200 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = j119,05 \text{ Ом}.$$

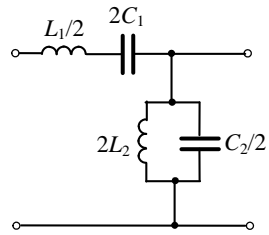


Рисунок 2.8.4

В соответствии с формулой (2.45) находим значение параметра  $k$ :

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = 707 \text{ Ом}.$$

Граничные частоты полосы пропускания определяем по формулам (2.46) и (2.47):

$$\omega_{1c} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} = 3535,5 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2c} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} = 7071,1 \text{ с}^{-1}.$$

Находим характеристические сопротивления со стороны продольной ветви  $\underline{Z}_\tau$  и со стороны поперечной ветви  $\underline{Z}_\pi$ , используя формулы (2.9) и (2.10) соответственно:

$$\underline{Z}_\tau = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)} = -j1977,3 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_\pi = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}} = j252,9 \text{ Ом}.$$

Для заданной частоты  $\omega = 2000 \text{ с}^{-1}$  постоянная ослабления

$$A = 2\text{Arch} \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} = 3,5 \text{ Нп},$$



а коэффициент фазы в соответствии с ФЧХ полосового фильтра, приведенной на рисунке 2.17,  $B = -\pi$  в диапазоне частот  $\omega$  от 0 до  $\omega_{1c}$ .

**Пример 2.8.9** Т-образная схема заграждающего (режекторного) фильтра типа  $k$  (рисунок 2.19,  $a$ ) в согласованном режиме задерживает частоты в интервале от  $f_{1c} = 8$  кГц до  $f_{2c} = 12,5$  кГц. Определить параметры элементов схемы  $C_1$ ,  $L_2$  и  $C_2$ , если  $L_1 = 0,01$  Гн.

*Решение.* Условие функционирования заграждающего фильтра заключается в равенстве резонансных частот продольной (резонанс токов) и поперечной (резонанс напряжений) ветвей:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \text{или} \quad L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Частоты среза фильтра, ограничивающие полосу задерживания, определяются соотношениями (2.62) и (2.63):

$$\omega_{1c} = 2\pi f_{1c} = \sqrt{\frac{1}{16L_2 C_1} + \frac{1}{L_1 C_1} - \frac{1}{4\sqrt{L_2 C_1}}};$$

$$\omega_{2c} = 2\pi f_{2c} = \sqrt{\frac{1}{16L_2 C_1} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{4\sqrt{L_2 C_1}}}.$$

Из приведенных выше соотношений вытекает, что

$$\omega_{1c} \omega_{2c} = \frac{1}{L_1 C_1} = \omega_0^2, \quad \text{откуда} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{1c} \omega_{2c}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{или}$$

$$f_0 = \sqrt{f_{1c} f_{2c}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_1 C_1}} = 10 \text{ кГц.}$$

Из полученного соотношения определяем значение

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L_1} = 25,33 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$$

Ширина полосы задерживания фильтра определяется по формуле

$$f_{2c} - f_{1c} = \frac{1}{4\pi \sqrt{L_2 C_1}}, \quad \text{из которой находим значение параметра } L_2:$$

$$L_2 = \frac{1}{(4\pi)^2 (f_{2c} - f_{1c})^2} = 0,0123 \text{ Гн.}$$

Последний параметр находим из условия резонанса ( $L_1 C_1 = L_2 C_2$ ):

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} = 20,59 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$$

**Пример 2.8.10** Для П-образного низкочастотного последовательно-производного фильтра типа  $m$  при  $L_1 = 30$  мкГн,  $C_2 = 120$  пФ и  $m = 0,6$  найти:

- а) граничные частоты;
- б) частоту  $\omega_\infty$ , при которой постоянная ослабления  $A$  бесконечно велика;

*Решение.* Граничные частоты полосы пропускания фильтра определяются из условия прозрачности (2.72):

$$-1 \leq \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \leq 0,$$

где  $Z_{1m} = mZ_1 = jm\omega L_1$ ;  $Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} Z_1 = -j \frac{1}{m\omega C_2} + j \frac{1-m^2}{4m} \omega L_1 =$

$$= -j \left( \frac{1}{m\omega C_2} - \frac{1-m^2}{4m} \omega L_1 \right).$$

Если  $Z_{1m} = 0$ , то  $\omega = 0$ . Частоту среза находим из условия  $Z_{1m} = -4Z_{2m}$ , при котором

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} \text{ или } f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{L_1 C_2}} = 5,31 \text{ МГц.}$$

Постоянная ослабления  $A$  фильтра выражается соотношением

$$A = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\left| \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right|}, \text{ следовательно, бесконечно большое значение коэф-}$$

фициента  $A$  будет достигнуто при  $Z_{2m} = 0$ , т. е. при резонансной частоте в поперечной ветви

$$\omega_\infty = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{(1-m^2)L_1 C_2}} \text{ или } f_\infty = f_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{(1-m^2)L_1 C_2}} = 6,63 \text{ МГц.}$$

**Пример 2.8.11** Последовательно-производное полужвено высокочастотного фильтра типа  $m$  имеет следующие параметры:  $k = 600$  Ом,  $m = 0,5$ .

Найти индуктивности катушек и емкости конденсаторов схемы фильтра, чтобы обеспечить бесконечно большое значение постоянной ослабления  $A$  на частоте  $f_\infty = 30$  кГц.

*Решение.* Схема Г-образного полужвена фильтра типа  $m$  приведена на рисунке 2.8.5 а, где согласно формулам (2.70) и (2.71)  $Z_{1m} = mZ_1$ , а

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} Z_1. \quad \text{Для фильтра-прототипа типа } k \quad Z_1 = -j/\omega C_1, \\ Z_2 = j\omega L_2.$$

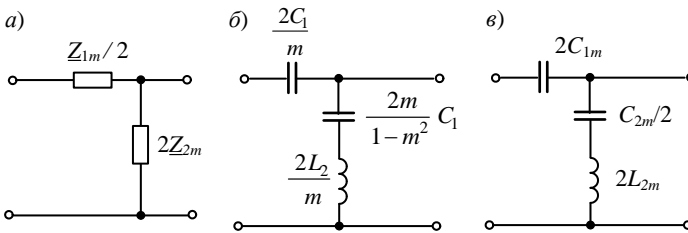


Рисунок 2.8.5

Номинальное характеристическое сопротивление  $k = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$ .

Постоянная ослабления  $A$  Г-образного звена определяется выражением

$$A = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}, \text{ из которого следует, что } A = \infty \text{ при } Z_{2m} = 0.$$

$$\frac{\omega_\infty L_2}{m} - \frac{1-m^2}{4m} \cdot \frac{1}{\omega_\infty C_1} = 0 \quad \text{или} \quad 4\omega_\infty L_2 = \frac{1-m^2}{\omega_\infty C_1}, \text{ откуда}$$

$$\omega_\infty = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2\sqrt{L_2 C_1}} = 2\pi f_\infty.$$

Решая систему уравнений

$$k = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}; \quad f_\infty = \frac{\sqrt{1-m^2}}{4\pi\sqrt{L_2 C_1}},$$

получим  $L_2 = \frac{k\sqrt{1-m^2}}{4\pi f_\infty} = 1,378 \text{ мГн}$  и  $C_1 = \frac{L_2}{k^2} = 3,83 \text{ нФ}$ .

Сопротивление продольной ветви последовательно-производного фильтра на рисунке 2.8.5, в

$$\underline{Z}_{1m} = m\underline{Z}_1 = -j\frac{m}{\omega C_1} = -j\frac{1}{\omega C_{1m}}, \text{ где } C_{1m} = \frac{C_1}{m} = 7,66 \text{ нФ}.$$

Поперечная ветвь фильтра имеет сопротивление

$$\underline{Z}_{2m} = \frac{j\omega L_2}{m} + \frac{1-m^2}{4m} \left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right) = j\omega L_{2m} - j\frac{1}{\omega C_{2m}}$$

и состоит из последовательно соединенных элементов

$$L_{2m} = \frac{L_2}{m} = 2,756 \text{ мГн} \text{ и } C_{2m} = \frac{4mC_1}{1-m^2} = 10,21 \text{ нФ}.$$

**Пример 2.8.12** ФНЧ состоит из Т-образного звена типа  $k$  и двух Г-образных полувзвеньев типа  $m$ , соединенных каскадно путем согласования характеристических сопротивлений. На входе и выходе фильтра характеристическое сопротивление должно иметь характер  $\underline{Z}_{\text{ном}}$ . Частота среза фильтра  $f_c = 3000 \text{ Гц}$ , номинальное характеристическое сопротивление  $k = 500 \text{ Ом}$ ,  $m = 0,6$ . Определить:

а) параметры элементов фильтра;

б) частоту  $f_\infty$ , при которой коэффициент ослабления имеет бесконечное значение.

Найти значения коэффициента ослабления  $A$  фильтра на частотах  $f_1 = 0,8 f_\infty$  и  $f_2 = 1,2 f_\infty$ .

*Решение.* Схема фильтра представлена на рисунке 2.8.6,

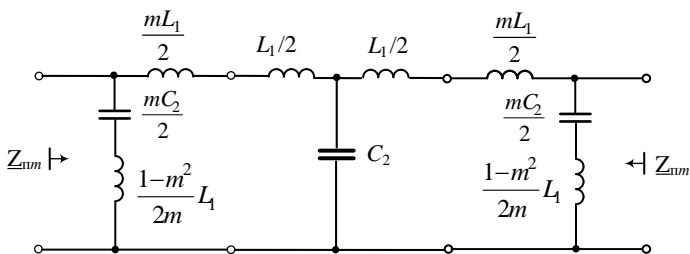


Рисунок 2.8.6

а ее упрощенный вариант – на рисунке 2.8.7. Предварительно рассчитаем параметры элементов Т-образного звена типа  $k$  (рисунок 2.8.8) и Г-образного полузвена типа  $m$  (рисунок 2.8.9).

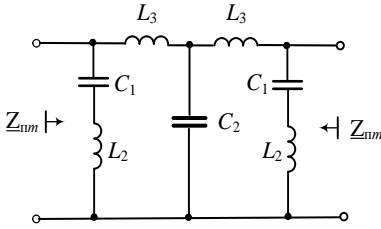


Рисунок 2.8.7

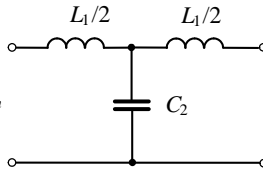


Рисунок 2.8.8

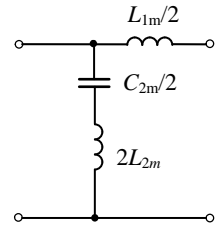


Рисунок 2.7.9

Для Т-звена ФНЧ на рисунке 2.8.8 частота среза  $f_c$  и коэффициент  $k$  в соответствии с формулой 2.28, б выражаются через параметры элементов следующим образом:  $f_c = \frac{1}{\pi\sqrt{L_1 C_2}}$ ,  $k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$ . Решая данную систему уравнений, найдем значения  $L_1$  и  $C_2$ :

$$L_1 = \frac{k}{\pi f_c} = 0,053 \text{ Гн}; \quad C_2 = \frac{L_1}{k^2} = 0,212 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Найдем значения параметров элементов схемы 2.7.9.

$$L_{1m} = mL_1 = 0,0318 \text{ Гн}; \quad L_{2m} = \frac{1-m^2}{4m} L_1 = 0,014 \text{ Гн};$$

$$C_{2m} = mC_2 = 0,127 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Параметры элементов схемы на рисунке 2.8.7:

$$L_2 = 2L_{2m} = 0,028 \text{ Гн}; \quad L_3 = \frac{L_{1m}}{2} + \frac{L_1}{2} = 0,0424 \text{ Гн};$$

$$C_1 = \frac{C_{2m}}{2} = 0,0635 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad C_2 = 0,212 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Частота бесконечного затухания  $f_\infty$  Г-образного звена фильтра типа  $m$  равна резонансной частоте в поперечной ветви:

$$2\pi f_{\infty} \cdot 2L_{2m} = \frac{2}{2\pi f_{\infty} \cdot C_{2m}}, \text{ откуда } f_{\infty} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{2m}C_{2m}}} = 3774,5 \text{ Гц.}$$

При каскадном соединении звеньев фильтра при согласовании характеристических сопротивлений эквивалентное ослабление равно сумме ослаблений отдельных звеньев.

Постоянная ослабления Т-образного звена типа  $k$  в диапазоне частот от 0 до  $\infty$  рассчитывается по формуле:

$$A_k = 2\text{Arch} \sqrt{\left| \frac{Z_1}{4Z_2} \right|} = 2\text{Arch} \sqrt{\frac{2\pi f L_1}{4} \cdot 2\pi f C_2} = 2\text{Arch} \frac{f}{f_c} = 2\text{Arch} \Omega.$$

Для Г-образного звена типа  $m$  расчет постоянной ослабления осуществляют по следующим формулам:

$$A_m = 2\text{Arch} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega^2|}} \text{ для диапазона частот от } 0 \text{ до } \omega_{\infty} \text{ и}$$

$$A_m = 2\text{Arsh} \frac{m\Omega}{\sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega^2|}} \text{ для частот превышающих } \omega_{\infty}.$$

Таким образом, найдем значения постоянной ослабления  $A = A_k + A_m$ :  
 а) для частоты  $f_1$  ( $\Omega_1 = f_1/f_c = 0,8f_{\infty}/f_c = 1,0065$ )

$$A_1 = 2\text{Arch}\Omega_1 + 2\text{Arch} \frac{m\Omega_1}{\sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega_1^2|}} = 0,228 + 0,379 = 0,607 \text{ Нп.}$$

б) для частоты  $f_2$  ( $\Omega_2 = f_2/f_c = 1,2f_{\infty}/f_c = 1,51$ )

$$A_2 = 2\text{Arch}\Omega_2 + 2\text{Arsh} \frac{m\Omega_2}{\sqrt{|1 - (1 - m^2)\Omega_2^2|}} = 1,943 + 2,201 = 4,144 \text{ Нп.}$$

**Пример 2.8.13** Схема мостового ФНЧ (рисунок 2.36) имеет следующие параметры элементов:  $L_1 = 0,05$  Гн,  $L_2 = 0,2$  Гн,  $C_2 = 0,05$  мкФ. Определить:

- номинальное характеристическое сопротивление фильтра;
- граничные частоты полосы пропускания фильтра;
- частоту, при которой коэффициент ослабления  $A$  бесконечно велик;
- собственное ослабление фильтра при частоте  $f = 2f_c$ .

*Решение.* Номинальное характеристическое сопротивление  $k$  фильтра находим по формуле:

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = 1000 \text{ Ом.}$$

Диапазон частот полосы пропускания фильтра задается условиями (2.83). Если  $Z_1 = \omega L_1 = 0$ , то  $\omega = 0$ . При равенстве нулю сопротивления  $Z_2$  диагональной ветви будем иметь частоту среза, равную резонансной частоте последовательного колебательного контура  $L_2 - C_2$ .

$$f_c = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}} = 1592 \text{ Гц.}$$

Коэффициент ослабления  $A$  связан с параметрами элементов фильтра соотношением (2.84):

$$\text{ch}A = \left| \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \right|.$$

Бесконечно большое значение коэффициент  $A$  получает при равенстве сопротивлений  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ :

$$\omega_\infty L_1 = \omega_\infty L_2 - \frac{1}{\omega_\infty C_2},$$

откуда находим частоту всплеска  $f_\infty$ :

$$f_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_2 - L_1)C_2}} = 1838 \text{ Гц.}$$

Собственное ослабление фильтра при частоте  $f = 2f_c$  вычисляем по формуле (2.80) с учетом того, что в полосе задерживания коэффициент фазы  $B = 0$ .

$$\text{th} \frac{A}{2} = \sqrt{\left| \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \right|}.$$

Сопротивления продольной и диагональной ветвей схемы фильтра соответственно равны:  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$  и  $\underline{Z}_2 = j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$ .

После подстановки в формулу  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  получим

$$\operatorname{th} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\omega L_1}}{\sqrt{\omega L_2 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right)}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = 0,577.$$

$$A = 2\operatorname{Arth}(0,577) = 1,316 \text{ Нп.}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники, т.1, Электрические цепи / Л. А. Бессонов – М. Юрайт, 2021. – 725 с.
- 2 Зевеке Г. В. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов – М. : Энергия, 1989. – 528 с.
- 3 Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян – Л. : Энергоиздат, 1981. Т. 1 – 536 с., Т.2 – 536 с.
- 4 Каллер М. Я. Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи / М. Я. Каллер, Ю. В. Соболев, А. Г. Богданов. – М. : Транспорт, 1987. – 335 с.
- 5 Батура М. П. Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев – Минск : Высшая школа, 2007. – 606 с.
- 6 Атабеков Г. И. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г. И. Атабеков. – СПб - М. - Краснодар 2009. – 424 с.
- 7 Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей: учеб. пособие для вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова – М.: Высш. шк., 1990. – 488 с.
- 8 Лосев Ф. К. Теория линейных электрических цепей: учебник для вузов / Ф. К. Лосев. – М. : Высш. шк., 1987. – 511 с.
- 9 Попов В. П. Основы теории цепей: учебник для вузов / В. П. Попов. – М. : Высш. шк., 1985. – 496 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ	4
1.1 Уравнения четырехполосников	5
1.1.1 Уравнения в формах $Y$ и $Z$	5
1.1.2 Уравнения в формах $A$ и $B$	7
1.1.3 Уравнения в формах $H$ и $F$	9
1.2 Входные сопротивления четырехполосников	10
1.3 Определение коэффициентов четырехполосников	12
1.4 Схемы замещения четырехполосников	14
1.4.1 Канонические $T$ - и $\Pi$ -образные схемы	14
1.4.2 Симметричные $T$ - и $\Pi$ -образные четырехполосники	15
1.4.3 Мостовые четырехполосники	17
1.4.4 Одноэлементные четырехполосники	18
1.5 Характеристические параметры симметричного четырехполосника	19
1.5.1 Характеристическое сопротивление	19
1.5.2 Характеристическая постоянная передачи	19
1.5.3 Единицы измерения постоянной ослабления	21
1.5.4 Уравнения симметричного четырехполосника с гиперболическими функциями	22
1.5.5 Определение параметров $\underline{Z}_c$ и $\underline{\Gamma}$ через входные сопротивления	23
1.6 Характеристические параметры несимметричного четырехполосника	23
1.6.1 Характеристические сопротивления	24
1.6.2 Характеристическая постоянная передачи	25
1.6.3 Уравнения несимметричного четырехполосника с гиперболическими функциями	26
1.6.4 Вносимое ослабление четырехполосника	28
1.7 Передаточные функции четырехполосников	32
1.8 Соединение четырехполосников	33
1.8.1 Каскадное соединение	34
1.8.2 Параллельное соединение	36
1.8.3 Последовательное соединение	38
1.8.4 Параллельно–последовательное соединение	39
1.8.5 Последовательно–параллельное соединение	40
1.9 $\Gamma$ -образные четырехполосники	42
1.10 Активные автономные четырехполосники	45
1.11 Зависимые (управляемые) источники напряжения и тока	47
1.12 Четырехполосники с операционными усилителями	50
1.13 Примеры решения задач	51
2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ	65
2.1 Общие сведения	65
2.2 Характеристические параметры $T$ -, $\Pi$ - и $\Gamma$ -образных звеньев электрических фильтров	67
2.3 Условия пропускания и задерживания реактивного фильтра	71
2.4 Реактивные фильтры типа $k$	74
2.4.1 Фильтры нижних частот	74
2.4.2 Фильтры верхних частот	78

2.4.3 Полосовые фильтры	82
2.4.4 Заграждающие (режекторные) фильтры	88
2.5 Реактивные фильтры типа $m$	92
2.5.1 Характеристики производных фильтров	94
2.5.2 Фильтры нижних частот типа $m$	97
2.5.3 Фильтры верхних частот типа $m$	100
2.6 Мостовые фильтры	103
2.6.1 Простейший мостовой реактивный фильтр нижних частот	107
2.6.2 Простейший мостовой реактивный фильтр верхних частот	109
2.7 Безындуктивные $rc$ -фильтры	111
2.7.1 Т-образный фильтр нижних частот	111
2.7.2 Т-образный фильтр верхних частот	112
2.8 Примеры решения задач	114
Список литературы	126
Оглавление	127

Учебное издание

*ВОЛКОВ Николай Петрович*

**ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Учебно-методическое пособие

Редактор Т. М. Маруняк  
Технический редактор В. Н. Кучерова  
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать . Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж 100 экз.  
Зак. № . Изд. №.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта,  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/361 от 13.06.2014.  
№ 2/104 от 01.04.2014.  
№ 3/1583 от 14.11.2017.  
Ул. Кирова, 34, 246653 г. Гомель