УДК 621.391

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

Н.Ф. СЕМЕНЮТА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Последовательности рекуррентных чисел Фибоначчи и Люка являются основой многих объектов природы, науки и техники [1–3]. К сожалению, ни наши школьные, ни вузовские программы математики не уделяют должного внимания последовательностям чисел Фибоначчи и Люка и связанному с ними «золотому сечению», в то время как в США числам Фибоначчи и Люка посвящены многие фундаментальные работы [4–7]. В связи с этим обратим внимание, что еще Иоганн Кеплер (1571–1630) поставил «золотое сечение» на один уровень с «теоремой Пифагора», одной из самых известных геометрических теорем. Но если теорему Пифагора знает каждый школьник и инженер, то, по мнению Кеплера, они должны также хорошо знать и «золотое сечение» как междисциплинарную математическую основу. И наш первый шаг должен состоять в том, чтобы ввести в школьные и вузовские программы отдельных дисциплин (математики, физики, химии, ботаники, зоологии, архитектуры, электротехники, сопротивлениея материалов, менеджмента и др.) разделы по «золотому сечению». В этих разделах школьникам и студентам будет важно узнать о красоте природы и техники, о «золотых» прямоугольниках и треугольниках, пентаграмме, «Платоновых телах», икосаэдре и додекаэдре и др.

В предлагаемой работе рассмотрено проявление чисел Фибоначчи и Люка и «золотого сечения» в теории электрических цепей и связанных с электрическими цепями гиперболическими последовательностями чисел Фибоначчи и Люка.

Основой последовательности чисел Фибоначчи является рекуррентное соотношение $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, с двумя начальными числами $F_1 = 1$, $F_2 = 1$:

F_{-6}	F_{-5}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
–5	–3	2	–1	1	0	1	1	2	3	5	8

Основой последовательности чисел Люка является рекуррентное соотношение $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ с двумя начальными числами $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$:

L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
–4	3	–1	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Отношения чисел Фибоначчи и Люка в пределе ($n \to \infty$) равно «золотому» сечению («золотому» числу):

$$\varPhi = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

Характеристическим уравнением последовательности Фибоначчи является так называемое «золотое» уравнение:

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

корни которого, равны золотому сечению $x_1 = \Phi = 1{,}618$, $x_2 = -1/\Phi = -0{,}618$.

Корни уравнения связаны также с показательными и гиперболическими функциями:

$$x_1 = \Phi = e^{\gamma} = \operatorname{ch}\gamma + \operatorname{sh}\gamma = 1{,}618, \quad x_2 = -\Phi^{-1} = -e^{-\gamma} = \operatorname{sh}\gamma - \operatorname{ch}\gamma = -0{,}618,$$

$$\ln x_1 = \ln \Phi = 0{,}48121 \ldots = \gamma,$$

$$\operatorname{sh}\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{ch}\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Из решения рекуррентных соотношений чисел Фибоначчи следуют формулы связи чисел Люка и Фибоначчи с «золотым» сечением, известные как формулы Бине [2]:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^n}{\Phi + \Phi^{-1}} = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^n}{\sqrt{5}}, \qquad L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n},$$

а также новые формулы связи с показательными и гиперболическими функциями:

$$F_n = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{2\operatorname{ch} n\gamma}{\sqrt{5}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$F_n = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{2\operatorname{sh} n\gamma}{\sqrt{5}}, \qquad n = 2, 3, 6, \ldots,$$

$$L_n = e^{\gamma n} - e^{-\gamma n} = 2\operatorname{sh} n\lambda, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$L_n = e^{\gamma n} + e^{-\gamma n} = 2\operatorname{ch} n\gamma, \qquad n = 2, 3, 6 \ldots$$

Из полученных формул следуют связи гиперболических функций с корнями характеристического уравнения, показательными функциями и числами Фибоначчи и Люка:

$$\operatorname{ch} n\gamma = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{\gamma n} + e^{-\gamma n}}{2} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2} = \frac{F_n\sqrt{5}}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\operatorname{sh} n\gamma = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2} = \frac{F_n\sqrt{5}}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$\operatorname{sh} n\gamma = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2} = \frac{L_n}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\operatorname{ch} n\gamma = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2} = \frac{L_n}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

а также новые рекуррентные гиперболические последовательности типа Фибоначчи и Люка:

$$\begin{array}{cccccc} & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & (\operatorname{ch} 1\gamma & \operatorname{sh} 2\gamma & \operatorname{ch} 3\gamma & \operatorname{sh} 4\gamma & \operatorname{ch} 5\gamma \ldots), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 \\ & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 \\ 2 & (\operatorname{sh} 1\gamma & \operatorname{ch} 2\gamma & \operatorname{sh} 3\gamma & \operatorname{ch} 4\gamma & \operatorname{sh} 5\gamma \ldots). \end{array}$$

Последовательности гиперболических функций типа Фибоначчи и Люка образуются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\operatorname{sh} n\gamma = \operatorname{ch} (n-1)\gamma + \operatorname{sh} (n-2)\gamma, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$
$$\operatorname{ch} n\gamma = \operatorname{sh} (n-1)\gamma + \operatorname{ch} (n-2)\gamma, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Гиперболические функции могут быть вычислены также по формулам:

$$\operatorname{ch} n\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\operatorname{ch}(n+1)\gamma + \operatorname{ch}(n-1)\gamma\right],$$

$$\operatorname{sh} n\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\operatorname{sh}(n+1)\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\gamma\right].$$

Полученные результаты являются основой для дальнейших исследований реальных процессов в однородных системах с распределенными постоянными (электрических, тепловых, гидравлических биологических и др.). И еще. В уравнении рассматривался только положительный корень. Перспективной и фактически уже назревшей стала проблема исследования гиперболических функций Фибоначчи и Люка с отрицательными и комплексными корнями. Важность такого исследования состоит в том, что во многих случаях начаты исследования биоэлектрических цепей и ДНК, основными элементами которых являются комплексные сопротивления, состоящие из резисторов и емкостей (RC-цепи). Начинается новый этап математической теории гармонии биоэлектрических цепей применительно к нейронным сетям передачи биоинформации, био- и нанотехнологиям [8, 9].

Список литературы

1 **Семенюта, Н.Ф.** Золотая пропорция в природе и искусстве / Н.Ф. Семенюта, В.Л. Михаленко. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 82 с.

2 **Семенюта, Н.Ф.** Гармонические пропорции в науке и технике / Н.Ф. Семенюта. – Гомель : БелГУТ, 2012. – 172 с.

3 **Семенюта, Н.Ф.** Гиперболические функции последовательностей чисел Фибоначчи и Люка // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ. 27322, 10.09.2021.

4 **Hoggatt, V.E.** Fibonacci and Lucas Numbers / V.E. Hoggatt. – Boston : Houghton-Mifflin, 1969.

5 **Vajda, S.** Fibonacci & Lucas Nambers and Golden Section. Theory and Applications / S. Vajda // Elis Harward. – 1989.

6 **Koshe, T.** Fibonacci and Lucas Nambers with Applications / T. Koshe. – New York, Wiley. – 2001. – 678 p.

7 **Stakhov, A.** The mathematics of harmony: from Euclid to Contemporary mathematics end computer science / A. Stakhov. – Singapore : World Scientific Publishing. – 2009. – 676 p.

8 **Marshall, R.** Modeling DNA/RNA Strings using Resistor-Capacitor (RC) Ladder Neworks / R. Marshall // The computer Journal, 2010. – Vol. 53. – No 6.

9 **Ke-Lin, Du.** M.N.S. Swamy. Neural Networks and Statistical Learning / Du Ke-Lin, M.N.S. Swamy. – London : Springer Verlag, 2014. – 818 p.

УДК 372.851+372.853

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ФИЗИКЕ

З.Н. СЕРАЯ, А.И. СЕРЫЙ
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка занимают важное место в курсе высшей математики, поскольку находят многочисленные приложения, в том числе в физике. Ограничимся рассмотрением уравнений вида (где t – время)

$$dx/dt = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 . \qquad (1)$$

Конкретные примеры представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – **Примеры, соответствующие** $A_0 = 0$

Случай	Примеры в физике	Пояснения
$A_1 = 0,$ $A_2 = 0$	а) Движение с постоянной скоростью υ; б) Движение с постоянным ускорением a	а) $x = \upsilon$; б) $x = a$
$A_1 = 0,$ $A_2 \neq 0$	Изменение концентрации n ионов в газе после отключения ионизатора	$x = n$, $A_2 = -\alpha$, где α – коэффициент рекомбинации [1, с. 501]