МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра физики и энергоэффективных технологий

И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, К. П. ШИЛЯЕВА

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Пособие

Гомель 2022

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра физики и энергоэффективных технологий

И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, К. П. ШИЛЯЕВА

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
для обучающихся по специальностям
1-44 01 01 «Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте»,
1-44 01 02 «Организация дорожного движения»,
1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте»
в качестве пособия по учебной дисциплине «Физика»*

Гомель 2022

УДК 531(075.8)
ББК 22.2
Д29

Рецензенты: кафедра общей физики ГГУ им. Ф. Скорины (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Е. Б. Шершнев*); профессор кафедры вагонов д-р техн. наук, профессор *О. В. Холодилов* (БелГУТ)

Деликатная, И. О.

Д29 Механика. Молекулярная физика. Контрольные задачи и примеры : пособие / И. О. Деликатная, К. П. Шиляева ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2022. – 82 с.
ISBN 978-985-554-990-2

Приведены основные законы и формулы по разделам курса физики «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика», представлены примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы, рекомендуемая литература и справочные таблицы по разделам программы курса физики.

Предназначено для методического обеспечения практических занятий и контрольной работы по соответствующим разделам курса физики студентов факультета УПП.

УДК 531(075.8)
ББК 22.2

ISBN 978-985-554-990-2

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных условий успешного освоения курса физики является систематическое решение задач, которое помогает уяснить физический смысл явлений, закрепить законы и формулы, выработать навыки практического применения теоретическогоматериала.

Целью практических занятий является обобщение и закрепление имеющихся у студентов знаний по изучаемым темам.

При подготовке к практическим занятиям следует воспользоваться лекционным материалом, учебниками и методическими пособиями из списка рекомендуемой литературы.

К выполнению контрольных работ студент приступает только после изучения материала, соответствующего данному разделу программы. При этом необходимо пользоваться учебными пособиями и конспектами лекций, ответить на вопросы для самоконтроля и внимательно ознакомиться с примерами решения задач.

Пособие предназначено для использования студентамиспециальностей1-44 01 01 «Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте»; 1-44 01 02 «Организация дорожного движения»; 1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» при выполнении контрольной работы «Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика».

Варианты задач контрольных работ выдаются преподавателем вовремя практических занятий.

1 МЕХАНИКА

1.1 Элементы кинематики и динамики поступательного движения

Основные законы и формулы

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\ ,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); *x, y, z*– координаты точки.

Кинематические уравнения движения (в координатной форме):

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t),$$

где t – время; $f_i(t)$ − функции, выражающие зависимость координат от времени.

Средняя скорость движения

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ – перемещение материальной точки в интервале времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$.

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\vec{v}_x + \vec{j}\vec{v}_y + \vec{k}\vec{v}_z,$$

где $v_x = dx/dt, v_y = dy/dt, v_z = dz/dt$ – проекции скорости $\vec{v}$ на оси координат.

Абсолютная величина (модуль) скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ .$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

где $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$, $a_z = dv_z/dt$ – проекции ускорения $\vec{a}$ на оси координат.

Абсолютная величина (модуль) ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

При произвольном (криволинейном) движении полное ускорение можно представить как сумму нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Абсолютная величина (модуль) этих ускорений

$$a_n = v^2/R,\ \ a_\tau = dv/dt,\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где R – радиус кривизны в данной точке траектории.

Кинематические уравнения движения материальной точки вдоль оси X:

– при равномерном движении:

$$x = x_0 + v_x t;\quad v_x = \text{const};\quad a_x = 0;$$

– при равнопеременном движении:

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2};\quad v_x = v_{0x} + a_x t;\quad a_x = \text{const}.$$

В зависимости от значений тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение;

2) $a_\tau = a = \text{const}$, $a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение,

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

При таком виде движения,если начальный момент времени $t_1 = 0$, а начальная скорость $v_1 = v_0$,тодлинапутиs, пройденного точкой

$$v = v_0 + at,\quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

3) $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением;

4) $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$. При $a_\tau = 0$ скорость изменяется только по направлению. Из $a_n = v^2/r$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным и движение по окружности является равномерным;

5) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение;

6) $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение;

7) $a_\tau = f(t)$, $a_n \neq 0$ – криволинейное движение с переменным ускорением.

При вращательном движении положение твердого тела определяется углом поворота (угловым перемещением) φ. Кинематическое уравнение вращательного движения в общем виде

$$\varphi = f(t).$$

Средняя угловая скорость

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где Δφ – изменение угла поворота за интервал времени Δt.

Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Мгновенное угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематическое уравнение вращения тела относительно оси Z:

– при равномерном вращении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t; \quad \omega = \text{const}; \quad \varepsilon = 0;$$

– при равнопеременном вращении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varepsilon = \text{const}.$$

Равномерное вращение также характеризуется периодомT и частотой вращения n:

$$T = \frac{t}{N} = \frac{2\pi}{\omega}; \; n = \frac{1}{T},$$

где N – число оборотов, совершаемых телом за время t.

Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими движение материальной точки, принадлежащей вращающемуся телу:

– длина пути, пройденного точкой по дуге окружности радиусом R при повороте тела на угол φ,

$$s = \varphi R;$$

– линейная скорость точки

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right],\ v = \omega R;$$

– тангенциальное ускорение точки

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{R}\right],\ a_\tau = \varepsilon R;$$

– нормальное ускорение точки

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{R},\ a_n = \omega^2 R.$$

Уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) в векторной форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i,$$

где $\sum\vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса этой точки; $\vec{a}$ – ускорение; $\vec{p} = m\vec{v}$ –импульс.

В проекциях на оси координат имеем систему уравнений:

$$ma_x = \sum F_{x,i};\quad ma_y = \sum F_{y,i};\quad ma_z = \sum F_{z,i}.$$

Сила трения покоя

$$F_{\text{тр}} = \mu_0 N,$$

где μ_0 – коэффициент трения покоя; N – сила нормального давления.

Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Сила трения качения

$$F_{\text{тр}} = \mu_{\text{к}}\frac{N}{R},$$

где $\mu_{\text{к}}$ – коэффициент трения качения; N – сила нормального давления; R – радиус катящегося тела.

Напряжение при упругой деформации тела

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения тела.

Относительное удлинение (продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – абсолютное удлинение (деформация); l – длина тела до деформации.

Закон Гука для упругой деформации растяжения (сжатия):

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l,$$

где k – коэффициент упругости (жесткость). Или в другой форме

$$\sigma = E\varepsilon,$$

гдеE – модуль Юнга.

Сила гравитационного взаимодействия

$$F_{\text{гр}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

гдеG–гравитационная постоянная; m_1иm_2–массы взаимодействующих тел, рассматриваемых как материальные точки; r– расстояние между центрами масс этих тел.

Сила тяжести

$$F = mg.$$

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}},$$

где $\vec{a}'$ – ускорение тела в неинерциальной системе та; $\vec{a}$ –ускорение тела в инерциальной системе та; $\vec{F}_{\text{ин}}$ –результирующая сил инерции.

Силы инерции, действующие на тело, при поступательном ускоренном движении системы

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0,$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение неинерциальной системы отсчета.

Силы инерции, действующие на тело, которое покоится во вращающейся системе отсчета,

$$F_{\text{ин}} = -m\omega^2 R,$$

где ω – угловая скорость вращения системы;R – расстояние от тела до оси вращения.

Силы инерции, действующие на тело, которое движется во вращающейся системе отсчета,

$$\vec{F}_{\text{ин}} = 2m\left[\vec{v}_0\,\vec{\omega}\right],$$

где $\vec{v}_0$ − скорость движения тела, относительно неинерциальной системы отсчета; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения системы

Примеры решения задач

Пример 1.1 Уравнение движения материальной точки вдоль оси X имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти координату x_1, скорость v_1 и ускорение a_1 в момент времени $t_1 = 2$ с.

Д а н о:

$x = A + Bt + Ct^2$,
$A = 4$ м,
$B = 2$ м/с,
$C = -0{,}5$ м/с^2,
$t_1 = 2$ с.

x_1– ? v_1 –? a_1 –?

Решение

Координату x_1 найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B, C и времени $t_1 = 2$ с:

$$x_1 = (4 + 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^2) = 6 \text{ м}.$$

Мгновенная скорость равна первой производной от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct.$$

Ускорение точки найдем как первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2C.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с

$$v_1 = (2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2) = 0 \text{ м/с}, \quad a_1 = 2\,(-0{,}5) = -1 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси.

Размерности искомых величин очевидны.

Ответ: $v_1 = 0$ м/с; $a_1 = -1$ м/с^2.

Пример 1.2 С высоты 200 м без начальной скорости падает тело. Одновременно с некоторой начальной скоростью с высоты 220 м падает другое тело. Какую начальную скорость должно иметь второе тело, чтобы оба тела одновременно достигли поверхности земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Д а н о:
$v_{01} = 0$ м/с,
$h_1 = 200$ м,
$h_2 = 220$ м,
$t_1 = t_2$.
v_{02} – ?

Решение

Обозначим время падения обоих тел как t. В обоих случаях движение равноускоренное и в течение всего падения (так как $h_2 > h_1$) направлено вниз. Ускорения тел также направлены вниз и равны ускорению свободного падения. Исходя из кинематических уравнений движения определим пройденную высоту для двух тел:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}; \tag{1}$$

$$h_2 = v_{02}t + \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Из уравнения (1) выразим время падения и подставим в (2):

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}; \quad h_2 = v_{02}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + h_1.$$

Выразим начальную скорость второго тела:

$$v_{02} = (h_2 - h_1)\sqrt{\frac{g}{2h_1}}.$$

Проверим размерность конечной формулы:

$$[v_{02}] = (\text{м} - \text{м})\sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2\text{м}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Подставим значения и произведем расчет:

$$v_{02} = (220 - 200)\sqrt{\frac{9{,}8}{2 \cdot 200}} = 3{,}1\ \text{м/с}.$$

Ответ: $v_{02} = 3{,}1$ м/с.

Пример 1.3 С крутого берега реки на уровне 20 м от воды в горизонтальном направлении бросают камень со скоростью 15 м/с. Через какой промежуток времени камень достигнет воды? С какой скоростью он упадет в воду?

Д а н о:
$v_0 = 15$ м/с,
$h = 20$ м.
t – ? v – ?

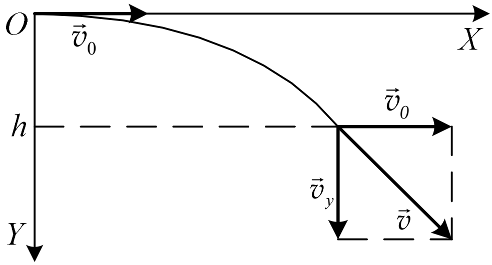
Решение

Выберем начало координат в точке бросания и направим ось Y вниз. Камень участвует в двух движениях. Вдоль оси X он движется равномерно со скоростью $v_x = v_0$. Вдоль оси Y он движется спостоянным ускорением, равным ускорению свободного падения. Начальная скорость в этом направлении равна нулю.

Запишем уравнения движения камня вдоль осей:

$$x = v_0 t; \quad v_x = v_{0x} = \text{const};$$

$$y = \frac{gt^2}{2}; \quad v_y = gt.$$



Найдем время падения камня. В момент его падения в воду $y = h$, тогда получим

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Проверим размерность и проведем вычисления:

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}} = \text{с}; \qquad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9{,}8}} \approx 2 \text{ с}.$$

Модуль скорости падения камня в воду

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2};$$

$$v = \sqrt{15^2 + (9{,}8 \cdot 2)^2} = 24{,}7 \text{ м/с}.$$

Ответ: t= 2 с; v= 24,7 м/с.

Пример 1.4 Камень брошен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета, если начальная скорость камня $v_0 = 20$ м/с.

Д а н о:

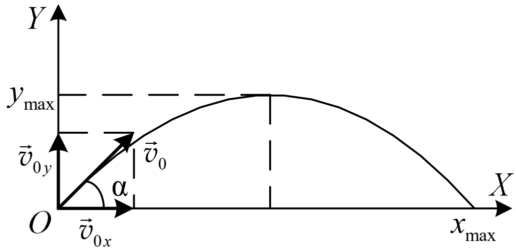
$\alpha = 45°$,

$v_0 = 20$ м/с.

x_{max}– ? y_{max}– ?

Решение

Пренебрегая сопротивлением воздуха, можно считать, что ускорение камня в рассматриваемом движении постоянно и равно ускорению свободного падения $(\vec{a} = \vec{g})$. Так как векторы ускорения $\vec{a}$ и начальной скорости $\vec{v}_0$ направлены под углом, не равным нулю, то движение камня криволинейное, траектория его лежит в плоскости *XOY*. Это криволинейное движение есть результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного вдоль оси *X* и равнопеременного вдоль оси *Y*.



В точке бросания составляющие скорости

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Запишем уравнения движения камня вдоль осей:

$$x = v_{0x}t; \quad v_x = v_{0x} = \text{const};$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}; \quad v_y = v_{0y} - gt.$$

В наивысшей точке траектории (в момент времени t_1) скорость $v_{1y} = 0$, тогда

$$v_0 \sin\alpha - gt_1 = 0; \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Наибольшую высоту подъема найдем из уравнения движения камня вдоль оси *Y*:

$$y_{max} = y_1; \quad y_1 = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Время подъема камня на наибольшую его высоту равно времени падения на землю. Тогда полное время полета

$$t_{пол} = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Наибольшая дальность полета

$$x_{max} = v_x t_{пол} = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Проведем проверку размерностей:

$$[x_{max}] = \frac{(м/с)^2}{м/с^2} = м; \qquad [y_{max}] = \frac{(м/с)^2}{м/с^2} = м.$$

Подставив числовые значения, получим

$$y_{max} = \frac{20^2 \cdot (\sin 45°)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 10{,}2 \text{ м}; \; x_{max} = \left(\frac{20^2}{9{,}8} \sin 45° \right) = 40{,}8 \text{ м}.$$

Ответ: $y_{max} = 10{,}2$ м; $x_{max} = 40{,}8$ м.

Пример 1.5 Вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10$ с$^{-1}$ маховик при торможении начал вращаться равнозамедленно. После торможения вращение маховика сновастало равномерным, но уже с частотой $n = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного вращения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Дано:

$n_0 = 10$ с$^{-1}$,
$n = 6$ с$^{-1}$,
$N = 50$.

$\varepsilon - ? t - ?$

Решение

Уравнение вращения тела при равнозамедленном движении имеет вид

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t. \qquad (2)$$

Выразим t из второго уравнения и подставим его в первое:

$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon}; \; \varphi = \omega_0 \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} \right)^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varepsilon}.$$

Тогда для углового ускорения получим

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi}.$$

Учтем, что $\varphi = 2\pi N$, а $\omega = 2\pi n$:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varphi} = \frac{\pi(n_0^2 - n^2)}{N}. \qquad (3)$$

Определим время торможения, используя уравнения (2) и (3):

$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} = \frac{2\pi(n_0 - n)N}{\pi\left(n_0^2 - n^2\right)} = \frac{2N}{n_0 + n}.$$

Проведем анализ размерности искомых величин:

$$[\varepsilon] = \left(\text{с}^{-1}\right)^2 + \left(\text{с}^{-1}\right)^2 = \text{с}^{-2}; \quad [t] = \frac{1}{\left(\text{с}^{-1}\right)} = \text{с}.$$

Подставим значения и произведем расчет:

$$\varepsilon = \frac{3{,}14(10^2 - 6^2)}{50} = 4{,}02\ \text{с}^{-2}; \quad t = \frac{2 \cdot 50}{10 + 6} = 6{,}25\ \text{с}.$$

Ответ: $\varepsilon = 4{,}02\ \text{с}^{-2}$; $t = 6{,}25$ с.

Пример 1.6 Маховик диаметром 1,5 м вращается с постоянной частотой 600 об/мин. Найти угловую скорость вращения маховика, линейную скорость и нормальное ускорение точек на ободе маховика.

Д а н о:	Решение
d = 1,5 м, n = 600 об/мин = 10 с^{-1}.	Угловая скорость маховика связана с частотой вращения соотношением
ω – ? v – ? a_n – ?	$\omega = 2\pi n = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8\ \text{с}^{-1}$.

Линейная скорость точек на ободе маховика

$$v = \omega R = \frac{\omega d}{2} = \frac{62{,}8 \cdot 1{,}5}{2} = 47{,}1\ \text{м/с}.$$

Нормальное ускорение этих точек

$$a_n = \omega^2 R = \frac{\omega^2 d}{2} = \frac{68{,}2^2 \cdot 1{,}5}{2} = 2958\ \text{м/с}^2.$$

Размерность найденных величин очевидна.

Ответ: $\omega = 62{,}8\ \text{с}^{-1}$; $v = 47{,}1$ м/с; $a = 2958\ \text{м/с}^2$.

Пример 1.7 Какую силу нужно приложить для равноускоренного подъема вагонетки массой 500 кг по эстакаде с углом наклона 30° на расстояние 5 м в течение 10 с? Коэффициент трения равен 0,05.

Д а н о:

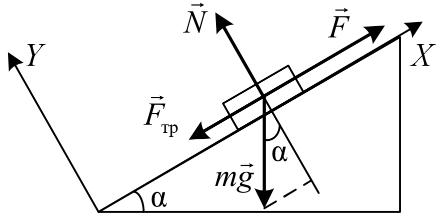
$s = 5$ м,
$t = 10$ с,
$m = 500$ кг,
$\alpha = 30°$,
$\mu = 0{,}05$.

F – ?

Решение

Движение вагонетки прямолинейное равноускоренное. Запишем уравнение движения тела, используя второй закон Ньютона:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$



Спроецируем уравнение на оси координат X и Y:

$$F - F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = ma; \tag{1}$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Силу трения определим при помощи уравнения (2):

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha. \tag{3}$$

Так как движение происходит из состояния покоя, то ускорение вагонетки можно выразить, зная время движения и пройденный путь:

$$s = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s}{t^2}. \tag{4}$$

Подставим формулы (3) и (4) в выражение (1) и найдем силу:

$$F = mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) + \frac{2ms}{t^2}.$$

Проверим размерность и проведем вычисления:

$$\left[F\right] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$F = 500 \cdot 9{,}8\left(0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}866\right) + \frac{2 \cdot 500 \cdot 5}{10^2} = 2712 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 2712$ Н.

Задачи к контрольной работе

1.1 Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид $x(t)= A + Bt + Ct^2$, гдеA = 4 м, B = 2 м/с, C = 0,5 м/с^2. Найти значение координаты x, скорости v и ускоренияa точки в момент времени t = 4 с.

1.2Определить начальную скорость, которую необходимо сообщить брошенному вертикально вверх телу, чтобы оно вернулось обратно через 5 с. Чему равна максимальная высота подъема тела?

1.3С балкона бросили мяч вертикально вверх с начальной скоростьюv_0 = 5 м/с. Через t = 3 с мяч упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мяча в момент падения.

1.4 Колесо, спустя t = 1 мин после начала вращения, приобретает скорость, соответствующую частоте вращения n = 660 об/мин. Найти угловую скорость колеса и число оборотов колеса за это время. Движение считать равноускоренным.

1.5 Диск радиусом R = 15 см вращается согласно уравнению$\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A = 3 рад; B = 2 рад/с; C = 1 рад/с^2. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в момент времени t = 10 с.

1.6 Материальная точка движется по окружности радиусом R = 2 м. Уравнение движения точки$\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A = 1 рад;B = 1 рад/с; C = 0,5 рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точки в момент времени t = 2 с.

1.7 Велосипедное колесо вращается с частотой n = 3 с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени Δt = 1 мин. Определить угловое ускорение ε и число оборотов N, которое сделает колесо за это время.

1.8 Колесо радиусом R = 20 см вращается с постоянным угловым ускорением ε = 3 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую и линейную скорости; 2) тангенциальное, нормальное и полное ускорения.

1.9На цилиндр, который может вращаться около горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязан грузик, которому предоставлена возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за t = 5 с опустился на h= 2 м. Определить угловое ускорениеε цилиндра, если его радиус R = 5 см.

1.10 Колесо радиусом R = 0,4 м вращается так, что зависимость угла поворота колеса от времени дается уравнением$\varphi = A + Bt + Ct^3$, где B = 2 рад/с; C = 1 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через Δt = 3 с после начала движения: 1) угловую скорость ω и линейную скоростьv; 2)угловое ε, тангенциальное a_τи нормальноеa_n ускорения.

1.11 Колесо вращается так, что зависимость угла поворота от времени дается уравнением$\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где B = 1 рад/с; C = 1 рад/с^2; D =1 рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, a_n = 346 м/с^2.

1.12 Винт турбореактивного самолета вращается относительно оси, направленной вдоль вала двигателя, с частотой n = 30 с$^{-1}$, причем посадочная скорость самолета относительно Земли равна v_0 = 45 м/с. Определить число оборотов N винта самолета за время пробега самолета, если длина посадочной дистанции составляет L = 600 м. Движение самолета считать равнопеременным.

1.13 Точка движется по окружности радиусом R = 4 м. Закон ее движения выражается уравнением $\varphi = 8 + 2t^2$. Найти момент времени t, когда нормальное ускорение точки a_n = 9 м/с^2; скорость v, тангенциальное a_τи полное a ускорения точки в этот момент времени.

1.14На столе стоит тележка массой m_1 = 2 кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок. С каким ускорениемa будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязана гиря массой m_2 = 1 кг?

1.15К нити подвешен груз массой m = 1 кг. Найти натяжение нити, если нить с грузом: 1) поднимается с ускорениемa = 2 м/с^2; 2) опускается с тем же ускорением.

1.16Какую силу надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время t = 1 мин прошел путь S = 40 м? Масса вагона m = 14 т. Во время движения на вагон действует сила трения, равная 0,05 силы тяжести вагона.

1.17 Масса лифта с пассажирами m = 600 кг. Найти, с каким ускорением и в каком направлении движется лифт, если известно, что натяжение троса, поддерживающего лифт: 1) T_1 = 100 Н; 2) T_2 = 7 кН.

1.18К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы массами m_1 = 2 кг иm_2 = 4 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

1.19 Диск радиусом R = 30 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения $\mu = 0{,}3$, найти частоту n вращения, при которой кубик соскользнет с диска.

1.20 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°. Зависимость пройденного телом расстояния l дается уравнением$l = Ct^2$, где C = 1,73м/с^2. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

1.2 Законы сохранения в механике, работа и энергия

Основные законы и формулы

Закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const или } \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const},$$

где n – число материальных точек (тел), входящих в систему.

Изменение импульса тела переменной массы за отрезок времени dt

$$d\vec{p} = md\vec{v} + \vec{u}\,dm,$$

где в момент времени tмасса тела m,его скорость v,а по истечении времени dtмасса тела уменьшится на dmи станет равной $m - dm$,а скорость тела станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$; $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно тела.

Уравнение движения тела переменной массы:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Второе слагаемое в правой части уравнения называют реактивной силой $\vec{F}_{\text{р}}$. Если $\vec{u}$ противоположен $\vec{v}$ по направлению, то тело ускоряется, а если совпадает–тормозится. Уравнение можно также записать в виде

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{р}}.$$

Если на тело не действуют внешние силы $(\vec{F} = 0)$, скорость выбрасываемых газов uотносительно тела постоянна и в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее стартовая масса m_0, то

$$v = u \ln\frac{m_0}{m}.$$

Это соотношение называетсяформулой Циолковского.

Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где m_i – масса i-й материальной точки; x_i, y_i, z_i – ее координаты.

Скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Импульс системыравен произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{v}_C.$$

Закон движения центра масс:

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n.$$

Элементарная работа силы $dA = \vec{F}d\vec{r} = F(r)dr\cos\alpha$;

−работа постоянной силы $A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$;

−работа переменной силы $A = \int \vec{F}(r)d\vec{r} = \int F(r)\cos\alpha dr$,

где $d\vec{r}$ – элементарное перемещение; $\Delta\vec{r}$ – перемещение; α – угол между направлениями силы и перемещением.

Мощность средняя $\langle N \rangle = \dfrac{A}{\Delta t}$.

Мгновенная мощность $N = \dfrac{dA}{dt}$, $N = Fv\cos\alpha$.

Кинетическая энергия материальной точки (или тела, движущегося поступательно)

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$\Pi = \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$\Pi = mgh,$$

где h – высота тела над уровнем, принятым занулевой для отсчета потенциальной энергии, формула справедлива при $h << R_З$ ($R_З$– радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии:

$$E = \mathrm{T} + \Pi = \mathrm{const}.$$

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2;$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_1 u_2^2}{2},$$

где m_1 и m_2 – массы тел; и $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ – скорости тел до удара; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ – скорости тел после удара.

Примеры решения задач

Пример 1.8 Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю w своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Д а н о:
m_1, m_2, v_1.
w– ?

Решение

Доля энергии, переданной первым шаром второму, выражается соотношением

$$w = \frac{\mathrm{T}_2'}{\mathrm{T}_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2,$$

где T_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2' – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Для определения w надо найти u_2. Воспользуемся тем, что при абсолютно упругом ударе одновременно выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

По закону сохранения импульса в проекции на ось X, учитывая, что второй шар до удара покоился ($v_2 = 0$), имеем

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 .$$

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} .$$

Решив совместно эти два уравнения, найдем

$$u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} .$$

Подставив это выражение в формулу для w, получим

$$w = \frac{m_2}{m_1} \left[\frac{2 m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} .$$

Из этого соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Доля передаваемой энергии не изменится, если шары поменяются местами.

Ответ: $w = \dfrac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

Пример 1.9 Два шара массами $m_1 = 2{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 6$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определить: 1) скорость шаров после удара; 2) кинетические энергии шаров до и после удара; 3) долю кинетической энергии шаров, превратившуюся во внутреннюю энергию. Удар считать прямым, неупругим.

Дано:
$m_1 = 2{,}5$ кг, $m_2 = 1{,}5$ кг, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.
u – ? T_1 – ? T_2 – ? w – ?

Решение

Неупругие шары не восстанавливают после удара свою первоначальную форму. Следовательно, не возникают силы, отталкивающие шары друг от друга, и шары после удара будут двигаться совместно с одной и той же скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса. В векторной форме имеем

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

Шары движутся по одной прямой вдоль оси X, положительное направление оси совпадает с направлением скорости первого шара.

В проекции на ось X получим

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

тогда

$$u=\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Кинетические энергии шаров до и после взаимодействия

$$T_1=\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2},\ T_2=\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}.$$

Сравнение кинетических энергий шаров до и после удара показывает, что в результате неупругого удара шаров произошло уменьшение их кинетической энергии, за счет чего увеличилась их внутренняя энергия. Долю кинетической энергии шаров, пошедшей на увеличение их внутренней энергии, определим из соотношения

$$w=\frac{(T_1-T_2)}{T_1}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления:

$$u=\frac{2,5\cdot 6-1,5\cdot 2}{2,5+1,5}=3\ \text{м/с};\quad T_1=\frac{2,5\cdot 6^2}{2}+\frac{1,5\cdot 2^2}{2}=48\ \text{Дж};$$

$$T_2=\frac{(2,5+1,5)\cdot 3^2}{2}=18\ \text{Дж};\quad w=\frac{48-18}{48}=0,62.$$

Размерность искомых величин очевидна.

Ответ: $u=3$ м/с; $T_1=48$ Дж; $T_2=18$ Дж; $w=0,62$.

Пример 1.10 Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью 20 м/с. На какой высоте кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии? Сопротивлением воздуха пренебречь. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принять поверхность Земли.

Д а н о:
$v_0 = 20$ м/с,
Т = П.

h–?

Решение

У поверхности Земли полная механическая энергия равна начальной кинетической энергии тела, а на искомой высоте – сумме кинетической и потенциальной энергий. Так как сопротивлением воздуха можно пренебречь, то полная механическая энергия тела в процессе движения будет оставаться постоянной, поскольку на него действует только консервативная сила – сила тяжести. Таким образом, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh. \tag{1}$$

Так как кинетическая и потенциальная энергии тела на искомой высоте равны, то

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) и выражая h, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Проведем проверку размерностей и численный расчет:

$$[h] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}, \qquad h = \frac{20^2}{9{,}8} = 20{,}4\ \text{м}.$$

Ответ: $h = 20{,}4$ м.

Пример 1.11 Лифт массой 10^3 кг начинает подниматься с ускорением 0,4 м/с^2. Определить работу силы тяги по подъему лифта за первые 10 с движения.

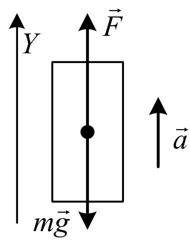
Дано:
$m = 10^3$ кг,
$a = 0{,}4$ м/с^2,
$t = 10$ с.

A– ?

Решение

Приложим силы, действующие на лифт, к центру его масс. Так как сила тяги совпадает по направлению с направлением перемещения, то работа будет определяться следующим образом:

$$A = Fh,$$



где h – модуль перемещения вдоль оси Y. Так как лифт движется равноускоренно из состояния покоя, то перемещение

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Величину силы тяги найдем из второго закона Ньютона, записав уравнение движения тела в векторном виде:

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Спроецировав это уравнение на ось Y, получим

$$F - mg = ma.$$

Тогда сила тяги

$$F = m(g + a).$$

В конечном виде получаем следующее выражение для работы:

$$A = m(g + a)\frac{at^2}{2}.$$

Проверим размерность формулы:

$$[A] = \text{кг}\left(\text{м/с}^2 + \text{м/с}^2\right)\left(\text{м/с}^2\right)\text{с}^2 = \text{кг}\left(\text{м/с}^2\right)\text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Подставим численные значения и произведем расчет:

$$A = 10^3(9{,}8 + 0{,}4)\frac{0{,}4 \cdot 10^2}{2} = 2{,}04 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Ответ: A = 204 кДж.

Пример 1.12 Спортсмен массой 60 кг прыгает с высоты 9 м на упругую сетку– батут. Найти максимальное значение потенциальной энергии упругой деформации сетки, если ее наибольший прогиб равен 1 м.

Д а н о:

m = 60 кг,
H = 9м,
h = 1 м.

Π_{max}– ?

Решение

Так как на спортсмена и батут действуют только силы тяготения со стороны Земли и силы упругости (т. е. консервативные силы), то к данной системе можно применить закон сохранения полной механической энергии. Согласно этому закону полная механическая энергия системы «спортсмен – батут» остается неизменной. Уменьшение потенциальной энергии спортсмена, отсчитываемой относительно уровня максимального прогиба сетки, равно приросту потенциальной энергии деформированной сетки:

$$\Pi = \Pi_{max} = mg(H + h);$$

$$[\Pi] = \text{кг}\left(\text{м/с}^2\right)\left(\text{м} + \text{м}\right) = \text{кг}\left(\text{м}^2/\text{с}^2\right) = \text{Дж};$$

$$\Pi_{max} = 60 \cdot 9{,}8(9 + 1) = 5880 \text{ Дж}.$$

Ответ: Π_{max} = 5880 Дж.

Пример 1.13 Сани выезжают с горки на горизонтальную поверхность с начальной скоростью 5 м/с. Коэффициент трения между полозьями саней и дорогой равен 0,1. Какой путь пройдут сани до остановки?

Д а н о:
$v_0 = 5$ м/с,
$\mu = 0{,}1$.

s – ?

Решение

На сани действует сила трения, поэтому механическая энергия саней уменьшается, переходя во внутреннюю энергию.

Изменение механической энергии саней равно работе сил трения:

$$E_2 - E_1 = A. \qquad (1)$$

Примем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии поверхность Земли. При движении по горизонтальной поверхности потенциальная энергия саней не изменяется. Поэтому в момент остановки полная механическая энергия саней равна кинетической и равна нулю: $E_2 = \mathrm{T}_2 = 0$. В начальном положении

$$E_1 = \mathrm{T}_1 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Сила трения и ее работа на горизонтальном участке

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg;$$

$$A = F_{\text{тр}} s \cos\alpha = -F_{\text{тр}} s = -\mu mgs.$$

Работа силы трения отрицательна, так как угол между вектором силы трения и вектором перемещения $\alpha = 180°$.

Подставляя выражения для начальной энергии и работы в соотношение (1), получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgs.$$

Выразим искомый путь:

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Проверим размерность и проведем численный расчет:

$$[s] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м};$$

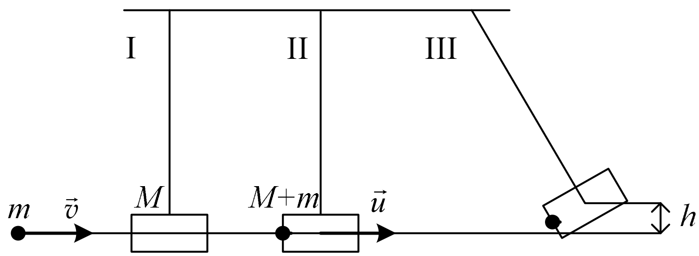
$$s = \frac{25}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8} = 12{,}8 \text{ м}.$$

О т в е т: $s = 12{,}8$ м.

Пример 1.14 Пуля массой 10 г, летевшая горизонтально со скоростью 500 м/с, ударяет в подвешенный на нитях деревянный брусок массой 5 кг и застревает в нем. На какую высоту поднимется брусок?

Дано:	Решение
$v = 500$ м/с $m = 0{,}01$ кг $M = 5$ кг h– ?	Система тел, состоящая из пули и бруска, не является замкнутой, однако взаимодействие этих тел при ударе кратковременно, поэтому действием внешних сил за время столкновения можно пренебречь.

Закон сохранения импульса можно применить, если рассматривать состояния системы непосредственно до (состояние I) и после (состояние II) удара.



До удара импульс системы равен импульсу пули, после удара – суммарному импульсу бруска и пули, тогда

$$m\vec{v} = (M + m)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ – скорость тел сразу же после удара. Так как скорости $\vec{v}$ и $\vec{u}$ имеют одинаковое направление, то справедливо равенство модулей импульсов

$$mv = (M + m)u,$$

отсюда

$$u = \frac{mv}{M + m}. \quad (1)$$

На тела системы после удара, т. е. при переходе бруска с пулей из нижней точки (состояние II) на высоту h (состояние III) действуют только силы тяжести и упругости нитей, т. е. только консервативные силы. Поэтому для этих двух положений можно применить закон сохранения механической энергии.

Расположим нулевой уровень потенциальной энергии в нижней точке, тогда в этом положении полная механическая энергия системы будет равна кинетической энергии бруска с пулей, а в состоянии III – их потенциальной энергии, т. к. на максимальной высоте подъема скорость тел равна нулю:

$$\frac{(M+m)u^2}{2}=(M+m)gh. \tag{2}$$

Подставляя выражение (1) в (2), получим для высоты подъема

$$h=\frac{u^2}{2g}=\frac{1}{2g}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2.$$

Проверим размерность конечной формулы:

$$\left[h\right]=\frac{1}{\text{м/с}^2}\cdot\frac{\text{кг}^2(\text{м/с})^2}{(\text{кг}+\text{кг})^2}=\frac{\text{кг}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}^2}=\text{м}.$$

Произведем вычисления:

$$h=\frac{1}{2\cdot 9{,}8}\left(\frac{0{,}01\cdot 500}{5+0{,}01}\right)^2=0{,}051\ \text{м}.$$

Ответ: h = 5,1 см.

Задачи к контрольной работе

1.21 Ракета, масса которой в начальный момент m_0 = 2 кг, запущена вертикально вверх. Определить ускорение, с которым двигалась ракета через t = 5 с после запуска, если скорость расхода горючего вещества μ = 0,2 кг/с, а относительная скорость выхода продуктов сгорания u = 90 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.22На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием M = 12 т. Орудие стреляет вверх под углом φ = 60° к горизонту в направлении движения. С какой скоростью v_1 покатится платформа после отдачи, если масса снаряда m = 20 кг, и он вылетает со скоростью v_2 = 600 м/с.

1.23Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жесткостью k_1 = 300 Н/м и k_2 = 150 Н/м, если первая пружина при этом растянулась на l = 3 см.

1.24Две пружины жесткостью k_1 = 0,3 кН/м и k_2 = 0,7 кН/м скреплены параллельно. Определить потенциальную энергию данной системы при абсолютной деформации Δl = 5 см.

1.25 Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает вперед в горизонтальном направлении камень массой m = 1 кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в начальный момент времени после бросания ее скорость была равной u_2 = 0,1 м/с. Найти кинетическую энергию брошенного камня через 0,5 с после начала его движения. Масса тележки с человеком равна 120 кг.

1.26Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь l = 6 м и приобрела скорость v = 3 м/с. Определить работу силы, если масса вагонетки m = 300 кг и коэффициент трения μ= 0,01.

1.27Вычислить работу, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой m = 50 кг на высоту h = 5 м за время t = 3 с.

1.28 Материальная точка массой m = 1 кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, гдеA = 2 м; B = –2 м/с; C = 1 м/с^2; D = –0,2 м/с^3. Найти мощность N в моменты времени t_1 = 3 с и t_2 = 5 с.

1.29Определить работу A, которую совершают силы гравитационного поля Земли, если тело массой m = 1 кг упадет на поверхность Земли: 1) с высоты h, равной радиусу Земли; 2) из бесконечности. Радиус Земли $R_З$ и ускорение свободного падения g_0 на ее поверхности считать известными.

1.30 Автомобиль двигается со скоростью v = 60 км/ч. Коэффициент трения между шинами и дорогой μ = 0,6. Определить минимальное расстояние, на котором машина может быть остановлена.

1.31 Груз массой m = 80 кг равноускоренно поднимают на высоту h = 10 м за время t = 6 с. Вычислить работу, совершаемую при подъеме груза.

1.32 Автомобиль движется по мосту, имеющему форму дуги окружности радиуса R = 50 м, обращенной своей выпуклостью вверх. Какое максимальное горизонтальное ускорение может развить автомобиль в высшей точке моста, если скорость его в этой точке v = 60 км/ч, а коэффициент трения автомобиля о мост μ = 0,7?

1.33К проволоке, закрепленной верхним концом, подвешивают груз массой m, под действием которого проволока удлиняется на величину Δl. Найти, во сколько раз изменение потенциальной энергии груза больше изменения потенциальной энергии проволоки.

1.34Две пружины жесткостью $k_1 = 0{,}8$ кН/м и $k_2 = 1{,}2$ кН/м скреплены параллельно. Определить потенциальную энергию данной системы при абсолютной деформации $\Delta l = 2$ см.

1.35Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь $l = 3$ м и приобрела скорость $v = 1$ м/с. Определить работу силы, если масса вагонетки $m = 500$ кг и коэффициент трения $\mu= 0{,}05$.

1.36 Тело массой$m_1 = 4$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 3$ кг и неупруго сталкивается с ним. Скорость тел непосредственно перед столкновением была равна соответственно $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Сколько времени будут двигаться эти тела после столкновения, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

1.37 Конькобежец массой $M = 60$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 2$ кг со скоростью $v = 10$ м/с. Найти, на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед равен $\mu = 0{,}01$.

1.38На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека $M = 75$ кг, масса доски $m = 25$ кг. С какой скоростью u (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью (относительно доски) $v = 1$ м/с? Массой колес пренебречь. Трение не учитывать.

1.39Два конькобежца массами $m_1 = 80$ кг и $m_2 = 60$ кг держались за концы длинного натянутого шнура, неподвижно стоя на льду один против другого. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью $v = 1$ м/с. С какими скоростями u_1и u_2 будут двигаться по льду конькобежцы? Трением пренебречь.

1.40По гладкой плоскости скользят навстречу друг другу без трения два упругих шарика с массами m_1= 20 г и $m_2 = 50$ г и скоростями соответственно $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 1$ м/с. Определить их скорости после центрального удара.

1.3 Элементы динамики вращательного движения твердого тела

Основные законы и формулы

Момент инерции материальной точки

$$I = mr^2,$$

где m – масса точки; r – ее расстояние от оси вращения. Момент инерции системы n материальных точек

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Момент инерции твердого тела

$$I = \int r^2 dm.$$

Если тело однородно, т. е. его плотность ρ одинакова по всему объему, то

$$I = \rho \int r^2 dV.$$

Теорема Штейнера. Момент инерции тела относительно произвольной оси

$$I = I_0 + md^2,$$

где I_0 – момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно заданной оси; m – масса тела; d – расстояние между осями.

Моменты инерции некоторых тел:

$I = \frac{1}{12} ml^2$	Однородный тонкий стержень массой m и длиной l, ось проходит через центр тяжести перпендикулярно стержню
$I = \frac{1}{3} ml^2$	Однородный тонкий стержень массой m и длиной l, ось проходит через край стержня перпендикулярно центру
$I = mR^2$	Тонкое кольцо, обруч, полый цилиндр, труба радиусом R и массой m, ось проходит через центр, перпендикулярно плоскости основания;
$I = \frac{1}{2} mR^2$	Круглый однородный диск, цилиндр радиусом R и массой m, ось проходит через центр перпендикулярно плоскости основания;
$I = \frac{2}{5} mR^2$	Однородный шар радиусом R и массой m, ось проходит через центр.

Момент силы $\vec{F}$, действующей на тело, относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\, \vec{F} \right], \ M = rF \sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из данной точки к точке приложения силы $\vec{F}$; α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Моментом силы относительно некоторой оси называют проекцию на эту ось вектора $\vec{M}$, определенного относительно произвольной точки этой оси.

Момент импульса вращающейся точки относительно неподвижной точки

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}], \ M = rp\sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс точки, α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Моментом импульса относительно некоторой оси называют проекцию на эту ось вектора $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки этой оси. Если I – момент инерции тела относительно некоторой оси, то момент импульса тела относительно этой же оси

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где ω – угловая скорость вращения тела.

Уравнение динамики вращательного движения твердого телаотносительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}.$$

Если относительно этой оси I = const, то

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела относительно этой оси.

Закон сохранения момента импульса:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \text{const}, \ \text{или} \ \sum_{i=1}^{n} I_i\vec{\omega}_i = \text{const},$$

где L_i – момент импульса i-го тела, входящего в состав замкнутой системы, которая состоит из n тел.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$\text{T} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения (совершающего плоское движение),

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где v – скорость центра инерции тела; первое слагаемое соответствует кинетической энергии поступательного движения тела; второе – кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Элементарная работазатраченная на поворот тела вокруг неподвижной оси

$$dA = Md\varphi .$$

Работа постоянного момента силы M, действующего на вращающееся тело,

$$A = M\varphi,$$

где φ – угол поворота тела.

Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела,

$$N = M\omega.$$

Примеры решения задач

Пример 1.15Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной 1 м и массой 900 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей черезточку, отстоящую от конца стержня на 1/3 его длины.

Д а н о:
m = 0,9кг,
l = 1 м,
a = l/3.
I– ?

Решение

Момент инерции относительно рассматриваемой оси определим, используя теорему Штейнера:

$$I = I_0 + md^2,$$

где I_0 – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр инерции параллельно заданной оси; d – расстояние между осями.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр:

$$I_0 = \frac{1}{12}ml^2.$$

Расстояние между осями определяем следующим образом:

$$d = l/2 - l/3 = l/6.$$

Подставляя выражения для I_0 иd в теорему Штейнера, получим

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{36}ml^2 = \frac{4}{36}ml^2 = \frac{1}{9}ml^2.$$

Размерность величины очевидна. Подставив данные,вычислим

$$I = \frac{1}{9} \cdot 0,9 \cdot 1^2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $I = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Пример 1.16Стержень вращается по закону$\varphi = Bt^2 + Ct^3$, где $B = 4$ рад/с^2, $C = 1$ рад/с^3, относительно оси перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить работу внешних сил за время $t = 2$ с, если длина стержня $l = 1$ м, а его масса $m = 0,6$ кг.

Дано:

$\varphi = Bt^2 + Ct^3$,
$B = 2$ рад/с^2,
$C = 1$ рад/с^3,
$m = 0,6$кг,
$l = 1$ м,
$t = 2$с.

A– ?

Решение

За счет работы внешних сил стержень, начиная движение из состояния покоя, приобретает кинетическую энергию вращения

$$A = \frac{I\omega^2}{2},$$

где $I= ml^2/3$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его край; ω – угловая скорость вращения стержня относительно этой оси.По определению

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2Bt + 3Ct^2.$$

Тогда выражение для работы примет вид

$$A = \frac{ml^2\left(2Bt + 3Ct^2\right)}{6}.$$

Подставив данные,вычислим

$$A = \frac{0,6 \cdot 1^2\left(2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2\right)}{6} = 2 \text{ Дж}.$$

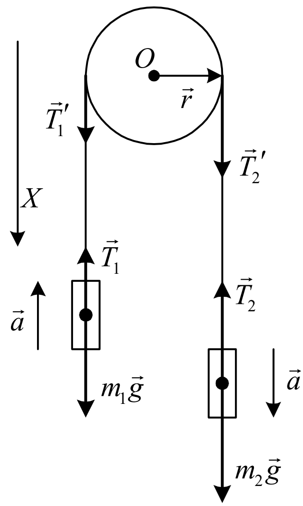
Ответ:$A = 2$ Дж.

Пример 1.17 Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу $m = 80$ г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.

Д а н о:	
m = 80 г,	
m_1 = 100 г,	
m_2 = 200 г.	
a– ?	

Решение

Воспользуемся основным уравнением динамики поступательного и вращательного движений. Для этого рассмотрим силы, действующие на каждый груз и на блок.



На грузы действуют две силы: сила тяжести и сила упругости (сила натяжения нити). Запишем второй закон Ньютона для этих тел:

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a};$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}.$$

Спроецируем эти силы на ось X, которую направим вертикально вниз, и запишем уравнения движения тел

$$-T_1 + m_1 g = -m_1 a; \qquad (1)$$

$$-T_2 + m_2 g = m_2 a. \qquad (2)$$

Вращение блока вокруг осиO происходит вследствие действия двух моментов сил

$$\vec{M}_1 = \left[\vec{r}_1\,\vec{T}_1'\right];\ \vec{M}_2 = \left[\vec{r}_2\,\vec{T}_2'\right].$$

Здесь $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – радиусы-векторы, проведенные в точки приложения сил, равные по модулю радиусу блока и противоположные по направлению.

Согласно уравнению динамики вращательного движения

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение блока, $I = mr^2/2$ – момент инерции блока (сплошного диска) относительно оси O.

Пусть осьO направлена «от нас», тогда в скалярном виде это уравнение запишется как

$$r\,T_2' - r\,T_1' = I\varepsilon. \qquad (3)$$

Согласно третьему закону Ньютона

$$T_1' = T_1,\ T_2' = T_2.$$

Учтем, что тангенциальное ускорение точек на ободе блока совпадает по значению с ускорением грузов, связь между тангенциальным и угловым ускорением $a_\tau = \varepsilon r$, подставим выражение для момента инерции блока и запишем уравнение (3) в виде:

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}. \qquad (4)$$

Совместное решение уравнений (1), (2), (4) дает

$$m_2 g - m_2 a - (m_1 g + m_1 a) = \frac{ma}{2}.$$

После перегруппировки членов найдем

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g.$$

Размерность величины очевидна. Подставим данные и получим

$$a = \frac{0,2 - 0,1}{0,2 + 0,1 + 0,08/2} \cdot 9,81 = 2,88 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 2,88$ м/с^2.

Пример 1.18 Стержень длиной 1,5 м и массой 10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой 10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью 500 м/с, и застревает в нем. На какой угол отклонится стержень после удара?

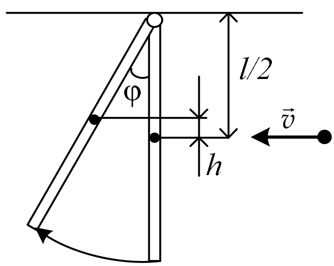
Д а н о:
L = 1,5 м,
m = 0,01 кг,
M = 10 кг,
v = 500 м/с.

φ– ?

Решение

Удар следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Рассмотрим подробнее процессы, происходящие при ударе. Ударившись о стержень, пуля за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию



$$\text{T} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J– момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на угол φ, причем его центр масс поднимается на высоту

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi).$$

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией

$$\Pi = Mgh = \frac{Mgl}{2}(1 - \cos\varphi).$$

По закону сохранения энергии получим

$$\frac{Mgl}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2},$$

откуда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}.$$

Так как момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, $J = Ml^2/3$, то получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}. \qquad (1)$$

Чтобы из выражения (1) найти искомый угол, необходимо предварительно определить значение угловой скорости стержня. В момент удара на пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Поэтому при ударе пули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

До удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня. Начальный момент импульса пули$L_{02} = mvr$,где расстояние от точки попадания до оси вращения$r = l/2$.В конечный момент времени стержень имел угловую скорость ω и момент импульса$L_1 = J\omega$, а пуля – линейную скоростьv_1, равную линейной скорости точек стержня на расстоянии r от оси вращения. Так как$v_1 = \omega r$,то конечный момент импульса пули будет равен $L_{02} = mr^2\omega$.

Применим закон сохранения момента импульса:

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2;$$

$$mvr = J\omega + mr^2\omega.$$

Подставив выражение для момента инерции стержня и расстояния r, выразим угловую скорость:

$$\omega = \frac{mvr}{J + mr^2} = \frac{6mv}{(4M + 3m)l}.$$

Выражение (1) запишется в виде

$$\cos\varphi = 1 - \frac{12m^2v^2}{(4M + 3m)^2 lg}.$$

Проведем анализ размерностей:

$$[\cos\varphi] = \frac{\text{кг}^2(\text{м/с})^2}{(\text{кг} + \text{кг})^2 \text{м} \cdot \text{м/с}^2} = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}^2/\text{с}^2} = 1,$$

т. е. получили безразмерную величину. Проведем вычисления:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{12 \cdot 0{,}01^2 \cdot 500^2}{(4 \cdot 10 + 3 \cdot 0{,}01)^2 1{,}5 \cdot 9{,}8} = 0{,}987,$$

следовательно, $\varphi = 9{,}2^\circ$.

Ответ: $\varphi = 9{,}2^\circ$.

Пример 1.19 К ободу колеса m = 5 кг приложена касательная сила F = 90 Н. Определить через какое время после начала действия силы кинетическая энергия колесаT станет равной 3 Дж.

Дано:
m = 5 кг,
F = 90 Н,
T = 3 Дж.
t– ?

Решение

Кинетическая энергия вращающегося колеса

$$T = \frac{I\omega^2}{2}.$$

По основному закону динамики вращательного движения, относительно оси, проходящей через центр колеса и перпендикулярной плоскости колеса, имеем

$$\varepsilon = \frac{M}{I}.$$

По определению углового ускорения для тела, начинающего вращение из состояния покоя, $\omega = \varepsilon t$, таким образом

$$\omega = \frac{Mt}{I}.$$

Подставимэто выражение в формулу для кинетической энергии, получим:

$$T = \frac{M^2 t^2}{2I}.$$

Момент силы в данном случае определяется выражением $M = FR$, где R–радиус колеса.Тогда, считая колесо диском, получим

$$T = \frac{F^2 R^2 t^2}{2mR^2} = \frac{F^2 t^2}{2m},$$

откуда следует

$$t = \frac{\sqrt{2mT}}{F}.$$

Подставим данные и получим

$$t = \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 90}}{3} = 10 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 10$ с.

Пример 1.20 По наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту, скатывается без скольжения сплошной цилиндр. Пренебрегая трением, определить скорость цилиндра через 5 с после начала движения.

Д а н о:
$t = 5$ кг,
$\alpha = 30^o$.
v– ?

Решение

По закону сохранения механической энергии, потенциальная энергия, которой обладает цилиндр в начальной точке, переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где m – масса цилиндра;h – высота начальной точки (относительно конечной);v – скорость центра масс цилиндра в конечной точке;I – момент инерции цилиндра, относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость цилиндра, относительно той же оси.

Если l – длина пути, пройденного по наклонной плоскости, то имеем $h = l\sin\alpha$. Используя связь между линейной и угловой скоростями$v = \omega R$ и выражение для момента инерции цилиндра $I = mR^2/2$ (R–радиус цилиндра), перепишем закон сохранения энергии в виде

$$mgl\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{v^2}{2R^2} = \frac{3mv^2}{4}.$$

Из кинематических уравнений движения пройденный путь в условиях данной задачи определяется как

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}, \quad \text{т. к.} \quad a = \frac{v}{t}.$$

Подставив выражение для пути в предыдущую формулу и выразив скорость, получим

$$v = \frac{2}{3}gt\sin\alpha.$$

Проведем вычисления:

$$v = \frac{2}{3}\cdot 9{,}8\cdot 5\cdot \sin 30° = 16{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v = 16{,}3$ м/с^2.

Пример 1.21 Платформа в виде сплошного диска радиусом $R = 1{,}5$ м и массой $m_1 = 180$ кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n = 10$ мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость v относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Д а н о:
$R = 1{,}5$ м, $m_1 = 180$ кг, $n = 10$ мин$^{-1}$,
$m_2 = 60$ кг.

v – ?

Р е ш е н и е

Платформа вращается по инерции. Следовательно, момент внешних сил относительно оси вращения, совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю. При этом условии момент импульса L системы «платформа – человек» остается постоянным:

$$L = I\omega = \text{const},$$

где I – момент инерции платформы с человеком относительно оси вращения; ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому $I = I_1 + I_2$, где I_1 и I_2 – моменты инерции платформы и человека.

С учетом этого закон сохранения момента примет вид

$$\left(I_1 + I_2\right)\omega = \text{const}, \text{ или } \left(I_1 + I_2\right)\omega = \left(I_1' + I_2'\right)\omega',$$

где значения моментов инерции I_1 и I_2 относятся к начальному состоянию системы, I_1', I_2' – к конечному.

Момент инерции платформы при переходе человека не изменяется. Момент инерции человека относительно оси вращения изменяется: $I_2 = 0$ – в начальном состоянии, $I_2' = m_2 R^2$ – в конечном состоянии.

Подставим в закон сохранения момента импульса выражения для моментов инерции и начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ω = 2π*n*:

$$\left(m_1 \frac{R^2}{2} + 0 \right) 2\pi n = \left(m_1 \frac{R^2}{2} + m_2 R^2 \right) \omega'.$$

Выразим конечную угловую скорость системы

$$\omega' = \frac{2\pi n m_1}{m_1 + 2m_2},$$

используя связь между угловой и линейной скоростью, получим

$$v = \omega' R = \frac{2\pi n m_1 R}{m_1 + 2m_2}.$$

Проведем анализ размерности полученной формулы:

$$[v] = \frac{\text{с}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \text{м/с}.$$

Подставим численные значения:

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (1/6) \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} = 0{,}9 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_1 = 0{,}9$ м/с.

Задачи к контрольной работе

1.41Для определения мощности мотора на его шкив диаметром *D* = 10 см накинули ленту. К одному концу ленты прикреплен динамометр, к другому подвешен груз. Найти мощность *N* мотора, если мотор вращается с частотой *n* = 20 $с^{-1}$, масса груза *m* = 1 кг и показания динамометра *F* = 20 Н.

1.42Сколько времени *t* будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной *l* = 3 ми высотой*h* = 1 м.

1.43 Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шараT = 21 Дж. Определить кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движений шара.

1.44К ободу однородного диска радиусом R= 0,1 м приложена постоянная касательная сила F = 99 Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр}$ = 5,9 Н·м. Найти массу m диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением ε = 100 рад/с^2.

1.45К ободу колеса радиусом R = 0,4 м и массой m = 50 кг приложена касательная сила F = 90 Н. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) через какое время после начала действия силы колесо будет иметь скорость, соответствующую частоте вращения 100 об/с.

1.46 Колесо, имеющее момент инерции I = 300 кг·м^2, вращается, делая 30 об/с. Через минуту после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения; 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

1.47 Вал массой m = 100 кг и радиусом R = 5 см вращается с частотой n = 10 с$^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F = 50 Н, под действием которой вал остановился через t = 10 с. Определить коэффициент трения.

1.48 Однородный диск радиусом R = 0,1 м и массой m = 4 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени представлена уравнением$\omega = A + Bt$, где B = 10 рад/с^2. Найти величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением пренебречь.

1.49На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты жестко закреплен. Цилиндру предоставлена возможность свободно опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение a оси цилиндра, если цилиндр: 1) сплошной; 2) полый тонкостенный.

1.50 Маховик радиусом R = 0,1 м и массой m = 5 кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Натяжение ремня, идущего без скольжения, постоянно и равноT = 12,6 Н. Какова будет частота вращения маховика колеса через Δt = 10 с после начала движения? Маховик считать ободом. Трением пренебречь.

1.51На барабан радиусом R = 0,6 м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 10 кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорениемa = 2,8 м/с^2.

1.52 Шар массойm = 5 кг и радиусом R = 10 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение движения шара имеет вид$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где B = 4 рад/с^2; C = 1 рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент силы M в момент времени t = 5 с.

1.53Две гири разной массы соединены нитью и перекинуты через блок, момент инерции которого I = 60 кг·м^2 и радиус R = 30 см. Блок вращается с трением и момент сил трения M = 90 Н·м. Найти разность натяжения нити ($T_1 - T_2$) по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением ε = 2 рад/с^2.

1.54 Однородный тонкий стержень массой m_1 = 0,2 кг и длиной l = 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси Z, проходящей через точку, которая делит стержень в отношении 1:2. В верхний конец стержня попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси Z) со скоростью v = 10 м/с, и прилипает к стержню. Масса шарика m_2 = 10 г. Определить угловую скорость ω стержня и линейную скорость u нижнего конца стержня в начальный момент времени.

1.55 Платформа в виде диска радиусом R = 1 м вращается по инерции с частотой n_1 = 5 мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого m = 70 кг. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы I = 100 кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

1.56Горизонтальная платформа массой M = 100 кг и радиусом R = 1 м вращается с угловой скоростью, соответствующей частоте n = 30 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Какова будет частота вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшает свой момент инерции от 3 до 1 кг·м^2? Считать платформу однородным круглым диском.

1.57 Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой m_1 = 60 кг. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы m_2 = 200 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

1.58 Человек массой m_1= 70 кг находится на платформе массой m_2 = 50 кг. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом R_1 = 8 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы v_1 = 5 км/ч. Радиус платформы R_2 = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – материальной точкой.

1.59На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной l = 2,4 м и массой m = 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой n_1 = 1 с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи I = 6 кг·м^2.

1.60 Уравнение движения шара массойm = 8 кг и радиусом R = 20 см имеет вид$\varphi = At^2 + Bt^3$, где A = 2 рад/с^2; B = 0,5 рад/с^3. Шар вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент силы M в момент времени t = 2 с.

2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1 Основы молекулярной физики

Основные законы и формулы

Количество однородного вещества (в молях)

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \quad \text{или} \quad \nu = \frac{m}{\mu},$$

где N–число молекул; N_A –постоянная Авогадро; m–масса;μ – молярная масса вещества.

Если система представляет собой смесь нескольких газов, то количество вещества системы

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n = \frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \ldots + \frac{N_n}{N_A} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{m_n}{\mu_n},$$

где ν_i, N_i, m_i, μ_i– соответственно количество вещества, число молекул, масса, молярная масса i-й компоненты смеси.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева−Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT,$$

где p–давление; V–объем; m–масса; μ–молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная; ν–количество вещества; T – термодинамическая температура.

Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения состояния для изопроцессов:

а) Закон Бойля−Мариотта (изотермический процесс: T = const, m = const):

$$pV = \text{const},$$

или для двух состояний газа:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2;$$

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс: p = const, m = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const}; \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

в) закон Шарля (изохорный процесс: V = const, m = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const}; \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};$$

г) объединённый газовый закон (m = const):

$$\frac{pV}{T} = \text{const}; \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

где p_1, V_1, T_1; p_2, V_2, T_2– давление, объём и температура газа соответственно в начальном и конечном состояниях.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси n идеальных газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p_i – парциальное давление i-й компоненты смеси.

Молярная масса смеси n газов

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n},$$

где m_i и ν_i – масса и количество вещества i-й компоненты смеси.

Концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho}{\mu} N_{\text{A}},$$

где N – число молекул в системе; V – объем системы; ρ – плотность вещества; N_{A} – число Авогадро.

Формула справедлива для любого состояния вещества.

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры:

$$p = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \left\langle v_{\text{кв}} \right\rangle^2 = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon \right\rangle \quad \text{или} \quad pV = \frac{1}{3} m \left\langle v_{\text{кв}} \right\rangle^2 = \frac{2}{3} E,$$

где n–концентрация молекул; m_0–масса одной молекулы; $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул; $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул; m–масса газа в объёме V; E–суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул.

Закон Максвелла распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right),$$

где $f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям, определяющая долю числа молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$.

Число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$,

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 \exp\left(-u^2\right) du,$$

где $u = v/v_в$ – относительная скорость, равная отношению скорости молекул v к наиболее вероятной скорости $v_в$; $f(u)$ – функция распределения по относительным скоростям.

Распределение молекул по энергиям. Число молекул, энергии которых заключены в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$,

$$dN(\varepsilon) = Nf(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(kT\right)^{-\frac{3}{2}} d\varepsilon,$$

где $f(\varepsilon)$ – функция распределения по энергиям.

Скорость молекул:

–наиболее вероятная – $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$;

–средняя квадратичная – $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$;

–средняя арифметическая – $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$,

где m_0 – масса молекулы.

Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекулы.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Средняя полная кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где i – число степеней свободы молекулы. Для одноатомной молекулы $i = 3$, для двухатомной – $i = 5$, для многоатомной – $i = 6$.

Барометрическая формула

$$p_h = p_0 \exp\left[-\frac{\mu g(h-h_0)}{RT}\right],$$

где p_hиp_0– давление газа на высоте h и h_0.

Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right),$$

где n – концентрация частиц; n_0 – концентрация частиц в точках, где $U = 0$,U – их потенциальная энергия.

Примеры решения задач

Пример 2.1 В баллоне объемом 1 л находится углекислый массой 3 г. Определить концентрацию молекул газа в сосуде.

Д а н о:	Решение
$m = 3$ г, $V = 1$ л.	Концентрация молекул
n– ?	

$$n = \frac{N}{V},$$

где N – число молекул в системе; V – объем системы. Количество молекул выразим из определения для количества вещества:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{m}{\mu} N_A.$$

Подставляя данное выражение в формулу для концентрации, получим

$$n = \frac{mN_A}{\mu V}.$$

Проверим размерность:

$$[n] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{(\text{кг/моль}) \cdot \text{м}^3} = \frac{1}{\text{м}^3}.$$

Проведем вычисления, учитывая, что $\mu = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$n = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{44 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} = 4{,}1 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

О т в е т: $n = 4{,}1 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Пример 2.2 В баллоне объемом 10 л находится гелий под давлением 1 МПа и при температуре 300 К. После того, как из баллона было взято 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до 290 К. Определить давление гелия, оставшегося в баллоне.

Дано:	Решение
$m = 10$ г, $V = 10$ л, $p_1 = 1$ МПа, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 290$ К. p_2–?	Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева − Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2,$$

где m_2 – масса гелия в баллоне в конечном состоянии; μ – молярная масса гелия; R – универсальная газовая постоянная.

Выразим искомое давление:

$$p_2 = \frac{m_2 R T_2}{\mu V}. \qquad (1)$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию газа, и массу гелия, взятого из баллона,

$$m_2 = m_1 - m. \qquad (2)$$

Масса m_1 гелия также находится из уравнения Менделеева − Клапейрона для начального состояния гелия

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{R T_1}. \qquad (3)$$

Подставив выражения для масс (2) и (3) в (1), найдем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{R T_1} - m \right) \frac{R T_2}{\mu V} = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{\mu} \frac{R T_2}{V}.$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу давления. Для этого в ее правую часть вместо символов величин подставляем их единицы. В правой части формулы два слагаемых. Первое из них дает единицу давления, т. к. первый сомножитель (T_2/ T_1) – безразмерный, а второй – давление. Проверим второе слагаемое:

$$\frac{[m][R][T]}{[\mu][V]} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{(\text{кг/моль}) \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Производим вычисления, учитывая, что $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$кг/моль:

$$p_2 = \frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \frac{8{,}31 \cdot 290}{10 \cdot 10^{-3}} = 0{,}364 \text{ МПа}.$$

Ответ: $p_2 = 0{,}364$ МПа.

Пример 2.3В сосуде находится смесь из кислорода (m_1 = 32 г) и азота (m_2 = 28 г). Найти плотность этой смеси при температуре t = 27 °C и давлении p = 600 кПа .

Д а н о:	Решение
m_1 = 32 г, m_2 = 28 г, T = 300 К, p= 600 кПа.	По закону Дальтона давление смеси газов $$p = p_1 + p_2,$$ где p_1 и p_2 – парциальные давления кислорода и азота, соответственно.
ρ– ?	Согласно уравнению Менделеева −Клапейрона

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \quad p_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT.$$

Сложим эти уравнения и, с учетом закона Дальтона, получим

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT.$$

Выразим из данного выражения объем сосуда:

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p},$$

тогда плотность смеси

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{(m_1 + m_2)}{\left(m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2\right)}\frac{p}{RT}.$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\dfrac{\text{кг}}{\text{кг/моль}}} \cdot \frac{\text{Па}}{\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па}}{\text{Дж}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н}}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Проведем вычисления, учитывая, что $\mu_1 = 32{\cdot}10^{-3}$ кг/моль и $\mu_2 = 28{\cdot}10^{-3}$кг/моль:

$$\rho = \frac{32 \cdot 10^{-3} + 28 \cdot 10^{-3}}{\dfrac{32 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{28 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} \frac{6 \cdot 10^5}{8{,}31 \cdot 300} = 7{,}2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = 7{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Пример 2.4Найти среднюю кинетическую энергию движения одной молекулы кислорода при температуре T = 350 К, а также кинетическую энергию движения всех молекул кислорода массой m = 4 кг.

Д а н о:	Решение
m = 4 кг, T = 350 К.	На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия
$\langle\varepsilon\rangle$– ? $E_к$ –?	

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где k – постоянная Больцмана;T – термодинамическая температура газа.

Поступательному движению двухатомной молекулы кислорода соответствуют три степени свободы, вращательному – две. Тогда средняя кинетическая энергия движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} kT. \quad (1)$$

Кинетическая энергия движения всех молекул газа

$$E_к = N \langle \varepsilon \rangle \quad (2)$$

Число всех молекул газа

$$N = \nu N_А = N_А \frac{m}{\mu}. \quad (3)$$

Подставив выражение для N в формулу (2), получаем

$$E_к = \frac{5}{2} \frac{mkN_А T}{\mu} = \frac{5m}{2\mu} RT. \quad (4)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2} 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 1,21 \cdot 10^{-20} \text{ Дж};$$

$$E_к = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 350 = 910 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = 1,21 \cdot 10^{-20}$ Дж; $E_к = 910$ Дж.

Пример 2.5 Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если наиболее вероятная скорость молекул газа составляет 478 м/с, а его плотность равна 0,02 кг/м^3.

Д а н о:
$\rho =$ 0,02 кг/м^3,
$v_в$ = 478 м/с.

p –?

Решение

Выразим давление из уравнения Менделеева – Клапейрона, учтем, что $m = \rho V$:

$$p = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{\rho RT}{\mu}.$$

Наиболее вероятная скорость молекул газа определяется формулой

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Отсюда получим

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{v_в^2}{2}.$$

Подставляя данное выражение в формулу для давления, найдем

$$p = \frac{\rho v_в^2}{2}.$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[p] = \frac{кг}{м^3} \cdot \frac{м^2}{с^2} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па.$$

Произведем вычисления:

$$p = \frac{0,02 \cdot 478^2}{2} = 2,3 \text{ кПа}.$$

Ответ: p = 2,3кПа.

Пример 2.6 Определить среднюю продолжительность свободного пробега молекул кислорода, если при температуре 250 К давление в сосуде 53 Па.

Д а н о:
p = 53 Па,
T = 250 К.

$\langle \tau \rangle$ –?

Решение

Средняя продолжительность свободного пробега молекул газа

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\langle z \rangle},$$

где $\langle z \rangle$ – среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Концентрацию молекул можно получить из выражения $p = nkT$, а средняя арифметическая скорость молекулы определяется формулой

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Учитывая всё вышесказанное, получим

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p d^2}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = \frac{k}{4pd^2}\sqrt{\frac{T\mu}{\pi R}}.$$

Произведем вычисления, принимая эффективный диаметр молекулы кислорода d = 0,36 нм:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}}{4 \cdot 53 \cdot (0{,}36 \cdot 10^{-9})^2}\sqrt{\frac{250 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 8{,}31}} = 2{,}78 \cdot 10^{-7}\ \text{с}.$$

Ответ: $\langle \tau \rangle = 2{,}78 \cdot 10^{-7}$с.

Пример 2.7 На какой высоте давление воздуха составляет 70% от давления на уровне моря? Температуру воздуха tсчитать не изменяющейся с высотой и равной 5 °С.

Д а н о:
$p = 0{,}7p_0$,
$t = 278$ К.

h–?

Решение

Давление на высоте h можно определить при помощи барометрической формулы

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{\mu g(h-h_0)}{RT}\right].$$

Учитывая, что в задаче $h_0 = 0$, получим

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left[-\frac{\mu g h}{RT}\right].$$

Прологарифмируем обе части выражения, а затем выразим искомую высоту

$$h = -\frac{RT}{\mu g}\ln\frac{p}{p_0}.$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[h]=\frac{\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot\text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}=\text{м}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль:

$$h=-\frac{8{,}31\cdot273}{29\cdot10^{-3}\cdot9{,}8}\ln0{,}7=2{,}8\,\text{км}.$$

Ответ: h = 2,8 км.

Задачи к контрольной работе

2.1 Два сосуда одинакового объема содержат кислород. В одном сосуде давление p_1 = 100 кПа и температура T_1 = 600 К, а в другом – p_2 = 150 кПа и T_2 = 200 К. Сосуды соединили и охладили находящийся в них кислород до T = 200 К. Определить установившееся в сосудах давление p.

2.2 Под давлением p_1 = 200 кПа находятся 20 г кислорода при температуре t_1 = 20 °С. Вследствие нагревания при постоянном давлении кислород расширился и занял объем V_2 = 10 л. Найти: объем газа V_1 до расширения; температуру T_2 газа после расширения; плотность ρ_1 газа до расширения; плотность ρ_2 газа после расширения.

2.3 В баллоне вместимостью V = 15 л находится аргон под давлением p_1 = 500 кПа и при температуре T_1 = 300 К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до p_2 = 250 кПа, и установиласьтемпература T_2 = 240 К. Определить массу m аргона, взятого из баллона.

2.4 Углекислый газ массой 10 г при температуре t_1 = 20°С находится под давлением p_1 =400 кПа. Вследствие нагревания при постоянном давлении углекислый газ расширился и занял объем V_2 = 6 л. Найти: объем газа V_1 до расширения; температуру T_2 газа после расширения; плотность ρ_1 газа до расширения; плотность ρ_2 газа после расширения.

2.5 Углекислый газ (CO_2) массой m_1 = 5 г и закись азота (N_2O) массой m_2 = 4 г заполняют сосуд объемом V = 2 дм^3. Каково общее давление в сосуде при температуре t = 127°С?

2.6 Баллон вместимостью V = 5 л содержит смесь гелия и водорода при давлении p = 500 кПа. Масса m смеси равна 5 г, массовая доля гелия ω_1 равна 0,4. Определить температуру T смеси.

2.7 В закрытом сосуде вместимостью $V = 2$ м^3 находятся вода массой $m_1 = 1{,}8$ кг и кислород массой $m_2 = 1{,}6$ кг. Найти давление p в сосуде при температуре $t = 400°$C, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар.

2.8 В сосуде вместимостью $V = 30$ л находится кислород при температуре $T = 300$ К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на 100 кПа. Определить массу m израсходованного кислорода. Процесс считать изотермическим.

2.9 В сосуде находится смесь из $m_1 = 20$ г углекислого газа и $m_2 = 30$ г азота. Найти плотность этой смеси при температуре $t = 27$ °C и давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Н/м^2.

2.10 В 1 кг сухого воздуха содержится $m_1 = 232$ г кислорода и $m_2 = 768$ г азота (массами других газов пренебрегаем). Определить молярную массу воздуха.

2.11 Определить среднее значение $\langle \varepsilon \rangle$ полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 300$ К.

2.12 Чему равна энергия E теплового движения всех молекул, содержащихся в $m = 30$ г кислорода при температуре $t = 20°$C? Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения и какая – на долю вращательного движения?

2.13 Определить кинетическую энергию $\langle \varepsilon_i \rangle$, приходящуюся в среднем на одну степень свободы i молекулы азота при температуре $T = 2$ К, а также среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_п \rangle$ поступательного движения, среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_в \rangle$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $\langle \varepsilon \rangle$одной молекулы.

2.14 При какой температуре T молекулы кислорода имеют такую же среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$, как молекулы водорода при температуре $T_1 = 100$ К?

2.15В азоте взвешены мельчайшие пылинки, которые движутся так, как если бы они были очень крупными молекулами. Масса каждой пылинки $m = 2 \cdot 10^{-10}$ г. Газ находится при температуре$T = 300$ К. Определить средние квадратичные скорости $\langle v_{кв} \rangle$ и средние кинетические энергии $\langle \varepsilon \rangle$ поступательного движения молекулы азота и пылинки.

2.16 Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекулы газа, заключенного в сосуд вместимостью V = 5 л под давлением p = 150 кПа. Масса газа m = 0,5 г.

2.17 Найти среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул водорода при давлении p = 0,5 Па и температуреT =100 К.

2.18 Найти среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых в течение t = 1 с молекулой кислорода при нормальных условиях.

2.19 Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на Δh = 10 м? Температура воздухаT = 300 К.

2.20 Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление p = 90 кПа. На какой высоте h летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление p_0 = 100 кПа? Считать, что температураT воздуха равна 290 К и не меняется с высотой.

2.2 Основы термодинамики

Основные законы и формулы

Связь между удельной (c) и молярной (C) теплоёмкостями:

$$C = c\mu,$$

где μ – молярная масса.

Молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме и постоянном давлении соответственно

$$C_V = \frac{i}{2}R; \quad C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

где i – число степеней свободы; R – универсальная газовая постоянная.Для одноатомной молекулы i = 3, для двухатомной молекулы i = 5, для многоатомной молекулы i = 6.

Уравнение Майера:

$$C_p - C_V = R.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu}C_V T.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}C_V \Delta T.$$

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона):

$$pV^{\gamma} = \text{const},\ TV^{\gamma-1} = \text{const},\ T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где γ – показатель адиабаты,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const},$$

где n – показатель политропы, $n = (C - C_p) / (C - C_V)$.

Элементарная работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$dA = pdV.$$

Работа, совершаемая газом при изменении его объёма, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

где V_1, V_2 – начальный и конечный объемы газа соответственно.

Работа при изобарическом процессе (p = const):

$$A = p\,(V_2 - V_1),$$

−при изотермическом (T = const):

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

−при адиабатном (ΔQ= 0):

$$A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right],$$

−при политропном (C = const):

$$A = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

где T_1, T_2, V_1, V_2, p_1, p_2 – соответственно начальные и конечные температуры, объемы и давления газа.

Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщённое газу; ΔU – изменение внутренней энергии газа; A – работа, совершённая газом против внешних сил.

Первое начало термодинамики при изобарном процессе:

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T,$$

−при изохорном (A = 0):

$$Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T,$$

−при изотермическом (ΔU = 0):

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

−при адиабатном (ΔQ = 0):

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

Закон Дюлонга и Пти: молярная теплоемкость химически простых твердых тел

$$C = 3R.$$

Молярная теплоемкость твердых химических соединений

$$C = 3nR.$$

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количествотеплоты, отданное системой; A – работа, совершаемая за цикл.

КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Холодильный коэффициент машины, работающей по обратному циклу Карно,

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{отв}}}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

где $Q_{\text{отв}}$ – количество теплоты, отведённое из холодильной камеры; A – совершённая работа; T_2 – температура более холодного тела (холодильной камеры); T_1 – температура более горячего тела (окружающей среды).

Энтропия – приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменение энтропии при равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Изменение энтропии идеального газа

$$\Delta S = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Изменение энтропии при изобарном процессе:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_p \ln\frac{T_2}{T_1},$$

–при изохорном:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1},$$

–при изотермическом:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R\ln\frac{V_2}{V_1},$$

–при адиабатном:

$$\Delta S = 0.$$

Термодинамическая вероятность и энтропия связаны выражением

$$S = k\ln W,$$

где k – постоянная Больцмана; W – термодинамическая вероятность.

Примеры решения задач

Пример 2.8 Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении неона и водорода, принимая эти газы за идеальные. Рассчитать также удельные теплоемкости смеси указанных газов, если массовые доли неона и водорода составляют 80 и 20 % соответственно.

Д а н о:

$\mu_1 = 20\cdot10^{-3}$ кг/моль,
$\mu_2 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль,
$\omega_1 = 0{,}8$,
$\omega_2 = 0{,}2$.

c_{V1} –? c_{V2} –? c_{p1} –? c_{p2} –? c_V –? c_p –?

Решение

Удельные теплоемкости идеальных газов определяются по формулам

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}.$$

Для неона (одноатомный газ) число степеней свободы $i = 3$, поэтому

$$c_{V1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{8{,}31}{20\cdot10^{-3}} = 624\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}};\ c_{p1} = \frac{5}{2}\cdot\frac{8{,}31}{20\cdot10^{-3}} = 1040\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i = 5$

$$c_{V2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{8{,}31}{2\cdot10^{-3}} = 1{,}04\cdot10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}};\ c_{p2} = \frac{7}{2}\cdot\frac{8{,}31}{2\cdot10^{-3}} = 1{,}46\cdot10^4\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}.$$

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме c_V найдем следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси наΔT, выразим двумя способами:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\,\Delta T;(1)$$

$$Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T.(2)$$

Приравнивая правые части (1) и (2) и разделив обе части полученного равенства наΔT, получим

$$c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2.$$

Отсюда $c_V = c_{V1}\dfrac{m_1}{m_1+m_2} + c_{V2}\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$, или $c_V = c_{V1}\omega_1 + c_{V2}\omega_2$,

где $\omega_1 = m_1 / (m_1 + m_2)$ и $\omega_2 = m_2 / (m_1 + m_2)$.

Рассуждая таким же образом, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p1}\omega_1 + c_{p2}\omega_2.$$

Произведем вычисления:

$$c_V = (6{,}24\cdot10^2\cdot0{,}8 + 1{,}04\cdot10^4\cdot0{,}2) = 2580\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$c_p = (1{,}04 \cdot 10^2 \cdot 0{,}8 + 1{,}46 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2) = 3752\ \text{Дж/(кг·К)}.$$

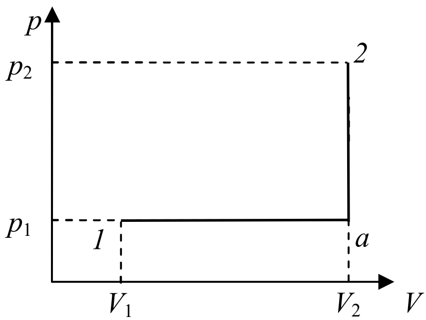
Ответ: c_{V1}=624 Дж/(кг·К);c_{p1} = 1040 Дж/(кг·К);c_{V2} = 1,04 ·10^4 Дж/(кг·К);c_{p2} = 1,46 · 10^4 Дж /(кг · К);c_V = 2580 Дж/(кг·К); c_p = 3752 Дж/(кг·К).

Пример 2.9Некоторая масса кислорода при давлении $p_1 = 10^5$ Па занимает объем V_1 =10 л. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема V_2 = 30 л, а затем при постоянном объеме до давления p_2= 0,5 МПа. Найти изменение внутренней энергии газа ΔU_{1a2}, совершенную им работу A_{1a2} и количество поглощенной газом теплоты Q_{1a2}.

Дано:
$p_1 = 10^5$ Па,
V_1=10 л,
V_2= 30 л,
p_2= 0,5 МПа.

ΔU_{1a2} –?A_{1a2} –?
Q_{1a2}–?

Решение



Физическую систему составляет идеальный газ – кислород. Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Поэтому изменение внутренней энергии при переходе из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях и не зависит от совокупности процессов, приведших к такому переходу системы:

$$\Delta U_{1a2} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right).$$

Здесь температура газа в начальном и конечном состояниях была выражена из уравнения Менделеева –Клапейрона.

Работа, совершенная газом в рассматриваемом случае,

$$A_{1a2} = A_{1a} + A_{a2}.$$

При изобарном процессе $A_{1a} = p_1(V_2 - V_1)$, при изохорном $A_{a2} = 0$. С учетом этого

$$A_{1a2} = p_1(V_2 - V_1).$$

В соответствии с первым законом термодинамики

$$Q_{1a2} = \Delta U_{1a2} + A_{1a2} = \frac{i}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) + p_1\left(V_2 - V_1\right).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta U_{1a2} = 14 \cdot 10^3 Дж;\ A_{1a2} = 2 \cdot 10^3 Дж;\ Q_{1a2} = 16 \cdot 10^3 Дж.$$

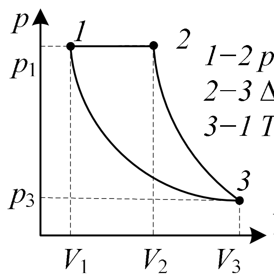
Ответ: $\Delta U_{1a2} = 14 \cdot 10^3$ Дж; $A_{1a2} = 2 \cdot 10^3$ Дж; $Q_{1a2} = 16 \cdot 10^3$ Дж.

Пример2.10Идеальный газ совершающий цикл, состоящий из изобарного, адиабатного и изотермического процессов. При изобарном процессе температура газа изменяется от T_1 = 400 К до T_2 = 800 К. Определить термический КПД цикла.

Д а н о:
T_1= 400 К,
T_2= 800 К.

η – ?

Решение



1–2 p = const
2–3 $\Delta Q = 0$
3–1 T = const

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \tag{1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой. Для данного цикла система получает тепло при изобарном процессе и отдает тепло при изотермическом процессе, т. е. $Q_1 = Q_{12}$, а $Q_2 = Q_{31}$.

Воспользуемся первым началом термодинамики для изобарного и изотермического процессов:

$$Q_{12} = \nu C_p \Delta T = \nu \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right), \tag{2}$$

$$Q_{31} = \nu R T_1 \ln\frac{V_3}{V_1}. \tag{3}$$

Запишем уравнения Пуассона для адиабатного процесса и закон Гей-Люссака для изобарного процесса:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Используя эти соотношения и тождество $T_1 = T_3$, найдем связь между объемами в состоянии *1* и в состоянии *3*:

$$V_1 = V_2 \frac{T_1}{T_2}, \quad V_2 = V_3 \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$V_1 = V_3 \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_3 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в формулу (3):

$$Q_{31} = \nu R T_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \nu R T_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{5}$$

Показатель адиабаты $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$, тогда выражение (5) примет вид

$$Q_{31} = \nu R T_1 \frac{i+2}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{6}$$

Подставляя (6) и (2) в (1), получим выражение для КПД:

$$\eta = \frac{\nu \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right) - \nu \frac{i+2}{2} R T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{\nu \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right)} = \frac{\left(T_2 - T_1\right) - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1}.$$

Вычисляя, находим:

$$\eta = \frac{800 - 400 - 400 \ln \frac{800}{400}}{800 - 400} = 0{,}31.$$

Ответ: $\eta = 0{,}31$.

Пример 2.11 Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу $A = 600$ Дж. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Определить термический КПД цикла и количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Дано:	Решение
$A = 600$ Дж, $T_1 = 500$ К, $T_2 = 300$ К.	Термический КПД цикла Карно $$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$
η – ? Q_2 – ?	Количество теплоты, отданное холодильнику, $$Q_2 = Q_1 - A,$$

где $Q_1 = A / \eta$ – количество теплоты, полученной от нагревателя.

Подставляя выражение для Q_1 в формулу для Q_2, получим

$$Q_2 = A\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = A\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1\right) = A\frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Вычисляя, находим

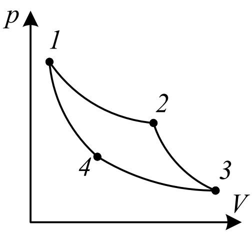
$$\eta = \frac{500 - 300}{500} = 0,4;\ Q_2 = 600\frac{300}{500 - 300} = 900\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\eta = 0,4$; $Q_2 = 900$ Дж.

Пример 2.12 Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,4. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 500 Дж.

Дано:	Решение
$\eta = 0,5$, $A_{12} = 400$ Дж.	Цикл Карно состоит из четырех процессов:
A_{34} – ?	

1–2 – изотермическое расширение;
2–3 –адиабатное расширение;
3–4 – изотермическое сжатие;
4–1 – адиабатное сжатие.



Термический КПД кругового процесса

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой. Для данного цикла система получает тепло при изотермическом расширении и отдает тепло при изотермическом сжатии, т. е. $Q_1 = Q_{12}$, а $Q_2 = Q_{34}$. Но по первому началу термодинамики для изотермического процесса $Q = A$, тогда для КПД получим

$$\eta = \frac{A_{12} - A_{34}}{A_{12}}.$$

Выражая работу сжатия, получим

$$A_{34} = (\eta - 1) A_{12}.$$

Размерность величины очевидна. Подставим численные значения:

$$A_{34} = (0,5 - 1) \cdot 500 = -250 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{34} = -250$ Дж.

Пример 2.13 Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой 10 г, если давление газа уменьшается от 100 кПа до 50 кПа.

Дано:
$m = 10$ г,
$p_1 = 100$ кПа,
$p_2 = 50$ кПа.
$\Delta S - ?$

Решение

Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический, определяется формулой

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T}. \tag{1}$$

Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, полученное газом, $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$. Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Подставив выражение для работы в формулу (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем

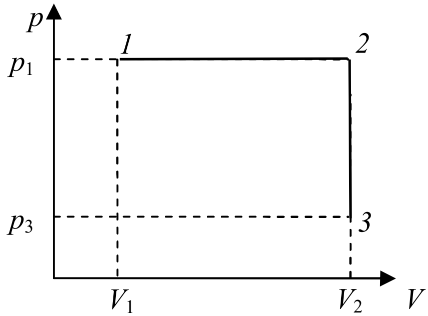
$$\Delta S = \frac{0,01}{0,028} \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{10^5}{0,5 \cdot 10^5} = 2,06 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 2,06$ Дж/К.

Пример 2.14 Определить изменение энтропии ΔS идеального газа $\nu = 2$ моль, если он был нагрет при постоянном давлении так, что его объем увеличился в 2 раза, а затем охлажден при постоянном объеме так, что его давление уменьшилось в 2 раза.

Д а н о:
$\nu = 2$ моль,
$p_1 = 2p_3$,
$V_2 = 2V_1$.
ΔS – ?

Решение



Изменение энтропиив процессе *1–3* складывается из изменения энтропии в процессе *1–2* и процессе *2–3*:

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}. \qquad (1)$$

По определению

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Для изобарного процесса *1–2* имеем

$$dQ = \nu C_p dT, \quad \Delta S_{12} = \nu C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Учитывая, что $T_2 / T_1 = V_2 / V_1$, получим

$$\Delta S_{12} = \nu C_p \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2)$$

Для изохорного процесса *2–3* имеем

$$dQ = \nu C_V dT, \quad \Delta S_{23} = \nu C_V \int_2^3 \frac{dT}{T} = \nu C_V \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Учитывая, что $T_3 / T_2 = p_3 / p_2$и $p_1 = p_2$,получим

$$\Delta S_{23} = \nu C_V \ln \frac{p_3}{p_1}. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1), а также применим свойства логарифмов и уравнение Майера:

$$\Delta S = \nu C_p \ln 2 + \nu C_V \ln\frac{1}{2} = \nu\left(C_p - C_V\right)\ln 2 = \nu R \ln 2.$$

Вычисляя, получим

$$\Delta S = 2\cdot 8{,}31\cdot \ln 2 = 11{,}5 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: ΔS = 11,5 Дж/К.

Задачи к контрольной работе

2.21 Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V$ некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг·К). Найти молярную массу μ газа и его удельные теплоемкости c_p и c_V.

2.22 Для некоторого двухатомного газа удельная теплоемкость при постоянном давлении c_p = 1,4·10^{3}Дж/(кг·К). Чему равна масса одного киломоля этого газа?

2.23 Вычислить удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_V неона и водорода, принимая эти газы за идеальные.

2.24 Трехатомный газ под давлением p = 250 кПа и температуре t = 27°С занимает объем V = 10 л. Определить молярную теплоемкость газа C_p при постоянном давлении.

2.25 Чему равны удельные теплоемкости c_p и c_V некоторого двухатомного газа, если плотность ρ этого газа при нормальных условиях равна 1,67 кг/м^3?

2.26 При адиабатическом сжатии кислорода массой m = 1 кг совершена работа A = 120 кДж. Определить конечную температуру T_2 газа, если до сжатия кислород находился при температуре T_1 = 320 К.

2.27 Водяной пар расширяется при постоянном давлении. Определить работуA расширения, если пару передано количество теплоты Q = 8 кДж.

2.28 Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщено количество теплоты Q = 18 кДж. Определить работуA, которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии.

2.29 Объем V водорода при изотермическом расширении при температуреT = 300 К увеличился в 3 раза. Определить работуA, совершенную газом, и теплоту Q, полученную газом при этом процессе. Масса m водорода равна 200 г.

2.30 Определить количество теплоты Q, которое надо сообщить кислороду объемом V = 30 л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на Δp = 0,3 МПа.

2.31 Какое количество теплоты Q выделится, если азот массой m = 5 г, взятый при температуре T = 300 К под давлением p_1 = 0,1 МПа, изотермически сжать до давления p_2 = 1 МПа?

2.32 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за каждый цикл от нагревателя теплоту Q_1 = 500 кДж. Температура нагревателя T_1 = 400 К, температура холодильника T_2 = 280 К. Найти работу A, совершаемую машиной за один цикл, и количество тепла Q_2, отдаваемого холодильнику.

2.33 Водород занимает объем V_1 = 20 м^3 при давлении p_1 = 0,1 МПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления p_2 = 0,2 МПа. Определить изменение внутренней энергии ΔU газа, работуA, совершенную газом, и количество теплоты Q, сообщенное газу.

2.34 Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя T_1 = 500 К, температура охладителя T_2 = 270 К. При изотермическом расширении газ совершает работу A = 110 Дж. Определить термический КПД цикла и количество теплоты Q_2, которую газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

2.35 Азот массой m = 10,5 г изотермически расширяется от объема V_1 = 2 л до объема V_2 = 5 л. Найти прирост энтропии ΔS при этом процессе.

2.36 Водород массой m = 6,6 г расширяют изобарически до удвоения объема. Найти изменение энтропии ΔS при этом расширении.

2.37 Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой m = 4 г от объема V_1 = 5 л до V_2 = 9 л.

2.38 Кислород массой m = 2 кг увеличил свой объем в 5 раз, один раз – изотермически, другой – адиабатически. Найти изменение энтропии ΔS в каждом из указанных случаев.

2.39При нагревании ν = 1 кмоля двухатомного газа его абсолютная температура T_1 увеличилась в 1,5 раза. Найти изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: 1) изохорически; 2) изобарически.

2.40 Кислород массой m = 10 г нагревается от температуры t_1 = 50 °С до температуры t_2 = 150 °С. Найти изменение энтропии ΔS, если нагревание происходит: 1) изохорически; 2) изобарически.

2.3 Реальные газы и особенности жидкого и твердого состояний вещества

Основные законы и формулы

Импульс, переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности площадью ΔS за время dt,

$$dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt,$$

где η – динамическая вязкость газа; dv/dz – поперечный градиент скорости течения его слоев.

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где ρ – плотность газа (жидкости).

Закон Ньютона для силы внутреннего трения (вязкости) между слоями площадью ΔS

$$F = -\eta \frac{dv}{dz} \Delta S.$$

Закон теплопроводности Фурье

$$\Delta Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S \Delta t,$$

где ΔQ–теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадку S за время Δt; dT / dx–градиент температуры; λ – теплопроводность, для газов

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

c_V – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме; ρ – плотность газа;$\langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$ – средняя арифметическая скорость и средняя длина свободного пробега молекул.

Закон диффузии Фика:

$$\Delta m = -D\frac{d\rho}{dx}S\Delta t,$$

где Δm – масса вещества, переносимая в результате диффузии через поверхность площадью S за время Δt; $d\rho / dx$ – градиент плотности; D – коэффициент диффузии; для газов

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Связь коэффициентов переноса и характеристик теплового движения молекул:

$$\eta = \rho D; \quad \frac{\lambda}{\eta c_V} = 1.$$

Собственный объем молекул, находящихся в ν молях газа

$$V' = \frac{\nu b}{4},$$

где b – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая объем молекул газа.

Внутреннее давление, обусловленное действием сил притяжения между молекулами газа,

$$p' = \frac{\nu a}{V^2},$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{\nu a}{V}\right).$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа):

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT,$$

где p–давление; m–масса;μ–молярная масса; V–объем; T–термодинамическая температура.

Связь критических параметров: объема, давления и температуры газа – с постоянными Ван-дер-Ваальса:

$$V_{кр} = 3b\frac{m}{\mu}; \quad p_{кр} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}.$$

Поверхностная энергия молекул

$$\Delta E = \alpha\, \Delta S,$$

где α–поверхностное натяжение (коэффициент поверхностного натяжения), ΔS – площадь поверхности жидкости.

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = \frac{F}{l},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур длиной l, ограничивающий поверхность жидкости.

При изотермическом увеличении площади поверхности плёнки жидкости на ΔS совершается работа

$$A = \alpha \Delta S.$$

Добавочное давление Δp, вызванное кривизной поверхности жидкости, выражается формулой Лапласа

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости.

В случае сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}.$$

Угол θ между касательными к поверхностям жидкости и твердого тела называетсякраевым углом,

$$\cos\theta = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}},$$

где поверхностные натяжения: α_{12}– между твердым телом и жидкостью; α_{13} – между твердым телом и газом; α_{23} – между газом и жидкостью.

Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; r – радиус трубки.

Высота поднятия жидкости в зазоре между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

При нагревании тела от 0 до t°C его длина (в первом приближении) изменяется от l_0 до l по закону

$$l = l_0\,(1 + \alpha_l t),$$

где α_l – коэффициент линейного расширения.

При нагревании тела от 0 до t°C его объем изменяется от V_0 до V по закону

$$V = V_0\,(1 + \alpha_V t),$$

где α_V – коэффициент объемного расширения ($\alpha_V \approx 3\alpha_l$).

Примеры решения задач

Пример 2.15 Определить температуру азота, если вследствие диффузии через площадку 50 см^2 за 40 с проходит 20 мг вещества. Градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, составляет 1 кг/м^4, а средняя длина пробега молекул азота– 1мкм.

Д а н о:

$S = 50$ см^2,
$\Delta t = 40$ с,
$m = 20$ мг,
$\frac{d\rho}{dx} = 1$ кг/м^4,
$\langle l\rangle = 1$ мкм.

T– ?

Решение

По закону Фика для диффузии

$$\Delta m = -D\frac{d\rho}{dx}S\Delta t,$$

где коэффициент диффузии D можно определить из выражения

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Подставим коэффициент диффузии и скорость в закон Фика и выразим температуру:

$$\Delta m = \frac{1}{3}\langle l\rangle\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{d\rho}{dx}S\Delta t, \quad T = \frac{\pi\mu}{8R}\left(\frac{3\Delta m}{\langle l\rangle S\Delta t(d\rho/dt)}\right)^2.$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[T]=\frac{\text{кг/моль}}{\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}}\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{кг/м}^4}\right)^2=\frac{\text{К}\cdot\text{кг}}{\text{Дж}\cdot\text{с}^2/\text{м}^2}=\frac{\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}=\text{К}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль:

$$T=\frac{3{,}14\cdot28\cdot10^{-3}}{8\cdot8{,}31}\left(\frac{3\cdot20\cdot10^{-6}}{1\cdot10^{-6}\cdot50\cdot10^{-4}\cdot40\cdot1}\right)^2=82\ \text{К}.$$

Ответ: T = 82 К.

Пример 2.16 Определить теплопроводность кислорода при температуре 300 К, если эффективный диаметр молекулы составляет 0,36 нм, а удельная теплоемкость газа 649 Дж/(кг·К).

Дано:
T = 300 К,
d = 0,36нм,
c_V = 649 Дж/(кг·К).
λ – ?

Решение

Теплопроводность для газов

$$\lambda=\frac{1}{3}c_V\rho\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

где c_V – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме; ρ – плотность газа; $\langle v\rangle$ и $\langle l\rangle$ – средняя арифметическая скорость и средняя длина свободного пробега молекул.

Средняя арифметическая скорость молекул газа и средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};\quad \langle l\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Подставляя эти формулы в теплопроводность и учитывая, что

$$n=\frac{\rho}{\mu}N_\text{A},$$

получим

$$\lambda=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{c_V\rho\mu}{\sqrt{2}\pi d^2\rho N_\text{A}}=\frac{2}{3}\frac{c_V}{\pi d^2 N_\text{A}}\sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}.$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[\lambda]=\frac{\text{Дж}\cdot\text{моль}}{\text{кг}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^2}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}^2\cdot\text{К}}}=\frac{\text{Дж}\sqrt{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}}{\text{кг}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Дж}\sqrt{\text{кг}^2\cdot\text{м}^2}}{\text{кг}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^2\sqrt{\text{с}^2}}=\frac{\text{Вт}}{\text{К}\cdot\text{м}}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль:

$$\lambda = \frac{2\cdot 649}{3\cdot 3{,}14\cdot(0{,}36\cdot 10^{-9})^2\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}\sqrt{\frac{8{,}31\cdot 300\cdot 32\cdot 10^{-3}}{3{,}14}} = 8{,}9\ \frac{\text{мВт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Ответ: λ = 8,9 мВт/(м·К).

Пример 2.17 Найти вязкость азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии $D = 1{,}42\cdot 10^{-5}$ м²/с.

Д а н о:	Решение
$D = 1{,}42\cdot 10^{-5}$ м^2/с, T = 273 К, $p = 10^5$Па.	Динамическая вязкость
η – ?	

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

где ρ – плотность газа (жидкости).

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Таким образом, вязкостьи коэффициент диффузии связаны соотношением

$$\eta = \rho D.$$

Плотность газа найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона, учтем, что $m = \rho V$:

$$p = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{\rho RT}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Отсюда получим

$$\eta = \frac{p\mu}{RT}D.$$

Произведя вычисления, учитывая $\mu = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль, получим

$$\eta = \frac{10^5\cdot 28\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}42\cdot 10^{-5}}{8{,}31\cdot 273} = 17{,}5\ \text{мкПа}\cdot\text{с}.$$

Ответ: η = 17,5 мкПа·с.

Пример 2.18 Найти среднюю длину свободного пробега молекул гелия, при давлении 105 кПа и температуре 273 К, если коэффициент теплопроводности λ = 0,14 Вт/(м·К).

Д а н о:
λ = 0,14 Вт/(м·К),
T = 273 К,
p = 105кПа.

$\langle l \rangle$– ?

Решение

Теплопроводность для газов

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме; ρ – плотность газа; $\langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$ – средняя арифметическая скорость и средняя длина свободного пробега молекул.

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Плотность газа найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона, как в предыдущем примере,

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu},$$

где число степеней свободы i = 3, т. к. гелий – одноатомный газ.

Подставим эти формулы в теплопроводность и выразим среднюю длину свободного пробега:

$$\langle l \rangle = \frac{3\lambda}{c_V \rho \langle v \rangle} = \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \frac{6\lambda\mu RT}{iRp\mu} = \frac{3\lambda}{ip}\sqrt{\frac{\mu\pi T}{R}}.$$

Проверим размерность полученного выражения:

$$[l] = \frac{\text{Вт}}{\text{К}\cdot\text{м}\cdot\text{Па}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{К}^2\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Дж}}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}} = \text{м}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль:

$$\langle l \rangle = \frac{3\cdot0{,}14}{3\cdot105\cdot10^3}\sqrt{\frac{4\cdot10^{-3}\cdot3{,}14\cdot273}{8{,}31}} = 0{,}86\ \text{мкм}.$$

Ответ: $\langle l \rangle$ = 0,86 мкм.

Пример 2.19 Найти добавочное давление Δp внутри мыльного пузыря диаметром d = 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано:	Решение
$d = 10$ см.	
Δp – ?	
A– ?	

Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности: внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки очень мала, диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$\Delta p = 2\frac{2\alpha}{R},$$

где R – радиус пузыря.

Так как $R = \dfrac{d}{2}$, то $\Delta p = \dfrac{8\alpha}{d}$.

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку при постоянной температуре, увеличить площадь ее поверхности на ΔS, выражается формулой

$$A = \alpha\Delta S = \alpha\left(S - S_0\right).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря, S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивающей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая S_0, получаем

$$A = \alpha S = 2\pi d^2\alpha.$$

Произведя вычисления, учитывая $\alpha = 40$ мН/м, получим

$$\Delta p = \frac{8\cdot 40\cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 3{,}2 \text{ Па};$$

$$A = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1^2\cdot 40\cdot 10^{-3} = 2{,}5\cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta p = 3{,}2$ Па; $A = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ Дж.

Пример 2.20 Вода по каплям вытекает из трубки внутренним радиусом 1 мм. Найти радиус капли в момент отрыва, если капля сферическая, а диаметр шейки капли в момент отрыва равен внутреннему диаметру капли.

Дано:	Решение
$r = 1$ мм.	
R– ?	

Чтобы капля оторвалась от трубки, нужно разорвать поверхностную пленку по длине окружности шейки, из условия задачи

$$l = 2\pi r.$$

Эта пленка разрывается под действием силы тяжести

$$mg = F = 2\alpha\pi r,$$

где F – сила поверхностного натяжения;m – масса оторвавшейся капли. Так как капля сферическая, то

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3,$$

тогда

$$\frac{4}{3}\rho\pi R^3 g = 2\alpha\pi r,$$

откуда получим выражение для радиуса капли

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\alpha r}{2\rho g}}.$$

Произведя вычисления, учитывая α = 73 мН/м, получим

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 73\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^{-3}}{2\cdot 1\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8}} = 2{,}2 \text{ мм}.$$

Ответ:R = 2,2 мм.

Пример 2.21В жидкость опущен капилляр с внутренним радиусом 2 мм. Определить поверхностное натяжение жидкости, в случае полного смачивания, если по капилляру поднялось 0,08 г этой жидкости.

Дано:

r = 2 мм,
m = 0,08 г.

α– ?

Решение

Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; r – радиус трубки. При полном смачивании θ = 0, тогда получим

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r}.$$

Масса поднятой жидкости m= ρV;V=Sh, а так как у пленки две стороны, тоS=$2\pi r^2$. Таким образом масса жидкости

$$m = 2\pi r^2 \rho h.$$

Подставим в эту формулу выражение для h и выразим поверхностное натяжение α:

$$m = 2\pi r^2 \rho \frac{2\alpha}{\rho g r} = \frac{4\pi r\alpha}{g}, \quad \alpha = \frac{mg}{4\pi r}.$$

Размерность величины очевидна. Подставим численные значения

$$\alpha = \frac{0,08 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{4 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,031\ \text{Н/м}.$$

Ответ: α = 0,031 Н/м.

Задачи к контрольной работе

2.41 Найти коэффициент теплопроводности λ воздуха при температуре t = 27 °C и давлении $p = 10^5$ Н/см^2. Диаметр d молекулы воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-8}$ см.

2.42 Найти коэффициент внутреннего трения η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии D для него при этих условиях равен 0,142 см^2/с.

2.43 Найти коэффициент теплопроводности λ водорода, если известно, что коэффициент внутреннего трения η для него при этих условиях равен $8,6 \cdot 10^{-6}$ (Н·с)/м^2.

2.44 Коэффициент диффузии углекислого газа при нормальных условиях D = 10 мм^2/с. Определить коэффициент внутреннего трения η углекислого газа при этих условиях.

2.45 Средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях равна 200 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.

2.46 Коэффициент диффузии D кислорода при температуре t = 0 °C равен 0,15 см^2/с. Определить среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул кислорода.

2.47 Найти массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку S = 100 см^2 за τ = 10 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, равен 1,26 кг/м^4. Температура азота t = 27°C, средняя длина свободного пробега молекул азота $\langle l \rangle = 10^{-5}$ см.

2.48 При каком давлении p отношение коэффициента внутреннего трения η некоторого газа к коэффициенту его диффузии D равно 0,4 г/л, а средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв} \rangle$ его молекул равна 650 м/с?

2.49 Найти коэффициент диффузии D и коэффициент внутреннего трения η воздуха при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $t = 10$ °С. Диаметр d молекул воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-10}$ м.

2.50 В сосуде объемом $V = 3$ л находится $N = 8 \cdot 10^{22}$ молекул некоторого двухатомного газа. Коэффициент теплопроводности данного газа $\lambda = 0{,}014$ Вт/(м·К). Найти коэффициент диффузии D газа при этих условиях.

2.51 При определении силы поверхностного натяжения капельным методом число капель глицерина, вытекающего из капилляра, составляет $n = 50$. Общая масса глицерина $m = 1$ г, а диаметр шейки капли в момент отрыва $d = 1$ мм. Определить поверхностное натяжение σ глицерина.

2.52 В спирт на малую глубину опускают стеклянную трубку с диаметром канала $d = 0{,}5$ мм. Найти массу m спирта, вошедшего в трубку. Считать смачивание полным.

2.53 Для определения поверхностного натяжения воды взвешивают капли, отрывающиеся от капилляра, и измеряют диаметр d шейки в момент отрыва. Оказалось, что масса $n = 318$ капель воды равна 5 г, а $d = 0{,}7$ мм. Найти поверхностное натяжение воды.

2.54 Глицерин поднялся в капиллярной трубке диаметром канала $d = 1$ мм на высоту $h = 10$ мм. Определить поверхностное натяжение глицерина. Считать смачивание полным.

2.55 В воду на очень малую глубинуопущена стеклянная трубка с диаметром канала $d = 0{,}6$ мм. Определить объем воды, вошедшей в трубку. Считать смачивание полным.

2.56 Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 200$ Па больше атмосферного. Определить диаметр d пузыря.

2.57 Воздушный пузырек диаметром $d = 0{,}02$ мм находится на глубине $h = 25$ см под поверхностью воды. Определить давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным.

2.58 Определить давление p внутри воздушного пузырька диаметром $d = 4$ мм, находящегося в воде у самой ее поверхности. Атмосферное давление $p = 101$кПа, температура$T = 293$ К.

2.59 Насколько давление p воздуха внутри мыльного пузыря больше нормального атмосферного давления p_0, если диаметр пузыря d = 5мм?

2.60 Воздушный пузырек диаметром d = 2,2мкм находится в воде у самой ее поверхности. Определить плотность воздуха ρв пузырьке, если воздух над поверхностью воды находится под давлением p = 101кПа при температуреT = 293 К.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Трофимова, Т. И.** Курс физики: учеб.пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 14-е изд., стер. – М.: Академия, 2007. – 560 с.

2Физика / И. И. Наркевич [и др.]. – Минск:Новое знание, 2004. – 680 с.

3 **Ташлыкова-Бушкевич, И. И.** Физика : учеб.для вузов. В 2 ч.Ч.1 : Механика, Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск:Выш. шк., 2014. – 303 с.

4 **Трофимова, Т. И.** Курс физики. Задачи и решения : учеб.пособие для учрежд. высш. проф. образования / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – 4-е изд., испр. – М. : Академия, 2011. – 592 с.

5 **Чертов, А. Г.** Физические величины: (Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) / А.Г. Чертов. – М.:Высш. шк., 1990. – 334 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Решая задачи, необходимо выполнить следующее:

1 Выбрать основные законы и формулы, которые используются при решении задачи, разъяснить буквенные обозначения, употребляемые при написании формул.

Если для решения задачи нужна формула, которая является частным случаем, не выражает физический закон или не является определением какой-нибудь физической величины, ее следует вывести.

2 При необходимости сделать чертеж или рисунок, поясняющий содержание задачи. Выполнить его нужно аккуратно, при помощи чертежных принадлежностей.

3 Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями.

4 Все величины, входящие в условие задачи, необходимо выразить в единицах СИ.

5 Решить задачу в общем (буквенном) виде – получить конечную расчетную формулу. Проверить правильность полученной формулы. Для этого подставить в правую часть формулы вместо обозначений величин наименования их единиц и проверить, получается ли в результате единица искомой величины. Верно полученная рабочая формула должна давать правильную размерность искомой величины.

6 В окончательную формулу, полученную в результате решения задачи в общем виде, подставить числовые значения, выраженные в единицах одной системы (СИ). Значения постоянных величин, которыми необходимо воспользоваться при решении задачи, смотреть в таблицах приложения Б.

7 Произвести вычисления величин, подставленных в формулу, руководствуясь правилами приближенных вычислений. Точность результатов не должна превышать точности исходных данных, в том числе и табличных. При необходимости представлять результат в виде степенной функции.

8 Оценить правдоподобность полученного результата.

9 Записать в ответе числовое значение и размерность единицы измерения искомой величины в системе СИ.

В отдельных случаях при решении громоздких задач целесообразно производить вычисления промежуточных величин.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

1 Некоторые физические постоянные (округленные значения)

Ускорение свободного падения .... g = 9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная................................ G = 6,67 · 10^{-11} м^3/(кг · с^2)
Постоянная Авогадро……………………………N_A = 6,02·10^{23} моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная…………………...R = 8,31 Дж/(моль · К)
Скорость света в вакууме .... c = 3,00 · 10^8 м/с
Постоянная Больцмана .... k = 1,38 · 10^{-23} Дж/К
Элементарный заряд .... e = 1,6 · 10^{-19} Кл
Атомная единица массы .... 1 а. е. м. = 1,66 · 10^{-27} кг

2 Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение	Наименование	Значение
Радиус Земли	6,37 · 10^6 м	Масса Солнца	1,98 · 10^{30} кг
Масса Земли	5,98 · 10^{24} кг	Радиус Луны	1,74 · 10^6 м
Радиус Солнца	6,95 · 10^8 м	Масса Луны	7,33 · 10^{22} кг

3 Плотность ρ твёрдых тел и жидкостей

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Алюминий	2,70	Вода (при 4 ºС)	1
Железо	7,88	Глицерин	1,26
Медь	8,93	Спирт	0,83

4 Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность λ, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	0,27	17,2	24,1
Гелий	0,22	18,9	142
Кислород	0,36	19,8	24,4

5 Динамическая вязкость η и поверхностное натяжение α жидкостей при 20°С

Вещество	η, мПа·с	α, мН/м	Вещество	η, мПа·с	α, мН/м
Бензол	0,6	29	Мыльная вода	–	40
Вода	1,00	73	Ртуть	1,58	500
Глицерин	1480	62	Спирт	1,19	22

6 Множители и приставки для образования десятичных, кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Приставка		
Обозначение	Наименование	Множитель	Обозначение	Наименование	Множитель
Т	тера	10^{12}	с	санти	10^{-2}
Г	гига	10^{9}	м	милли	10^{-3}
М	мега	10^{6}	мк	микро	10^{-6}
к	кило	10^{3}	н	нано	10^{-9}
д	деци	10^{-1}	п	пико	10^{-12}

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение………………………………………………………………. 3
1 Механика……………………………………………………………. 4
1.1 Элементы кинематики и динамики поступательного движения…. 4
1.2 Законы сохранения в механике, работа и энергия………….……... 18
1.3 Элементы динамики вращательного движения твердого тела.…... 29
2 Молекулярная физика и термодинамика…………………………….. 43
2.1 Основы молекулярной физики…..…………………………….. 43
2.2 Основы термодинамики…..…………………………………… 54
2.3 Реальные газы и особенности жидкого и твердого состояний вещества……………………………………………………….…….. 67
Список рекомендуемой литературы ……………………………... 78
Приложение А. Методические указания при решении задач…………… 79
Приложение Б. Справочные таблицы…………………………………….. 80

Учебное издание

ДЕЛИКАТНАЯ Ирина Олеговна
ШИЛЯЕВА Ксения Павловна

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Пособие

Редактор А. А. Павлюченкова
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 28.06.2022 г. Формат $60x84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 26. Тираж 150 экз.
Зак. № 1429. Изд. № 26.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель