М. Герсеванов

КУРСЪ СТАТИКИ

ГРАФИЧЕСКОЙ и ОБЫКНОВЕННОЙ.

ЧАСТЬ I.

СОСТАВИЛЪ
Н. А. БОГУСЛАВСКІЙ,
Инженеръ Путей Сообщенія.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ,
Типографія Ю. Н. Эрлихъ. Большая Садовая, № 9.
1886.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ Институтѣ Путей Сообщенія, 2-й годъ читается графическая статика, по инициативѣ директора Михаила Николаевича Герсеванова. Чтеніе лекцій по графической и обыкновенной статикѣ поручено мнѣ. Я старался изложить принципы обыкновенной статики, исходя изъ графическихъ построеній, и, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, это пришлось сдѣлать самостоятельно.

Обработка курса всегда дѣло нелегкое и всегда является результатомъ долговременнаго преподаванія. Въ данномъ-же случаѣ, какъ разъ наоборотъ,—на 2-й годъ чтенія, я долженъ былъ начать печатаніе курса, чтобы дать студентамъ руководство. Вслѣдствіе этого нѣкоторыми мѣстами напечатаннаго я совершенно не доволенъ въ настоящее время, и поэтому смотрю на изложенную здѣсь часть, какъ на матеріалъ для будущаго курса, къ обработкѣ котораго приложу посильныя старанія.

При составленіи этого курса я пользовался слѣдующими сочиненіями: Элементы графической статики Баушингера. Переводъ А. А. Недзялковскаго. 1872 г.—Основанія статики. Сочиненіе Л. Пуансо. Переводъ съ X изданія В. И. Ассонова.—La statique graphique et ses applications aux constructions, par Levy. 1874.—Traité de mécanique par E. Collignon. Deuxième partie. Statique. 1881.

Извиняюсь за большое число опечатокъ, которыя убѣдительно прошу исправить, прежде чѣмъ начать чтеніе.

Богуславскій.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Курсъ статики,

Экстраординарнаго профессора Н. Ар. Богуславскаго.

---

1. Изложенiе статики, какъ и всей механики, обыкновенно основываютъ на трехъ началахъ. Эти начала можно назвать аксiомами механики. Они играютъ такую же роль, какъ постуляты Эвклида въ теорiи параллельныхъ линiй.

2. Первое изъ трехъ началъ или законовъ механики это начало инерцiи. Это начало выражаютъ такъ: если тѣло находится въ покоѣ, то оно не можетъ выйти изъ состоянiя покоя само собою, безъ посторонней причины; если оно движется, то также оно не можетъ измѣнить направленiе или скорость своего движенiя безъ посторонней причины.

Инерцiя матерiи въ состоянiи покоя есть свойство общее и очевидное. Еще древнiе имѣли точное понятiе о ней, и они давали названiе инерцiи каждой неодушевленной матерiи, когда желали выразить, что она не заключаетъ въ себѣ самой никакого элемента скрытаго движенiя. Инерцiя матерiи въ состоянiи движенiя не такъ очевидна. Начало инерцiи матерiи при движенiи принадлежатъ близкимъ къ намъ временамъ и обязано своимъ открытiемъ новой динамикѣ, созданной въ семнадцатомъ столѣтiи Галлилеемъ, Ньютономъ и Гюйгенсомъ.

Въ природѣ не существуетъ тѣлъ, находящихся въ совершенномъ абсолютномъ покоѣ: покой есть только особый видъ движенiя.

Причина, измѣняющая покой или движенiе тѣла, называется обыкновенно *силою*.

3. Второе начало или законъ—это начало независимости дѣйствiя однѣхъ силъ относительно другихъ, а также независимости движенiя прежде прiобрѣтеннаго.

Для того, чтобы найти дѣйствіе, произведенное силою приложенною къ матеріальной точкѣ, находящейся въ движеніи и побуждаемой другими силами, нужно искать на основаніи этого начала, какое дѣйствіе произведетъ эта новая сила на точку, находящуюся въ покоѣ, независимо отъ всѣхъ другихъ силъ; затѣмъ содинить послѣдовательно всѣ дѣйствія одного порядка, которыя были опредѣлены отдѣльно.

4. Матеріальною точкою называютъ тѣло, мысленно уменьшенное до столь малыхъ размѣровъ, что его можно приравнивать къ геометрической точкѣ. Матеріальная точка не имѣетъ опредѣленной формы. Если тѣло разложить на безконечное число частей то получится безконечное число матеріальныхъ точекъ, безконечно малыхъ по всѣмъ измѣреніямъ. Обратно, соединеніе такихъ матеріальныхъ точекъ образуетъ тѣло.

5. Третье начало механики состоитъ въ равенствѣ дѣйствія и противудѣйствія; оно открыто Ньютономъ. Объяснимъ примѣромъ, въ чемъ онъ заключается.

Тяжелое тѣло, находящееся, напр., на столѣ, давитъ на столъ всею своею тяжестью; это есть *дѣйствіе*, представляющее собою результатъ тяжести и направлено вертикально сверху внизъ. Столъ, въ свою очередь, дѣйствуетъ на тѣло по вертикальному направленію, но снизу вверхъ, представляя давленіе равное и противоположное *дѣйствію*, которому оно подвержено. Это давленіе называется *противудѣйствіемъ*.

Тяжесть тѣла стремится его опустить внизъ и давитъ на столъ, а обратное дѣйствіе стола, въ силу третьяго начала, равное и противуположное *дѣйствію*, вызываетъ давленіе стола на тѣло. Вслѣдствіе дѣйствія этихъ двухъ силъ равныхъ и противоположныхъ, тѣло, лежащее на столѣ, остается въ равновѣсіи.

Въ силу третьяго начала оказывается, что, напр., человѣкъ не можетъ собственною силою поднять себя. Чтобы произвести подобный опытъ, человѣкъ прикладываетъ къ своему тѣлу извѣстную силу, стремящуюся его поднять. Но этой силѣ соотвѣтствуетъ противодѣйствіе равное и противоположное, и такъ какъ эти двѣ силы принадлежатъ той же матеріальной системѣ, т.-е. тѣлу экспериментатора, то одна сила разрушаетъ движеніе, которое старается сообщить ему другая.

Если тяжелое тѣло будетъ въ движеніи, то третье начало дѣлается менѣе очевиднымъ, но все-таки оно будетъ имѣть мѣсто. Тѣло будетъ подвергаться каждый моментъ со стороны стола противодѣйствію, равному и противоположному дѣйствію, но не всегда можно будетъ сказать съ вѣрностью, что это дѣйствіе равно тяжести тѣла.

6. Чтобы формулировать болѣе ясно начало дѣйствія и противодѣйствія, изложимъ кратко частичную теорію, служащую въ настоящее время основаніемъ всей физики.

Обыкновенно полагаютъ, что всѣ тѣла, находящіяся во вселенной, будь они твердыя, жидкія или газообразныя, составлены каждое соединеніемъ безконечно большаго числа весьма малыхъ частицъ, называемыхъ молекюлями или атомами, отдѣленными другъ отъ друга промежутками. Величина промежутковъ того же порядка, какъ и измѣренія молекюлей. Въ твердыхъ тѣлахъ расположеніе молекюлей таково, что надо большое усиліе, чтобы замѣтно измѣнить ихъ взаимныя положенія. Тѣла жидкія и газообразныя, носящія общее наименованіе тѣлъ жидкихъ, напротивъ того, составлены изъ молекюлей, отдѣляющихся другъ отъ друга безъ всякаго труда, такъ что въ этомъ случаѣ молекюли можно разсматривать, какъ свободно скользящія однѣ по другимъ. Поэтому этого рода тѣла не имѣютъ сами по себѣ внѣшнихъ опредѣленныхъ формъ.

Атомы такъ малы, что съ точки зрѣнія механики ихъ возможно сравнивать, безъ всякой ошибки, съ матеріальными точками. Но между атомомъ и матеріальной точкой есть большая разница: матеріальная точка принадлежитъ фиктивному предмету, геометрически опредѣленному, существующему только въ умѣ, между тѣмъ какъ атомъ представляетъ собою предметъ физическій, дѣйствительно существующій.

Естественныя силы устанавливаютъ связь между всѣми атомами на основаніи закона дѣйствія и противодѣйствія. Разсмотримъ въ частности двѣ частицы A и B. Допустимъ, что каждая изъ нихъ вызываетъ дѣйствіе одна относительно другой, что это дѣйствіе направлено по соединяющей ихъ прямой AB, что дѣйствіе A на B равно и противоположно дѣйствію B на A, что, наконецъ, это взаимное дѣйствіе измѣняется съ разстояніемъ AB по извѣстному закону. Назовемъ дѣйствіе B на A силою P, направленною отъ

A къ B, дѣйствіе A на B силою P, равною и противоположною P и направленною отъ B къ A. Этого рода взаимныя дѣйствія называются *притяженіемъ*.

Если дѣйствіе A на B есть сила P, направленная по продолженію прямой AB, то дѣйствіе B на A будетъ сила P, равная и противоположная P и направленая по продолженію BA. Эти взаимныя дѣйствія называются *отталкиваніемъ*. Но отталкиваніе или притяженіе суть дѣйствія всегда *взаимныя*, т. е. равныя и противоположныя, въ силу третьяго начала.

Каждый атомъ вселенной дѣйствуетъ на всѣ другіе атомы и вмѣстѣ съ тѣмъ подвергается со стороны этихъ послѣднихъ дѣйствіямъ, равнымъ и противоположнымъ. Вслѣдствіе начала инерціи тѣло не можетъ самопроизвольно измѣнять свое движеніе или свой покой. Частичная теорія предполагаетъ, что каждый атомъ дѣйствуетъ на всѣ другія его окружающіе, которыя, въ свою очередь, обратно дѣйствуютъ на него самого.

Если, какимъ нибудь образомъ, разстояніе AB между двумя атомами A и B сдѣлается неизмѣняемымъ, то, въ силу начала дѣйствія и противодѣйствія, дѣйствіе, оказываемое точками A и B другъ на друга, никоимъ образомъ не способствуетъ движенію системы, составленной изъ этихъ двухъ точекъ. Ибо, если одна изъ силъ P стремится увлечь систему въ направленіи AB, то сила равная и противоположная P стремится увлечь систему въ направленіи противоположномъ.

7. Силы, приложенныя къ различнымъ точкамъ матеріальной системы, могутъ быть раздѣлены на два класса: на силы *внутреннія* и *внѣшнія*. Внутреннія силы происходятъ отъ дѣйствія точекъ системы однѣхъ на другія; силы эти бываютъ всегда двойныя, взаимныя или парныя. Каждой соотвѣтствуетъ сила равная и противоположная. Внѣшнія силы происходятъ отъ дѣйствія тѣлъ, расположенныхъ извнѣ. Внѣшнія силы разсматриваются какъ силы отдѣльныя, тогда какъ силы внутреннія образуютъ группы парныхъ силъ.

Внутренняя сила для данной системы можетъ сдѣлаться внѣшней, когда, вслѣдствіе частнаго разложенія системы, двѣ точки, между которыми дѣйствуетъ эта сила и сила равная и противоположная будутъ изолированы одна отъ другой. Напримѣръ, тяжесть тѣла, находящагося на поверхности земли, и противудѣйствіе земли на тѣло, составляютъ группу внутреннихъ взаимныхъ силъ, въ системѣ, заключающей въ себѣ совокупность тѣла и земли. Тяжесть тѣла есть сила внѣшняя по отношенію къ другимъ тѣламъ, взятымъ отдѣльно.

8. Сила, дѣйствуя на тѣло или матеріальную точку, можетъ быть на столько значительна, что заставитъ тѣло двигаться. Но какой бы путь тѣло ни описывало при своемъ движеніи, этотъ путь всегда можно считать состоящимъ изъ прямыхъ линій.

Поэтому напряженность силы можетъ быть измѣряема прямою линіею. Этою же линіею можетъ также опредѣляться и направленіе движенія. И такъ можно сказать, что сила вполнѣ опредѣлена, когда извѣстна ея точка приложенія, ея направленіе дѣйствія, ея напряженность и положеніе въ пространствѣ. Пусть А будетъ точка приложенія силы, АС—направленіе дѣйствія; возьмемъ на этомъ направленіи, начиная отъ точки А, длину АВ, равную силѣ Р, отложенную въ нѣкоторомъ опредѣленномъ маштабѣ, принятомъ для выраженія напряженности силъ. Опредѣленная прямая АВ представитъ все, что необходимо, чтобы знать вполнѣ опредѣленно силу Р.

Для того же, чтобъ не смѣшать данную силу съ силой равной и ей противоположной приписываютъ одной силѣ знакъ +, который въ большинствѣ случаевъ не ставится, а подразумѣвается. Другой силѣ приписывается знакъ —; сила Р, разсматриваемая какъ положительная, представитъ силу равную и противоположную силѣ — Р. Знакъ — означаетъ только то, что силы Р и — Р дѣйствуютъ одна относительно другой въ противоположномъ направленіи.

Для различія силъ между собою будемъ ихъ обозначать буквою Р съ различными знаками 1, 2, 3 . . . n и будемъ ставить эти значки въ концѣ длины, изображающей силу. Точку приложенія силъ будемъ обозначать буквою А со значками 1, 2, 3 . . . n этимъ самымъ будетъ также обусловливаться и направленіе дѣйствія силы. Въ иныхъ случаяхъ мы будимъ ставить для обозначенія дѣйствія силы стрѣлки на направленіи силы.

Если-же нѣсколько линій, представляющихъ собою силы, будутъ размѣщены одна за другою, такъ что конецъ одной совпадетъ съ началомъ другой, то мы ограничимся постановкою у начальной точки первой силы 0, а у конца каждой силы числа 1, 2, 3, (чер. 1 и 2)

При этомъ, если даже не будетъ поставлено стрѣлки, неопредѣленности никакой не произойдетъ; такъ напр. сила P_4 будетъ изображаться линіей (3, 4) и направленіе дѣйствія ея будетъ отъ 3 къ 4.

Если направленіе и величину будемъ изображать опредѣленными прямыми линіями, то напряженіе силъ выразится пропорціональными частями прямыхъ или числами, выражающими мѣру этихъ частей прямыхъ. Такимъ образомъ, мы можемъ установить понятіе о величинѣ силы, взявъ какую нибудь изъ нихъ за единицу мѣры силъ.

9. Силы, будучи величинами, подчиняются математическому анализу, т. е. къ нимъ могутъ быть приложимы и истины геометріи, и истины анализа, и потому по отношенію къ нимъ могутъ быть предложены такія задачи:

Даны тѣла или система тѣлъ; спрашивается какое движеніе приметъ эта система подъ вліяніемъ дѣйствія данныхъ силъ постоянныхъ или измѣняемыхъ? Или какія силы надо приложить къ этому тѣлу или системѣ для того, чтобы она приняла данное движеніе?

Задача равновѣсія есть частный случай этой общей задачи и можетъ быть выражена такъ: *на тѣло или систему тѣлъ дѣйствуютъ данныя силы; какимъ условіямъ должны удовлетворять эти силы для того, чтобы тѣло или система оставалась въ равновѣсіи?*

Въ предстоящемъ курсѣ мы будемъ заниматься разсматриваніемъ задачи равновѣсія, составляющей задачу *статики*.

10. Когда нужно найти отношенія между данными силами, приложенными къ какой либо системѣ, находящейся въ равновѣсіи, то откидываютъ всѣ тѣла системы и предполагаютъ, что остаются только однѣ точки приложенія силъ, связанныя неизмѣнно между собою. Такимъ образомъ, при выводѣ условій равновѣсія, ни объемъ, ни вѣсъ тѣлъ не принимается въ разсмотрѣніе.

Но вѣсъ тѣлъ можно разсматривать также какъ силы, и потому законы статики могутъ быть приложены также къ равновѣсію тяжелыхъ тѣлъ, находящихся въ природѣ.

Матеріальная точка, совершенно свободная въ пространствѣ и находящаяся въ покоѣ, остается неизмѣнно въ покоѣ, если она не побуждается никакой силой. Эта точка принимаетъ извѣстное движеніе подъ вліяніемъ дѣйствія силы, и какъ бы сила ни была мала, она стремится привести точку въ движеніе, и движеніе это произойдетъ въ направленіи самой силы.

Если точка побуждается заразъ двумя силами, то точка или принимаетъ извѣстное движеніе по особому направленію, или она останется въ покоѣ. Когда двѣ силы, дѣйствующія на свободную или несвободную точку, равны и противоположны, то очевидно уничтожаютъ другъ друга. Это же выражаютъ такъ:

Теорема. *Двѣ силы равныя, приложенныя къ одной точкѣ и дѣйствующія въ разныя стороны, уравновѣшиваются.*

11. На основаніи этой теоремы легко доказать еще слѣдующую:

Теорема. *Двѣ силы, равныя и противоположныя, приложенныя къ концамъ прямой линіи не измѣняемой длины и дѣйствующія по направленію этой прямой, находятся въ равновѣсіи.*

Въ самомъ дѣлѣ, дѣйствіе данныхъ силъ можетъ обнаружиться лишь тѣмъ, что разстояніе между точками, къ которымъ силы приложены можетъ увеличиться или уменьшиться. Но по условію разстояніе это неизмѣняемо, слѣдовательно дѣйствіе силъ не можетъ обнаружиться, т. е. онѣ должны уравновѣситься.

12. **Теорема:** *Дѣйствіе силы на тѣло не измѣнится въ какой бы точкѣ своего направленія сила не была приложена.*

Положимъ, къ тѣлу приложена сила P въ точкѣ A. Для доказательства высказанной теоремы возьмемъ въ томъ же тѣлѣ точку B на направленіи данной силы. Къ этой точкѣ приложимъ по тому же направленію двѣ силы P и —P, дѣйствующія въ разныя стороны. Такъ какъ онѣ будутъ находиться въ равновѣсіи, то прибавленіемъ ихъ никакихъ измѣненій въ положеніи тѣла не будетъ произведено. Съ другой стороны сила P, приложенная къ A и сила P приложенная съ B уравновѣшиваются, слѣдственно остается сила P приложенная къ B и вполнѣ равная силѣ приложенной къ A.

И такъ, данная сила можетъ быть приложена къ какой угодно точкѣ по направленію силы. Такого рода перенесеніе силы изъ одной точки въ другую очень часто употребляется въ статикѣ и служитъ только для преобразованій, необходимыхъ при рѣшеніи различныхъ задачъ. И потому на перенесеніе точки приложенія силы по ея направленію слѣдуетъ смотрѣть какъ на дѣйствіе фиктивное.

Сложеніе и разложеніе силъ, лежащихъ въ одной плоскости и болѣе простые случаи равновѣсія силъ.

13. Когда силы P, P_1 P_2, дѣйствующія на данную матеріальную точку, направлены въ одну и ту же сторону и когда направленіе ихъ дѣйствія одинаково, то очевидно равнодѣйствующая равна ихъ суммѣ, т. е. что силы P, P_1 P_2... можно замѣнить одною силою равною суммѣ:

$$P + P_1 + P_2 +$$

и дѣйствующею по тому же направленію и въ ту же самую сторону, какъ и данныя силы.

Совокупность этихъ силъ будетъ находиться въ равновѣсіи, если къ точкѣ приложить силу R, равную этой суммѣ и дѣйствующую въ противоположномъ направленіи.

Когда двѣ силы P и P_1 дѣйствуютъ на матеріальную точку по тому же направленію, но въ разныя стороны, равнодѣйствующая этихъ двухъ силъ равна по асболютной величинѣ ихъ разности, $P - P_1$ и дѣйствуетъ по направленію большей изъ двухъ данныхъ силъ.

Такимъ образомъ, совокупность этихъ двухъ силъ будетъ находиться въ равновѣсіи при помощи силы, дѣйствующей по направленію данныхъ силъ, но въ сторону меньшей силы, и должна быть равна разности между данными силами.

Каждая изъ силъ P и P_1 можетъ быть разсматриваема какъ равнодѣйствующая или сумма нѣкоторыхъ силъ, дѣйствующихъ по тому же направленію, по какому она дѣйствуетъ сама. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее правило:

Когда нѣсколько силъ дѣйствуютъ на матеріальную точку, однѣ изъ нихъ въ одномъ направленіи, другія въ направленіи противоположномъ, то ихъ равнодѣйствующая равна разности между суммой всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ одномъ направленіи, и суммой всѣхъ силъ, дѣйствующихъ по направленію противоположному, и эта разность или равнодѣйствующая дѣйствуетъ въ сторону большей изъ двухъ суммъ.

Даннымъ силамъ, какъ мы уже сказали, приписываютъ знаки. Поэтому можно сказать, что равнодѣйствующая равна по величинѣ и по знаку алгебраической суммѣ данныхъ силъ; она изображается равенствомъ

$$R = P + P'_1 + P_2 + \ldots$$

Сила—R прибавленная къ силамъ $P, P_1, P_2 \ldots$ приведетъ ихъ въ равновѣсіе.

14. Чтобъ произвести графически сложеніе силъ данныхъ въ опредѣленномъ масштабѣ и дѣйствующихъ по одной прямой въ одну или разныя стороны, надо поступить совершенно такъ же, какъ это дѣлается при геометрическомъ черченіи, когда требуется сложить нѣсколько линій, направленныхъ въ одну или разныя стороны.

15. **Теорема**: *Равнодѣйствующая двухъ силъ, составляющихъ между собою какой нибудь уголъ, направлена въ плоскости этихъ силъ.*

Матеріальная точка, находящаяся въ покоѣ, побуждаемая сразу двумя силами, принимаетъ извѣстное движеніе совершенно опредѣленное; движеніе это должно имѣть направленіе симетричное по отношенію данныхъ силъ, и если бы точка выходила изъ плоскости данныхъ силъ, то это значило бы, что она выбрала для своего движенія совершенно произвольную плоскость; но подобный выборъ для точки очевидно невозможенъ, и слѣдовательно для движенія точки необходимо, чтобы оба перемѣщенія одинаково возможныя совпадали и составляли бы только одно перемѣщеніе въ плоскости данныхъ силъ.

Равнодѣйствующая, способная удерживать точку въ равновѣсіи или покоѣ вмѣстѣ съ данными силами, находится также въ той же плоскости, но противоположна равнодѣйствующей, замѣняющей дѣйствіе данныхъ силъ.

16. **Теорема**. *Если двѣ силы, сходящіяся въ одной точкѣ, равны между собою, то ихъ равнодѣйствующая должна быть направлена по линіи, дѣлящей пополамъ уголъ, составленный данными силами.*

Дѣйствительно, если бы предположили, что точка, побуждаемая двумя силами, будетъ двигаться по направленію болѣе близкому къ одной изъ данныхъ силъ, или по направленію болѣе далекому отъ другой, то значитъ допустили бы, что точка выбрала для себя совершенно произвольное направленіе. Но такъ какъ такого произвольнаго выбора для точки быть не можетъ, то остается одно лишь возможное допущеніе, что точка будетъ двигаться по направленію линіи, дѣлящей уголъ между данными силами пополамъ. Слѣдовательно, равнодѣйствующая данныхъ силъ должна быть направлена по этой же линіи.

Равнодѣйствующая, способная вмѣстѣ съ данными силами поддержать точку въ равновѣсіи или покоѣ, будетъ равна и противоположна равнодѣйствующей, замѣняющей данныя силы.

Послѣднія теоремы устанавливаютъ собою такъ называемое правило паралелограмма силъ, открытое Ньютономъ.

17. Равнодѣйствующая двухъ равныхъ силъ, составляющихъ уголъ, пропорціональна общей напряженности этихъ силъ, и если силы дѣлаются двойными, тройными, то равнодѣйствующая дѣлается въ то же время двойной, тройной.

Дѣйствительно, если двѣ равныя силы P и P (чер. 3)$_1$ дѣйствующія на точку M, имѣютъ равнодѣйствующую R, направленную по бисектрисѣ MR угла PMP, двѣ новыхъ силы P и P, равныя первымъ и приложенныя къ точкѣ M по тѣмъ же направленіямъ, будутъ имѣть равнодѣйствующею новую силу R, также направленную по MR. Такимъ образомъ, точка M будетъ побуждаться двумя силами, равными 2P, дѣйствующими одна по MP, другая по MP$'$, и эти двѣ силы имѣютъ равнодѣйствующую силу 2R, направленную по бисектрисѣ угла PMP.

Вообще, если всѣ силы, побуждающія точку, будутъ увеличены или уменьшены въ нѣсколько разъ, безъ измѣненія ихъ направленій, то равнодѣйствующая увеличится или уменьшится въ то же число разъ, а направленіе ея дѣйствія останется прежнимъ.

Когда силы изображаютъ графически прямыми въ опредѣленномъ масштабѣ, то одинъ и тотъ же чертежъ можетъ служить для изображенія равнодѣйствующей и данныхъ силъ, увеличенныхъ или уменьшенныхъ въ нѣсколько разъ: слѣдуетъ только измѣнить масштабъ.

18. Постараемся установить правило паралелограмма силъ для случаевъ, когда двѣ силы P и P$_1$ находятся другъ относительно друга въ какомъ угодно положеніи. Мы достигнемъ этого, доказательствомъ слѣдующихъ леммъ.

Лемма: *Если противоположныя вершины A и C ромба $ABCD$* (чер. 4) *соединимъ неизмѣняемымъ образомъ и если приложимъ къ точкамъ A и C по направленію боковъ AB, AD, CB, CD четыре равныя силы P, P_1, P_2 и P_3, дѣйствующія по направленіямъ означеннымъ стрѣлками, то система точекъ A и A останется въ равновѣсіи.*

Дѣйствительно, діогональ AC ромба есть бисектриса угловъ BAD и BCD, составленныхъ силами. Двѣ силы P и P_1 сложенныя вмѣстѣ, даютъ равнодѣйствующую R, приложенную въ A и направленную по CA. Также силы P_2 и P_3 даютъ равнодѣйствующую R', прило женную къ C, направленную по CA и очевидно равную R. Двѣ равныя силы R и R', приложенныя къ концамъ неизмѣняемой линіи AC, будутъ находиться въ равновѣсіи, а потому и данныя силы, приложенныя къ точкѣ A и B по сторонамъ, будутъ въ равновѣсіи.

19. **Лемма**. *Если вершины A и C* (чер. 5) *паралелограмма $ABCD$ соединимъ неизмѣняемымъ образомъ и если приложимъ къ точкамъ A и C по сторонамъ AD, CB, CD и AB, силы P_1, P_2, P_3 и P_4, пропорціональныя длинамъ сторонъ паралелограмма, то система точекъ A и C будетъ въ равновѣсіи.*

Предположимъ прежде всего, что сторона BC болѣе стороны AB въ цѣлое число разъ, напр. въ 4 раза.

Раздѣлимъ паралелограммъ $ABCD$ на четыре ромба $ABEF$, $FEGH$, $HGKL$, $LKCD$; представимъ себѣ, что точки E, G, K, F, H и D, соединены съ точками A и C такимъ образомъ, что составляется неизмѣняемая система. Мы можемъ также раздѣлить равныя силы P_1 и P_2 на четыре равныя части P_3 и приложить эти отдѣльныя части одну къ точкѣ A, другую къ точкѣ F, третью къ точкѣ G и четвертую къ точкѣ K, всѣ по одному и тому же направленію какъ и сила P_1. Точно также поступимъ и съ силою P_2 и первую часть приложимъ къ точкѣ B, вторую къ точкѣ E, третью къ точкѣ H, четвертую къ точкѣ L, всѣ четыре по одному и тому же направленію, какъ и сила P_2.

Не нарушая равновѣсія, можно приложить къ точкамъ E и F, по сторонѣ FE, двѣ силы P_3, равныя и противоположныя; то же самое сдѣлаемъ съ точками G и H и съ точками L и K. Наконецъ, мы замѣнимъ систему четырехъ силъ P_1, P_2, P_3 и P_4, системою новыхъ силъ, по дѣйствующихъ совершенно такъ же какъ и данныя силы.

На основаніи доказанной леммы въ параграфѣ 18-мъ каждый изъ ромбовъ будетъ находиться въ равновѣсіи. Совокупность всѣхъ ромбовъ будетъ также находиться въ равновѣсіи, а слѣдовательно и силы P_1, P_2, P_3 и P_4, приложенныя къ точкамъ A и C, будутъ также въ равновѣсіи.

20. Доказанную сейчасъ лемму можно распространить и на тотъ случай, когда двѣ стороны паралелограмма относятся между собою, какъ два цѣлыхъ числа, m и n. Дѣйствительно, мы можемъ раздѣлить параллелограмъ на n равныхъ параллелограммовъ. Въ каждомъ изъ этихъ послѣднихъ большая сторона будетъ больше меньшей въ m разъ. Если отношеніе сторонъ будетъ, напримѣръ, равно $^3/_5$, то можемъ раздѣлить сторону AB (чер. 6) на три равныя части въ точкахъ E и G; проведя параллели EF и GH, раздѣлимъ параллелограммъ на три равныхъ параллелограмма, въ каждомъ изъ нихъ одна сторона будетъ больше другой стороны въ пять разъ.

Сила P_1, дѣйствующая по направленію AB, можетъ быть раздѣлена на три равныхъ силы, приложенныхъ соотвѣтственно къ A, G и E, тоже самое можно сдѣлать съ силою P_2, равныя части которой приложимъ къ точкамъ C, F и H. Точки E, G, H и F, будутъ точками неизмѣняемыми въ системѣ точекъ A и C. Прибавимъ въ E и F двѣ силы равныя P_3, дѣйствующія одна отъ E къ F, другая отъ F къ E. Сдѣлаемъ тоже въ G и H. Каждый изъ паллелограммовъ AGHD, GEFH. EBCF будетъ находиться въ равновѣсіи на основаніи предъидущаго доказательства. Совокупность трехъ параллелограммовъ также будетъ находиться въ равновѣсіи и, слѣдовательно, четыре силы P_1, P_2, P_3 и P_4, также въ равновѣсіи. Такимъ образомъ лемма доказана, изъ нея вытекаетъ такое слѣдствіе:

Равнодѣйствующая двухъ силъ P_1 P_2 приложенныхъ къ одной и той же точкѣ A, проходитъ чрезъ вершину C параллелограмма ABCD, построеннаго на этихъ двухъ силахъ.

21. **Теоремма**. *Равнодѣйствующая R двухъ силъ P и Q представляется по величинѣ и направленію діагональю параллелограмма, построеннаго на этихъ двухъ силахъ.*

На сторонахъ AB и AD, соотвѣтственно пропорціональныхъ силамъ P и Q (чер. 7), постороимъ параллелограмъ ABCD. Равнодѣйствующая R силъ P и Q пройдетъ чрезъ вершину C этого параллелограма; но мы еще не знаемъ ея величины, и пропорціональна-ли она длинѣ А С.

Продолжимъ линію АС, тогда сила равная и противоположная R будетъ дѣйствовать отъА къ Е, но величину этой силы — R мы пока также не знаемъ, какъ и величину R. Силы — R, Р и Q будутъ въ равновѣсіи. Слѣдовательно, сила — Q, равная и противоположная Q, есть равнодѣйствующая силъ Р и — R; построимъ параллелограмъ АЕНВ, такъ чтобъ діогональ АН этого втораго параллелограмма быларавна,—Q и одна изъ его сторонъ была бы равна Р, тогда другая сторона его будетъ равна — R. Послѣ чего АЕ=НВ=АС, слѣд. — R=АС. И такъ, равнодѣйствующая R представляется по величинѣ и направленію діагональю АС параллелограмма ABCD.

Изъ предъидущей теоремы знаемъ, что равнодѣйствующая двухъ сходящихся силъ есть діагональ параллелограмма, построеннаго на данныхъ силахъ. Но діогональ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника, и въ нашемъ случаѣ стороны каждаго треугольника состоятъ изъ равнодѣйствующей и двухъ данныхъ силъ.

Поэтому для полученія равнодѣйствующей можно было бы воспользоваться однимъ лишь треугольникомъ и произвести построеніе такъ: когда даны двѣ силы P_1 и P_2, сходящіяся подъ угломъ и дѣйствующія на точку А (черт. 8) по направленіямъ указаннымъ стрѣлками, то, взявъ въ сторонѣ отъ данныхъ силъ произвольную точку О, (черт. 9), надо провести отъ нея длину равную и паралельную первой силѣ, отъ конца построенной такимъ образомъ линіи провести длину равную и паралельную второй силѣ, начальную точку О соединить съ концомъ 2-й силы, полученная длина, будучи третьею стороною одного изъ сказанныхъ треугольниковъ, представитъ собою діагональ параллелограмма построеннаго на данныхъ силахъ, или равнодѣйствующую двухъ данныхъ силъ. И такъ, чтобъ получить графически величину равнодѣйствующей двухъ сходящихся силъ, надо построить треугольникъ, двѣ стороны котораго имѣютъ величину и направленія данныхъ силъ, третья сторона, замыкающая данныя, будетъ равнодѣйствующею. Построенный такимъ образомъ треугольникъ называется *треугольникомъ силъ* или *планомъ силъ*.

Для полученія той же равнодѣйствующей можно (чер.10) сначала провести длину равную и параллельную 2-й силѣ, а отъ конца ея длину равную и параллельную 1-й силѣ, конецъ этой послѣдней длины соединить съ начальною точкою, тогда получится 2-ой изъ треугольниковъ параллелограмма, а потому третья линія будетъ тоже діагональ его, или равнодѣйствующая данныхъ силъ. Такимъ образомъ можно высказать слѣдующую теорему:

Теорема: *Когда даны двѣ силы сходящіяся въ одной точкѣ, то величина равнодѣйствующей не измѣняется отъ перемѣны порядка построенія величинъ силъ въ треугольникѣ силъ.*

Направленіе дѣйствія равнодѣйствующей (чер. 9 и 10) показано стрѣлкою. Если разсмотримъ, какъ идутъ стрѣлки на силахъ P_1 P_2 и R, то увидимъ, что направленіе дѣйствія силы R, какъ то и слѣдуетъ, назначено обратно направленіямъ дѣйствія силъ P_1 и P_2

Треугольники O P_1 P_2 и O P_2 P_1 будутъ слѣдов. треугольниками данныхъ силъ

И такъ, *чтобы получить графически равнодѣйствующую двухъ сходящихся силъ данныхъ по величинѣ направленію дѣйствія и положенію въ пространствѣ, надо построить треугольникъ силъ, начиная построеніе съ той или другой силы—безразлично; провести замыкающую сторону треугольника, назначить на ней направленіе дѣйствія стрѣлкою, въ обратную сторону дѣйствія данныхъ силъ, тогда замыкающая сторона треугольника силъ будетъ представлять собою по величинѣ и направленію дѣйствія равнодѣйствующую данныхъ силъ. Чтобы получить затѣмъ положеніе ея въ пространствѣ, надо чрезъ точку пересѣченія данныхъ силъ* (чер. 11) *провести параллельную и равную найденной равнодѣйствующей.*

22. Если требуется разложить данную силу на двѣ составляющихъ, то задача будетъ имѣть безчисленное множество рѣшеній, до тѣхъ поръ, пока не будутъ даны направленія слагающихъ силъ, или направленія и величина одной изъ нихъ, или величина обѣихъ составляющихъ

Это ясно изъ того, что на данной линіи можно построить безчисленное множество треугольниковъ, пока не даны направленія другихъ двухъ сторонъ, или направленіе и величина одной стороны, или наконецъ величины обѣихъ.

Если на точку A (чер. 12) дѣйствуетъ сила R, данная по величинѣ, направленію дѣйствія и положенію въ пространствѣ, то, чтобъ разложить ее на двѣ произвольныя составляющія и получить эти составляющія графически, поступаютъ такъ берутъ произвольную точку O (чер. 13) въ сторонѣ отъ данныхъ силъ, проводятъ отъ нея длину равную и параллельную данной силѣ R, отъ точки O проводятъ по какому угодно направленію произвольную длину OP_1 принимаемую за длину одной составляющей, конецъ этой длины соединяютъ съ концомъ длины OR, тогда полученная линія $P_1 P_2$ дастъ по величинѣ и направленію дѣйствія другую составляющую. Затѣмъ, чтобы получить положеніе составляющихъ въ пространствѣ, отъ точки A проводятъ параллельныя и равныя начерченнымъ уже линіямъ OP_1, и P_1P_2. Если будутъ даны направленія обѣихъ слагающихъ, то линію OP_1 и P_1P_2 нельзя уже проводить произвольно а слѣдуетъ провести, параллельно заданнымъ направленіямъ, отъ концовъ данной силы.

Если дано направленіе и длина одной изъ составляющихъ, то надо отъ однаго конца данной силы провести линію параллельно заданному направленію; отложить, на проведенной такимъ образомъ линіи, данную длину отъ конца данной для разложенія силы и затѣмъ конецъ начерченной такимъ образомъ 1-й слагающей соединить съ другимъ концомъ данной для разложенія силы. Наконецъ, если даны длины обѣихъ слагающихъ, но неизвѣстны ихъ направленія, то въ правомъ чертежѣ (чер. 12) на данной силѣ надо построить треугольникъ по двумъ другимъ даннымъ линіямъ.

23. Изъ треугольника OP_1P_2 (чер. 13) можемъ написать слѣдующую пропорцію:

$$P_1 : P_2 : R = \mathrm{Sn}\, OP_2 P_1 : \mathrm{Sn}\, P_1OP_2 : \mathrm{Sn}\, OP_1P_2$$

т. е. каждая изъ силъ P_1P_2 и R пропорціональна синусу угла, составленнаго направленіемъ двухъ другихъ силъ. Отсюда можно вычислить равнодѣйствующую по одной изъ слагающихъ и угламъ.

Если дана равнодѣйствующая и извѣстны направленія составляющихъ, то составляющую легко вычислить, именно:

$$P_1 = R \frac{\mathrm{Sn}\, OP_2P_1}{\mathrm{Sn}\, OP_1P_2}$$

$$P_2 = R \frac{\mathrm{Sn}\, P_1OP_2}{\mathrm{Sn}\, OP_1P_2}$$

Если OP_1P_2 уголъ прямой, то можно написать:

$$P_1 = R\sin OP_2P_1 = R\cos P_1OP_2$$

$$P_2 = R\sin P_1OP_2 = R\cos P_1P_2O$$

т. е. каждая изъ двухъ составляющихъ данной силы, дѣйствующихъ по перпендикулярнымъ между собою направленіямъ, равна данной силѣ умноженной на синусъ угла заключеннаго между данной силой и направленіемъ искомой составляющей. Или этотъ же законъ можно выразить такъ: *каждая изъ составлящихъ равна проекціи равнодѣйствующей на направленіе составляющей.*

Изъ разсматриванія треугольника силъ видно, что когда двѣ силы дѣйствуютъ на точку подъ угломъ не равнымъ двумъ прямымъ, равнодѣйствующая ихъ не можетъ уничтожиться, за исключеніемъ лишь случая, когда каждая изъ составляющихъ сама равна нулю.

24. Когда требуется найти графически равнодѣйствующую двухъ сходящихся силъ, точка пересѣченія которыхъ помѣщается въ предѣлахъ чертежа, то, какъ видѣли, опредѣленіе величины равнодѣйствующей, направленія ея дѣйствія и положеніе въ пространствѣ вполнѣ и легко опредѣляется. Если же точка пересѣченія сходящихся силъ не помѣщается въ предѣлахъ чертежа, тогда величина и направленіе дѣйствія опредѣляется какъ указано выше; положеніе же остается неизвѣстнымъ, такъ какъ точка пересѣченія данныхъ силъ, чрезъ которую должна пройти равнодѣйствующая, на чертежѣ не помѣщается. Покажемъ же, какъ въ этомъ случаѣ надо поступать, чтобы получить точку приложенія равнодѣйствующей.

Положимъ, даны силы P_1 P_2 (чер. 14), точка пересѣченія коихъ не помѣщается въ предѣлахъ чертежа, то для разысканія равнодѣйствующей, поступаемъ какъ указано выше: строимъ треугольникъ силъ 012; замыкающая 02 (чер. 15) этого треугольника будетъ равнодѣйствующею данныхъ силъ по величинѣ и направленію дѣйствія.

Возьмемъ на данныхъ силахъ точки A и A_1 совершенно произвольныя. Разложимъ силу P_1 на двѣ составляющихъ: одну по произвольному направленію, напримѣръ по линіи AE а другую по направленію AA_1, то есть по линіи, соединяющей точки приложенія данныхъ силъ. Точно также силу P_2 разложимъ на двѣ составляющихъ, одну по произвольному направленію A_1E_1, другую по направленію AA_1, причемъ эту послѣднюю возьмемъ равною AB, т. е. будемъ имѣть $AB=A_1B_1$. Слѣдовательно, данныя силы замѣнены двумя, изъ которыхъ силы AB и A_1B_1, какъ дѣйствующія въ разныя стороны и приложенныя къ концамъ одной прямой, уничтожаются и, вмѣсто данныхъ силъ, получаются силы идущія по AE и AE_1, вполнѣ замѣняющія данныя. Точка пересѣченія этихъ силъ, очевидно, будетъ также точкою, чрезъ которую пройдетъ равнодѣйствующая данныхъ силъ. Слѣдовательно, нужно только чрезъ полученную точку α провести линію равную и паралельную равнодѣйствующей 02.

25. Построеніе для опредѣленія положенія равнодѣйствующей двухъ силъ лежащихъ въ плоскости можетъ быть исполнено и въ иномъ видѣ. Построеніемъ этимъ, какъ увидимъ далѣе, будемъ часто пользоваться.

Пусть даны двѣ силы P_1 и P_2 (чер. 16). Построимъ треугольникъ силъ (чер. 17). Возьмемъ произвольную точку, которую будемъ называть *полюсомъ*, и соединимъ ее съ точками 0, 1 и **2**. Полученныя такимъ образомъ линіи будемъ называть *лучами*. Возьмемъ на направленіи силы P_1 точку A_1, проведемъ изъ нея линію параллельно 1С (чер. 17) до пересѣченія съ P_2 въ точкѣ A_2. Изъ точки A_1 проведемъ линію параллельно первому лучу ОС, а изъ точки A_2 линію параллельную 3-ему лучу 2С. Проведенныя вновь линіи пересѣкутся въ точкѣ α. Если бы мы разложили силу P_1 по направленіямъ A_1A_2 и $A_1\alpha$, а силу P_2 по направленіямъ A_1A_2 и $A_2\alpha$, то мы повторили бы совершенно тѣ же построенія, какія были исполнены на чертежахъ 14 и 15-мъ. И, слѣдовательно, точка α принадлежала бы равнодѣйствующей данныхъ силъ. Но, какъ видимъ, точку α можно было получить и не разлагая силы P_1 и P_2 на составляющія: она получается, какъ пересѣченіе линій паралельныхъ 1-му и 3-му лучу многоугольника силъ.

Но порядокъ построенія для полученія точки α можетъ быть выполненъ еще иначе. На чер. 18 даны величина и направленія силъ, на чер. 19 построенъ треугольникъ силъ съ лучами. Возьмемъ лѣвѣе силы P, произвольную точку a, изъ нея проведемъ линію параллельную 1-му лучу до пересѣченія съ силою P, въ точкѣ

A_1, изъ точки A_1 проведемъ линію параллельную 2-му лучу до пересѣченія съ силою P_2 въ точкѣ A_2. Изъ этой послѣдней проведемъ линію A_2 a_2 параллельно 3-му лучу.

Многоугольникъ a_1 A_1 A_2 a_2, такимъ образомъ построенный, называется *веревочнымъ* или *шарнирнымъ* многоугольникомъ, относящимся къ полюсу С.

Сравнивая теперь чер. 18 съ чер. 16, легко видѣть, что если крайнія стороны a_1A_1 и a_2A_2 веревочнаго многоугольника будутъ продолжены до взаимнаго ихъ пересѣченія, то точка пересѣченія будетъ таже самая, какъ и точка α на чер. 16 т. е. эта точка будетъ принадлежать равнодѣйствующей. Резюмируя все сказанное въ этомъ параграфѣ, мы можемъ построить такое правило:

Если даны двѣ силы на плоскости по величинѣ и направленію, то, чтобъ найдти ихъ равнодѣйствующую по величинѣ направленію и положенію относительно данныхъ силъ, надо: въ сторонѣ отъ данныхъ силъ построить треугольникъ силъ съ лучами, проведенными отъ его вершинъ до какого либо произвольно взятаго полюса; построить веревочный многоугольникъ, начавъ построеніе отъ произвольной точки, взятой лѣвѣе 1-й силы и проводя его стороны параллельно лучамъ; причемъ первую сторону надо провести до пересѣченія съ 1-й силой, 2-ю сторону веревочнаго многоугольника до пересѣченія со 2-й силою, и третью сторону отъ послѣдней точки пересѣченія; когда построенъ веревочный многоугольникъ, крайнія его стороны надо продолжить; точка пересѣченія ихъ будетъ принадлежать ровнодѣйствующей; чрезъ эту точку надо провести линію равную и параллельную замыкающей сторонѣ треугольника силъ.

Эта послѣдняя линія будетъ равнодѣйствующей двухъ данныхъ силъ по величинѣ, направленію и положенію въ плоскости относительно данныхъ силъ. Если къ даннымъ силамъ прибавить силу равную и противоположную найденной равнодѣйствующей, то треугольникъ данныхъ силъ будетъ замкнутымъ, а равнодѣйствующая этихъ трехъ силъ будетъ равна нулю.

26. Пусть будутъ даны по величинѣ и направленію на плоскости три силы P_1 P_2 P_3 (Чер. 20) Найдемъ, по правилу изложенному въ предъидущемъ параграфѣ, равнодѣйствующую только двухъ силъ P_1 и P_2. Она выразится по величинѣ, направленію дѣйствія и по-

ложенію относительно данныхъ силъ P_1 P_2 длиною R_1 (чер. 20) равною и параллельною длинѣ 02 (чер. 21). Такимъ образомъ три данныя силы приведены къ двумъ, именно къ R_1 и P_3. Равнодѣйствующую ихъ точно также найдемъ по правилу предъидущаго параграфа, и она выразится по величинѣ, направленію дѣйствія, положенію въ пространствѣ длиною R (чер. 22) равною 34 (чер. 23).

При этомъ надо замѣтить, что отдѣльныхъ чертежей, какъ 20 и 21, дѣлать не слѣдуетъ, а всѣ необходимыя построенія могутъ быть исполнены на двухъ чертежахъ подобныхъ 22-му и 23-му.

Разсматривая чер. 23, мы видимъ, что линія 34 получена какъ замыкающая сторона треугольника 023, но она также легко могла быть получена, какъ замыкающая сторона четырехъугольника 01234 Такъ что R_2 могла бы быть найдена безъ разыскиванія величины R_1 для этого надо было бы, начиная отъ точки О (чер. 23), начертить ломаную 0123, каждая сторона которой равна и параллельна одной изъ данныхъ силъ (чер. 22), затѣмъ начало и конецъ этой ломаной соединить между собою. Такимъ образомъ построился бы многоугольникъ силъ, и замыкающая его сторона была бы равнодѣйствующей трехъ данныхъ силъ.

Точно также не было надобности на чер. 22 продолжать стороны a_1 A_1 и A_3 A_2 до взаимнаго пересѣченія, а достаточно было бы построить веревочный многоугольникъ a_1 A_1 A_2 A_3 a_4; крайнія его стороны продолжить до взаимнаго пересѣченія; полученная такимъ образомъ точка принадлежала бы равнодѣйствующей трехъ данныхъ силъ. Если къ тремъ даннымъ силамъ прибавить 4-ую, равную и противоположную найденной равнодѣйствующей, то многоугольникъ силъ будетъ замкнутымъ и равнодѣйствующая этихъ четырехъ силъ будетъ нулемъ.

27. Если бы данныхъ силъ было четыре, то, чтобъ найдти ихъ равнодѣйствующую, надо было бы найдти сначала равнодѣйствующую трехъ силъ, а затѣмъ разыскать равнодѣйствующую четвертой силы и равнодѣйствующей первыхъ трехъ.

Очевидно, что прибавленіе новой силы нисколько не измѣнило бы способа нахожденія равнодѣйствующей, такъ какъ все дѣло сводилось бы къ нахожденію ровнодѣйствующей двухъ силъ. Поэтому, можно дать правило разысканія графическимъ путемъ равнодѣйствующей въ слѣдующемъ видѣ:

Чтобы разыскать графически равнодѣйствующую сколькихъ угодно силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, надо: въ сторонѣ отъ данныхъ силъ построить многоугольникъ силъ, вычерчивая ихъ одну за другою въ одномъ опредѣленномъ масштабѣ, начало этого многоугольника соединить съ концомъ его; тогда замыкающая сторона многоугольника силъ будетъ представлять собою равнодѣйствующую по величинѣ и направленію; чтобы найти ея положеніе относительно данныхъ силъ, надо вершины многоугольника силъ соединить съ произвольнымъ полюсомъ или, другими словами, построить лучи, затѣмъ на чертежѣ, изображающемъ величины и направленія данныхъ силъ, построить веревочный многоугольникъ, относящійся къ выбранному нами полюсу; первую и послѣднюю сторону веревочнаго многоугольника надо продолжить до взаимнаго пересѣченія, точка пересѣченія будетъ принадлежать равнодѣйствующей, остается только чрезъ эту точку провести линію равную и параллельную линіи замыкающей многоугольникъ силъ.

Если къ даннымъ силамъ прибавить еще равную и противоположную найденной равнодѣйствующей, то, очевидно, многоугольникъ данныхъ силъ будетъ замкнутымъ и равнодѣйствующая сдѣлается равной нулю.

На чертежахъ 24 и 25 исполнены всѣ построенія для нахожденія по этому правилу равнодѣйствующей пяти силъ.

Для полученія равнодѣйствующей данныхъ силъ можно было бы поступить и иначе, нежели это изложено выше, и сдѣлать это слѣдующимъ образомъ: каждую изъ данныхъ силъ разложить на двѣ по смежнымъ съ нею сторонамъ веревочнаго многоугольника. И какъ одну изъ слагающихъ можно брать совершенно произвольною, то разложеніе можетъ быть совершено такъ, чтобъ по каждой изъ сторонъ веревочнаго многоугольника, дѣйствовали бы двѣ силы равныхъ и противоположныхъ, слѣд. по всѣмъ сторонамъ, кромѣ крайнихъ, дѣйствовали бы по двѣ силы уравновѣшивающіяся, и, слѣдовательно, остались бы только слагающія, дѣйствующія по крайнимъ сторонамъ веревочнаго многоугольника. Сложеніе этихъ двухъ пересѣкающихся силъ привело бы къ той же равнодѣйствующей.

Этотъ же самый способъ былъ употребленъ въ параграфѣ 24-мъ при нахожденіи равнодѣйствующихъ двухъ силъ.

Свойства многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника.

28. Надо замѣтить, что при вычерчиванiи веревочнаго многоугольника стороны его нужно продолжать до пересѣченiя съ силами; если же какая либо сторона веревочнаго многоугольника не встрѣчаетъ самую силу, то надо направленiе силы продолжить въ соотвѣтствующую сторону.

Замѣтимъ еще, что 1-й лучъ въ многоугольникѣ силъ всегда проходитъ къ началу 1-й силы, 1-я сторона веревочнаго многоугольника, параллельная 1-му лучу, подходитъ къ направленiю 1-й силы; 2-й лучъ проходитъ чрезъ начало 2-й силы и конецъ 1-й, 2-ая сторона веревочнаго многоугольника, параллельная 2-му лучу, проходитъ между направленiями 1-й и 2-й силы; 3-й лучъ проходитъ чрезъ начало 3-й силы и конецъ 2-й; 3-я сторона веревочнаго многоугольника, параллельная 3-му лучу, проходитъ между направленiями 2-й и 3-й силы и т. д.

Теорема: *Равнодѣйствующая системы какого угодно числа силъ не измѣняется, если двѣ или нѣсколько послѣдовательныхъ силъ будутъ замѣнены отдѣльною равнодѣйствующею.*

На чертежѣ 25 линiя 03, начерченная пунктиромъ, изображаетъ равнодѣйствующую трехъ силъ 1, 2 и 3. Если вмѣсто этихъ трехъ силъ введемъ ихъ равнодѣйствующую 03, то совокупность силъ 03, 34 и 45, очевидно, дастъ по величинѣ и направленiю туже равнодѣйствующую 05, какъ и данныя силы 01, 12, 23, 34 и 45.

Точка, опредѣляющая положенiе равнодѣйствующей R относительно данныхъ силъ, [illegible] та же самая въ обоихъ случаяхъ,
такъ [illegible] крайнiя [illegible] новаго веревочнаго многоугольника
[illegible] $_5$ (че[illegible] [illegible]ыя, что и крайнiя стороны
[illegible]аго м[illegible]ка [illegible] A_4 A_5 a_5, слѣдовательно, и
точка [illegible] о[illegible] И такъ теорема доказана.

29. *Ра[illegible] [illegible]темы силъ не зависитъ*
от[illegible] [illegible]ъ будутъ начертаны
[illegible]
[illegible]ны[illegible] [illegible]вою (A); назовемъ буквою
[illegible] [illegible]мѣны порядка послѣдователь-

Чтобы разыскать графически равнодѣйствующую сколькихъ угодно силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, надо: въ сторонѣ отъ данныхъ силъ построить многоугольникъ силъ, вычерчивая ихъ одну за другою въ одномъ опредѣленномъ масштабѣ, начало этого многоугольника соединить съ концомъ его; тогда замыкающая сторона многоугольника силъ будетъ представлять собою равнодѣйствующую по величинѣ и направленію; чтобы найти ея положеніе относительно данныхъ силъ, надо вершины многоугольника силъ соединить съ произвольнымъ полюсомъ или, другими словами, построить лучи, затѣмъ на чертежѣ, изображающемъ величины и направленія данныхъ силъ, построить веревочный многоугольникъ, относящійся къ выбранному нами полюсу; первую и послѣднюю сторону веревочнаго многоугольника надо продолжить до взаимнаго пересѣченія, точка пересѣченія будетъ принадлежать равнодѣйствующей, остается только чрезъ эту точку провести линію равную и параллельную линіи замыкающей многоугольникъ силъ.

Если къ даннымъ силамъ прибавить еще равную и противоположную найденной равнодѣйствующей, то, очевидно, многоугольникъ данныхъ силъ будетъ замкнутымъ и равнодѣйствующая сдѣлается равной нулю.

На чертежахъ 24 и 25 исполнены всѣ построенія для нахожденія по этому правилу равнодѣйствующей пяти силъ.

Для полученія равнодѣйствующей данныхъ силъ можно было бы поступить и иначе, нежели это изложено выше, и сдѣлать это слѣдующимъ образомъ: каждую изъ данныхъ силъ разложить на двѣ по смежнымъ съ нею сторонамъ веревочнаго многоугольника. И какъ одну изъ слагающихъ можно брать совершенно произвольною, то разложеніе можетъ быть совершено такъ, чтобъ по каждой изъ сторонъ веревочнаго многоугольника, дѣйствовали бы двѣ силы равныхъ и противоположныхъ, слѣд. по всѣмъ сторонамъ, кромѣ крайнихъ, дѣйствовали бы по двѣ силы уравновѣшивающіяся, и, слѣдовательно, остались бы только слагающія, дѣйствующія по крайнимъ сторонамъ веревочнаго многоугольника. Сложеніе этихъ двухъ пересѣкающихся силъ привело бы къ той же равнодѣйствующей.

Этотъ же самый способъ былъ употребленъ въ параграфѣ 24-мъ, при нахожденіи равнодѣйствующихъ двухъ силъ.

Свойства многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника.

28. Надо замѣтить, что при вычерчиваніи веревочнаго многоугольника стороны его нужно продолжать до пересѣченія съ силами; если же какая либо сторона веревочнаго многоугольника не встрѣчаетъ самую силу, то надо направленіе силы продолжить въ соотвѣтствующую сторону.

Замѣтимъ еще, что 1-й лучъ въ многоугольникѣ силъ всегда проходитъ къ началу 1-й силы, 1-я сторона веревочнаго многоугольника, параллельная 1-му лучу, подходитъ къ направленію 1-й силы; 2-й лучъ проходитъ чрезъ начало 2-й силы и конецъ 1-й, 2-ая сторона веревочнаго многоугольника, параллельная 2-му лучу, проходитъ между направленіями 1-й и 2-й силы; 3-й лучъ проходитъ чрезъ начало 3-й силы и конецъ 2-й; 3-я сторона веревочнаго многоугольника, параллельная 3-му лучу, проходитъ между направленіями 2-й и 3-й силы и т. д.

Теорема: *Равнодѣйствующая системы какого угодно числа силъ не измѣняется, если двѣ или нѣсколько послѣдовательныхъ силъ будутъ замѣнены отдѣльною равнодѣйствующею.*

На чертежѣ 25 линія 03, начерченная пунктиромъ, изображаетъ равнодѣйствующую трехъ силъ 1, 2 и 3. Если вмѣсто этихъ трехъ силъ введемъ ихъ равнодѣйствующую 03, то совокупность силъ 03, 34 и 45, очевидно, дастъ по величинѣ и направленію туже равнодѣйствующую 05, какъ и данныя силы 01, 12, 23, 34 и 45.

Точка, опредѣляющая положеніе равнодѣйствующей R относительно данныхъ силъ, будетъ та же самая въ обоихъ случаяхъ, такъ какъ крайнія стороны новаго веревочнаго многоугольника $a_1 \alpha A_4 A_5 a_5$ (чер. 24) будутъ тѣ же самыя, что и крайнія стороны веревочнаго многоугольника $a_1 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 a_5$, слѣдовательно, и ихъ точка пересѣченія одна и та же. И такъ теорема доказана.

29. **Теорема**: *Равнодѣйствующая системы силъ не зависитъ отъ порядка послѣдовательности въ какомъ будутъ начертаны эти силы въ многоугольникѣ силъ.*

Назовемъ систему данныхъ силъ буквою (A); назовемъ буквою (A') систему, происходящую отъ перемѣны порядка послѣдовательности только двухъ послѣдовательныхъ силъ, и (B) систему, въ которой, вмѣсто этихъ двухъ силъ, поставлена ихъ равнодѣйствующая Эта равнодѣйствующая, какъ знаемъ изъ параграфа 21, остается тою же, каковъ бы ни былъ порядокъ послѣдовательности двухъ этихъ силъ, слѣдовательно системы (A') и (A) равнозначущи съ (B), а потому онѣ равнозначущи и между собою.

Такимъ образомъ можемъ въ многоугольникѣ силъ поставить 1-ю силу на 2-е мѣсто, а 2-ю силу на 1-е мѣсто, затѣмъ третью силу можемъ поставить на мѣсто 1-й силы, а 1-ю силу на 3-е мѣсто и т. д., такимъ образомъ 1-я сила можетъ занять послѣднее мѣсто. А потому вообще каждая изъ данныхъ силъ можетъ быть начертана въ многоугольникѣ силъ послѣ какой угодно силы, отъ чего равнодѣйствующая всѣхъ силъ не измѣнится.

30. Разсмотримъ еще нѣкоторыя свойства веревочныхъ многоугольниковъ, а для этой цѣли войдемъ въ нѣкоторыя чисто геометрическія разсмотрѣнія.

Если возьмемъ на плоскости четыре точки (чер. 26) и соединимъ ихъ между собою, то получимъ четыре треугольника ABC, ADB, BDC и ADC.

Возстановимъ изъ средины каждой изъ 6 линій перпендикуляры, вслѣдствіе чего найдемъ центры a, b, c, d, описанныхъ круговъ около четырехъ треугольниковъ. Соединивъ всѣ центры между собою, получимъ новую фигуру, составленную также изъ 6 линій и изъ 4-хъ треугольниковъ. Двѣ такимъ образомъ начертанныхъ фигуры обладаютъ слѣдующими свойствами: во 1-хъ каждой линіи данной фигуры соотвѣтствуетъ въ новой фигурѣ перпендикулярная линія; во 2-хъ каждой системѣ трехъ сходящихся линій данной фигуры соотвѣтствуетъ во второй фигурѣ треугольникъ; и, обратно, каждому треугольнику новой фигуры отвѣчаютъ въ данной три сходящихся линіи, и въ 3-хъ каждая сторона каждой фигуры соединяетъ двѣ точки и принадлежитъ двумъ треугольникамъ.

Двѣ фигуры, удовлетворяющія этимъ условіямъ, называются *взаимными* или *двойственными*.

Вообще же фигурами взаимными называются такія двѣ фигуры, изъ которыхъ 1-я получается изъ второй совершенно такъ же, какъ 2-я получается изъ первой.

Если повернуть всѣ стороны фигуры a b c d на прямой уголъ, то она останется также взаимной къ данной фигурѣ, но только двѣ соотвѣтствующія линіи, вмѣсто того чтобы быть перпендикулярными, будутъ параллельными.

Каждая фигура, подобная фигурѣ a b c d, будетъ взаимна данной фигурѣ ABCD. Такъ напр. фигура a'b'c'd' (чер. 27), подобная abcb, будетъ также взаимной фигурой фигурѣ ABCD.

Обратно, всякая фигура взаимная данной ABCD подобна фигурѣ abcd, какъ составленная изъ того же числа подобныхъ треугольниковъ и расположенныхъ сходственнымъ образомъ. Очевидно, что многольникъ силъ съ лучами и направленіе силъ съ веревчнымъ многоугольникомъ представляютъ собою двѣ взаимныхъ фигуры.

Если шесть линій соединяютъ четыре точки, лежащія въ плоскости, то пять изъ этихъ линій непремѣнно составляютъ два треугольника, имѣющихъ общую сторону, шестая же линія будетъ соединять двѣ не общія вершины этихъ треугольниковъ, слѣдовательно она будетъ вполнѣ опредѣлена, когда извѣстны пять остальныхъ линій. И такъ имѣемъ теорему:

Если пять изъ шести линій, соединяющихъ четыре точки, лежащія въ плоскости, параллельны или перпендикулярны линіямъ соединяющимъ четыре другихъ точки и если система трехъ сходящихся линій одной фигуры соотвѣтствуетъ треугольнику другой фигуры, то шестыя линіи обѣихъ фигуръ также параллельны или перпендикулярны, и, слѣдовательно, обѣ фигуры взаимны.

31. **Теорема** *Когда полюсъ веревочнаго многоугольника движется по какой угодно прямой линіи, то стороны этого многоугольника вращаются каждая вокругъ постоянной точки, и эти постоянныя точки будутъ расположены на одной и той же линіи параллельной линіи движенія полюса.*

Пусть будутъ четыре силы (чер. 28), означенныя номерами 1, 2, 3 и 4, данныя по направленію дѣйствія, величинѣ и положенію на плоскости. Построивъ многоугольникъ силъ, взявъ произвольный полюсъ C, и, соединивъ съ нимъ вершины многоугольника силъ, построимъ соотвѣтствующій имъ веревочный многоугольникъ a_1 A_1 A_2 A_3 A_4 a_5. Взявъ другой полюсъ c', точно также построимъ второй веревочный многоугольникъ a_1 A_5 A_6 A_7 A_8 a_9 относящійся къ этому полюсу. Продолжимъ соотвѣтствующія стороны веревочныхъ многоугольниковъ до ихъ взаимнаго пересѣченія. Тогда получимъ, напримѣръ, четыре точки a_1 A_1 A_5 и K, соединенныя пятью линіями параллельными пяти линіямъ соединяющимъ четыре другихъ точки (чер. 29) C, C', 0 и 1, слѣдовательно шестыя линіи a_1K и $C\ C'$ должны быть параллельны. Точно также, сравнивая 4 точки A_2 A_6 K и K_2 на чертежѣ 28 съ четырьмя точками C,C, 1 и 2, черт. 29, придемъ къ заключенію, что линія KK_1 параллельна линіи CC' и т. д.

Такимъ образомъ точки a_1 K, K_1, K_2 около которыхъ вращаются стороны веревочнаго многоугольника, всѣ лежатъ на прямой параллельной линіи соединяющей полюсы.

На основаніи доказанной теоремы, всегда можно построить веревочный многоугольникъ системы данныхъ силъ, относящійся къ какому угодно полюсу, если извѣстенъ лишь одинъ веревочный многоугольникъ.

Для этого достаточно начертить въ плоскости произвольную линію, продолжить стороны даннаго веревочнаго многоугольника до пересѣченія съ этой линіей въ точкахъ a_1, K, K_1, K_2, затѣмъ, чтобы имѣть точку A_5, проведемъ черезъ точку a_1 новую линію произвольнаго направленія до пересѣченія съ направленіемъ 1-й силы. Чрезъ точку полученную такимъ образомъ и K проведемъ линію до пересѣченія со 2-й силою; чрезъ полученную вновь точку и K_1 проведемъ линію до пересѣченія съ направленіемъ 3-й силы и т. д. Ясно, что такимъ образомъ получимъ новый веревочный многоугольникъ.

32. **Теорема**. *Каковъ бы ни былъ путь, пройденный полюсомъ веревочнаго многоугольника, точка пересѣченія двухъ крайнихъ сторонъ этого многоугольника описываетъ прямую линію. Эта линія параллельна линіи замыкающей многоугольникъ силъ, такъ что точка пересѣченія крайнихъ сторонъ независима отъ пути описаннаго полюсомъ.*

Разсмотримъ на чер. 28, четыре точки A_1, K_3, α и α_1, а на черт. 29 точки 0, 4, C, C'. Пять линій, соединяющихъ 4 точки одной фигуры, параллельны пяти линіямъ, соединяющимъ 4 точки другой фигуры, слѣд. и шестыя линіи тоже параллельны, т. е. $\alpha\alpha_1$, параллельна 04. И такъ теорема доказана.

33. Точка пересѣченія двухъ крайнихъ сторонъ каждаго веревочнаго многоугольника системы силъ принадлежитъ равнодѣйствующей этихъ силъ. Возьмемъ веревочный многоугольникъ относительно

полюса 0 (черт. 30 и 31), т. е. относительно начала многоугольника силъ,—тогда величина луча, идущаго отъ полюса къ началу, будетъ равна нулю, направленіе же его будетъ неопредѣленно; направленіе первой стороны веревочнаго многоугольника будетъ, слѣдовательно, также неопредѣленно, какъ и точка пересѣченія этой стороны съ послѣдней стороной того же многоугольника; это заставляетъ сказать, что какая угодно точка этой послѣдней стороны принадлежитъ равнодѣйствующей. И такъ, послѣдняя сторона веревочнаго многоугольника, относящагося къ полюсу, взятому въ началѣ многоугольника силъ, даетъ направленіе равнодѣйствующей всѣхъ данныхъ силъ. Но вообще, что справедливо для всѣхъ данныхъ силъ, то также справедливо для части этихъ силъ. Поэтому можно сказать, *что какая угодно сторона веревочнаго многоугольника совпадаетъ съ равнодѣйствующей части данныхъ силъ предшествующихъ этой сторонѣ.* Такимъ образомъ веревоч. мног представляетъ въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто равнодѣйствующихъ данныхъ силъ взятыхъ по двѣ, по три и т. д.

Дѣйствительно, 2-я сторона веревочнаго многоугольника A_1 A, параллельна 2-му лучу, который, въ тоже время, есть равнодѣйствующая 1-хъ двухъ силъ, 3-я сторона параллельна 3-му лучу, который, въ тоже время, есть равнодѣйствующая первыхъ трехъ силъ и т. д.

Сложеніе силъ параллельныхъ.

34. Все что было сказано о сложеніи силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, прикладывается безъ всякихъ затрудненій къ случаю силъ параллельныхъ.

Многоугольникъ силъ въ этомъ случаѣ, очевидно, приводится къ прямой линіи. На чертежѣ 32 P_1 P_2 P_3 и P_4 четыре параллельныя силы, данныя по ихъ величинѣ, направленію и положенію въ плоскости, дѣйствующія всѣ въ одну сторону. Отложимъ, начиная отъ точки 0 (чер. 33), параллельно направленію данныхъ силъ, величины ихъ одну за другою, то получимъ величину ихъ равнодѣйствующей 04. Чтобы получить положеніе ея относительно данныхъ силъ, необходимо взять произвольную точку С, соединить ее съ точками 0, 1, 2, 3, 4, т. е. начертить лучи; затѣмъ построить веровочный многоугольникъ a_1 A_1 A_2 A_3 A_4 a_4. Точка встрѣчи крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника будетъ принадлежать равнодѣйствующей, а такъ какъ величина ея и направленіе опредѣляются многоугольникомъ силъ, то точка пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника опредѣляетъ положеніе равнодѣйствующей относительно данныхъ силъ, слѣдовательно величина R будетъ искомой равнодѣйствующей. Если къ четыремъ даннымъ силамъ добавить еще силу равную и противоположную равнодѣйствующей, т. е. силу 40, или 45, то, очевидно, многоугольникъ этихъ пяти силъ будетъ замкнутымъ, и, слѣдовательно, равнодѣйствующая пяти данныхъ силъ будетъ нуль.

35. Если P_1 и P_2 двѣ паралелльныя силы, дѣйствующія въ разныя стороны и данныя по величинѣ и направленію означенному стрѣлками и положенію (чер. 34), то, начертивъ въ сторонѣ длину 01, равную и параллельную силѣ P_2, надо отъ точки 1 отложить по направленію противоположному величину 12, равную силѣ P_2, тогда, очевидно, длина 02, представляющая собою разность величинъ данныхъ силъ, будетъ ихъ равнодѣйствующей, и направленіе ея дѣйствія будетъ отъ 0 къ 2.

Чтобы получить положеніе ея относительно данныхъ силъ, надо построить веревочный многоугольникъ a_4 A_4 A_2 a_2, относящійся къ полюсу С. Пересѣченіе крайнихъ сторонъ этого многоугольника будетъ принадлежать равнодѣйствующей, величина и направленіе которой уже извѣстны изъ многоугольника силъ (чер. 35), слѣдовательно величина αR будетъ искомой величиной. При этомъ, какъ это видно изъ чертежа, равнодѣйствующая будетъ лежать ближе къ большей силѣ.

На чертежѣ 36 и 37 исполнены всѣ построенія, необходимыя для разысканія равнодѣйствующей шести параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ разныя стороны. Величина и направленіе равнодѣйствующей опредѣляется длиною 06 на многоугольникѣ силъ; положеніе же относительно данныхъ силъ опредѣляется точкою пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника. Если къ даннымъ силамъ добавить еще силу равную и противоположную полученной равнодѣйствующей, то многоугольникъ данныхъ силъ сдѣлается замкнутымъ, а равнодѣйствующая всѣхъ силъ будетъ равна нулю.

36. Если будутъ даны двѣ параллельныя силы P_1 и P_2 (чер. 38), равныя и дѣйствующія въ разныя стороны, то, построивъ по предъ-

идущему многоугольникъ силъ (чер. 39), увидимъ, что величина равнодѣйствующей будетъ равна нулю, такъ какъ начало 1-ой силы и конецъ 2-й силы совпадаютъ; построивъ затѣмъ лучи и сравнивая чер. 33 съ 29, видимъ, что первый и послѣдній лучъ идутъ по одному направленію, поэтому въ веревочномъ многоугольникѣ a_1 A_1 A_2 a_2 (чер. 38), крайнія стороны будутъ параллельны, или, другими словами, будутъ пересѣкаться въ безконечности.

Совокупность двухъ силъ равныхъ и параллельныхъ, дѣйствующихъ въ разныя стороны, называется *парою.*

И такъ мы можемъ сказать, *что равнодѣйствующая пары равна нулю и точка приложенія ея находится въ безконечномъ разстояніи отъ данныхъ силъ.*

Графическое разложеніе силы, лежащей въ плоскости, на ея составляющія.

37. Въ параграфѣ 22 были указаны правила разложенія силы на двѣ составляющихъ, сходящихся въ точкѣ лежащей на данной силѣ. При чемъ пользовались свойствомъ треугольника силъ.

Точно также можно разложить данную силу на двѣ другихъ ей параллельныхъ, когда одна изъ нихъ будетъ дана по величинѣ и направленію или обѣ даны по направленію. Но при этомъ разложеніи приходится пользоваться не только многоугольникомъ силъ, но также и веревочнымъ многоугольникомъ.

Пусть требуется разложить данную силу R (чер. 40) на двѣ другихъ, по линіямъ AP и AQ. Построимъ въ сторонѣ отъ данной силы и направленій ея слагающихъ—линію 02 (чер. 41) равную и параллельную данной силѣ R, въ опредѣленномъ маштабѣ. Соединимъ концы ея 0 и 2 съ произвольнымъ полюсомъ C. Изъ точки α, взятой на данной силѣ R (чер. 40), проведемъ линіи параллельныя этимъ лучамъ. Пусть эти линіи пересѣкутъ напр. AP и AQ въ точкахъ A_1 и A_2. Соединивъ затѣмъ точки A_1 и A_2, очевидно, получимъ 2-ю сторону веревочнаго многоугольника, лежащую между направленіями 1-й и 2-й силы. Проведя чрезъ C лучъ, параллельный 3-й сторонѣ веревочнаго многоугольника, найдемъ точку 1, представляющую собою конецъ 1-й силы и начало 2-й силы, слѣдовательно отрѣзки 01 и 12 будутъ равны слагающимъ данной силы R и дѣйствующимъ по линіямъ AQ и AP. При этомъ направленія слагающихъ, какъ это видно изъ порядка цифръ ихъ обозначающихъ, будутъ идти по одному и тому же направленію.

38. Если бы сила R была помѣщена по одну сторону линій дѣйствія слагающихъ AP и AQ (чер. 42), то разложеніе производимъ точно также, какъ и выше, т. е. строимъ въ сторонѣ (чер. 43) длину R отъ 0 до 2 въ опредѣленномъ маштабѣ, соединяемъ ея концы 0 и 2 съ произвольнымъ полюсомъ C, отъ произвольной точки α, взятой на силѣ R (чер. 42), проводимъ линіи α A_1 и α A_2 до пересѣченія съ направленіемъ слагающихъ. Соединивъ точки A_1 и A_2, проводимъ изъ C (чер. 43) линію параллельную A_1 A_2 до пересѣченія съ продолженіемъ линіи 02 въ точкѣ 1. Послѣ этого ясно, что линія 01 будетъ слагающая, дѣйствующая по AP, а линія 12 будетъ слагающая, дѣйствующая по AQ, кромѣ того видно, что 12 будетъ дѣйствовать въ сторону противоположную данной силѣ, а 01 по одному и тому же направленію съ данной силой. Надо при этомъ замѣтить, что отъ точки α, тотъ или другой лучъ можно вести до того или другого направленія, это безразлично, какъ то видно изъ чертежей 44, 45 и 46.

Если одна изъ силъ, напримѣръ сила AQ, дана по величинѣ и означена толстою линіею (чер. 46), тогда на чертежѣ 47 будутъ извѣстны три точки 0, 1 и 2 на многоугольникѣ силъ, и, слѣдовательно, вторая слагающая опредѣлится, или какъ сумма данной силы и одной изъ слагающихъ (чер. 47), или какъ разность данной силы и одной изъ слагающихъ (чер. 49). Въ этомъ случаѣ, какъ видимъ, нѣтъ надобности чертить веревочнаго многоугольника.

39. Если требуется разложить силу по тремъ параллельнымъ ей направленіямъ, то задача будетъ неопредѣленной, до тѣхъ поръ, пока не будетъ дана одна изъ составляющихъ. Когда же она дана, то, вычтя ея длину изъ данной силы, нужно будетъ только полученную разность разложить на два другихъ направленія.

Если бы требовалось разложить силу по тремъ направленіямъ, параллельнымъ между собою и непараллельнымъ данной силѣ, то, очевидно, задача была бы невозможною. Это потому, что еслибы дѣйствительно существовали эти слагающія, то равнодѣйствующая ихъ была бы параллельна имъ и слѣд. была бы другого направленія, нежели сила, данная для разложенія. Эта же равнодѣйствующая не была бы равнозначна данной.

Точно также задача будетъ невозможной, если требуется разложить силу на три направленія, изъ которыхъ два параллельны данной силѣ, а третье направленіе не параллельно ей. Дѣйствительно, если бы существовали такія слагающія, то ихъ равнодѣйствующая была бы отлична отъ данной силы.

40. Если требуется разложить данную силу на три составляющія, изъ которыхъ двѣ проходятъ чрезъ точку, лежащую на данной силѣ, а третья не проходитъ чрезъ эту точку, то задача невозможна.

Дѣйствительно, если бы такія составляющія существовали, то двѣ первыя дали бы равнодѣйствующую, проходящую чрезъ точку ихъ пересѣченія, лежащую на данной силѣ; а эта равнодѣйствующая, сложенная съ третьею слагающею, вообще говоря, дастъ равнодѣйствующую отличную отъ данной силы.

Если требуется разложить данную силу на три составляющихъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, лежащей на данной силѣ или внѣ ея, то задача возможна, но неопредѣленна. Дѣйствительно, при построеніи четырехъ угольника силъ придется отъ концовъ данной силы провести линіи, параллельныя 1-му и 3-му направленію. Провести же линію параллельную 2-й слагающей въ четырехъ-угольникѣ силъ и пересѣкающую крайнія стороны, очевидно, можно не одну, а безчисленное множество. (Чер. 50 и 51).

41. Если данную силу требуется разложить на три направленія, пересѣкающихся между собою въ трехъ различныхъ точкахъ, изъ которыхъ ни одна не находится на данной равнодѣйствующей, или если требуется разложить данную силу на три направленія, изъ которыхъ два параллельны между собою, но не параллельны равнодѣйствующей и пересѣкаются третьею силою, то задача не только возможна, но и вполнѣ опредѣленна.

Дѣйствительно, пусть дана сила R (чер. 52) и требуется ее разложить на три направленія, означенныя цифрами 1, 2, 3 и пересѣкающіяся между собою. Точку A пересѣченія силы R съ направленіемъ 1 соединимъ съ точкою B пересѣченія 2-го и 3-го направленій. Разложить силу R сначала по двумъ направленіямъ: по 1-му направленію и по AB, что возможно, такъ какъ данная сила и оба направленія пересѣкаются въ одной точкѣ. И такъ, съ этою цѣлью построимъ въ сторонѣ треугольникъ abc (чер. 53) и получимъ слагающую по направленію 1-му и по AB. Слагающую по AB, очевидно, можно разложить на оба направленія 2 и 3, для чего надо построить треугольникъ acd. Такимъ образомъ данная сила будетъ разложена на три слагающихъ вполнѣ опредѣленнымъ образомъ.

Совершенно также надо поступить, если данную силу R требуется разложить на три составляющія, изъ которыхъ направленія двухъ параллельны между собою и пересѣкаются третьимъ направленіемъ (чер. 54 и 55).

Особенность здѣсь только та, что въ этомъ случаѣ четырехугольникъ силъ (чер. 55) приводится къ трехугольнику, по одной сторонѣ котораго будутъ направлены силы 1 и 2.

Задача разложенія силы на четыре направленія, вообще говоря, если не невозможна, то, во всякомъ случаѣ, задача неопредѣленная.

Условія, при которыхъ силы имѣютъ равнодѣйствующую или приводятся къ парѣ и условія равновѣсія.

42. **Теорема**. *Для того, чтобы система силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, имѣла бы равнодѣйствующую, необходимо и достаточно, чтобы многоугольникъ этихъ силъ не былъ замкнутъ.*

Дѣйствительно, для того чтобы данныя силы допускали равнодѣйствующую, необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая не была равна нулю и точка приложенія не находилась бы въ безконечности отъ данныхъ силъ, а для этого необходимо, чтобы крайнія стороны веревочнаго многоугольника не совпадали бы и не были бы параллельными, что всегда будетъ имѣть мѣсто если первый и послѣдній лучи не совпадаютъ, или, другими словами, когда многоугольникъ силъ не замкнутъ, а при этомъ, конечно, и равнодѣйствующая не будетъ обращаться въ нуль.

43. **Графическія условія, при которыхъ система силъ расположенныхъ въ плоскости приводится къ парѣ.**

Если многоугольникъ силъ замкнутъ, а веревочный многоугольникъ не замыкается, то крайнія стороны послѣдняго параллельны между собою, и слѣдовательно, система данныхъ силъ приводится къ двумъ силамъ, направленнымъ по этимъ параллельнымъ линіямъ. Эти двѣ силы будутъ, кромѣ того, равны и противоположны по знаку, и, слѣдовательно, данныя силы приводятся къ двумъ параллельнымъ силамъ равнымъ и противоположнымъ, или къ парѣ.

И такъ, можемъ высказать такія двѣ теоремы:

Если многоугольникъ силъ замыкается самъ собою, а веревочный многоугольникъ не замыкается, то система данныхъ силъ приводится къ парѣ. Или система данныхъ силъ не будетъ находится въ равновѣсіи.

И обратно:

Для того чтобы система данныхъ силъ приводилась къ парѣ необходимо и достаточно, чтобы многоугольникъ силъ былъ замкнутымъ, а веревочный многоугольникъ не замыкался бы.

44. Графическія условія равновѣсія системы силъ, расположенныхъ какъ угодно на плоскости.

Предположимъ теперь многоугольникъ силъ замкнутымъ. Въ этомъ случаѣ крайнія точки этого многоугольника совпадаютъ, и слѣд. равнодѣйствующая будетъ равна нулю. А такъ какъ первый и послѣдній лучъ многоугольника силъ совпадаютъ, то крайнія стороны веревочнаго многоугольника будутъ или параллельными или совпадающими.

Если онѣ параллельны, то, какъ уже видѣли раньше, система приводится къ парѣ. Если же крайнія стороны веревочного многоугольника совпадаютъ, то, слѣдовательно, онъ будетъ замкнутымъ, и система данныхъ силъ можетъ быть замѣнена двумя силами, направленными по крайнымъ сторонамъ веревочнаго многоугольника, равными и прямо противуположными, значитъ эти силы будутъ уравновѣшиваться. Изъ этихъ разсужденій вытекатъ такая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы система силъ была въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы ея многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ были бы замкнутыми.*

О моментахъ силъ, расположенныхъ на плоскости.

45. *Моментомъ силы относительно какой угодно точки* называютъ произведеніе силы на разстояніе отъ этой точки до силы.

При этомъ точку, относительно которой берется моментъ, называютъ центромъ моментовъ. Слѣдовательно (черт. 56) моментъ силы P относительно точки o равенъ P×op. Перпендикуляръ op называютъ плечемъ момента.

Моментомъ силы P относительно прямой DB, или относительно оси *DB* (чер. 57) называютъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ есть проекція силы P на плоскость NN, перпендикулярную къ прямой AB, а другой множитель есть разстояніе DE отъ основанія перпендикуляра DB до проекціи силы P. Другими словами: *моментъ нѣкоторой силы относительно оси равенъ моменту проекціи данной силы на плоскости, перпендикулярной къ оси, относительно точки встрѣчи оси съ плоскостью проекцій*.

Разстояніе DE отъ основанія оси до проекціи силы равно длинѣ FG или перпендикуляру, опущенному изъ нѣкоторой точки моментной оси A B на данную силу.

Моментомъ силы относительно плоскости ей параллельной называютъ моментъ силы относительно какой нибудь оси, находящейся въ этой плоскости и перпендикулярной къ проекціи силы.

46. Чтобы построить графически относительно точки O моментъ силы, направленіе дѣйствія которой изображено линіею P на чер. 59, а величина ея длиною ab (чер. 58), возьмемъ отъ ab, на разстояніи равномъ единицѣ длины точку C. Примемъ ее за полюсъ и соединимъ съ концами линіи ab. Затѣмъ, черезъ какую угодно точку J линіи P проведемъ JD и JE параллельно къ Ca и Cb, т. е. къ крайнимъ лучамъ.

Чтобы имѣть моментъ силы P относительно какой угодно точки O, достаточно провести черезъ эту точку параллель къ направленію силы. Отрѣзокъ xy представитъ искомый моментъ. Дѣйствительно, треугольники Jxy и Cab подобны; ихъ основанія относятся между собою какъ ихъ высоты, т. е.

$$\frac{xy}{ab} = \frac{OB}{1}$$

откуда

$$xy = ab \times OB.$$

Т. е. моментъ силы ab относительно точки O равенъ этой силѣ, умноженной на разстояніе отъ точки O, что вполнѣ согласно съ опредѣленіемъ момента, а потому указанный пріемъ полученія графически момента совершенно вѣренъ.

Если точка С отстоитъ отъ ab на произвольномъ разстояніи, равномъ Н, то вышенаписанная пропорція обратится въ такую:

$$\frac{xy}{ab} = \frac{OB}{H},$$

откуда

$$xy = \frac{ab \times OB}{H},$$

такъ что, если длина Н будетъ равна n единицамъ, то xy будетъ равенъ n-й части искомаго момента. Если $H = \frac{1}{n}$, то xy будетъ равенъ n разъ взятому искомому моменту, и обратно моментъ будетъ равенъ n-ой части xy. Иногда для удобства построеній бываетъ полезно брать для Н величину равную 10 единицамъ или степени 10.

47. **Построеніе момента равнодѣйствующей системы силъ.** Пусть дана система силъ на чер. 60, изображенныхъ линіями ихъ дѣйствія. Чер. 61 представляетъ многоугольникъ силъ и ихъ равнодѣйствію. Изъ полюса С проведены лучи и опущенъ на равнодѣйствующую перпендикуляръ, равный единицѣ. На основаніи предъидущаго, чтобы получить графически моментъ равнодѣйствующей относительно какой угодно точки О, *достаточно черезъ эту точку провести линію параллельную равнодѣйствующей, взять на равнодѣйствующей произвольную точку и изъ нея провести линіи параллельныя крайнимъ лучамъ, или*, другими словами, *продолжить крайнія стороны веревочнаго многоугольника до пересѣченія съ проведенною линіею*. Образованный, такимъ образомъ, на этой линіи, отрѣзокъ представитъ собою искомый моментъ равнодѣйствующей.

Когда веревочный многоугольникъ замкнутъ, то крайнія стороны его совпадаютъ, слѣдоват., въ этомъ случаѣ, моментъ равнодѣйствующей равенъ нулю. Этимъ устанавливается аналогичность роли веревочнаго многоугольника данныхъ силъ и суммы ихъ моментовъ.

Если разстояніе отъ полюса до равнодѣйствующей въ многоугольникѣ силъ равно n—единицамъ длины, то отрѣзокъ, образованный крайними сторонами веревочнаго многоугольника на линіи параллельной равнодѣйствующей и проходящей через центръ моментовъ, представитъ собою n-ую часть искомаго момента равнодѣйствующей. Т. е. моментъ будетъ равенъ n разъ взятому отрѣзку. Точно также, если разстояніе полюса до равнодѣйствующей въ многоугольникѣ силъ равно $\frac{1}{n}$ части единицы длины, то моментъ равнодѣйствующей равенъ n-ой части полученнаго отрѣзка.

Замѣтимъ при этомъ, что моментъ силы, относительно какой нибудь точки, не измѣняется, если точку приложенія силы перенести по линіи ея дѣйствія.

48. Если стороны веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующія каждой силѣ, продолжимъ до пересѣченія съ линіей xy, то получимъ на ней отрѣзки, представляющіе собою моменты соотвѣтствующихъ силъ, относительно той же точки 0. Такимъ образомъ, разсматриваніе чертежа 60 приводитъ насъ къ такъ называемой теоремѣ моментовъ:

Теорема. *Сумма моментовъ силъ, относительно какой угодно точки, расположенныхъ, какъ угодно, въ плоскости, равна моменту равнодѣйствующей этихъ силъ.*

Очевидно, что всѣ обстоятельства останутся совершенно тѣми же, если силы будутъ параллельныя, а потому высказанная теорема относится также и къ силамъ параллельнымъ, лежащимъ въ плоскости, какъ это видно на чертежахъ 62 и 63.

Мы видѣли, что если силы имѣютъ равнодѣйствующую, то моментъ этой равнодѣйствующей будетъ равенъ суммѣ моментовъ данныхъ силъ; точно также, когда силы приводятся къ парѣ, то сумма моментовъ двухъ силъ, составляющихъ пару, также равна суммѣ моментовъ данныхъ силъ.

Теорема. *Сумма моментовъ двухъ силъ, составляющихъ пару, остается постоянной, каково бы ни было положеніе точки, относительно которой берутся моменты.*

Дѣйствительно, пусть дана пара (чер. 64), составленная изъ двухъ силъ P и P′; моментъ P относительно точки C равенъ $P \times Cp$, моментъ P относительно этой же точки равенъ $P \times Cp'$; и такъ какъ сила—P и сила P стремятся повернуть плечи cp и cp′ въ направленіяхъ противоположныхъ, то сумма ихъ моментовъ выразится разностью:

$$P \times Cp - P \times cp' = P \times pp',$$

Т. е. сумма моментовъ обѣихъ силъ пары равна одной изъ нихъ, умноженной на разстояніе между ними.

Если точка C_1 находится между линіями дѣйствія силъ пары, то двѣ силы будутъ стремиться повернуть плечи C_1p и C_1p' въ одномъ и томъ же направленіи, такъ что моменты будутъ съ одними и тѣми же знаками; и такъ, сумма этихъ моментовъ будетъ:

$$P\times C_1p + P\times C_1p',$$

что всегда равно $P\times pp'$,

Т. е. тому-же выраженію, что и раньше.

И такъ, сумма моментовъ двухъ силъ пары относительно какой угодно точки ея плоскости есть величина постоянная и равная произведенію одной изъ силъ пары на ея плечо и не зависитъ отъ положенія центра моментовъ. Это произведеніе называется моментомъ пары. Моментъ пары служитъ мѣрою пары, а потому двѣ пары, у которыхъ силы и плечи различныя, но моменты одинаковые, называются парами равнозначущими или эквивалентными. Для такихъ паръ, слѣдовательно, будетъ имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$P\times p = P_1\times p_1 \text{ т. е.}$$

величины силъ двухъ равнозначущихъ паръ обратно пропорціональны ихъ плечамъ.

49. Изъ предшествующихъ опредѣленій слѣдуетъ, что *моментъ силы, относительно точки, равенъ нулю, когда точка находится на направленіи самой силы*, потому что тогда разстояніе отъ точки до силы равно нулю.

50. Моментамъ силъ присваиваютъ знаки + и — согласно слѣдующимъ условіямъ. Когда на матеріальную точку дѣйствуетъ сила, то точка приложенія этой силы побуждается къ движенію по направленію силы. Это фиктивное перемѣщеніе можетъ быть разсматриваемо, какъ результатъ нѣкотораго вращенія вокругъ точки, взятой на плоскости за центръ моментовъ. Моменту даютъ знакъ +, если вращеніе направляется слѣва направо и знакъ, — если оно направляется справа налѣво. Такъ, если точка O будетъ центръ моментовъ силъ P P_1... приложенныхъ къ разнымъ точкамъ A, A_1 (чер. 65) плоскости чертежа, то моментъ силы P относи-

тельно точки O будетъ равенъ $+P \times OA$; моментъ силы P_1 будетъ равенъ $-P_1 \times OA_1$

Моментъ считаютъ положительнымъ, если сила стремится повернуть плечо момента въ такомъ направленіи, что наблюдатель, стоящій въ точкѣ, относительно которой берутся моменты, видитъ плечо поворачивающимся слѣва направо, или въ направленіи часовыхъ стрѣлокъ.

51. Абсолютная величина момента силы можетъ быть представлена площадью.

Пусть A точка приложенія силы AP, данной по величинѣ и направленію и O—центръ моментовъ (черт. 66). Проведемъ плоскость черезъ точку O и черезъ силу AP. Опустимъ изъ точки O перпендикуляръ OВна AP. Абсолютная величина момента силы P относительно точки O будетъ произведеніе $AP \times OB$. Соединимъ O съ A и P; площадь треугольника OAP равна половинѣ произведенія его основанія AP на высоту OB. Слѣдовательно, моментъ силы можетъ быть представленъ двойной площадью треугольника OAP.

На чер. 59 треугольникъ APO выражаетъ собою половину момента силы P относительно точки O; очевидно, онъ можетъ быть замѣненъ другимъ треугольникомъ, у котораго основаніе линія AO, соединяющая центръ момента съ точкою приложенія силы, а высота проекція силы P на перпендикуляръ къ линіи AO. Такъ что произведеніе $AO \times P'C$ представляетъ собою по величинѣ моментъ силы P относительно точки O. При этомъ знакъ момента вполнѣ опредѣленъ, ибо проекція направлена по оси XX′ отъ X къ X′ или обратно—отъ X′ къ X, смотря по тому, стремится ли сила P повернуть свое плечо OB въ сторону OX′ или OX. Слѣдовательно, проекція мѣняетъ направленіе въ то время, когда моментъ силы мѣняетъ знакъ. А такъ какъ часть OX считается положительною, а OX′ отрицательною, то, слѣдовательно, произведеніе $AO \times OP'$ будетъ выражать собою по величинѣ и знаку моментъ силы P относительно точки O.

О моментахъ силъ относительно оси.

52. Моментомъ силы относительно оси называется произведеніе силы на разстояніе отъ силы до оси. Такъ что, если чрезъ линію, измѣряющую разстояніе отъ силы до оси, и чрезъ силу провести плоскость, то, очевидно, моментъ относительно оси будетъ равенъ мо-

менту той же силы относительно точки, чрезъ которую проходитъ ось (чер. 57).

Моментъ силы относительно оси равенъ двойной площади треугольника, имѣющаго основаніемъ проекцію силы на перпендикулярной плоскости къ оси, а вершиной основаніе оси. Слѣдовательно, можно сказать, что моментъ силы, относительно оси, равенъ, по абсолютной величинѣ, двойной проекціи, на плоскость перпендикулярную къ оси треугольника, образованнаго соединеніемъ какой нибудь точки оси съ концами прямой, представляющей силу.

Въ произведеніяхъ, какими выражаются моменты силъ, одинъ изъ множителей представляетъ длину, а второй множитель силу; единица силы и единица длины остаются, кромѣ того, совершенно независимыми одна отъ другой.

Моментъ силы относительно оси можетъ быть нулемъ въ двухъ случаяхъ: во 1-хъ, когда сила пересѣкаетъ ось, ибо тогда основаніе оси принадлежитъ также направленію проекціи силы на перпендикулярную плоскость, слѣдовательно моментъ проекціи силы, относительно основанія перпендикуляра, равенъ нулю; и во 2-хъ, когда сила параллельна оси, ибо тогда проекція силы на плоскость перпендикулярную къ оси равна нулю.

Такъ какъ двѣ линіи, пересѣкающіяся или параллельныя, лежатъ въ одной плоскости, то эти два случая можно выразить такъ: *моментъ силы относительно оси равенъ нулю, когда направленіе силы и ось находятся въ одной и той же плоскости.*

Моментъ силы относительно оси имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и моментъ проекціи силы на плоскость перпендикулярную къ оси относительно основанія оси. Пусть дана сила P, приложенная къ точкѣ A. Спроектируемъ эту силу на три координатныя плоскости XOY, YOZ, ZOX, проходящія чрезъ три перпендикулярныя оси OX, OY и OZ (чер. 68), то получимъ проекціи данной силы P_1, P_2, P_3. Изъ точки O опустимъ перпендикуляры op_1, op_2 и op_3 на эти три проекціи силы; тогда абсолютныя величины моментовъ силы P относительно осей будутъ слѣдующія:

относительно оси OZ, $P_1 \times Op_1$

относительно оси OX, $P_2 \times Op_2$

относительно оси OY, $P_3 \times Op_3$

*) Такимъ образомъ моменты выражаются пудо-дюймами, пудо-футами, киллограммо-метрами, киллограммо-сантиметрами.

Будемъ приписывать знакъ $+$ моментамъ относительно оси OX и оси OY и знакъ минусъ—моменту относительно оси OZ, слѣдовательно, моментъ силы P относительно трехъ осей будетъ:

относительно оси OZ, будетъ $-P_1 \times Op_1$
относительно оси OX, « $+P_2 \times Op_2$
относительно оси OY, « $+P_3 \times Op_3$

53. Зная моментъ силы относительно точки, легко найти моментъ той же силы относительно какой угодно оси, проходящей чрезъ данную точку.

Пусть AP (чер. 67) сила приложенная къ точкѣ A. Точка O постоянная точка, взятая произвольно въ пространствѣ. Черезъ эту точку проведемъ ось OZ, перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ силу P и точку O. Тогда моментъ силы P, относитетельно точки O, будетъ $AP \times Op$. Точно также моментъ той же силы относительно оси OZ равенъ двойной площади треугольника OAP.

Постараемся найти моментъ силы P относительно другой оси OS, проведенной какъ угодно черезъ точку O. Проведемъ черезъ эту точку плоскость NN_1 перпендикулярную къ оси OS, и построимъ проекцію треугольника OAP на этой плоскости. Искомый моментъ силы, относительно оси, будетъ равенъ двойной площади треугольника Оас. Возьмемъ на оси OZ, въ произвольномъ маштабѣ, длину OB, равную произведенію $AP \times OP$ т. е. представляющую въ маштабѣ двойную площадь треугольника OAP *). Ось OS образуетъ съ осью OZ уголъ SOZ, равный углу α, образованному плоскостью NN_1 съ плоскостью OAP' Если возьмемъ проекцію длины OB на направленіе OS, то получимъ длину Ob, представляющую, въ томъ же маштабѣ, двойную площадь треугольника Оас, т. е. моментъ силы P относительно оси OS. И такъ, достаточно провести черезъ точку O перпендикуляръ OZ къ плоскости, образуемой силою P и точкою O, и взять на перпендикулярѣ, начиная отъ точки O, длину OB, представляющую въ произвольномъ маштабѣ моментъ силы P относительно точки O. Моментъ силы P относительно оси OS выразится, въ томъ же

*) Моментъ построенный такимъ образомъ называется обыкновенно *линейнымъ моментомъ*.

маштабѣ, проекціею длины OB, на направленіе OS, и такимъ образомъ получимъ:

$$M_{os}\ P = M_{oz}\ P \times \cos\ \alpha.$$

Причемъ $M_{os}P$ означаетъ моментъ силы P относительно оси OS, а $M_{oz}P$ означаетъ моментъ силы P относительно оси OZ.

Для опредѣленія направленія момента, можно провести ось OB такимъ образомъ, чтобы наблюдатель, стоящій въ O, видѣлъ бы, что сила P стремится повернуть свою точку приложенія вокругъ точки O въ направленіи положительныхъ вращеній, т. е. по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ. Прямая OB будетъ имѣть тогда не только вполнѣ опредѣленную длину, но также опредѣленное направленіе дѣйствія.

Очевидно, что Ob всегда менѣе чѣмъ OB, поэтому можемъ высказать слѣдующія положенія: *моментъ силы, относительно точки, по абсолютной величинѣ, есть величина наибольшая изъ всѣхъ моментовъ силы относительно какихъ угодно осей, проведенныхъ чрезъ эту точку. Моменты силы P относительно какой угодно оси, образующей съ осью OZ одинъ и тотъ же уголъ, равны между собою.*

Моменты относительно какой угодно оси, проведенные черезъ точку O перпендикулярно къ OZ, суть нули, потому что каждая ось, проходящая черезъ точку O, перпендикулярно къ OS, находится въ плоскости, въ коей расположена сила, и слѣд. говоря вообще, пересѣкаетъ данную силу.

Такъ какъ моменты относительно оси выражаются моментами относительно точки, взятой на той же оси, то можно высказать также такую теорему:

Моментъ равнодѣйствующей относительно оси равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же оси.

54. Теперь слѣдовало бы показать, какъ выражаются моменты силы относительно трехъ прямоугольныхъ осей координатъ, но предварительно докажемъ слѣдующія теоремы:

Теорема. *Если имѣемъ три силы, проходящія черезъ одну точку, но не лежащія въ одной плоскости, то равнодѣйствующая этихъ силъ равна діагонали параллелипипида, построеннаго на этихъ силахъ.*

Дѣйствительно, пусть даны три составляющія X, Y и Z, проходящія чрезъ точку O. Чрезъ двѣ изъ нихъ X и Y можно провести плоскость, и равнодѣйствующая ихъ будетъ діагональ параллелограмма, построеннаго на линіяхъ X и Y. Полученная равнодѣйствующая OR проходитъ также черезъ точку O; проведя чрезъ нее и силу Z новую плоскость, найдемъ равнодѣйствующую силъ OR и Z, какъ діагональ параллелограмма, построеннаго на Z и R, и проходящую чрезъ точку O. Ясно, что эта новая равнодѣйствующая OR (чер. 69) представляетъ собою діагональ параллелипипида, построеннаго на трехъ данныхъ силахъ.

Замѣтимъ также, что равнодѣйствующая трехъ данныхъ силъ можетъ уничтожаться лишь въ томъ случаѣ, если данныя силы порознь сами обращаются въ нули.

Дѣйствительно, если ни одна изъ нихъ не обращается въ нуль, то, какъ доказано, діагональ параллелепипида, построеннаго на нихъ, будетъ ихъ равнодѣйствующею; если одна изъ нихъ обращается въ нуль, то двѣ другихъ, находясь въ одной плоскости, и, пересѣкаясь между собою, будутъ имѣть равнодѣйствующую равную діагонали параллелограмма, построеннаго на этихъ двухъ силахъ; если наконецъ двѣ изъ нихъ обращаются въ нули, то третья будетъ представлять собою равнодѣйствующую трехъ данныхъ.

Очевидно, также имѣетъ мѣсто и теорема обратная доказанной.

Теорема. *Всякая сила можетъ быть разложена на три составляющихъ, проходящихъ чрезъ точку лежащую на данной силѣ; при чемъ эти три составляющія представляютъ собою ребра нѣкотораго параллелипипида, діагональ котораго равна данной силѣ.*

55. Если слагающія составляютъ между собою прямые углы т. е. если параллелипипидъ прямоугольный, то будемъ имѣть:

$$R_1^2 = X^2 + Y^2 \text{ и}$$
$$R^2 = R^2 + Z^2 \quad \text{откуда}$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad \text{и наконецъ:}$$
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (1)$$

Если углы, образованные равнодѣйствующей R съ составляющими X, Y и Z, назовемъ буквами α, β и γ, то, очевидно, будемъ имѣть:

$$X = R\cos\alpha,\ Y = R\cos\beta,\ Z = R\cos\gamma, \text{ откуда:}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{R} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned}\right\} (2)$$

Такимъ образомъ имѣемъ 4 уравненія (1) и (2), заключающихъ въ себѣ семь величинъ; зная изъ нихъ три, можно найти остальныя четыре, исключая того случая, когда извѣстны три угла, ибо въ такомъ разѣ были бы лишь извѣстны отношенія $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, и $\frac{Z}{R}$ между слагающими и равнодѣйствующей, но не самыя слагающія.

56. Розыщемъ теперь величины моментовъ относительно трехъ осей OX, OY и OZ. Пусть сила P приложена къ точкѣ M, данной прямоугольными координатами X, Y, Z. (Чер. 70).

Разложимъ силу P въ точкѣ M на три составляющія MX, MY, MZ. Извѣстно (параграфъ 53), что моментъ силы относительно какой нибудь оси равенъ алгебраической суммѣ моментовъ ея составляющихъ относительно той же оси. Слѣд. чтобъ найдти моментъ данной силы относительно оси, надо найдти моменты составляющихъ относительно той же оси. Моментъ составляющей Z, параллельный оси OZ, равенъ нулю. Двѣ другихъ составляющихъ проектируются въ свою настоящую величину на плоскости XOY, перпендикулярной къ OZ. Разстояніе составляющей MY до оси OZ, или до точки O, равно x, разстояніе составляющей MX до той же точки равно y, слѣдовательно моменты силъ X и Y относительно точки O, или относительно оси OZ, взятые съ соотвѣтствующими знаками, равны Yx и Xy. Если x и y положительные, какъ предполагаетъ чертежъ, то X стремится повернуть свою точку приложенія вокругъ точки O, въ томъ направленіи, которое привело бы ось OY въ совпаденіе съ осью OX, т. е. въ направленіи отрицательномъ; моментъ силы X слѣдовательно, равенъ $-Xy$; другой моментъ положительный, и алгебраическая сумма моментовъ равна

$$Yx-Xy.$$

Слѣд. такъ будетъ выражаться моментъ данной силы P относительно оси OZ.

Точно также можно доказать, что моментъ силы P, относительно оси OX, равенъ:

$$Zy-Yz,$$

и относительно оси OY равенъ:

$$Xz-Zx,$$

И такъ имѣемъ три формулы:

$$\begin{aligned} M_{ox}\,P &= Zy-Yz = L, \\ M_{cy}\,P &= Xz-Zx = M, \\ M_{oz}\,P &= Yx-Xy = N, \end{aligned}$$

гдѣ буквами L M и N означены моменты силы P относительно трехъ координатныхъ осей.

Изъ этого видимъ, что моментъ силы относительно оси выражается опредѣлителемъ. Такъ что можемъ также написать:

$$M_{ox}P = Zy - Yz = \begin{vmatrix} x, & z \\ X & Z \end{vmatrix}$$

И такъ три опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} x, & y \\ X, & Y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y, & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} z, & x \\ Z & X \end{vmatrix}$$

представляютъ собою моменты силы относительно трехъ координатныхъ осей OZ, OX, OY.

57. Если перемѣстить оси параллельно имъ самимъ, а начало перенести въ точку, координаты которой $\xi\ \eta\ \zeta$, то, называя буквами x', y', z' новые координаты, точки приложенія силы P, получимъ:

$$\begin{aligned} x &= \xi + x', \\ y &= \eta + y', \\ z &= \zeta + z'. \end{aligned}$$

И въ этомъ случаѣ моментъ силы относительно оси OZ выразится такъ:

$$Zy - Yz = Z\,(\eta + y') - Y(\zeta + z') = (Z\eta - Y\zeta) + (Zy' - Yz').$$

Опредѣлитель $Zy'-Yz'$ есть моментъ силы P относительно новой оси $O'X'$; а опредѣлитель $Z\eta-Y\zeta$, есть моментъ силы P относительно прежней оси OX, перенесенной параллельно самой себѣ въ новое начало O'. Чтобы перейти отъ моментовъ относительно системы прямоугольныхъ осей къ моментамъ относительно осей параллельныхъ, достаточно вычесть изъ первыхъ моментовъ моменты относительно старыхъ осей, силъ перенесенныхъ параллельно имъ самимъ въ новое начало.

58. Найдемъ далѣе моментъ силы P относительно прямой OP (чер. 71) проходящей черезъ начало. Направленіе этой прямой OP опредѣляется углами α, β, γ, составленными съ осями. Спроектируемъ конецъ линіи OD или точку D на три оси, найдемъ три точки A, E и C. Тогда косинусы угловъ α, β и γ выразятся такъ:

$$\cos\alpha=\frac{AO}{OD},\ \cos\beta=\frac{OE}{OD},\ \cos\gamma=\frac{OC}{OD}.$$

Косинусы имѣютъ знаки общіе съ OA, OE, OC и связаны между собою отношеніемъ:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Если два изъ этихъ угловъ даны, то третій косинусъ получится изъ этого послѣдняго уравненія, съ соотвѣтствующимъ знакомъ.

Проведемъ плоскость чрезъ точку O, перпендекулярно къ оси OP. Искомый моментъ найдется, если спроектируемъ на эту плоскость площадь треугольника, имѣющаго вершиной точку O, и основаніемъ силу P, но, какъ знаемъ, для этого достаточно найти проекцію на оси OP, длины OB, равной моменту силы P относительно точки O, взятой на перпендикулярѣ къ плоскости OMP. Моменты L, M и N силы P относительно оси ничто иное, какъ только проекціи на тѣ же оси длины OB; и такъ можно разсматривать OB, какъ равнодѣйствующую трехъ составляющихъ L, M и N, соотвѣтственно отложенныхъ на осяхъ, начиная отъ точки O. Поэтому, называя моментъ силы P относительно оси OP буквою G, можно написать:

$$G=\sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

Для того же момента можно написать и другое выраженіе. Дѣйствительно: проекція равнодѣйствующей OB на направленіе OD есть алгебраическая сумма проекцій составляющихъ на какое либо направленіе. Возьмемъ на оси OX длину $OL=L$ и спроектируемъ длину

L въ L′ по OD, то получимъ $OL'=L\cos\alpha$; точно также проекція на OD момента M, относительно оси OY, будетъ равна $M\cos\beta$, и проекція на OZ момента N, относительно оси OZ, будетъ $N\cos\gamma$.

Слѣд. окончательно найдемъ:

$$G=L\cos\alpha+M\cos\beta+N\cos\gamma.$$

Аналитическій способъ нахожденія равнодѣйствующей и моментовъ системы силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, и аналитическія условія равновѣсія системы силъ, расположенныхъ въ плоскости.

59. Мы видѣли, что равнодѣйствующая системы силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, равна по величинѣ и направленію дѣйствія замыкающей многоугольника силъ. Но изъ аналитической геометріи извѣстно, что сумма проекцій сторонъ какаго либо незамкнутаго многоугольника, на какую угодно ось, равна проекціи замыкающей стороны многоугольника на ту же ось. Поэтому мы можемъ сказать:

Теорема. *Проекція равнодѣйствующей системы силъ, расположенныхъ въ плоскости, на какую угодно ось, равна суммѣ проекцій данныхъ силъ на ту же ось.*

На основаніи этой теоремы, называемой теоремою проекцій, также какъ и на основаніи многоугольника силъ, можно получить величину и знакъ равнодѣйствующей системы силъ.

Дѣйствительно, если дана система силъ, то можно найти ихъ проекціи на двухъ пересѣкающихся осяхъ Ox, Oy. Суммы этихъ проекцій на каждой изъ осей представятъ проекцію равнодѣйствующей на тѣхъ же осяхъ. Но, зная величины и знаки проекцій какой либо линіи на осяхъ координатъ, можно построить самую линію по величинѣ, направленію и знаку. Достаточно изъ конца A ея проекцій на осяхъ возставить перпендикуляры къ этимъ осямъ. Линія, идущая отъ начала координатъ O къ точкѣ пересѣченія C этихъ двухъ перпендикуляровъ, представитъ по величинѣ, направленію и знаку искомую длину. Но нахожденіе проекцій всѣхъ данныхъ силъ на двухъ осяхъ, сложеніе этихъ проекцій на каждой изъ осей, проведеніе перпендикуляровъ несравненно менѣе удобно построенія многоугольника силъ.

Поэтому теорему проекцій для графическаго нахожденія равнодѣйствующей никогда и не употребляютъ.

Но теорема проекцій даетъ съ большимъ удобствомъ величину равнодѣйствующей, направленіе и положеніе ея относительно данныхъ силъ, когда желаютъ ее найти не графически, а аналитически. Дѣйствительно, если даны силы

$$P_1 \; P_2 \; P_3 \; . \; . \; . \; P_n$$

отнесенныя къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, составляющія съ осью Ox углы

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \alpha_3, \; . \; . \; . \; . \; \alpha_n,$$

если R величина равнодѣйствующей этихъ силъ и θ уголъ, образуемый ею съ Ox, то, на основаніи теоремы проекціи, можемъ написать:

$$(1) \quad \begin{cases} R \cos\theta = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \; . \; . \; . \; Pn \cos\alpha_n, \\ R \sin\theta = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \; . \; . \; . \; P_n \cos\alpha_n, \end{cases}$$

Раздѣляя эти уравненія почленно, исключимъ R и получимъ уравненіе:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \; . \; . \; + P_n \sin\alpha_n}{P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \; . \; . \; + P_n \cos\alpha_n}$$

доставляющее величину угла θ, опредѣляющаго положеніе равнодѣйствующей относительно осей, а слѣдовательно и относительно данныхъ силъ.

Если уравненія (1) возвысить въ квадратъ и затѣмъ сложить, принимая во вниманіе отношеніе

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \text{то}$$

получимъ уравненіе:

$$R^2 = \left\{ P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \; . \; . \; . \; . + P_n \cos\alpha_n \right\}^2 + \left\{ P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \; . \; . \; . \; . + P_n \sin\alpha_n \right\}^2 \quad (3)$$

опредѣляющее величину и знакъ равнодѣйствующей R.

Точно также, если

$$p_1 \; p_2 \; p_3 \; . \; . \; . \; p_n$$

разстоянія отъ линій дѣйствія данныхъ силъ до нѣкоторой точки

O, лежащей въ плоскости данныхъ силъ, R равнодѣйствующая и r разстояніе до нея отъ точки O, то теорема моментовъ даетъ:

$$Rr_1 = P_1p_1 + P_2p_2 + \ .\ .\ .\ + P_np_n = \Sigma Pp \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

..ѣвая часть этого уравненія будетъ извѣстна, величина R извѣстна изъ уравненія 3, а потому изъ написаннаго уравненія опредѣлится разстояніе r отъ линіи дѣйствія равнодѣйствующей до точки O, и этого достаточно для того, чтобы линія дѣйствія, направленіе которой извѣстно изъ теоремы проекцій, была бы вполнѣ опредѣлена.

60. Изъ уравненій (1, 2, 3, 4) суммы проекцій и суммы моментовъ вытекаютъ такія слѣдствія:

a) Если суммы проекцій данныхъ силъ на двухъ пересѣкающихся осяхъ не обращаются въ нули, тогда эти уравненія доставляютъ опредѣленную величину и направленія равнодѣйствующей R. Если R будетъ отлично отъ нуля, то уравненіе (3) доставитъ для r опредѣленную величину. И, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, данныя силы допускаютъ равнодѣйствующую.

b) Если суммы проекцій данныхъ силъ, на двухъ пересѣкающихся осяхъ, обращаются въ нули, то равнодѣйствующая R также будетъ равна нулю. И въ этомъ случаѣ, точка приложенія равнодѣйствующей находится въ безконечноси, т. е. данная система силъ сводится къ парѣ. А такъ какъ моментъ пары независимъ отъ положенія центра моментовъ, то изъ этого слѣдуетъ, что когда сумма моментовъ данныхъ силъ относительно нѣкоторой точки O отлична отъ нуля, то она будетъ отлична отъ нуля и для каждой другой точки плоскости. Если эта сумма равна нулю для одной точки O, то она будетъ нулемъ и для всякой другой точки, и тогда система приводится къ парѣ, моментъ которой или плечо которой равно нулю, т. е. къ системѣ двухъ силъ равныхъ и противоположныхъ, равнодѣйствующая которыхъ будетъ равна нулю. И такъ:

1) *Чтобы система силъ, расположенныхъ въ плоскости, имѣла равнодѣйствующую, необходимо и достаточно, чтобы суммы ихъ проекцій на двухъ пересѣкающихся осяхъ не обращались въ нули;*

2) *чтобы система силъ приводилась къ парѣ, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекцій этихъ силъ на двухъ какихъ угодно пересѣкающихся осяхъ были нулями и чтобы суммы ихъ*

моментовъ относительно какой угодно точки плоскости были отличны отъ нуля.

3) *Чтобы система силъ, расположенныхъ въ плоскости, была въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекцій этихъ силъ на каждую изъ двухъ пересѣкающихся осей обращались въ нули и чтобы суммы ихъ моментовъ относительно какой угодно точки плоскости были также нулями.*

Аналитически эти условія выразятся слѣдовательно такъ:

$$
\begin{aligned}
R\cos\theta &= P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\cos\alpha_n = 0\\
R\,\mathrm{sn}\,\theta &= P_1\,\mathrm{sn}\,\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots + P_n\sin\alpha_n = 0\\
Rr &= P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots + P_np_n = 0
\end{aligned}
$$

Если два первыхъ условія выполнены для двухъ какихъ нибудь осей, то они будутъ выполнены и для всякихъ другихъ осей; если третье условіе выполняется для одной точки плоскости, то оно будетъ выполнено и для всякой другой точки. Это совершенно аналогично съ тѣмъ положеніемъ, что если одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ замкнутъ, то и всякій другой также будетъ замкнутъ. Выведенныя здѣсь условія совершенно аналогичны съ условіями, выведенными въ параграфахъ 42, 43 и 44.

Если точка, относительно которой берутся моменты, находится на равнодѣйствующей, то моментъ этой равнодѣйствующей относительно этой точки есть нуль. Точно также и сумма моментовъ данныхъ силъ будетъ равна нулю. И обратно, если сумма моментовъ системы силъ, не находящихся въ равновѣсіи, равна нулю для какой нибудь точки, то система силъ допускаетъ равнодѣйствующую, и точка, относительно которой взяты моменты, лежитъ на этой равнодѣйствующей. Дѣйствительно, если бы система не допускала одной равнодѣйствующей, а приводилась къ парѣ, то сумма моментовъ данныхъ силъ не могла бы быть нулемъ ни для одной точки плоскости, помѣщенной на конечномъ разстояніи отъ данныхъ силъ.

Центръ параллельныхъ силъ.

61. Лемма.—Если имѣемъ двѣ параллельныя силы P и Q, приложенныя къ какимъ угодно точкамъ a и b, то равнодѣйствующая этихъ силъ раздѣляетъ линію ab на части обратно пропор-

ціональныя величинѣ данныхъ силъ. Равнодѣйствующая проходитъ между точками a и b, если силы P и Q одного знака; она пересѣкаетъ линію ab на ея продолженіи и въ сторонѣ большей силы, если онѣ противоположныхъ знаковъ.

Эта лемма доказывается безъ затрудненія изъ разсматриванія веревочнаго многоугольника.

Пусть $P = AB$ и $Q = BD$ (чер. 72 и 73). Если силы P и Q дѣйствуютъ по одному направленію, то BD должно отложить на продолженіи AB. Черезъ точку B проведемъ BC параллельно линіи, ab, возьмемъ точку C за полюсъ и построимъ веревочный многоугольникъ $a\alpha b$.

Равнодѣйствующая параллельна даннымъ силамъ и проходитъ чрезъ точку α пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника; равнодѣйствующая пересѣчетъ линію ab напр. въ точкѣ c. Эта точка находится между точками приложенія a и b, если данныя силы одного и того же знака; ибо тогда лучи CA и DC расположены съ одной и съ другой стороны луча CB. Изъ этого слѣдуетъ, что стороны $a\alpha$ и $b\alpha$ веревочнаго многоугольника пересѣкаются между линіями дѣйствія P и Q. Если сила Q имѣетъ направленіе противоположное направленію силы P и менѣе P, то она представится на многоугольникѣ силъ посредствомъ линіи BD_1; и точка D_1 упадетъ между B и A. Тогда, вмѣсто стороны $b\alpha$ веревочнаго многоугольника, надо будетъ начертить $b\alpha_1$, которыя пересѣчетъ $a\alpha$ въ точкѣ α_1 помѣщенной слѣва отъ P; а равнодѣйствующая, проходящая въ этомъ случаѣ черезъ α_1, пересѣчетъ линію ab въ точкѣ c_1, находящейся на продолженіи aq, въ сторонѣ большей силы.

Кромѣ того, изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и $ac\alpha$ имѣемъ:

$$\frac{c\alpha}{ac} = \frac{AB}{CB} = \frac{P}{CB}$$

откуда:

$$P \times ac = CB \times c\alpha$$

Точно также найдемъ:

$$Q \times bc = CB \times c\alpha$$

откуда:

$$P \times ac = Q \times bc$$

или

$$\frac{P}{Q} = \frac{bc}{ac} \tag{1}$$

Тоже самое получимъ и для точки α_1, ибо изъ подобныхъ треугольниковъ $\alpha_1 c_1 a$ и ABC имѣемъ:

$$P \times ac_1 = CB \times c_1\alpha_1$$
$$Q \times bc_1 = CB \times c_1\alpha_1,$$

откуда:

$$\frac{P}{Q} = \frac{bc_1}{ac_1} \tag{2}$$

Это свойство параллельныхъ силъ даетъ возможность строить графически равнодѣйствующую двухъ параллельныхъ силъ, не прибѣгая къ многоугольнику силъ и веревочному многоугольнику (чет. 74). Для этого изъ точки приложенія b силы Q опишемъ дугу круга радіуса bd, пропорціональнаго P; а изъ точки приложенія силы P опишемъ также дугу круга радіуса ad пропорціональнаго Q. Если силы P и Q одного и того же знака, то проведемъ биссиктрису угла adb; она пересѣчетъ ab въ точкѣ с равнодѣйствующей. Если силы P и Q противоположныхъ знаковъ, то проведемъ линію df подъ такимъ угломъ къ da, какой эта послѣдняя составляетъ съ db; точка пересѣченія этой новой линіи съ линіей ad будетъ принадлежать равнодѣйствующей.

Замѣтимъ, что выведенныя выше отношенія (1) и (2) можно получить также изъ теоремы моментовъ: дѣйствительно, если p и q (чер. 72) суть разстоянія точекъ приложенія силъ P и Q до точки с равнодѣйствующей, то, взявъ с за центръ моментовъ, на основаніи теоремы моментовъ, напишемъ:

$$Pp - Qq = 0,$$

или:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} = \frac{bc}{ac}$$

62. Положеніе точки приложенія с равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ P и Q, или точки приложенія с равнодѣйствующей силъ P и Q, не зависитъ ни отъ общаго направленія этихъ силъ, ни отъ ихъ абсолютныхъ величинъ, но только отъ положенія ихъ точекъ приложенія a и b и отъ отношенія ихъ величинъ: и такъ,

точка c, или точка c_1 не измѣнятся, если увеличимъ или уменьшимъ величины этихъ двухъ силъ въ одно и тоже число разъ и если повернемъ силы на какой угодно уголъ вокругъ точекъ a и b, не измѣняя лишь ихъ параллельности. И въ этомъ случаѣ равнодѣйствующая данныхъ силъ повернется сама вокругъ постоянной точки, положенiе которой независимо отъ угла поворота.

63. **Теорема**. *Если дана система параллельныхъ силъ, расположенныхъ въ плоскости, или пространствѣ, то, не измѣняя величины и параллелизма силъ, можно повернуть каждую изъ нихъ на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ постоянной точки, произвольно выбранной на линiи дѣйствiя одной изъ силъ. При этомъ равнодѣйствующая данныхъ силъ повернется вокругъ постоянной точки; положенiе этой точки не зависитъ отъ угла поворота, а только отъ положенiя направленiй и величинъ данныхъ силъ.*

Точка, обладающая такимъ свойствомъ, называется *центромъ параллельныхъ силъ.*

Предположимъ, что теорема вѣрна для системы i силъ, докажемъ, что она будетъ вѣрна и для системы $i+1$ силъ.

Пусть Q равнодѣйствующая i первыхъ данныхъ силъ и R равнодѣйствующая Q и силы P_{i+1}. Слѣдовательно, R будетъ равнодѣйствующая всѣхъ данныхъ силъ. Повернемъ каждую изъ данныхъ силъ на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ постоянной точки, не измѣняя лишь параллелизма. По предположенiю, равнодѣйствующая i первыхъ силъ или Q повернется на тотъ же уголъ вокругъ постоянной точки; но тогда равнодѣйствующая Q и P_{i+1} т. е. равнодѣйствующая R всѣхъ данныхъ силъ, повернется сама вокругъ постоянной точки. И такъ, если теорема вѣрна для i силъ, она вѣрна и для $i+1$ силъ. Такъ какъ теорема доказана для двухъ силъ, то она, слѣдовательно, вѣрна для трехъ силъ, а потому и для четырехъ и такъдалѣе для какого угодно числа силъ.

Когда постоянныя точки, вокругъ которыхъ поворачиваются различныя силы, находятся на прямой линiи, то центръ параллельныхъ силъ находится также на этой линiи.

64. *Когда точки приложенiя параллельныхъ силъ, расположенныхъ какимъ угодно образомъ въ пространствѣ, находятся всѣ въ одной плоскости, то центръ параллельныхъ силъ тоже находится въ этой плоскости.*

Чтобы доказать эту лемму, достаточно предположить, что всѣ силы параллельныя повернуты до совмѣщенія съ плоскостью точекъ приложенія, очевидно, и равнодѣйствующая данныхъ силъ будетъ такъ же находиться на этой плоскости. Тоже самое будетъ съ центромъ данныхъ параллельныхъ силъ, такъ какъ онъ находится на этой равнодѣйствующей.

И такъ, если извѣстенъ центръ параллельныхъ силъ, то линія дѣйствія равнодѣйствующей данныхъ силъ извѣстна, потому что она проходитъ черезъ этотъ центръ и параллельна даннымъ силамъ. Величина равнодѣйствующей равна суммѣ данныхъ силъ, и ея знакъ прямо получается изъ многоугольника силъ.

Если силы, перенесенныя въ одну плоскость, допускаютъ равнодѣйствующую, то и данныя силы тоже будутъ имѣть одну равнодѣйствующую. А для этого необходимо, чтобы многоугольникъ силъ, приведенныхъ въ плоскость, не былъ замкнутъ.

Если многоугольникъ данныхъ силъ замкнутъ, то эти силы придутъ въ равновѣсіе или приведутся къ парѣ, смотря потому, замыкается или не замыкается ихъ веревочный многоугольникъ, послѣ того какъ онѣ будутъ приведены въ плоскость.

Проекціи и моменты параллельныхъ силъ, лежащихъ въ пространствѣ.

65. **Лемма:** *Проекція равнодѣйствующей системы параллельныхъ силъ на какую угодно плоскость совпадаетъ съ равнодѣйствующей проекціей этихъ силъ на ту же плоскость.*

Пустъ $P_1 P_2 \ldots P_n$ система параллельныхъ силъ, расположенныхъ какимъ угодно образомъ въ пространствѣ.

Условимся представлять данныя силы длинами, отложенными въ желаемыхъ направленіяхъ на соотвѣтствующихъ линіяхъ дѣйствія въ опредѣленномъ маштабѣ, соотвѣтственно ихъ напряженности. Спроектируемъ эти длины на плоскость, и пусть

$$P_1', \ P_2' \ P_3', \quad . \quad . \quad . \ P'_n$$

ихъ проекціи. Мы можемъ разсматривать эти проекціи, какъ новыя силы. Пусть R равнодѣйствующая данныхъ силъ и R' равнодѣйствующая ихъ проекцій. Требуется доказать, что R' есть также проекція R.

Для этого, продолжимъ данныя силы до ихъ пересѣченія съ плоскостью проекцій и положимъ, что онѣ приложены въ точкахъ пересѣченія съ этою плоскостью. Ихъ проекціи составятъ новую систему параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣмъ же точкамъ. Напряженность проекцій данныхъ силъ пропорціональна напряженностямъ данныхъ силъ; знаменатель отношенія первыхъ къ послѣднимъ есть косинусъ остраго угла, образуемаго направленіемъ послѣднихъ силъ съ плоскостью проекцій; и такъ, данныя силы можно привести въ совпаденіе съ ихъ проекціями, поварачивая первыя силы на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ ихъ точекъ приложенія, умножая длину каждой изъ нихъ на cos угла поворота. Равнодѣйствующая данныхъ силъ повернется на плоскости проекцій на тотъ же уголъ, и ея величина уменьшится или увеличится въ тоже число разъ, т. е. будетъ умножена на cos φ *), или, другими словами, она совпадетъ съ своей проекціей. И такъ, эта проекція есть равнодѣйствующая проекцій данныхъ силъ.

66. **Моментъ силы относительно плоскости**. Моментомъ силы относительно плоскости называютъ произведеніе этой силы на разстояніе ея точки приложенія до плоскости.

Изъ опредѣленія момента силы относительно плоскости, ясно, что онъ равенъ моменту той же силы относительно оси, проведенной на той же плоскости перпендикулярно къ направленію данной силы. Поэтому моменты двухъ параллельныхъ силъ относительно плоскости имъ параллельной будутъ одного, или разныхъ знаковъ, смотря потому, будутъ ли одного или разныхъ знаковъ моменты этихъ силъ относительно оси, проведенной въ данной плоскости перпендикулярно общему направленію силъ.

Обыкновенно за положительное направленіе силы считается идущее отъ лѣвой руки къ правой, а за отрицательное обратное направленіе Разстояніе считается положительнымъ идущее отъ плоскости вверхъ до данной силы, а отрицательнымъ, идущее отъ плоскости внизъ до данной силы.

Слѣдоват. знакъ момента будетъ зависѣть отъ знаковъ обоихъ множителей,—силы P и разстоянія p отъ силы до плоскости.

Моментъ силы относительно плоскости обращается въ нуль, когда

*) Если φ уголъ поворота.

обращается въ нуль либо сила, либо разстояніе. Поэтому можно сказать, что моментъ силы относительно плоскости, проходящей чрезъ данную силу, равенъ нулю.

Замѣтимъ, кромѣ того, что моментъ силы относительно плоскости имѣетъ совершенно другое значеніе, нежели моментъ силы относительно точки. Этотъ послѣдній зависитъ отъ положенія линіи дѣйствія силы и не зависитъ нисколько отъ положенія ея точки приложенія. Напротивъ, моментъ относительно плоскости зависитъ только отъ положенія точки приложенія, а не зависитъ отъ направленія линіи дѣйствія силы.

Пусть дана система параллельныхъ силъ, повернемъ ихъ на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ ихъ точекъ приложенія такъ, чтобы сдѣлать ихъ параллельными данной плоскости N, относительно которой берутся моменты; затѣмъ спроектируемъ ихъ на плоскость N_1 перпендикулярную къ N. Наконецъ возьмемъ моменты проекцій данныхъ силъ и ихъ равнодѣйствующей, относительно какой угодно точки O, лежащей на пересѣченіи плоскостей N и N_1. Моментъ каждой изъ данныхъ силъ относительно плоскости N, очевидно, по абсолютной величинѣ, равенъ моменту ея проекціи относительно точки O, такъ какъ силы проектируются въ настоящую величину и ихъ разстоянія до плоскости N равны разстояніямъ ихъ проекцій до точки O; возьмемъ знаки моментовъ нашихъ силъ относительно плоскости N, такъ чтобы эти знаки были тѣже самые, какъ и знаки моментовъ ихъ проекцій относительно точки O, такъ что эти два момента для каждой силы будутъ равны по величинѣ и знаку. Моментъ относительно точки O равнодѣйствующей проекцій данныхъ силъ равенъ суммѣ моментовъ этихъ силъ. Эта послѣдняя сумма, на основаніи предъидущаго, равна суммѣ моментовъ данныхъ силъ относительно плоскости N; далѣе равнодѣйствующая проекцій данныхъ силъ, по леммѣ предъидущаго параграфа, есть проекція равнодѣйствующей силъ, расположенныхъ въ пространствѣ, слѣд. ея моментъ относительно точки O равенъ моменту относительно плоскости N равнодѣйствующей данныхъ силъ.

И такъ, моменты данныхъ силъ и моментъ ихъ равнодѣйствующей относительно плоскости N равны моментамъ относительно точки O, лежащей въ той же плоскости; поэтому можно высказать такую теорему:

Теорема: *Моментъ равнодѣйствующей системы параллельныхъ силъ относительно какой угодно плоскости равенъ суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно этой плоскости.*

67. **Координаты центра параллельныхъ силъ.** Пусть дана P_1, P_2, P_3, P_n система параллельныхъ силъ.

Возьмемъ три прямоугольныхъ плоскости координатъ,—пусть

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots\ldots x_n, \\ y_1, & y_2, & y_3, & \ldots\ldots y_n, \\ z_1, & z_2, & z_3, & \ldots\ldots z_n, \end{array}$$

координаты точекъ приложенія данныхъ силъ, и пусть ξ, η,ζ координаты центра параллельныхъ силъ. Если R есть равнодѣйствующая данныхъ силъ, то теорема моментовъ, послѣдовательно приложенная къ тремъ плоскостямъ, дастъ уравненія:

$$\begin{cases} R\xi = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots + P_ny_n = \Sigma P_iy_i \\ R\eta = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots + P_nx_n = \Sigma P_ix_i \\ R\zeta = P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots + P_nz_n = \Sigma P_iz_i. \end{cases} \quad (1$$

Здѣсь буквами Σ обозначены алгебрическія суммы, образующія вторыя части этихъ уравненій. Эти суммы извѣстны; R также извѣстно, потому что

$$R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_i \quad (2)$$

гдѣ Σ есть алгебрическая сумма данныхъ силъ. Итакъ, уравненіе (1) даетъ координаты ξ, η, ζ, центра параллельныхъ силъ, т. е. положеніе центра параллельныхъ силъ въ пространствѣ. И эти координаты выразятся слѣд. такими формулами:

$$\xi = \frac{\Sigma P_ix_i}{R} = \frac{\Sigma P_ix_i}{\Sigma P_i}$$

$$\eta = \frac{\Sigma P_ix_i}{R} = \frac{\Sigma P_iy_i}{\Sigma P_i}$$

$$\zeta = \frac{\Sigma P_iz_i}{R} = \frac{\Sigma P_iz_i}{\Sigma P_i}$$

Условія равновѣсія параллельныхъ силъ.

67. Если силы расположены въ одной плоскости, напр. въ плоскости XOY, тогда $z_1 = 0, z_2 = 0, \ldots, z_n = 0$. Послѣднее уравненіе (1) въ этомъ случаѣ даетъ $\zeta = 0$, т. е. центръ параллельныхъ

силъ также расположенъ въ плоскости XOY, и его положеніе опредѣляется разстояніями ξ и η до двухъ прямыхъ Oy и OX. Точно также, точки приложенія данныхъ силъ опредѣлятся координатами относительно осей X—овъ и У—овъ.

Произведеніе $P_i x_i$, или моментъ силы P_i относительно плоскости ZOY, въ этомъ случаѣ, можно назвать моментомъ силы P_i относительно прямой OY пересѣченія плоскости ZOY съ плоскостью, содержащей всѣ силы. Также произведеніе $P_i y_i$, или моментъ силы P_i относительно плоскости ZOX, можно назвать моментомъ этой силы, относительно прямой OX. И такъ, можно высказать слѣдующую теорему:

68. *Моментъ равнодѣйствующей системы параллельныхъ силъ, расположенныхъ въ плоскости, относительно прямой, лежащей въ той же плоскости, равенъ суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно этой прямой.*

Очевидно, это частный случай теоремы моментовъ для какихъ угодно силъ. Теорема моментовъ позволяетъ опредѣлять аналитически положеніе центра параллельныхъ силъ, точно также, какъ веревочный многоугольникъ позволяетъ опредѣлить центръ параллельныхъ силъ графически.

Теорема проекцій, при аналитическихъ вычисленіяхъ, играетъ ту же роль, какъ многоугольникъ силъ, при графическихъ построеніяхъ.

69. Вслѣдствіе всего выше изложеннаго, мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

Теорема: *Система параллельныхъ силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, будетъ въ равновѣсіи, если во 1-хъ суммы ея проекцій на двухъ пересѣкающихся плоскостяхъ, параллельныхъ даннымъ силамъ, нули; во 2-хъ, если суммы моментовъ данныхъ силъ относительно этихъ плоскостей тоже нули.* Эта же теорема можетъ быть выражена иначе.

Теорема. *Для равновѣсія силъ параллельныхъ, расположенныхъ въ пространствѣ, необходимо во 1-хъ, чтобы многоугольникъ этихъ силъ, перенесенныхъ на какую либо плоскость, былъ замкнутъ, и во 2-хъ, чтобы одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ этихъ силъ, перенесенныхъ въ плоскость, былъ также замкнутъ.*

Тяжесть и центръ тяжести тѣла.

69. Всѣ тѣла, находящіяся на поверхности земнаго шара, притягиваются къ землѣ опредѣленною силою. Сила эта производитъ давленіе на опоры, если тѣло находится въ равновѣсіи, или она заставляетъ тѣло падать, если тѣло совершенно свободно. Сила эта называется *тяжестью*.

Легкія тѣла держатся въ воздухѣ, не падая на поверхность земли. Это потому, что атмосфера оказываетъ давленіе снизу вверхъ на всѣ падающія тѣла. Въ безвоздушномъ же пространствѣ легкое тѣло падаетъ съ такою же скоростью, какъ и тяжелое. Въ воздухѣ сила тяжести уменьшается отъ давленія атмосферы, и тѣло движется вслѣдствіе разности, положительной или отрицательной, этихъ двухъ противоположныхъ силъ.

Законы тяжести,—законы сложные, и они могутъ быть вполнѣ изучены только въ динамикѣ. Тяжесть измѣняется для одного и того же тѣла въ зависимости отъ широты мѣста и отъ высоты надъ уровнемъ моря; если бросить тѣло съ большой высоты, то тѣло будетъ падать по вертикальной линіи, представляющей направленіе силы тяжести, только въ первыя минуты своего паденія: вращеніе земнаго шара около оси заставитъ тѣло уклониться отъ направленія вертикальнаго.

Предположимъ, что имѣемъ тѣло небольшихъ размѣровъ, находящееся въ покоѣ, помѣщенное на небольшой высотѣ надъ уровнемъ моря. Тяжесть производитъ на части этого твердаго тѣла дѣйствія по вертикальнымъ направленіямъ, при чемъ онѣ параллельны между собою. Всѣ эти параллельныя силы одного направленія могутъ сложиться въ одну силу равную ихъ равнодѣйствующей. Эта равнодѣйствующая называется *вѣсомъ* тѣла, точка приложенія ея или центръ параллельныхъ силъ, въ этомъ частномъ случаѣ, называется *центромъ тяжести* тѣла. Хотя сложеніе силъ предполагаетъ, что точки приложенія силъ принадлежатъ одному и тому же твердому тѣлу, тѣмъ не менѣе система матеріальныхъ точекъ, не принадлежащихъ твердому тѣлу, также имѣетъ центръ тяжести; это центръ тяжести системы, которую можно считать мысленно твердою, не измѣняя ея формы. Если система матеріальныхъ точекъ перемѣщается и перемѣняетъ форму, то каждой изъ ея послѣдовательныхъ формъ соотвѣтствуетъ частный центръ тяжести.

Полный вѣсъ тѣла, твердаго или нетвердаго, есть сумма вѣсовъ
различныхъ его частей.

Тѣло называется *однороднымъ*, когда всѣ его молекули имѣетъ
одинъ и тотъ же вѣсъ, въ какомъ бы мѣстѣ не находилось это тѣло.
Въ этомъ случаѣ вѣсъ пропорціоналенъ объему. Можно получать пол-
ный вѣсъ однороднаго тѣла, объемъ котораго данъ, помножая этотъ
объемъ на число, зависящее отъ свойства тѣла, число это назы-
вается единицею вѣса объема. Если вѣсъ однородного тѣла назо-
вемъ буквою P, объемъ его V и мѣру единицы вѣса p, то между
этими тремя количествами будетъ существовать отношеніе: $P = V \times p$.
Количество P относится къ единицѣ вѣса; количество V къ единицѣ
объема; наконецъ, количество p выражаетъ вѣсъ единицы объема
въ единицахъ вѣса. Слѣдовательно, написанное уравненіе однородно.
Единица вѣса остается произвольною. Принято брать за единицу
вѣса единицу объема дистилированной воды. Слѣдовательно, для
воды объемъ и вѣсъ выражаются одинаковымъ числомъ. Если за
единицу объема берутъ кубическій сантиметръ, то единицу вѣса
называютъ граммомъ, это вѣсъ кубическаго сантиметра воды. Если
взять кубическій дециметръ, то соотвѣтственная единица вѣса бу-
детъ килограммъ, равный 1000 граммамъ или вѣсу тысячи куби-
ческихъ сантиметровъ воды.

Вѣсъ единицы объема однороднаго тѣла или отношеніе вѣса тѣла
къ его объему называется однородною плотностью тѣла. Мы будемъ
разсматривать тяжелыя поверхности и линіи, допуская, что тяжесть
ихъ пропорціональна даннымъ однороднымъ длинамъ.

71. Положеніе центра тяжести остается постояннымъ, если по-
вернуть на одинъ и тотъ же уголъ всѣ вертикальныя силы тяжести
различныхъ частей, составляющихъ тѣло; въ дѣйствительности на-
правленіе силъ тяжести нельзя измѣнять, но можно наклонять само
тѣло на нѣкоторый уголъ относительно вертикальной линіи. И такъ,
свойство центра тяжести тѣла можетъ быть выражено такъ: внутри
каждаго тѣла существуетъ воображаемая точка, называемая центромъ
тяжести, обладающая тѣмъ свойствомъ, что черезъ нее постоянно
проходитъ равнодѣйствующая тяжестей всѣхъ частей тѣла, какое
бы не было положеніе тѣла въ пространствѣ.

72. Общій методъ графическаго опредѣленія центровъ тя-

жести. Центръ тяжести ничто иное, какъ центръ параллельныхъ силъ, поэтому всѣ правила относительно центра параллельныхъ силъ прикладываются къ центрамъ тяжести тѣлъ. При этомъ приходится иногда имѣть дѣло не съ опредѣленнымъ числомъ силъ, многоугольникъ которыхъ и веревочный многоугольникъ легко построить, но съ неопредѣленнымъ числомъ силъ, замѣняющихъ собою вѣсъ тѣла. Вообще, при графическомъ опредѣленіи центровъ тяжести замѣняютъ дѣйствія тяжести отдѣльныхъ частей тѣла опредѣленнымъ числомъ параллельныхъ силъ и затѣмъ опредѣляютъ центръ этихъ послѣднихъ силъ.

Этотъ методъ можно прилагать всякій разъ, когда фигура можетъ быть разложена на опредѣленное число другихъ фигуръ, болѣе простыхъ, центры тяжести которыхъ уже извѣстны. Тогда достаточно положить, что къ центрамъ тяжести этихъ простыхъ фигуръ приложены параллельныя силы, пропорціональныя вѣсу этихъ фигуръ, и отыскать центръ этихъ параллельныхъ силъ. Такъ напр. если умѣемъ отыскать центръ тяжести треугольиика, то легко отыскать центръ тяжести какого угодно многоугольника.

Предположимъ, что данъ объемъ A, равный суммѣ нѣсколькихъ объемовъ. Если къ центрамъ тяжести фигуръ, объёмы которыхъ равны слагаемымъ объемамъ, приложить параллельныя силы, пропорціональныя этимъ объёмамъ, одного и того же знака, но направленія какого угодно, то центръ этихъ параллельныхъ силъ будетъ центромъ тяжести всего объема.

Если объемъ равенъ разности двухъ объемовъ, то, чтобы найти центръ тяжести этого объема, должны будемъ къ центрамъ тяжести тѣлъ, объемы которыхъ равны объемамъ уменьшаемаго и вычитаемаго, приложить силы, имъ пропорціональныя, параллельныя, какого угодно направленія, но противоположныхъ знаковъ. И, слѣдовательно, центръ тяжести объема, равнаго разности двухъ объемовъ, будетъ находиться въ точкѣ приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ различныхъ знаковъ, пропорціональныхъ этимъ объемамъ и приложенныхъ къ центрамъ тяжести тѣлъ, уменьшаемаго и вычитаемаго.

Вообще, если объемъ A выражается такою формулою:

$$A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \pm \ldots \pm A_n.$$

т. е. если онъ составленъ изъ объемовъ различныхъ знаковъ, то для нахожденія центра тяжести объема A, нужно къ центрамъ тяжести объемовъ A_1, A_2, A_3,... приложить силы пропорціональныя этимъ объемамъ, параллельныя и соотвѣтствующихъ знаковъ. Центръ этихъ параллельныхъ силъ будетъ искомымъ центромъ тяжести.

Укажемъ способы нахожденія центровъ тяжести самыхъ простыхъ фигуръ, къ которымъ потомъ будемъ приводить, точно или приближенно, всѣ другія фигуры. Мы будемъ разсматривать только однородныя фигуры.

Лемма. *Когда нѣкоторая фигура дѣлится плоскостью на двѣ части вполнѣ симметричныя, то центръ тяжести фигуры находится въ этой плоскости.*

Дѣйствительно, нѣтъ причины предполагать, что центръ тяжести расположится скорѣй на одной сторонѣ этой плоскости, нежели на другой.

Если фигура содержитъ въ себѣ двѣ плоскости симметріи, то центръ тяжести фигуры находится на линіи пересѣченія плоскостей симметріи. Если фигура содержитъ три плоскости симметріи, то центръ тяжести находится въ точкѣ пересѣченія этихъ трехъ плоскостей.

Такъ напр. центръ тяжести прямоугольнаго параллелепипида совпадетъ съ центромъ параллелепипида, черезъ который проходятъ три плоскости симметріи.

Если плоская фигура имѣетъ линіею симметріи прямую линію, то центръ тяжести находится на этой прямой.

Если плоская фигура содержитъ двѣ линіи симметріи, то ея центръ тяжести находится въ точкѣ пересѣченія линій симметріи. Такъ, центръ тяжести прямоугольника совпадаетъ съ центромъ его фигуры.

73. **Центръ тяжести линіи**. Центръ тяжести прямой линіи находится, очевидно, на этой же линіи. Если прямая линія однородна, то вѣсъ ея пропорціоналенъ ея длинѣ, и центръ тяжести находится въ ея серединѣ, потому что нѣтъ причины предполагать, чтобы онъ находился ближе къ одному концу, нежели къ другому.

74. **Центръ тяжести периметра многоугольника или какого угодно криволинейнаго контура**. Если на серединѣ каждой изъ сторонъ периметра даннаго многоугольника приложить силу пропорціональную длинѣ этой стороны, то всѣ эти силы будутъ параллельны

и одного знака; сложивъ ихъ посредствомъ правила многоугольника, получимъ положенie линiи дѣйствiя ихъ равнодѣйствующей. Наклонимъ ихъ на какой угодно уголъ, и, построивъ вновь многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ, найдемъ линiю дѣйствiя равнодѣйствующей силъ, наклоненныхъ на опредѣленный уголъ.

Пересѣченie этихъ двухъ линiй дѣйствiя равнодѣйствующихъ будетъ искомымъ центромъ тяжести. Чтобы найти центръ тяжести части кривой линiи, ее замѣняютъ периметромъ вписаннаго многоугольника съ большимъ числомъ сторонъ.

78. **Центръ тяжести треугольника**. Треугольникъ можно разсматривать составленнымъ изъ линiй, проведенныхъ параллельно основанiю; центры тяжести всѣхъ этихъ линiй будутъ находиться на серединѣ каждой изъ нихъ, слѣд. эти центры тяжести будутъ находиться на линiи соединяющей середину AB съ вершиной C. Т. е. эта линiя будетъ линiей симметрiи треугольника. Точно также центръ тяжести долженъ находиться на линiяхъ, соединяющихъ середины другихъ сторонъ съ противолежащими вершинами. Слѣд. *центръ тяжести треугольника совпадаетъ съ центромъ круга, вписаннаго въ этотъ треугольникъ*.

Соединивъ середины двухъ сторонъ между собой, найдемъ изъ подобныхъ треугольниковъ ECF и ACB, что EF параллельна AB и равна половинѣ AB. Точно также, изъ подобныхъ треугольниковъ EOF и AOB найдемъ, что OF равна половинѣ AO, т. е. что OF есть треть AF. Точно также окажется, что OD есть треть CD, а EO треть EB (чер. 75).

И такъ, *центръ тяжести треугольника находится на третьей части линiи, соединяющей середину какой либо его стороны съ противолежащей вершиной, считая притомъ эту треть не отъ вершины, а отъ стороны*.

75. **Центръ тяжести части периметра правильнаго многоугольника**. Пусть (чер. 76) ABCKDFJ часть правильнаго многоугольника, линiя OK, перпендикулярная къ серединѣ стороны CD, есть линiя симметрiи, и, слѣдовательно, искомый центръ тяжести находится на этой линiи. Чтобы найти его положенie, надо къ серединѣ каждой стороны многоугольника приложить силу пропорцiональную длинѣ этой стороны.

Всѣ эти силы имѣютъ одно направленie и одинъ знакъ; центръ этихъ параллельныхъ силъ будетъ искомымъ центромъ тяжести.

Пусть G эта точка. Равнодѣйствующая всѣхъ параллельныхъ силъ равна ихъ суммѣ, т. е. периметру. Пусть p этотъ периметръ. Моментъ этой равнодѣйствующей относительно точки O есть $p \times OG$. Моментъ составляющей, приложенной въ серединѣ линіи AB, равенъ $AB \times ab = l \times y$, гдѣ l длина стороны AB, а y разстояніе ab до линіи Ob. На основаніи теоремы моментовъ имѣемъ:

$$p \times OG = \Sigma\,(l \times y).$$

Сумма распространяется на всѣ стороны даннаго многоугольника.

Кромѣ того, если провести линію Bd параллельно OK, то изъ треугольниковъ Oab и ABd, найдемъ:

$$\frac{Ad}{AB} = \frac{ab}{aO}.$$

Называя буквою l' проекцію AB на XX' и r радіусъ OA круга, описаннаго около даннаго многоугольника, получимъ:

$$\frac{l'}{l} = \frac{y}{r},$$

откуда:

$$l \times y = l' \times r;$$

И такъ

$$p \times OG = \Sigma\,(l' \times r);$$

Но множитель r одинъ и тотъ же во всѣхъ членахъ суммы Σ, поэтому его можно вывести изъ подъ знака Σ и написать:

$$p \times OG = r\Sigma l' = r \times A'J' = r \times AJ,$$

или:

$$OG = \frac{r \times AJ}{p}. \qquad (1)$$

Правую часть легко построить. Для этого достаточно построить прямоугольный треугольникъ OPM, высота котораго OP равна r и гипотенуза PM равна длинѣ p даннаго периметра. Если на этой гипотенузѣ отложимъ длину MN, равную AJ, то искомый центръ тяжести G будетъ находиться на линіи параллельной XX', проведенной черезъ M.

Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ MOP и MNQ, имѣемъ:

$$\frac{NQ}{r} = \frac{MN}{p},\ \text{или:}$$

$$\frac{NQ}{r} = \frac{AJ}{p},\ \text{откуда:}$$

$$NQ = \frac{AJ.\,r}{p}.$$

А сравнивая съ (1), находимъ:

$$NQ = OG.$$

Итакъ, чтобы найти центръ тяжести части периметра правильнаго многоугольника, надо центръ многоугольника соединить съ серединою контура, т. е. построить линію симметріи, возставить изъ центра перпендикулярную линію къ линіи симметріи. На этомъ перпендикулярѣ, или оси, построить прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго равнялась бы длинѣ периметра, а одинъ изъ катетовъ равнялся бы радіусу круга, описаннаго около даннаго периметра.

Если затѣмъ на гипотенузѣ отложить длину равную хордѣ, стягивающей крайнія стороны даннаго периметра, начиная отъ оси, проведенной чрезъ центръ, и чрезъ конецъ отложенной линіи провести къ оси параллельную линію до пересѣченія съ линіей симметріи, то полученная точка будетъ центромъ тяжести части периметра правильнаго многоугольника.

77. **Центръ тяжести дуги круга**. Предъидущее построеніе всегда возможно, какъ бы ни были малы стороны правильнаго многоугольника, слѣдовательно изложенный пріемъ можно приложить и въ томъ случаѣ, когда многоугольникъ сольется съ дугою круга.

Если (чер. 77) G центръ тяжести дуги круга ABC длиною l и радіуса r, то, на основаніи формулы (1) предъидущаго §, будемъ имѣть:

$$OG = \frac{r \times AC}{l}.$$

Точку G можно построить или посредствомъ вышеизложеннаго пріема, или такъ: на касательной, проведенной къ серединѣ B дуги, отложить длину BE равную выпрямленной полудугѣ AB. Соединить точку E съ точкой O. Изъ точки A возставить перпендикуляръ къ AC до встрѣчи его съ EO въ точкѣ D, наконецъ изъ D опустить перпендикуляръ DG на радіусъ OB. Точка G будетъ искомый центръ тяжести. Дѣйствительно:

$$\frac{OG}{OB} = \frac{GD}{EB},$$

или

$$\frac{OG}{r} = \frac{{}^1/_2\, AC}{{}^1/_2\, l} = \frac{AC}{l};$$

откуда:

$$OG = \frac{r.\ AC}{l}$$

78. **Центръ тяжести плоскихъ кривыхъ линій**. Діаметромъ плоской линіи называютъ мѣсто srединъ хордъ, параллельныхъ данному направленію.

Когда діаметръ прямолинеенъ, его направленіе совпадаетъ съ направленіемъ линіи, раздѣляющей на равныя части хорды, называемыя въ этомъ случаѣ сопряженными.

Теорема.—*Когда замкнутая плоская кривая имѣетъ прямолинейный діаметръ, то центръ тяжести площади этой кривой находится на этомъ діаметрѣ.*

Пусть (чер. 78) xy прямая, мѣсто срединъ сторонъ ac, параллельныхъ опредѣленному направленію.

Начертимъ рядъ сторонъ подобныхъ ac, параллельныхъ этому направленію и очень близкихъ однѣ къ другимъ. Изъ концовъ a и c съ каждой изъ нихъ опустимъ перпендикуляры ab и cd на сосѣднюю сторону a′c′; тогда составится рядъ прямоугольниковъ. Фигура, составленная совокупностью этихъ прямоугольниковъ, будетъ тѣмъ меньше разниться отъ данной площади и будетъ тѣмъ ближе къ ней, чѣмъ стороны ac, a′c′,... ближе другъ къ другу, и, если онѣ приближаются неопредѣленно, то сумма площадей прямоугольниковъ приближается неопредѣленно къ площади данной фигуры. Кромѣ того, каждый изъ этихъ четыреугольниковъ имѣетъ свой центръ тяжести на діаметрѣ xy. Слѣдовательно, центръ тяжести фигуры, составленной совокупностью прямоугольниковъ, находится на той же линіи. Это будетъ и въ томъ случаѣ, когда ac, a′c будутъ какъ угодно близко отстоять другъ отъ друга, слѣдовательно и данная площадь, къ которой стремится неопредѣленно площадь, составленная изъ четырехъ-угольниковъ, будетъ имѣть свой центръ тяжести на той же линіи.

79. **Центръ тяжести площади параллелограмма**. Изъ изложеннаго въ предъидущемъ параграфѣ непосредственно слѣдуетъ, что центръ тяжести площади параллелограмма EFGH (чер. 79) находится въ центрѣ параллелограмма, ибо два діаметра AB и CD, параллельные сторонамъ параллелограмма и проходящіе черезъ его центръ, должны проходить чрезъ искомый центръ тя-

жести. Слѣдовательно, центръ тяжести находится въ точкѣ ихъ пересѣченія, совпадающей также съ центромъ параллелограмма.

Центръ тяжести площади треугольника на томъ же основаніи находится въ точкѣ пересѣченія трехъ его діаметровъ т. е. линій, соединяющихъ середины сторонъ треугольника съ противоположными вершинами. Дѣйствительно, каждая изъ этихъ линій, по опредѣленію, есть діаметръ, потому что она, будучи проведена къ рединѣ стороны, раздѣляетъ на равныя части линіи параллельныя этой сторонѣ треугольника.

80. **Приложеніе общаго правила къ нахожденію центра тяжести площади многоугольника, или площади ограниченной какой угодно кривой линіей**. Если требуется розыскать центръ тяжести площади многоугольника, то его надо разложить на треугольники. Къ центрамъ тяжести всѣхъ треугольниковъ предположить приложенными параллельныя силы, пропорціональныя площадямъ треугольниковъ, одного и того же знака или разныхъ знаковъ, смотря потому будетъ ли площадь даннаго многоугольника выражаться суммою треугольниковъ, или разностью. Если данный многоугольникъ будетъ выражаться суммою, составленною изъ положительныхъ членовъ, то всѣ силы, приложенныя къ центрамъ тяжести треугольниковъ, должны будутъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ; если нѣкоторые изъ членовъ суммы будутъ положительные, а нѣкоторые отрицательные, что можетъ случиться при разбивкѣ на треугольники многоугольника съ входящими углами, то силы, приложенныя къ центрамъ тяжести треугольниковъ, должны будутъ имѣть знакъ противоположный знаку первыхъ.

82. **Центръ тяжести четыреугольника**. Пусть будетъ данъ четырехъ-угольникъ ABCD (чер. 80). Чтобы найдти его центръ тяжести, проведемъ діагональ CD. Соединимъ противоположныя вершины A и B съ серединою E этой діагонали.

Точки g и g', лежащія отъ точки E разстоянія трети линій EA и EB, будутъ центрами тяжести треугольниковъ ACD и BCD. Въ эти точки нужно будетъ приложить силы, пропорціональныя площадямъ этихъ треугольниковъ, т. е. пропорціональныя высотамъ Aa и Bb, потому что оба треугольника имѣютъ одно и тоже основаніе CD. Эти высоты, кромѣ того, пропорціональны отрѣзкамъ AO и OB діогонали AB, или отрѣзкамъ $gi = \frac{BO}{3}$ и $ig' = \frac{OA}{3}$. Итакъ, чтобы найти центръ тяжести четырехъугольника, нужно раздѣлить линію gg' на части обратно пропорціональныя частямъ gi и ig'. Для этого, достаточно отложить длину $gG = g'i$, начиная отъ точки g. Точка G будетъ искомымъ центромъ тяжести.

83. **Центръ тяжести трапеціи**. Предыдущее построеніе можетъ быть приложено и къ розысканію центра тяжести трапеціи. Пусть (чер. 81) трапеція ABCD. Раздѣлимъ ее на два треугольника ACD и ABD діагональю AD. Проведемъ линію DE отъ точки D до середины основанія треугольника ADB и линію AF, отъ вершины A до середины основанія треугольника ACD.

Центръ тяжести G_1 треугольника ADB будетъ находиться отъ E на разстояніи равномъ третьей части DE. Центръ тяжести G_2 треугольника ACD будетъ находиться отъ F на разстояніи равномъ третьей части линіи FA. Слѣд. центръ тяжести трапеціи будетъ на линіи G_1G_2. Вмѣстѣ съ тѣмъ линія FE можетъ быть разсматриваема, какъ діаметръ трапеціи, слѣдовательно искомый центръ тяжести будетъ также на этомъ діаметрѣ. И такъ, центръ тяжести трапеціи находится въ точкѣ пересѣченія G линій G_1G_2 и FE.

Можно дать другой способъ нахожденія центра тяжести трапеціи. Продолжимъ CD до точки K, такъ чтобы DK была равна AB, и BA продолжимъ до точки H, такъ чтобы AH была равна CD, затѣмъ проведемъ линію HK; эта линія пройдетъ черезъ точку G. Чтобъ доказать это, проведемъ линіи G_1J_1 и G_2J_2 параллельно основаніямъ трапеціи. Такъ какъ G_1 находится отъ E на разстояніи равномъ третьей части ED, то точка J_1 находится отъ E на разстояніи равномъ третьей части FE; точно также точка J_2 находится отъ F на разстояніи равномъ третьей части FE, такъ что

$$J_1E = J_2F = \frac{1}{3} EF,$$

слѣдовательно

$$J_1E = J_2F = J_1J_2 \qquad (1)$$

Съ другой стороны, изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ EJ_1G_1, EFD и FG_2J_2, FAE имѣемъ:

$$\frac{G_1J_1}{FD} = \frac{FJ_1}{EF} \text{ и}$$

$$\frac{G_2J_2}{AE} = \frac{FJ_2}{EF}$$

На основанiи равенства (1) заключаемъ, что правыя части этихъ пропорцiй равны, слѣдовательно:

$$\frac{G_1J_1}{FD} = \frac{G_2J_2}{AE}, \text{ или } \frac{G_2J_2}{G_1J_1} = \frac{AE}{FD},$$

Изъ подобныхъ же треугольниковъ GJ_1G_1 и GJ_2G_2 имѣемъ:

$$\frac{G_2J_2}{G_1J_1} = \frac{GJ_2}{GJ_1}, \text{ слѣд. } \frac{GJ_2}{GJ_1} = \frac{AE}{FD}, \text{ или}$$

$$\frac{GJ_2}{GJ_1} = \frac{2AE}{2FD} = \frac{AB}{CD}, \text{ или наконецъ}$$

$$\frac{GJ_1}{GJ_2} = \frac{CD}{AB} \text{ и } \frac{{}^1/_2GJ_2}{{}^1/_2GJ_1} = \frac{AE}{FD},$$

сложивъ почленно двѣ послѣднихъ пропорцiи, найдемъ:

$$\frac{GJ_1 + {}^1/_2GJ_2}{GJ_2 + {}^1/_2GJ_1} = \frac{CD + AE}{AB + FD} = \frac{HA + AE}{DK + FD} = \frac{HE}{FK},$$

или:

$$\frac{2GJ_1 + GJ_2}{2GJ_2 + GJ_1} = \frac{HE}{KF}. \tag{2}$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$2GJ_1 + GJ_2 = GJ_1 + GJ_2 + GJ_1 = J_1J_2 + GJ_1,$$
$$2GJ_2 + GJ_1 = GJ_2 + GJ_1 + GJ_2 = J_1J_2 + GJ_2.$$

На основанiи же равенства (1) найдемъ:

$$2GJ_1 + GJ_2 = J_1E + GJ_1 = GE.,$$
$$2GJ_2 + GJ_1 = J_2F + GJ_2 = GF.$$

Слѣд. равенство (2) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{GE}{GF} = \frac{HE}{KF}, \text{ или } \frac{GE}{GF} = \frac{CD + {}^1/_2\,AB}{AB + {}^1/_2\,CD} = \frac{2\,CD + AB}{2\,AB + CD}. \tag{3}$$

Это равенство доказываетъ, что точка G лежитъ на линiи HK. *И такъ, чтобы найти графически центръ тяжести трапецiи, надо параллельныя ея основанiя продолжить въ разныя стороны; на продолженiи 1-го основанiя отложить длину равную второму основанiю; на продолженiи 2-го основанiя отложить длину равную 1-му основанiю. Концы полученныхъ линiй соединить между собою, а также соединить середины параллельныхъ сторонъ; на пересѣченiи этихъ двухъ послѣднихъ линiй будетъ находиться центръ тяжести трапецiи.*

Равенство (3) можетъ быть выражено еще такъ:

Центръ тяжести трапецiи находится на линiи, соединяющей середины ея основанiй, и раздѣляетъ эту линiю въ отношенiи двухъ суммъ, изъ которыхъ первая равна первому основанiю, сложенному съ удвоеннымъ вторымъ основанiемъ; вторая сумма равна второму основанiю, сложенному съ удвоеннымъ первымъ.

84. **Центръ тяжести части площади правильнаго многоугольника.** Пусть ABCDE (чер. 82) часть правильнаго многоугольника, центръ его находится въ точкѣ O; найдемъ центръ тяжести части площади правильнаго многоугольника OABCDEO. Для этого раздѣлимъ многоугольникъ на треугольники; вершины треугольниковъ будутъ въ точкѣ O. Центръ тяжести треугольника OBC будетъ находиться на линiи OJ и отстоять отъ точки O на разстоянiи равномъ двумъ третямъ линiи OJ. Если построимъ часть правильнаго многоугольника abcde, стороны котораго находятся на разстоянiи двухъ третей радiусовъ, проведенныхъ къ вершинамъ A, B, C, . . ., то центръ тяжести каждаго изъ треугольниковъ, на которые раздѣленъ данный многоугольникъ, будетъ находиться по серединѣ соотвѣтствующей стороны периметра abcde. Площадь треугольника OBC, какъ и каждаго изъ остальныхъ треугольниковъ, пропорцiональна основанiямъ, такъ какъ высоты ихъ равны, слѣд. искомый центръ тяжести найдется, если къ серединѣ i каждой ихъ сторонъ периметра abcde приложимъ силы одного и того же направленiя, пропорцiональныя соотвѣтствующимъ сторонамъ, и найдемъ центръ этихъ параллельныхъ силъ, т. е. найдемъ центръ тяжести периметра abcd. И такъ: *центръ тяжести части правильнаго многоугольника совпадаетъ съ центромъ тяжестп части периметра правильнаго многоугольника, середины сторонъ котораго отстоятъ отъ центра даннаго многоугольника на двухъ третяхъ его радiуса, а длина его заключена между крайними радiусами даннаго многоугольника.*

85. **Центръ тяжести площади сектора круга.** Высказанное сейчасъ положенiе имѣетъ мѣсто, каково бы ни было число сторонъ многоугольнннка ABCDE, вписаннаго въ дугѣ круга AE, поэтому оно будетъ имѣть мѣсто и для безконечно большаго числа сторонъ, т. е. когда часть многоугольника сдѣлается секторомъ. И такъ: *центръ тяжести площади сектора круга совпадаетъ съ центромъ тяжести дуги, заключенной между радiусами даннаго сектора, а радiусъ которой равенъ двумъ третямъ радiуса даннаго сектора.*

86 **Центръ тяжести сегмента круга**. Пусть данъ (чер. 83) сегментъ круга ABC; величину площади его назовемъ Q_2. Центръ тяжести сегмента, очевидно, находится на линіи его симметріи OB, назовемъ его буквой G. Пусть G_2 центръ тяжести площади сектора OACB, величину которой назовемъ Q_2, а G_1 центръ тяжести площади треугольника OAB, величину которой назовемъ Q_1. Точки G_1 и G_2 найдутся на основаніи вышеизложенныхъ правилъ. Такъ какъ площадь сегмента равна разности площадей сектора и треугольника, то, приложивъ къ центрамъ тяжести этихъ площадей силы пропорціональныя величинамъ площадей, найдемъ, что центръ тяжести сегмента G есть центръ двухъ параллельныхъ силъ пропорціональныхъ Q_1 и Q_2 и противоположныхъ направленій, а потому точка G находится на G_1G_2 и раздѣляетъ ее на части обратно пропорціональныя величинамъ площадей (параграфъ 61), т. е. должна существовать такая пропорція:

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2}. \qquad (1)$$

Но площадь треугольника AOC равна половинѣ произведенія перпендикуляра DE на радіусъ OC; площадь сектора равна половинѣ произведенія дуги BC на радіусъ OC, поэтому вмѣсто пропорціи (1) можно написать такую:

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{DE}{BC} \qquad (2)$$

Построимъ эту пропорцію, для чего на какой угодно линіи, проведенной черезъ G_1, отложимъ

$$G_1L = \text{arc } BC$$

и на G_2K, проведенной черезъ G_2 параллельно G_1L, отложимъ длину

$$G_2K_2 = DE,$$

тогда линія KL, соединяющая концы отложенныхъ линій, пересѣчетъ OC въ точкѣ, удовлетворяющей пропорціи (2), т. е. въ искомомъ центрѣ тяжести G. *И такъ, чтобы найти графически центръ тяжести сегмента, надо найти сначала центры тяжестей сектора и треугольника, они будутъ находиться на радіусѣ, прове-*

деннымъ изъ центра къ серединѣ дуги сектора, именно: центръ тяжести сектора будетъ находиться отъ центра круга на раз-стояніи равномъ двумъ третямъ радіуса, а центръ тяжести тре-угольника будетъ находиться отъ его основанія на разстояніи равномъ одной трети апоѳемы. Линіей симметріи треугольникъ раздѣлится на два равныхъ треугольника; надо найти высоту половины этого треугольника, опустивъ перпендикуляръ на одинъ изъ крайнихъ радіусовъ сектора. Затѣмъ, изъ центровъ тяжестей сектора и треугольника надо провести параллельныя между со-бою линіи, или, для простоты, линіи перпендикулярныя къ оси симметріи; на линіи, проведенной изъ центра тяжести тре-угольника, надо отложить длину, равную половинѣ дуги сектора, а на линіи, проведенной изъ центра тяжести сектора, отложить длину равную высотѣ половины треугольника; черезъ концы по-лученныхъ линій провести линію до пересѣченія съ линіей сим-метріи; точка пересѣченія двухъ послѣднихъ линій будетъ цент-ромъ тяжести сегмента.

87. **Центръ тяжести площади кольца, заключеннаго между двумя дугами концентрическихъ круговъ.** Пусть будетъ дано (чер. 84) кольцо ABCD, заключенное между двумя концентриче-скими дугами AB и CD. Очевидно, центръ тяжести этого кольца находится на радіусѣ OJ, проходящемъ черезъ середины дугъ AB и CD, такъ какъ этотъ радіусъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, есть линія сим-метріи.

Пусть G_1 и G_2 центры тяжести секторовъ OAB и OCD, а G искомый центръ тяжести кольца ABCD. Какъ извѣстно изъ предъ-идущаго, точки G_1 и G_2 будутъ находиться отъ общаго центра O на разстояніи равномъ двумъ третямъ радіусовъ соотвѣтствующихъ кру-говъ. Такъ какъ площ. кольца равна разности площ. двухъ секторовъ, то искомый центръ тяжести долженъ находиться на направленіи равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ противоположныхъ знаковъ,—одной пропорціональной площади сектора OAB, прило-женной къ ея центру тяжести G_1, другой пропорціональной пло-щади сектора OCD, приложенной къ ея центру тяжести G_2. Точка G, на основаніи параграфа 61, должна дѣлить линію G_1G_2 на части, обратно-пропорціональныя величинамъ площадей секторовъ, т. е. должна существовать такая пропорція:

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{\text{пл. сект. } OCD}{\text{пл. сект. } OAB}.$$

Но площади секторовъ пропорціональны квадратамъ ихъ радіусовъ, поэтому:

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{OC^2}{OA^2}.$$

Замѣнимъ отношеніе квадратовъ длинъ въ этой пропорціи отношеніемъ линейныхъ величинъ; съ этою цѣлью соединимъ точку A съ точкой E и проведемъ CK параллельно AE, то будемъ имѣть:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OK} = \frac{OC}{OK},$$

откуда:

$$\overline{OC}^2 = OA \times OK,$$

а слѣдовательно:

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{OA \times OK}{OA^2} = \frac{OK}{OA}.$$

Построимъ эту послѣднюю пропорцію, для чего отъ точки G_1, на линіи перпендикулярной оси симметріи, отложимъ $G_1H = OK$, и отъ точки G_2 на линіи параллельной G_1H_1 отложимъ $G_2L = OA$. Черезъ точки H и L проведемъ прямую; она пересѣчетъ линію симметріи въ точкѣ G, т. е. въ центрѣ тяжести кольца ABCD.

Итакъ, чтобы найти графически центръ тяжести кольца, заключеннаго между двумя концентрическими дугами и между двумя радіусами, надо *на радіусѣ, проходящемъ черезъ середины дугъ, отложить отъ общаго ихъ центра длины равныя двумъ третямъ каждаго изъ этихъ радіусовъ, Такимъ образомъ найдутся центры тяжести двухъ секторовъ. Затѣмъ, конецъ внѣшней дуги соединить съ серединой внутренней дуги и провести параллельную этой линіи изъ конца внутренней дуги до пересѣченія съ осью симметріи; такимъ образомъ найдется отрѣзокъ этой оси, считая отъ центра круговъ. Послѣ этого изъ центровъ тяжести секторовъ надо провести линіи параллельныя между собою, или, для* *простоты, перпендикулярныя къ оси симметріи; на линіи, проведенной изъ центра тяжести меньшаго сектора, отложить длину радіуса большого сектора, а на линіи, проведенной изъ центра тяжести большого сектора, отложить найденный выше отрѣзокъ радіуса. Концы, такимъ образомъ отложенныхъ параллельныхъ линій, соединить и линію соединенія продолжить до пересѣченія съ линіей симметріи. Точка пересѣченія этихъ двухъ послѣднихъ линій будетъ центромъ тяжести кольца.*

88. **Центръ тяжести параболическаго сегмента.** Пусть (чер. 85) ВОА представляетъ собою параболическій сегментъ, ограниченный произвольною хордою АВ. Отнесемъ его къ осямъ координатъ, за ось X—овъ возьмемъ діаметръ ОХ, за ось у—овъ касательную, проведенную въ точкѣ 0. Вообразимъ, что сегментъ пароболы разбитъ линіями параллельными хордѣ АВ на малыя площади одинаковой ширины. Центры тяжести всѣхъ этихъ малыхъ площадокъ, разсматриваемыхъ какъ линіи, находятся на серединѣ ихъ т. е. на діаметрѣ ХО, сопряженномъ съ хордою ВА. Слѣд. центръ тяжести параболическаго сегмента долженъ находиться на этомъ же діаметрѣ. Положимъ, что въ центрахъ тяжести площадокъ, на которыя разбитъ сегметъ, приложены силы параллельныя и пропорціональныя этимъ площадкамъ, а такъ какъ высоты площадокъ равны и при томъ безконечно малы т. е. равны dx, то силы эти слѣд. пропорціональны ydx. Назовемъ абсцису точки приложенія равнодѣйств. параллельныхъ силъ, или центра тяжести сегмента буквою ξ. Абсцисы центровъ тяжести площадокъ будемъ означать буквою x. Тогда, на основаніи формулъ параграфа 67, найдемъ:

$$\xi = \frac{\Sigma y dx \,.\, x}{\Sigma y dx}\,.$$

Взявъ уравненіе параболы $y^2 = 2px$, и, подставивъ въ предыдущее равенство вмѣсто у его выраженіе въ функціи x, получимъ:

$$\xi = \frac{\Sigma x\sqrt{2px}\,.\,dx}{\Sigma\sqrt{2px}\,.\,dx} = \frac{\Sigma\sqrt{x^3}\,dx}{\Sigma\sqrt{x}\,dx}\,.$$

Такъ какъ площадки безконечно малы и ихъ безконечное число, то мѣсто Σ надо взять интегралы и притомъ въ предѣлахъ отъ нуля до $x = OD$. Слѣд.:

$$\xi \int_0^{OD} x^{1/2}\, dx = \int_0^{OD} x^{3/2}\, dx \text{ или } \xi \frac{OD^{3/2}}{3/2} = \frac{OD^{5/2}}{5/2} \text{ откуда:}$$

$$\frac{\xi}{3} = \frac{OD}{5} \text{ или } \xi = {}^3/_5\ OD.$$

Итакъ, *центръ тяжести сегмента параболы находится отъ вершины параболы на разстояніи трехъ пятыхъ діаметра параболическаго сегмента.*

89. **Центръ тяжести неправильной плоской фигуры, имѣющей ось симметріи**. Чтобъ найти центръ тяжести такой фигуры, разбиваютъ ее линіями перпендикулярными къ оси симметріи на трапеціи, имѣющія одинаковую высоту, считаемую, въ этомъ случаѣ, по оси симметріи. Центры тяжести этихъ трапецій будутъ находиться на серединахъ высотъ. Разсматривая площадь каждой изъ этихъ трапецій, какъ опредѣленный вѣсъ, можно будетъ въ центрѣ тяжести каждой изъ нихъ приложить силы параллельныя и пропорціональныя этимъ вѣсамъ. Такъ какъ всѣ площади полученныхъ трапецій имѣютъ одинаковую высоту, то площади ихъ будутъ пропорціональны линіямъ, соединяющимъ середины непараллельныхъ сторонъ или половинамъ этихъ линій. Такимъ образомъ силы, приложенныя къ центрамъ тяжести, будутъ равны половинамъ среднихъ линій трапецій, т. е. будутъ изображены въ одномъ масштабѣ. Остается найти только центръ параллельныхъ силъ. Для чего надо въ сторонѣ построить многоугольникъ силъ, а затѣмъ веревочный многоугольникъ, точка пересѣченія равнодѣйствующей параллельныхъ силъ съ осью семметріи будетъ центромъ параллельныхъ силъ или центромъ тяжести фигуры.

90. **Центръ тяжести поперечнаго сѣченія рельса**. На черт. 86 исполнены всѣ построенія, объясненныя въ предъидущемъ параграфѣ, съ цѣлью полученія центра тяжести профиля рельса, съ тою только разницею, что головка рельса принята за параболическій сегментъ и центръ тяжести означенъ не на серединѣ высоты, а на $^3/_5$ ея, считая отъ вершины рельса.

91. **Центръ тяжести поперечнаго сѣченія угловаго желѣза**. На черт. 87 исполнены всѣ построенія, объясненныя въ параграфѣ 89, для полученія центра тяжести профиля угловаго желѣза.

Приложенiе общаго метода къ нахожденiю центра тяжести многогранной, или кривой поверхности.

92. Изъ предыдущаго знаемъ, какъ находятся центры тяжести плоскихъ фигуръ, могущихъ быть гранями многогранника. Если въ центрахъ тяжести этихъ граней предположимъ приложенными силы параллельныя одного и того же знака, пропорцiональныя площадямъ соотвѣтствующихъ граней многогранника, то центръ этихъ параллельныхъ силъ будетъ искомымъ центромъ тяжести боковой многогранной поверхности. Если требуется найти центръ тяжести кривой поверхности болѣе или менѣе неправильной, то ее замѣняютъ поверхностью вписаннаго многогранника съ большимъ числомъ граней, а затѣмъ поступаютъ, какъ было сказано выше.

93. **Центръ тяжести боковой поверхности пирамиды и конуса.**—*Центръ тяжести боковой поверхности правильной пирамиды или конуса вращенiя совпадаетъ съ центромъ сѣченiя, проведеннаго параллельно основанiю и отстоящаго отъ основанiя на разстоянiи одной трети высоты.* Въ самомъ дѣлѣ, боковая поверхность пирамиды составляется изъ треугольниковъ. Чтобы найти ея центръ тяжести, нужно къ центрамъ тяжести треугольниковъ приложить силы параллельныя, пропорцiональныя площадямъ этихъ треугольниковъ и отыскать центръ параллельныхъ силъ; но центръ тяжести каждаго изъ треугольниковъ находится на линiи соединяющей середину основанiя съ вершиной и отстоитъ отъ основанiя на разстоянiи равномъ третьей части сказанной линiи. Слѣд. центры тяжести всѣхъ боковыхъ граней будутъ лежать на периметрѣ многоугольника сѣченiя пирамиды, отстоящаго отъ основанiя ея на одну треть высоты, а потому центръ тяжести пирамиды долженъ находиться на этомъ же сѣченiи.

Кромѣ того, онъ находится на линiи соединяющей вершину пирамиды съ центромъ ея основанiя. А такъ какъ эта линiя проходитъ также черезъ центры всѣхъ сѣченiй параллельныхъ основанiю, то, слѣдовательно, центръ тяжести пирамиды находится въ центрѣ сѣченiя, отстоящаго отъ основанiя пирамиды на $\frac{1}{3}$ ея высоты. Доказанная теорема, очевидно, вѣрна для пирамиды съ какимъ угодно числомъ сторонъ, вписанной въ конусъ вращенія, а слѣдовательно также вѣрна и для самаго конуса.

94. Центръ тяжести боковой поверхности усѣченной пирамиды, или конуса съ параллельными основаніями. *Центръ тяжести боковой поверхности усѣченной правильной пирамиды съ параллельными основаніями совпадаетъ съ центромъ тяжести периметра многоугольника сѣченія, параллельнаго основаніямъ и отстоящаго отъ нижняго основанія на нѣкоторую часть высоты усѣченной пирамиды. Эта часть высоты равна* $\frac{p + 2p_1}{3(p + p_1)}$, *гдѣ p периметръ нижняго основанія, а* p_1 *периметръ верхняго основанія.*

Дѣйствительно, боковая поверхность усѣченной пирамиды составляется изъ трапецій. Чтобы найти центръ ея тяжести, надо къ центрамъ тяжести ея граней т. е. трапецій приложить силы пропорціональныя площадямъ трапецій и отыскать центръ этихъ параллельныхъ силъ одного и того же направленія.

Пусть (чер. 88) $BB' = b$ и $AA' = a$ два параллельныхъ основанія одной изъ этихъ трапецій, b сторона нижняго основанія и a верхняго основанія усѣченной пирамиды; центръ тяжести G этой трапеціи находится по серединѣ линіи DD' параллельной основаніямъ и раздѣляющей высоту, а слѣдовательно и непараллельныя стороны трапеціи на такія двѣ части, что отношеніе между ними равно отношенію между величинами:

$2a + b : 2b + a$, (см. конецъ пар. 83), такъ что

$$\frac{D'B'}{D'A'} = \frac{2a + b}{2b + a}, \text{ или}$$

$$\frac{D'B'}{D'A' + D'B'} = \frac{2a + b}{3a + 3b}, \text{ или}$$

$$\frac{D'B'}{A'B'} = \frac{2a + b}{3(a + b')}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ, что

$$\frac{D'B'}{A'B'} = \frac{2a' + b'}{3(a' + b')}$$

и т. д., а, складывая эти пропорціи, получимъ:

$$\frac{D'B'}{A'B'} = \frac{2p_1 + p}{3(p_1 + p)}$$

Для трапеціи $A'B'A''B''$, смежной съ предыдущею, центръ тяжести G' будетъ на серединѣ линіи параллельной основаніямъ и проходящей чрезъ точку D'', дѣлящей линію $A''B''$ на такія двѣ части, что будетъ существовать пропорція:

$$\frac{D''B''}{A''B''}=\frac{2\,p_1+p}{3\,(p_1+p)}$$

Это указываетъ, что сѣченіе усѣченной пирамиды, параллельное основаніямъ и отстоящее отъ нижняго основанія на величину $\frac{p_1+2\,p}{3\,(p_1+p)}$ высоты усѣченной пирамиды, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что на пересѣченіи этой плоскости съ боковою поверхностью усѣченной пирамиды, находятся центры тяжести всѣхъ граней пирамиды,—слѣд. искомый центръ тяжести боковой поверхности пирамиды находится въ этой же плоскости. Кромѣ того, очевидно, онъ находится на линіи соединяющей центры основаній пирамиды, такъ какъ эта линія проходитъ черезъ центры всѣхъ сѣченій параллельныхъ основаніямъ, т. е. она линія симмитріи пирамиды.

Доказанная теорема справедлива и для пирамиды съ какимъ угодно числомъ сторонъ, вписанной въ усѣченномъ конусѣ, а слѣд. она также справедлива и для усѣченнаго конуса. Въ случаѣ усѣченнаго конуса, периметры верхняго и нижняго основанія обратятся въ окружности круговъ. Называя буквами d и d_1 діаметры круговъ основаній, найдемъ, что дробь $\frac{p_1+2p}{3(p_1+p)}$ обратится въ такую $\frac{d+2d_1}{3\,(d+d_1)}$. Если усѣченный конусъ или усѣчен. пирамида переходитъ въ усѣченную призму или цилиндръ, т. е. если периметры верхняго и нижняго основанія дѣлаются равными, т. е. $p=p_1$, то дробь $\frac{p+2\,p}{3\,(p_1+p)}$ обращается въ $\frac{3p}{6p}=\frac{1}{2}$. *И такъ, центръ тяжести боковой поверхности прямой или косой призмы, прямого или косого цилиндра, съ параллельными основаніями, совпадаетъ съ центромъ тяжести периметра сѣченія, проходящаго въ серединѣ ихъ высоты.*

95. **Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса.**—*Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса находится по серединѣ линіи, соединяющей центры ея основаній.*

Линія, соединяющая центры основаній сферическаго пояса, есть линія симметріи этого пояса. Если поясъ раздѣлить равно-отстоящими плоскостями параллельными его основаніямъ, то полученные такимъ образомъ малые пояса будутъ имѣть поверхности одной и той же величины, а такъ какъ поверхность пояса равна πdh, гдѣ h высота, то изложенную выше теорему можно считать доказанною.

Поясъ, верхнее основаніе котораго равно нулю, имѣетъ также центръ тяжести на срединѣ своей высоты. А такъ какъ такой поясъ есть ничто другое, какъ сферическій сводъ, то можемъ сказать: *центръ тяжести поверхности сферическаго свода находится на срединѣ его высоты.*

О центрахъ тяжести тѣлъ.

96. **Теорема**. *Если центры тяжести всѣхъ сѣченій, сдѣланныхъ въ тѣлѣ параллельно постоянной плоскости, находятся на нѣкоторой прямой линіи, то и центръ тяжести объема тѣла также будетъ находиться на этой линіи.*

Дѣйствительно, пусть ab линія, представляющая собою геометрическое мѣсто центровъ тяжести площадей сѣченій, сдѣланныхъ въ тѣлѣ параллельно постоянной плоскости. Построимъ рядъ сѣченій, очень близкихъ другъ къ другу, и изъ точекъ контуровъ каждаго сѣченія опустимъ перпендикуляры на сосѣднее сѣченіе. Такимъ образомъ мы составимъ рядъ прямыхъ цилиндровъ, наложенныхъ одинъ на другой; тѣло, образованное ими, будетъ тѣмъ меньше отличаться отъ даннаго тѣла, чѣмъ ближе будутъ расположены сѣченія однѣ къ другимъ.

Центръ тяжести объёма каждаго изъ прямыхъ цилиндровъ находится по срединѣ линіи, соединяющей центры тяжести поверхностей ихъ основаній, т. е. на линіи ab; слѣд. центръ тяжести тѣла, составленнаго совокупностью всѣхъ малыхъ цилиндровъ, будетъ находиться на линіи ab. Тѣло, составленное изъ цилиндровъ, можно сдѣлать сколь угодно мало отличающимся отъ даннаго тѣла, проводя сѣченія на сколько возможно ближе однѣ отъ другихъ, а потому можно сказать, что центръ тяжести даннаго тѣла также находится на линія ab.

Если тѣло имѣетъ другую прямую линію, представляющую собою геометрическое мѣсто центровъ тяжести ряда параллельныхъ сѣченій, то, конечно, и на ней находится также центръ тяжести тѣла. Отсюда вытекаетъ такая теорема:

Если внутри тѣла существуетъ нѣсколько прямыхъ линій, изъ которыхъ каждая представляетъ собою геометрическое мѣсто центровъ тяжести площадей ряда параллельныхъ сѣченій этого тѣла, то всѣ выше указанныя прямыя линіи непремѣнно пересѣкаются въ одной и той же точкѣ, которая вмѣстѣ съ тѣмъ есть центръ тяжести тѣла.

97. Центръ тяжести четырегранника. *Центръ тяжести четырегранника находится на линіи, соединяющей каждую его вершину съ центромъ тяжести противоположной грани, и отстоитъ отъ этой грани на разстояніи равномъ четвертой части линіи, соединяющей вершину съ центр. тяжести противолежащей грани.* Пусть (чер. 89) четырегран. ABCD. Соединимъ вершину A съ центромъ тяжести G_2 противоположной грани BCD. Линія AG_2 будетъ, очевидно, геометрическимъ мѣстомъ центровъ тяжести площадей сѣченій четырегранниковъ, параллельныхъ плоскости BCD. Слѣдовательно, на этой линіи находится центръ тяжести четырегранника. По той же причинѣ, центръ тяжести четырегранника находится на линіи CG_1, соединяющей другую вершину C четырегранника съ центромъ тяжести G_1 противоположной грани. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Четыре линіи, соединяющія вершины четырегранника съ центромъ тяжести противоположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ центрѣ тяжести объёма четырегранника.

Кромѣ того, легко доказать, что точка G,—пересѣченіе четырехъ линій, находится отъ каждой грани въ разстояніи равномъ четвертой части линіи, соединяющей центръ тяжести этой же грани съ противоположною вершиною.

Въ самомъ дѣлѣ, если E середина ребра BD четырегранника, то, соединивъ точку E съ двумя вершинами C и A, найдемъ, что центръ тяжести G_2 треугольника BCD находится отъ E въ разстояніи равномъ третьей части линіи CE; центръ тажести G_1 треугольника BDA находится отъ точки E на разстоянiи равномъ третьей части линiи AE, т. е. имѣемъ два такихъ равенства:

$$\frac{EG_1}{EA} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{EG_2}{EC} = \frac{1}{3},$$

откуда:

$$\frac{EG_1}{EA} = \frac{EG_2}{EC},$$

Что показываетъ, что линiя G_2G_1 параллельна ребру AC, а изъ подобныхъ треугольниковъ G_1G_2G и ACG найдемъ:

$$\frac{G_1G}{GC} = \frac{G_1G_2}{AC} = \frac{EG_1}{EA} = \frac{1}{3}$$

откуда:

$$\frac{G_1G}{G_1G+GC} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4},$$

или:

$$\frac{G_1G}{G_1C} = \frac{1}{4},$$

откуда:

$$G_1G = \frac{G_1C}{4},$$

что и требовалось доказать.

98. *Центръ тяжести четырегранника обладаетъ еще тѣмъ свойствомъ, что онъ находится на серединѣ линiи, соединяющей середины двухъ какихъ угодно противоположныхъ реберъ.*

Для доказательства соединимъ точку E, — середину ребра BD, съ центромъ тяжести G. Линiя EG находится въ плоскости AEC и пересѣкаетъ ребро AC, противоположное BD, и линiю G_1G_2, параллельную этому ребру, въ точкахъ F и f. Изъ подобныхъ треугольниковъ GfG_2 и AGF найдемъ:

$$\frac{G_2f}{AF} = \frac{Gf}{GF}.$$

А также, изъ подобныхъ треугольниковъ G_1fG и GFC найдемъ:

$$\frac{G_1f}{CF} = \frac{Gf}{GF},$$

откуда:

$$\frac{G_2f}{AF} = \frac{G_1f}{CF}, \text{ или } \frac{AF}{CF} = \frac{G_2f}{G_1f} \quad (1)$$

также изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ EAF, EG_1f и ECF, EfG_2 найдемъ:

$$\frac{G_1f}{AF} = \frac{Ef}{EF} \text{ и } \frac{G_2f}{FC} = \frac{Ef}{EF},$$

откуда:

$$\frac{G_1f}{AF} = \frac{G_2F}{FC},$$

или:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{G_1f}{G_2f},$$

сравнивая съ (1), находимъ:

$$\frac{G_1f}{G_2f} = \frac{G_2f}{G_1f},$$

эта пропорція возможна лишь при условіи равенства $G_1f = G_2f$. Слѣд. точка f дѣлитъ разстояніе G_1G_2 на двѣ равныхъ части. Теперь можно доказать, что G есть середина линіи EF. Дѣйствительно:

$$\frac{Gf}{GF} = \frac{G_1f}{AF} = \frac{EG_1}{EA} = \frac{1}{3},$$

$$\text{или } Gf = \frac{GF}{3}.$$

Кромѣ того:

$$\frac{Ef}{Ff} = \frac{EG_1}{G_1A} = \frac{1}{2},$$

или

$$Ef = \frac{Ff}{2}.$$

Слѣд.:

$$EG = Ef + Gf = \frac{Ff}{2} + \frac{GF}{3} = \frac{GF}{2} + \frac{fG}{2} + \frac{GF}{3},$$

или

$$EG = \frac{GF}{2} + \frac{GF}{6} + \frac{GF}{3} = GF\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = GF$$

И такъ, точка G дѣлитъ линію, соединяющую противоположныя ребра, на равныя части, а потому центръ тяжести четырехгранника находится на серединѣ линіи, соединяющей середины противоположныхъ реберъ. Очевидно, что тоже самое будетъ и относисительно всѣхъ другихъ линій, соединяющихъ середины противоположныхъ реберъ четырехгранника, а потому можно высказать такую теорему: *Четыре линіи, соединяющія середины противоположныхъ реберъ четырехгранника, пересѣкаются въ точкѣ, лежащей на серединѣ каждаго изъ нихъ; точка эта есть центръ тяжести четырехгранника.*

99. **Центръ тяжести объема пирамиды и конуса.**—*Центръ тяжести объема пирамиды, или конуса съ какимъ угодно основаніемъ, совпадаетъ съ центромъ тяжести площади сѣченія, параллельнаго основанію и отстоящаго отъ этого основанія на разстояніи равномъ четверти высоты пирамиды или конуса.*

Докажемъ теорему сначала для пирамиды. Для этого проведемъ діагонали изъ одной вершины многоугольника основанія пирамиды, и разложимъ пирамиду на четырехгранники, проводя плоскости черезъ эти діагонали и черезъ вершину пирамиды.

Центръ тяжести каждаго изъ этихъ четырехгранниковъ совпадаетъ съ центромъ тяжести треугольника сѣченія, проведеннаго параллельно основанію пирамиды и отстоящаго отъ основанія на четверть высоты пирамиды. Объемъ четырехгранника пропорціоналенъ площади треугольнаго сѣченія. И такъ, чтобы имѣть центръ тяжести пирамиды, достаточно къ центру тяжести треугольнаго сѣченія каждой треугольной пирамиды приложить силу, пропорціональную его площади, и отыскать центръ всѣхъ этихъ параллельныхъ силъ, или, другими словами, надо найти центръ тяжести площади многоугольника сѣченія пирамиды, отстоящаго отъ основанія пирамиды на $\frac{1}{4}$ высоты ея.

Полученный выводъ вѣренъ, о какомъ бы числѣ граней ни была пирамида вписанная въ конусъ, а слѣд. этотъ выводъ также вѣренъ и для конуса.

100. **Центръ тяжести объема усѣченной пирамиды и центръ тяжести объема усѣченнаго конуса съ параллельными основаніями.** Пусть (чер. 90) усѣченная пирамида съ параллельными основаніями ABCDE и abcde. Продолжимъ грани усѣченной пирамиды, такъ чтобы составилась цѣлая пирамида съ вершиной S. Пусть G_2 и G_1 центры тяжести пирамидъ SABCDE и Sabcde; Q_2 и Q_1 величины ихъ объемовъ. Точки G_2 и G_1 находятся на линіи, сое-

диняющей вершину S съ центрами тяжести G'_2 и G'_1 основаній и отстоятъ отъ соотвѣтствующихъ основаній на разстояніи равномъ четвертой части высотъ SG'_2 и SG'_1. Слѣд. центръ тяжести усѣченной пирамиды находится также на этой линіи. Такъ какъ объемъ усѣченной пирамиды равенъ разности объемовъ пирамидъ SABCDE и Sabcde, то, чтобы получить центръ тяжести G усѣченной пирамиды, достаточно къ центрамъ тяжести G_2 и G_1 приложить силы пропорціональныя объемамъ пирамидъ, паралельныя и противоположныхъ знаковъ и отыскать центръ этихъ паралельныхъ силъ. Точка G должна дѣлить разстояніе между центрами тяжести G_1 и G_2, такъ чтобы части эти были обратно пропорціональны объемамъ, т. е. чтобъ существовала (парагр. 61) пропорція:

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2}\ ,\ \text{но}\ \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Sa^3}{SA^3}\ ,\ \text{слѣд.}$$

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Sa^3}{SA^3}\ (1)$$

Постараемся замѣнить отношеніе кубовъ отношеніемъ линейныхъ величинъ; съ этою цѣлью проведемъ изъ точки S какую угодно линію SF и опишемъ изъ центра S дуги SA и Sa. AA′ и aa′ радіусами. Проведемъ линіи Aa′ и A′a; возьмемъ на SF какую угодно длину Sf, проведемъ fk паралельно Aa′, kl паралельно aA′ и lm паралельно Aa, тогда будемъ имѣть слѣдующія пропорціи:

$$\frac{Sf}{Sk} = \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA}$$

$$\frac{Sk}{Sl} = \frac{Sa}{SA'} = \frac{Sa}{SA}$$

$$\frac{Sl}{Sm} = \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA}$$

умножая почленно эти пропорціи и сокращая общихъ множителей, найдемъ:

$$\frac{Sf}{Sm} = \frac{Sa^3}{SA^3}$$

сравнивая эту пропорцію съ (1), получимъ:

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Sf}{Sm}$$

Теперь остается только построить графически эту пропорцію, для чего черезъ точку G_1 проведемъ линію произвольнаго направленія, такъ чтобы G_1L было равно Sm и черезъ точку G_2 параллельную G_1L, и отложимъ $G_2M=Sk$; затѣмъ соединимъ точки L и M, то линія LM встрѣтитъ линію G_1G_2 въ искомой точкѣ G. Такія же точно построенія надо сдѣлать для полученія центра тяжести усѣченнаго конуса.

101. **Центръ тяжести объема какого угодно многогранника**. Каждый многогранникъ можетъ быть разложенъ на пирамиды или на четырехгранники, слѣдовательно всегда можно найти центръ тяжести объема какого угодно многогранника.

102. **Центръ тяжести объема сферическаго сектора**. Если въ шаровой поверхности сектора будетъ вписана многогранная поверхность съ большимъ числомъ граней, то, соединивъ центръ сектора съ вершинами граней этой поверхности, получимъ большое число многогранныхъ пирамидъ. Поэтому объемъ шарового сектора можетъ быть разсматриваемъ какъ предѣлъ всѣхъ этихъ пирамидъ, радіусъ же сектора можетъ быть разсматриваемъ какъ предѣлъ высотъ этихъ пирамидъ, а потому можно сказать, что центры тяжести малыхъ пирамидъ, изъ которыхъ составляется объемъ сектора, находятся на части шаровой поверхности, описанной радіусомъ равнымъ $^3/_4$ радіуса сектора, т. е. *центръ тяжести сектора совпадаетъ съ центромъ тяжести сферическаго свода, поверхность котораго описана изъ центра сектора радіусомъ равнымъ $^3/_4$ радіуса сектора.*

103. **Центръ тажести части объема сферическаго свода**. Разсмотримъ (чер. 91) часть сферической поверхности, полученной отъ полуоборота кольца $A_2A_1B_2B_1$, заключеннаго между двумя концентрическими дугами круга и двумя нормальными A_2A_1 и B_2B_1 къ этимъ дугамъ, вокругъ оси OC_2, проходящей черезъ середины дугъ. Линія OC_2 будетъ линіей симметріи, на которой находится искомый центръ тяжести G. Пусть G_2 и G_1 центры тяжести секторовъ OA_2B_2 и OA_1B_1; Q_2 и Q_1 ихъ объемы. Величина объема кольца выразится разностью объемовъ секторовъ, поэтому, чтобы найти искомый центръ тяжести G, нужно приложить къ точкамъ G_2 и G_1 силы параллельныя, пропорціональныя объемамъ Q_2 и Q_1 противоположныхъ знаковъ; центръ этихъ параллельныхъ силъ

раздѣлитъ линію G_1G_2 на части обратно пропорціональныя объемамъ секторовъ, т. е. будетъ существовать слѣдующая пропорція:

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

но

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{OA_2^3}{OA_1^3},$$

слѣдовательно,

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{OA_2^3}{OA_1^3}.$$

Замѣнимъ въ этой пропорціи отношеніе кубовъ линейными величинами, съ этою цѣлью проведемъ линіи A_2C_1 и A_1C_2. Возьмемъ на OA_2 произвольную длину OK и проведемъ KL параллельно A_1C_2, LM параллельно C_1A_2 и MN параллельно A_1C_2 тогда можемъ написать такія пропорціи:

$$\frac{OL}{OK} = \frac{OC_2}{OA_1} = \frac{OA_2}{OA_1},$$

$$\frac{OM}{OL} = \frac{OA_2}{OC} = \frac{OA_2}{OA_1},$$

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OC_2}{OA_1} = \frac{OA_2}{OA_1},$$

перемножая ихъ между собою, получимъ:

$$\frac{ON}{OK} = \frac{OA_2^3}{OA_1^3}$$

а, слѣдовательно,

$$\frac{ON}{OK} = \frac{GG_1}{GG_2}.$$

Теперь остается только построить графически эту пропорцію, для чего черезъ G_1 проведемъ линію какого угодно направленія и отложимъ $G_1P = ON$ и черезъ G_2 проведемъ параллельную P_1P и отложимъ $G_2Z = OK$; тогда линія PZ пересѣчетъ радіусъ OC_2 въ искомомъ центрѣ тяжести.

Общія свойства центровъ тяжестей.

104. Такъ какъ вѣсъ тѣла можетъ быть разсматриваемъ, какъ опредѣленная сила, пропорціональная массѣ тѣла, и такъ какъ вѣса отдѣльныхъ тѣлъ, составляющихъ систему, могутъ быть разсматриваемы, какъ силы параллельныя, то, на основаніи параграфа 67, можно высказать слѣдующую теорему:

Теорема. *Разстояніе центра тяжести системы сколькихъ угодно тѣлъ отъ какой нибудь плоскости равно суммѣ моментовъ ихъ вѣсовъ или суммѣ моментовъ ихъ массъ относительно этой плоскости, раздѣленной на сумму всѣхъ вѣсовъ или на сумму всѣхъ массъ.*

Для нахожденія положенія въ пространствѣ центра тяжести системы тѣлъ или массъ необходимо вычислить разстояніе его до трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей.

Если всѣ массы равны, то разстояніе центра тяжести системы до какой либо плоскости будетъ равно средней ариѳметической разстояній до той же плоскости центровъ тяжести всѣхъ тѣлъ системы.

Если плоскость, относительно которой берутся моменты, проходитъ чрезъ центръ тяжести системы тѣлъ или системы массъ, то разстояніе центра тяжести до этой плоскости равно нулю. Отсюда вытекаетъ такая теорема:

Теорема. *Сумма моментовъ вѣсовъ или сумма моментовъ массъ системы тѣлъ относительно какой угодно плоскости проходящей чрезъ центръ тяжести системы, равна нулю.*

И обратно:

Теорема. *Если сумма моментовъ вѣсовъ или массъ системы тѣлъ, относительно какой либо плоскости, равна нулю, то эта плоскость проходитъ чрезъ центръ тяжести системы.*

Изъ только что высказанныхъ теоремъ, съ полною очевидностью, вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема. *Если плоскость, относительно которой берутся моменты, проходитъ чрезъ центръ тяжести системы, то сумма моментовъ массъ или вѣсовъ, лежащихъ по одну сторону плоскости, равна суммѣ моментовъ массъ или вѣсовъ, лежащихъ по другую сторону той же плоскости.*

Если центры тяжести каждаго изъ тѣлъ системы находятся въ одной плоскости, то и центръ тяжести системы находится въ той же плоскости, и положенiе его опредѣлится, если будутъ извѣстны разстоянiя его до двухъ перпендикулярныхъ осей, находящихся въ той же плоскости, а потому можно высказать такую теорему:

Теорема. *Разстоянiя до двухъ перпендикулярныхъ осей отъ центра тяжести системы тѣлъ, отдѣльные центры тяжести которыхъ находятся въ одной плоскости, равны частнымъ отъ дѣленiя суммъ моментовъ массъ, взятыхъ относительно этихъ осей на сумму всѣхъ массъ.*

При этомъ моменты массъ, лежащихъ по одну сторону прямыхъ, будутъ положительными, а моменты массъ, лежащихъ по другую сторону прямыхъ, будутъ отрицательными.

Если центры тяжести всѣхъ тѣлъ системы находятся на одной прямой, то положенiе центра тяжести системы можетъ быть опредѣлено напр. относительно плоскости перпендикулярной къ линiи расположенiя всѣхъ центровъ тяжести, или относительно точки пересѣченiя этой линiи съ плоскостью, и, въ этомъ случаѣ, можно высказать такую теорему:

Теорема. *Разстоянiе центра тяжести системы тѣлъ, центры тяжести которыхъ находятся на одной линiи, отъ какой либо точки, находящейся на этой линiи, равно частному отъ дѣленiя суммы моментовъ массъ относительно той же точки на сумму всѣхъ массъ.*

Свойства паръ.

105. Мы видѣли, какую важную роль играютъ пары въ теорiи равновѣсiя силъ; этимъ методомъ часто пользуются въ механикѣ, поэтому необходимо ознакомиться съ прочими свойствами паръ, до сихъ поръ еще не разсмотрѣнными.

Парамъ, находящимся въ одной и той же плоскости, даютъ знаки $+$ или $-$, слѣдуя правилу знаковъ моментовъ силъ. Моментъ пары считается положительнымъ, когда пара стремится повернуть плечо пары слѣва на право, и отрицательнымъ, когда пара стремится повернуть плечо справа налѣво. Чер. 92 отвѣчаетъ первому случаю. Чер. 93 отвѣчаетъ 2-му случаю. Когда говоримъ о стремленіи пары повернуть плечо пары, то разумѣемъ только фиктивное перемѣщеніе, вводимое для большого уясненія свойствъ паръ.

Моментъ пары можетъ быть представленъ площадью параллелограмма съ основаніемъ равнымъ силѣ P и высотою равной разстоянію между силами. Плоскость, въ которой находятся силы пары, обыкновенно называютъ плоскостью пары. Обозначаютъ пары такъ: (P, —P).

106. **Теорема**. *Двѣ пары, имѣющія равныя силы, приложенныя къ одному и тому же плечу, но направленіе моментовъ которыхъ различно, уравновѣшиваются.*

Пусть имѣемъ двѣ пары (P, — P) и (P_1, —P_1) (чер. 94), силы которыхъ равны между собою, приложенныхъ къ плечу ab. Пара (P, —P) стремится вращать плечо свое справо налѣво, пара P_1, —P_1) стремится вращать свое плечо слѣва направо, слѣд. моментъ 1-й пары отрицательный, а моментъ 2-й пары положительный. Четыре силы двухъ паръ можно разсматривать, какъ приложенныя попарно къ точкамъ a и b. Силы равныя и противоположныя, приложенныя къ точкѣ a, уравновѣшиваются, точно также двѣ силы, равныя противоположныя, приложенныя къ точкѣ b, также уравновѣшиваются, слѣд. дѣйствіе паръ уничтожается или, другими словами, онѣ уравновѣшиваются.

Теорема. *Не измѣняя дѣйствія пары, ее можно повернуть на какой угодно уголъ въ ея плоскости около точки, находящейся на серединѣ ея плеча.*

Предположимъ, что имѣемъ пару (P, — P), силы которой перпендикулярны къ ея плечу (чер. 95). Проведемъ чрезъ середину ея плеча c линію df равную плечу ab и приложимъ къ концамъ этой линіи, перпендикулярно къ ней, по двѣ силы P_1 и P_1 противоположныхъ направленій и равныя силѣ P.

Силы, вновь приложенныя, будутъ уравновѣшиваться между собою, слѣд. прибавленіе ихъ не измѣняетъ дѣйствія данныхъ паръ.

Направленія силъ P_2 и P, пересѣкаются въ точкѣ k. Перенеся ихъ въ эту точку и сложивъ, найдемъ, что равнодѣйствующая ихъ пройдетъ по линіи равнодѣлящей уголъ, составленной силами.

Линія эта, очевидно, пройдетъ чрезъ точку c. Точно также направленія другихъ двухъ силъ P и P_2 пересѣкаются въ точкѣ l, а равнодѣйствующая ихъ проходитъ по равнодѣлящей уголъ, составленный этими силами, проходящей чрезъточку c. Эти двѣ новыя равнодѣйствующія равны между собою, такъ какъ ихъ слагающія также равны между собою. Онѣ дѣйствуютъ по линіи kl и при томъ въ разныя сторны, слѣд. онѣ уравновѣшиваются, и остается двѣ параллельныхъ силы P_1 и P_1, дѣйствующія въ разныя стороны на концахъ плеча df. Такимъ образомъ, безъ измѣненія дѣйствія пары, она замѣнена другою, лежащею съ нею въ одной плоскости, имѣющею силы равныя силамъ данной пары и плечо равное плечу данной пары, но только плечо повернуто на произвольный уголъ вокругъ середины плеча данной пары.

108. **Теорема**.—*Не нарушая дѣйствія пары, ее можно перенести параллельно самой себѣ въ ея плоскости.*

Пусть дана пара (P_1-P), ab ея плечо. Силы перпендикулярны къ плечу (чер. 96). Проведемъ, гдѣ угодно въ плоскости пары, линію cd, равную и параллельную плечу ab. Приложимъ къ концамъ этой линіи, подъ прямыми къ ней углами, по двѣ силы равныхъ и противоположныхъ, и притомъ равныхъ силамъ данной пары. Очевидно, отъ такого прибавленія ни равновѣсіе, ни движеніе не можетъ быть нарушено. Соединимъ точку a съ d, а точку b съ c. Полученныя такимъ образомъ линіи будутъ діагоналями паралеллограмма, пересѣкающимися въ точкѣ f, лежащей на ихъ срединѣ. Силы P и P_2 равныя, параллельныя, дѣйствующія въ точкахъ b и d въ одну сторону, дадутъ равнодѣйствующую, равную суммѣ составляющихъ и приложенную въ точкѣ f равноотстоящей отъ обѣихъ силъ. Точно также двѣ равныя параллельныя силы P и P_2, дѣйствующія въ одну сторону въ точкахъ c и b, дадутъ равнодѣйствующую равную ихъ суммѣ, приложенную въ точкѣ f и направленную въ ту же сторону, какъ и онѣ сами. А потому полученныя двѣ равнодѣйствующія, будучи равными и направленными въ разныя стороны, должны уравновѣситься, и такимъ образомъ останутся двѣ силы P_1 и P_1 параллельныя, дѣйствующія въ разныя стороны на концахъ плеча cd, параллельнаго плечу данной пары и лежащаго въ плоскости данной пары, т. е. теорема доказана.

109. Такъ какъ пара можетъ быть перенесена параллельно самой себѣ въ своей плоскости и повернута на какой угодно уголъ,

то можетъ сказать: *всякая пара можетъ быть замѣнена такою же парою, расположенною какъ угодно въ ея плоскости.*

110. **Теорема.** *Не нарушая равновѣсія, пару можно перенести въ другую плоскость ей параллельную, лишь бы плечо пары въ ея новомъ положеніи было параллельно плечу данной пары.*

Пусть дана пара (P,—P), лежащая въ плоскости NN (чер. 97) съ силами перпендикулярными къ плечу ab. Возьмемъ на плоскости N_1N_1, параллельной плоскости NN, линію cd равную и параллельную плечу ab. Приложимъ къ концамъ рычага cd по двѣ силы равныхъ и противоположныхъ. Очевидно, отъ прибавленія этихъ 4 силъ дѣйствіе пары не будетъ измѣнено. Соединимъ между собой точки a и d, а также b и c. Полученныя линіи будутъ діагоналями параллелограмма, пересѣкающимися въ точкѣ f, лежащей на ихъ серединѣ; точка F отстоитъ на равныхъ разстояніяхъ отъ силъ P и P_1. Силы P и P_1, дѣйствующія въ точкахъ b и d, равныя, параллельныя и дѣйствующія въ одну сторону, сложатся въ одну равнодѣйствующую, равную ихъ суммѣ, дѣйствующую въ одну съ ними сторону и приложенную къ точкѣ f. Точно также силы P и P_1 равныя, параллельныя и дѣйствующія въ точкахъ a и d въ одну сторону, дадутъ равнодѣйствующую, приложенную въ точкѣ f, равную и противоположную предыдущей равнодѣйствующей. Слѣдовательно, полученныя двѣ равнодѣйствующія уничтожатся, и такимъ образомъ останутся только двѣ силы P_2 и P_2, параллельныя, равныя и противоположныя, дѣйствующія на концахъ плеча cd. Итакъ, данная пара замѣнена другою, лежащею въ плоскости параллельной, т. е. теорема доказана.

111. Такъ какъ пара можетъ быть перенесена въ другую плоскость параллельно самой себѣ, а затѣмъ въ этой новой плоскости повернута на какой угодно уголъ, то мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

Теорема. *Пара можетъ быть замѣнена такою же парою, лежащею гдѣ угодно въ плоскости, параллельной плоскости данной пары.*

112. **Теорема.** *Пара можетъ быть замѣнена другою парою, имѣющею какія угодно силы, но плечо такое, что моментъ этой новой пары равенъ моменту данной.*

Пусть имѣемъ пару (P,—P) съ плечомъ ab (чер. 98).

Продолжимъ плечо ab до точки c. Приложимъ къ точкамъ b и
c по двѣ силы равныхъ и противоположныхъ, т. е. приложимъ двѣ
равныхъ пары (P_1, $-P_1$) и (P_2, $-P_2$); отъ прибавленія ихъ дѣй-
ствіе данной пары нисколько не нарушится; величину этихъ силъ
выберемъ такую, чтобы отношеніе между ними и величиною силы
данной пары было обратно пропорціонально отношенію между
линіями ab и bc, т. е. выберемъ такъ эту силу, чтобы существо-
вала пропорція:

$\frac{P}{P} = \frac{P}{P_2} = \frac{cb}{ab}$, или, чтобы моментъ $P \times ab$ данной пары
равнялся бы моменту пары (P_1, $-P_1$) или моменту пары (P_2, $-P_2$).
Но, съ другой стороны, сила, приложенная къ a, и сила P, прило-
женная къ c, какъ параллельныя, дѣйствующія въ одну сторону,
сложатся въ одну равнодѣйствующую, дѣйствующую въ ту же сто-
рону, какъ и данныя силы, приложенныя въ точкѣ, дѣлящей линію
ac на части обратно пропорціональныя силамъ P и P_1. Но такая
точка, по условію выбора силы P_1, есть точка b, слѣдовательно эта
равнодѣйствующая, равная $P + P_1$, будетъ уравновѣшиваться съ
силою ей противоположною, а потому останется вмѣсто данной
пары и четырехъ приложенныхъ силъ, пара (P_2, $-P_2$), плечо кото-
рой равно bc, а моментъ равенъ моменту данной пары. (Срав. съ
параг. 48).

113. **Ось пары**. Только что доказанныя теор. показываютъ, что дѣй-
ствіе пары будетъ вполнѣ опредѣлено, когда будетъ извѣстно положеніе
плоск. ея дѣйствія, а также направленіе ея момента. Вмѣсто
плоскости пары можетъ быть взятъ перпендикуляръ къ ней, а на
немъ длина, равная моменту пары, отложенная въ опредѣленномъ
масштабѣ. Длина и направленіе этой прямой опредѣляетъ за разъ
моментъ пары, и плоскость, въ которой она дѣйствуетъ. Эта пря-
мая можетъ быть перемѣщаема, какъ угодно, лишь бы только не
измѣнялась параллельность между всѣми ея положеніями, слѣд.
положеніе ея въ пространствѣ неопредѣленно. Направленіе этой
прямой служитъ къ опредѣленію направленія пары, для чего по
направленію этой линіи надо вообразить наблюдателя, стоящаго на
плоскости и видящаго пару, стремящуюся дѣйствовать по напра-
вленію положительныхъ вращеній, т. е. слѣва направо. Прямая
опредѣленной величины, построенная такимъ образомъ, опредѣлен-

ная направленіемъ, но не положеніемъ въ пространствѣ, называется *осью пары*.

Сложеніе и разложеніе паръ.

114. **Сложеніе двухъ паръ, расположенныхъ въ одной и той же плоскости или плоскостяхъ параллельныхъ**. Предположимъ, что имѣемъ двѣ пары $(P, -P)$ и $(P_1, -P_1)$ длина плеча первой пары пусть будетъ p, тогда моментъ ея равенъ Pp со знакомъ $+$ или знакомъ $-$, смотря по тому, въ какомъ направленіи пара дѣйствуетъ. Мы можемъ допустить, что знакъ момента зависитъ отъ знака P и что другой множитель p взятъ по абсолютной его величинѣ. Сила P_1 второй пары взята, съ соотвѣтствующимъ знакомъ, и плечо ея p_1 разсматривается положительнымъ. Замѣнимъ пару P_1p_1 парою P_2p, имѣющею тоже плечо, что и первая пара, т. е. допустимъ $P_1p_1 = P_2p$. Тогда будемъ имѣть двѣ пары Pp и P_2p, имѣющія однѣ и тѣ же плечи. Пару P_2p перенесемъ въ ея плоскости или въ плоскость ей параллельную и повернемъ ее, такъ чтобы соотвѣтствующіе концы плечъ пары совпали. Силы двухъ паръ дѣйствующихъ на каждомъ концѣ плеча, сложатся въ одну силу $(P+P_2)$. И такимъ образомъ получится новая пара, моментъ которой равенъ (P_1+P_2) p, т. е. *моментъ равнодѣйствующей пары равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ*. Это предложеніе распространяется на какое угодно число паръ и приводитъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Моментъ равнодѣйствующей пары какого угодно числа данныхъ паръ, находящихся въ одной плоскости или въ параллельныхъ плоскостяхъ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ паръ составляющихъ.*

А такъ какъ оси паръ ничто иное, какъ ихъ линейные моменты, то можно сказать также: *ось равнодѣйствующей пары какого угодно числа паръ, лежащихъ въ одной плоскости, или плоскостяхъ параллельныхъ, равна алгебраической суммѣ осей паръ составляющихъ, или ось равнодѣйствующей пары есть равнодѣйствующая осей данныхъ паръ, сложенныхъ какъ силы*

115. **Сложеніе двухъ паръ, расположенныхъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ**. Сложимъ двѣ пары $(P, -P)$ и $(P_1, -P_1)$. Можно пере-

мѣстить каждую изъ этихъ двухъ паръ такимъ образомъ, чтобы плечи ихъ были расположены на прямой пересѣченія плоскостей данныхъ паръ. Затѣмъ, можно замѣнить одну изъ нихъ парой, имѣющей такое же плечо, какъ и другая пара, а моментъ равный прежней парѣ. Пусть AB общее плечо Въ точкамъ A и B мы получимъ по двѣ силы P_1 и P_2, направленныя въ разныя стороны отъ линіи пересѣченія этихъ плоскостей, перпендикулярныя къ AB и лежащія въ плоскостяхъ данныхъ паръ. Складывая эти силы, получимъ ихъ равнодѣйствующія, дѣйствующія перпендикулярно къ плечу AB въ конечныхъ его точкахъ A и B, но въ разныя стороны, т. е. получимъ пару. Называя равнодѣйствующую силъ P_1 и P_2 буквою R, мы будемъ имѣть, слѣдовательно, пару $(R_1, -R_1)$.

Построимъ оси данныхъ паръ и равнодѣйствующей пары. Для этого, изъ точки A возстановимъ перпендикуляры къ плоскостямъ паръ, отложимъ въ маштабѣ на этихъ прямыхъ длины равныя соотвѣтствующимъ парамъ. Всѣ эти прямыя будутъ перпендикулярны къ AB и будутъ проходить чрезъ одну точку ея A, слѣд. всѣ онѣ будутъ находиться въ плоскости перпендикулярной къ AB, и такъ какъ эти линіи пропорціональны силамъ P_1, P_2 и R, то можно сказать, что ось равнодѣйствующей пары получается изъ осей слагаемыхъ паръ, точно также какъ равнодѣйствующая сила получается изъ слагаемыхъ силъ.

Такимъ образомъ можно высказать слѣдующее правило: *При сложеніи двухъ или нѣсколькихъ паръ, расположенныхъ въ плоскостяхъ пересѣкающихся, надо перенести всѣ пары такъ, чтобы плечи ихъ шли по одному направленію, затѣмъ построить оси паръ, возставляя перпендикуляры къ плоскостямъ паръ изъ какой либо общей имъ точки, сложить эти оси какъ силы; равнодѣйствующая ихъ будетъ осью равнодѣйствующей пары.*

116. Изъ предыдущаго доказательства вытекаетъ то слѣдствіе, что двѣ пары, лежащія въ плоскостяхъ пересѣкающихся, никогда не могутъ уничтожить другъ друга или уравновѣситься, а всегда имѣютъ равнодѣйствующую пару.

117. Если силы пары умножить на нѣкоторое число *n*, не измѣняя ея плеча, то моментъ пары также увеличится въ n разъ. Къ этому же можно придти складываніемъ n равныхъ паръ, или сложеніемъ n паръ, моменты которыхъ равны между собою. Въ этомъ

случаѣ моментъ равнодѣйствующей пары будетъ равенъ n, разъ взятому моменту первоначальной пары. Изъ этого можемъ вывести заключеніе, что *энергіи двухъ паръ относятся между собою, какъ моменты паръ*. Поэтому часто пары обозначаютъ ихъ моментами, такъ, если будетъ сказано пара — Xy, это значитъ, что дѣло идетъ о парѣ ($X_1 - X$) съ плечемъ y.

118. Послѣ всего вышеизложеннаго мы можемъ высказать слѣдующую теорему, не доказывая ея:

Теорема. *Всякую пару можно разложить на двѣ или нѣсколько паръ, лежащихъ въ одной съ ней плоскости или въ плоскостяхъ параллельныхъ.*

119. **Теорема**. *Всякую пару можно разложить на двѣ пары, лежащія въ двухъ плоскостяхъ, пересѣкающихся по направленію плеча данной пары.* Плечо составляющихъ паръ будетъ равно плечу данной пары; силы составляющихъ паръ будутъ равны составляющимъ силы данной пары, а величина ихъ будетъ зависѣть отъ величины угловъ, составленныхъ плоскостью данной пары съ плоскостями паръ слагающихъ.

120. **Тесрема**. *Всякую пару можно разложить на двѣ пары, силы которыхъ равны силамъ данной пары, а плечи суть линіи параллелограмма, діагональ котораго равна плечу данной пары.* Пусть будетъ дана пара (P, —P) лежащая въ плоскости ON (чер. 99) съ плечемъ равнымъ oc и требуется ее разложить на двѣ пары, лежащія въ плоскостяхъ ON_1 и ON_2 пересѣкающихся съ плоскостью данной пары по линіи OD. Перенесемъ и повернемъ данную пару въ ея плоскости, такъ чтобы одинъ конецъ плеча совпадалъ съ точкою O и сила пары, приложенная къ этому концу, была направлена по линіи OD. Проведя чрезъ плечо данной пары плоскость, пересѣкающую плоскости ON_1 и ON_2, построимъ на OC, какъ на діагоналѣ, параллелограммъ ABCD и въ точкѣ B въ плоскости ON_2 приложимъ двѣ силы равныхъ и противоположныхъ, равныхъ P. Такимъ образомъ получимъ двѣ пары: одну (P, —P) съ плечемъ OB, лежащую въ плоскости ON_2, другую (P, — P) съ плечемъ BC, лежащую въ плоскости параллельной плоскости ON_1; эту послѣднюю пару можно перенести въ плоскость ON_1. И такъ теорема доказана.

Замѣтимъ при этомъ, что пара, лежащая въ плоскости ON_2, стремится вращать свое плечо справо налѣво, слѣд. моментъ ея отри цательный, а пара, лежащая въ плоскости ON_1 стремится вращать свое плечо слѣва направо, или по направленію движенія часовыхъ стрѣлокъ, слѣд. моментъ ея положительный.

121. *Всякую пару можно разложить на три пары, расположенныя въ трехъ какихъ угодно плоскостяхъ, не параллельныхъ другъ другу.* Для этого достаточно провести чрезъ нѣкоторую точку оси данной пары перпендикуляры къ тремъ плоскостямъ, затѣмъ разложить ось по ребрамъ трехгранника, составленнаго этими перпендикулярами. Составляющія будутъ соотвѣтственными осями искомыхъ паръ.

Этого же можно достигнуть разлагая пару непосредственно на три пары, лежащія напр. въ координатныхъ прямоугольныхъ плоскостяхъ. Пусть имѣемъ пару $(P, -P)$ съ плечемъ OM (чер. 100). Спроэктируемъ силы пары на три координатныя оси, начало которыхъ возьмемъ проходящимъ черезъ точку приложенія силы P. Пусть проэкціи силы P будутъ X, Y и Z, проэкціи силы $-P$ будутъ $-X$, $-Y$, $-Z$; такимъ образомъ получимъ три пары $(X, -X)$, $(Y, -Y)$ и $(Z, -Z)$, плечи которыхъ лежатъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ направленіямъ силъ X, Y и Z, слѣд. плечо пары $(X, -X)$ будетъ Ma, плечо пары $(Y, -Y)$ будетъ Mb; плечо пары $(Z, -Z)$ будетъ Mc и плечи Ma, Mb и Mc суть діагонали параллелограммовъ, стороны которыхъ равны координатамъ точки M. Разложимъ каждую изъ трехъ паръ на двѣ, такъ чтобы плечи составляющихъ паръ были равны сторонамъ этихъ параллелограммовъ, т. е. были равны координатамъ точки M. Тогда получимъ, что пара $(X, -X)$ съ плечемъ Ma замѣнится двумя парами, одною $(X, -X)$ съ плечемъ z и моментомъ Xz, лежащею въ плоскости ZOX и парою $(X, -X)$ съ плечемъ y и моментомъ Xy, лежащею въ плоскости YOX; пара $(Z, -Z)$ съ плечемъ Mc замѣнится двумя парами,—одною $(Z, -Z)$ съ плечемъ x и моментомъ $-Zx$, лежащею въ плоскости ZOX и парою $(Z, -Z)$ съ плечемъ y и моментомъ Zy, лежащею въ плоскости ZOY; и наконецъ пара $(Y, -Y)$ съ плечемъ Mb замѣнится двумя парами,—одною $(Y, -Y)$ съ плечемъ x и моментомъ Yx, лежащею въ плоскости YOX, и парою $(Y, -Y)$ съ плечемъ z, моментомъ $-Yz$, лежащею въ плоскости ZOY. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть въ каждой плоскости координатъ по двѣ пары, которыя можно сложить, и получится три пары.

122. **Аналитическія выраженія моментовъ проекцій пары на**

координатныхъ плоскостяхъ. Выше мы видѣли, что пару можно разложить на шесть паръ, лежащихъ въ координатныхъ плоскостяхъ,— именно имѣли:

въ плоск. YOZ пары: Zy и $-Yz$

въ плоск. XOZ пары: Xz и $-Zx$

въ плоск. XOY пары: Yx и $-Xy$

Складывая ихъ между собою, найдемъ:

$$\begin{aligned} L &= Zy - Yz \\ M &= Xz - Zx \\ N &= Yx - Xy \end{aligned} \tag{1}$$

Называя ось или линейный моментъ данной пары $(P, -P)$ буквою G и разлагая его на три координатныя оси, получимъ три оси паръ, лежащихъ на координатныхъ плоскостяхъ, или ихъ линейные моменты, выраженные формулами (1); такъ что, если углы, составленные осью данной пары съ осями координатъ, означимъ буквами λ μ и ν, то можемъ написать:

$$\begin{aligned} G\cos\lambda &= Zy - Yz = L \\ G\cos\mu &= Xz - Zx = M \\ G\cos\nu &= Yx - Xy = N \end{aligned}$$

Если сравнимъ формулы, выведенныя здѣсь, съ формулами, выведенными въ параграфѣ 56, то должны будемъ сказать, что моменты проэкцій пары на трехъ прямоугольныхъ плоскостяхъ имѣютъ совершенно такія же аналитическія выраженія, какія имѣютъ моменты силы, равной силѣ пары, относительно координатныхъ осей, перпендикулярныхъ соотвѣтственнымъ плоск. координатъ; такъ напр. моментъ проэкціи пары на плоскости XOY тотъ же, что и моментъ силы относительно оси Z и т. д.

123. **Выраженіе проэкціи пары на произвольную плоскость или на произвольное направленіе**. Пусть дана пара $(P, -P)$ съ плечемъ AB. Найдемъ ея проэкціи—на плоскость N, составляющую съ плоскостью пары уголъ φ. Построимъ на силѣ пары и плечѣ параллелограммъ и назовемъ его буквою p. Проэкція этого параллелограмма пусть будетъ параллелограммъ p'.

Одна сторона параллелограмма p' будетъ проэкціей силы P, другая сторона будетъ проэкціей плеча; пусть проэкція силы P будетъ P', а проэкція плеча будетъ $A'B'$. Очевидно, что такимъ образомъ получимъ на плоскости N пару $(P,' - P')$ съ плечемъ $A'B'$, которая будетъ проэкціей данной пары. Слѣдовательно можемъ написать:

$$p' = p \cos \varphi.$$

Но параллелограммы p и p' суть ничто иное, какъ моменты данной пары и проэкціи ея, поэтому можемъ сказать: *моментъ проэкціи данной пары на какую угодно плоскость или направленіе равенъ проэкціи момента данной пары на ту же плоскость или направленіе.*

А такъ какъ моменты замѣняются осями, то точно также можно сказать: *ось проэкціи данной пары на какое угодно направленіе равна проэкціи оси данной пары на то же направленіе.*

124. До сихъ поръ мы говорили о парахъ, силы которыхъ приложены къ концамъ ихъ плечъ, но, конечно, могутъ быть и пары, силы которыхъ взяты неперпендикулярно къ направленію плечъ. Такія пары легко преобразовываются въ первыя перенесеніемъ силъ пары по ихъ направленіямъ въ концы плеча (чер. 102 и 103).

125. **Теорема**. *Пара не можетъ быть приведена къ одной силѣ.*

Чтобы доказать эту теорему, допустимъ противное, т. е. что одна сила R уравновѣшиваетъ пару $(P, -P)$. Вслѣдствіе симметріи, существующей между двумя силами пары, можно будетъ сказать, что если пару уравновѣшиваетъ сила R, то ее должна уравновѣшивать также и сила $-R$. Съ другой стороны, не нарушая равновѣсія, къ парѣ и къ силѣ R, по предположенію ее уравновѣшивающей, можно прибавить двѣ силы R и $-R$ равныхъ и противоположныхъ, такъ что получимъ пять уравновѣшенныхъ силъ:

$$P, -P, \ R, -R \text{ и } R;$$

но предположимъ, что равновѣсіе существуетъ между парою $(P, -P)$ и силою $-R$, слѣдовательно силы R и R должны бы уничтожиться, что невозможно, потому что онѣ направлены въ одну и ту же сторону. Къ этому нелѣпому выводу пришли вслѣдствіе допущенія, что пару можно замѣнить одною силою, а потому это допущеніе также нелѣпо. И такъ, пара никогда не можетъ быть уравновѣшена одною силою.

Преобразованіе силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ.

126. **Теорема**. *Всѣ силы, дѣйствующія на твердое тѣло, или на неизмѣняемую систему точекъ, направленныя какимъ угодно образомъ въ пространствѣ, сходящіяся въ одной точкѣ, могутъ быть замѣнены одною равнодѣйствующею.* Дѣйствительно, пусть даны четыре силы P_1, P_2, P_3 и P_4 сходящіяся въ одной точкѣ O (чер. 101). Двѣ силы P_1 и P_2 лежатъ въ одной плоскости и пересѣкаются въ одной точкѣ, слѣд. имѣютъ одну равнодѣйствующую R_1, лежащую въ той же плоскости и проходящую чрезъ точку O. На томъ же основаніи силы P_3 и P_4 складываются въ одну равнодѣйствующую R_2 проходящую чрезъ точку O. Силы R_1 и R_2 пересѣкаются въ точкѣ O и лежатъ въ одной плоскости, слѣд. сложатся въ одну силу R. Сколько бы ни было дано силъ, сходящихся въ одной точкѣ, поступая описаннымъ образомъ, мы всегда придемъ къ одной равнодѣйствующей. И такъ теорема доказана.

127. **Теорема**. *Всякая сила можетъ быть разложена на три составляющихъ, направленныхъ какъ угодно въ пространствѣ и проходящихъ чрезъ какую либо точку данной силы.*

Теорема эта уже доказана въ параграфѣ 54-мъ; изъ нея вытекаетъ слѣдующая теорема:

Всякую силу можно разложить на три составляющихъ, лежащихъ не въ одной плоскости, такъ чтобы одна была произвольна по величинѣ, направленію и знаку, вторая проходила чрезъ данную точку, третья встрѣчала данную прямую.

128. **Теорема**. *Всякая данная сила, дѣйствующая на твердое тѣло или на неизмѣняемую систему точекъ, можетъ быть замѣнена другою силою ей равною и параллельною, перенесенною въ произвольную точку, находящуюся въ тѣлѣ или системѣ, и парою, силы которой равны данной силѣ, а плечо равно разстоянію отъ точки приложенія данной силы до новаго ея направленія. Перенесенная пара и сила находятся въ одной плоскости.*

Дѣйствительно, если на тѣло или систему дѣйствуетъ сила P (чер. 104) въ точкѣ A, то, не измѣняя ея дѣйствія, можно къ произвольно выбранной точкѣ B тѣла или системы приложить двѣ силы равныхъ, противоположныхъ и параллельныхъ данной силѣ. Соединивъ точки A и B, получимъ пару (P,—P), дѣйствующую на концы линіи AB, и силу P, параллельную данной силѣ, дѣйствующую въ B.

129. Если на тѣло дѣйствуетъ сила P и пара (P,—P), лежащія въ одной плоскости, то всегда возможно перенести пару такимъ образомъ, чтобы конецъ ея плеча пришелся въ точкѣ приложенія силы и затѣмъ повернуть пару такимъ образомъ, чтобы данная сила и одна сила пары лежали по противоположнымъ направленіямъ, т. е. уравновѣшивались, тогда останется только другая сила пары. Такимъ образомъ, отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема. *Если на тѣло или систему неизмѣняемыхъ точекъ дѣйствуютъ одновременно пара и сила, лежащія въ одной плоскости, то онѣ могутъ быть замѣнены одною силою, равною и параллельною силамъ пары и имѣющею точку приложенія на одномъ концѣ плеча пары.*

130. Если на тѣло или систему дѣйствуетъ нѣсколько силъ, то, перенося каждую изъ нихъ въ одну и ту же точку, найдемъ, что на эту точку будетъ дѣйствовать столько силъ, сколько данныхъ силъ, и, кромѣ того, получается столько паръ, сколько данныхъ силъ; плечи этихъ паръ будутъ проходить чрезъ взятую произвольную точку. Сложивъ перенесенныя силы между собою, а всѣ пары въ одну пару, найдемъ, что всѣ данныя силы, приложенныя къ твердому тѣлу или неизмѣняемой системѣ точекъ, могутъ быть замѣнены одною парою и одною силою, перенесенною въ произвольную точку тѣла, причемъ перенесенная равнодѣйствующая и равнодѣйствующая пара лежатъ, вообще говоря, въ разныхъ плоскостяхъ. Такимъ образомъ, нами доказана слѣдующая теорема:

Теорема. *Всѣ силы, дѣйствующія на тѣло, сколько бы ихъ ни было, всегда могутъ быть замѣнены одною силою и одною парою, дѣйствующими, вообще говоря, въ разныхъ плоскостяхъ.*

131. Если на тѣло дѣйствуетъ сколько угодно силъ, то, путемъ

перенесенія ихъ, получимъ перенесенную равнодѣйствующую и равнодѣйствующую пару, дѣйствующія, говоря вообще, въ разныхъ плоскостяхъ. Равнодѣйствующую пару можно затѣмъ разложить на двѣ составляющихъ пары такихъ, что одна изъ нихъ дѣйствуетъ въ плоскости перенесенной равнодѣйствующей, а другая въ плоскости перпендикулярной къ этой перенесенной равнодѣйствующей. Перенесенную равнодѣйствующую можно перенести вновь въ нѣкоторую точку, лежащую въ плоскости, въ которой теперь находится вмѣстѣ съ нею слагающая пара. Точку перенесенія можно выбрать такъ, что пара, полученная чрезъ перенесеніе, уничтожится съ слагающею парою, а останется лишь перенесенная равнодѣйствующая. Кромѣ того, останется также и другая слагающая пара, лежащая въ плоскости перпендикулярной къ направленію дѣйствія перенесенной равнодѣйствующей. Такимъ образомъ, всѣ силы, дѣйствующія на тѣло, будутъ замѣнены одною силою и одною парою, лежащею въ плоскости, перпендикулярной къ направленію силы. Итакъ, можемъ высказать слѣдующую теорему:

Теорема. *Каково бы ни было число силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, или систему неизмѣняемыхъ точекъ, всѣ онѣ могутъ быть замѣнены силою и парою, лежащею въ плоскости перпендикулярной къ направленію силы.* Или иначе: *всѣ силы могутъ быть замѣнены парою и силою, дѣйствующею по направленію оси пары.*

132. Предположимъ, что на тѣло дѣйствуетъ сила и пара; приложимъ къ тѣлу новую силу и посмотримъ, въ какомъ случаѣ эта новая сила способна уравновѣсить и данную силу, и данную пару.

Положимъ, что новая сила складывается съ данною въ одну силу, т. е. найдемъ, что на тѣло дѣйствуетъ нѣкоторая сила и пара, но, какъ извѣстно, сила и пара не могутъ уравновѣситься.

Положимъ, что данная сила и вновь приложенная сила даютъ нѣкоторую силу и пару; эта послѣдняя сложится съ данною парою и также очевидно, что равнодѣйствующая пара не уравновѣситъ равнодѣйствующую данной силы и вновь полученной.

Наконецъ, положимъ, что новая сила съ данною силою составляетъ пару, эта новая пара можетъ уравновѣситься съ данною парою лишь въ томъ случаѣ, если обѣ пары будутъ лежать въ одной плоскости, или въ плоскостяхъ параллельныхъ, такъ какъ если бы онѣ лежали въ плоскостяхъ наклонныхъ другъ къ другу, то онѣ сложились бы въ одну пару т. е. не уничтожились бы. Итакъ, нѣкоторая сила можетъ уравновѣсить силу и пару лишь въ томъ случаѣ, если двѣ силы лежатъ въ одной плоскости съ парою или въ плоскости параллельной плоскости пары. При этомъ, конечно, обѣ приложенныя силы и силы пары должны быть равны между собою. Слѣд. можно высказать такую теорему:

Теорема. *Сила и пара, приложенныя къ твердому тѣлу, тогда только могутъ быть уравновѣшены одною силою, когда эта послѣдняя, вмѣстѣ съ данною силою, лежитъ въ одной плоскости съ данною парою и когда эти силы, равныя между собою, равны, кромѣ того, силамъ пары.*

133. Такъ какъ всѣ силы, дѣйствующія на тѣло по какимъ бы то ни было направленіямъ, могутъ быть замѣнены перенесенною равнодѣйствующею и равнодѣйствующею парою, лежащими, вообще говоря, въ разныхъ плоскостяхъ, то, перенеся пару параллельно самой себѣ, и поворачивая ее, такъ что одинъ конецъ плеча совпадетъ съ перенесенною равнодѣйствующею, можно будетъ сложить эту равнодѣйствующую съ силою пары, какъ двѣ силы, сходящіяся въ одной точкѣ, и такимъ образомъ получится новая равнодѣйствующая и другая сила пары, не лежащая съ новой равнодѣйствующей въ одной плоскости. И такъ, можемъ высказать такую теорему:

Теорема. *Всѣ силы, дѣйствующія на твердое тѣло по какимъ угодно направленіямъ, могутъ быть замѣнены двумя силами, дѣйствующими въ разныхъ плоскостяхъ.*

134. Докажемъ теперь слѣдующую теорему:

Теорема. *Силы, не лежащія въ одной плоскости, а дѣйствующія на тѣло по какимъ угодно направленіямъ, никогда не могутъ быть приведены къ одной равнодѣйствующей.*

Выше видѣли, что всѣ силы могутъ быть приведены къ двумъ силамъ, лежащимъ въ разныхъ плоскостяхъ, слѣдовательно надо только доказать, что эти двѣ силы, къ которымъ будутъ приведены данныя, не могутъ имѣть равнодѣйствующей. Пусть имѣемъ двѣ силы P и Q, отличныя отъ нуля и лежащія въ разныхъ плоскостяхъ. Возьмемъ на направленіи силы P точку A и изъ нея опустимъ перпендикуляръ AB на направленіе силы Q. Силу Q перенесемъ въ точку А; тогда, кромѣ нея, получимъ еще пару $(Q, -Q)$ съ плечемъ АВ. Сила Р и перенесенная сила будутъ сходиться въ точкѣ А подъ нѣкоторымъ угломъ, такъ какъ по положенію онѣ лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ; поэтому онѣ сложатся въ одну силу, направленную по биссектрисѣ угла. Но, очевидно, эта равнодѣйствующая не лежитъ въ плоскости пары $(Q, -Q)$ или въ плоскости ей параллельной, а потому двѣ силы приведены къ силѣ и парѣ, не лежащія въ одной плоскости, ни въ плоскостяхъ параллельныхъ, а, слѣдовательно, данныя двѣ силы не имѣютъ одной равнодѣйствующей, т. е. предложенная теорема доказана.

135. Если на тѣло дѣйствуютъ силы P_1 P_2 P_3, расположенныя какъ угодно въ пространствѣ въ точкахъ A_1 A_1 A_2 . . . ——, то, взявъ въ сторонѣ отъ данныхъ силъ три прямоугольныя оси координатъ, можно перенести данныя силы въ начало О этихъ координатъ, не измѣняя величины направленія и знака силъ. Отъ такого перенесенія силъ получимъ столько паръ, сколько силъ, плечи которыхъ будутъ равны разстояніямъ точки О до точекъ A_1, A_2, A_3. Всѣ эти пары можно сложить въ одну пару, а затѣмъ равнодѣйствующую пару разложить на три пары, дѣйствующія въ плоскостяхъ координатъ. Силы, перенесенныя въ начало координатъ, можно спроэктировать на три плоскости координатъ. Проэкціи, лежащія въ каждой плоскости, сложатся по правиламъ сложенія силъ, лежащихъ въ плоскости, при помощи многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника.

Назовемъ эти проэкціи буквами R_1' R_2' R_3'. Такимъ образомъ, получится три силы на плоскостяхъ координатъ, сложивъ ихъ по правилу параллелепипида (параграфъ 55), найдемъ одну равнодѣйствующую: $R = \sqrt{R_1'^2 + R_2'^2 + R_3'^2}$, которая, вмѣстѣ съ тѣмъ, будетъ равнодѣйствующею данныхъ силъ.

Кромѣ того, будемъ имѣть три пары, лежащія въ плоскостяхъ координатъ.

Можно было бы силы, по перенесеніи ихъ въ точку О, проэктировать не на плоскости координатныя, а на оси. Пусть проэкціи силы Р будутъ X_1 Y_1 и Z_1, проэкціи P_2 пусть будутъ X_2, Y_2, Z_2 и т. д. Слагающія, дѣйствующія по каждой изъ осей, сложатся въ одну силу, такъ что будемъ имѣть:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = X$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = Y$$
$$X_1 + Y_2 + Z_3 + \ldots = Z$$

гдѣ X, Y и Z обозначаютъ суммы всѣхъ силъ, дѣйствующихъ по каждой изъ осей. А, соединяя эти три силы въ одну, по правилу параллелипипида силъ, найдемъ одну равнодѣйствующую, равную $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

Моменты же паръ, какъ знаемъ изъ параграфа 122, выражаются такъ:

$$L = Zy - Yz$$
$$M = Xz - Zx$$
$$N = Yx - Xy$$

136. *Равнодѣйствующая R, полученная при помощи X, Y и Z таже самая, что и полученная при помощи R_1' R_2' R_3'.*

Чтобы доказать это, докажемъ одну теорему, часто встрѣчающуюся въ механикѣ.

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что если имѣемъ двѣ пересѣкающихся линіи, образующія между собою уголъ θ, и изъ которыхъ 1-я составляетъ съ прямоугольными осями координатъ углы α, β, γ, а вторая съ тѣми же осями составляетъ углы α', β', γ', то существуетъ такое уравненіе:

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' \qquad (1).$$

Положимъ, что сила R направлена по одной изъ этихъ прямыхъ; тогда проэкція ея на другой прямой выразится формулою:

$$R' = R \cos\theta \qquad (2).$$

Подставляя въ (2) формулу, вмѣсто $\cos\theta$, ея выраженіе изъ (1), найдемъ:

$$R' = R\cos\alpha \cos\alpha' + R\cos\beta \cos\beta' + R\cos\gamma \cos\gamma'.$$

Но $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$ и $R\cos\gamma$ ничто иное, какъ проэкціи силы R на осяхъ координатъ или составляющія ее на этихъ осяхъ, которыя обозначаются обыкновенно буквами X, Y и Z, слѣдовательно можемъ написать:

$$R' = X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma'$$

т. е. *проэкція силы на какое угодно направленіе равна суммѣ произведеній, полученныхъ изъ проэкцій данной силы на осяхъ координатъ и изъ косинусовъ угловъ, составленныхъ этими осями съ заданнымъ направленіемъ, или проэкція силы на какое либо направленіе равна суммѣ трехъ проэкцій на это же направленіе, составленныхъ данной силой на осяхъ координатъ.*

Подобная же теорема относительно проэкціи момента выведена уже въ параграфѣ 58.

И такъ, можно написать:

$$\left.\begin{aligned} R'_1 &= X\cos\alpha_1 + Y\cos\beta_1 + Z\cos\gamma_1; \\ R'_2 &= X\cos\alpha_2 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\gamma_2; \\ R'_3 &= X\cos\alpha_3 + Y\cos\beta_3 + Z\cos\gamma_3; \end{aligned}\right\}(2)$$

гдѣ α_1, β_1, γ_1, суть углы, составленные направленіемъ R'_1 съ осями координатъ, точно также α_2, β_2, γ_2, суть углы, составленные направленіемъ R'_2 съ осями и т. д. Такъ какъ R'_1 R'_2 R'_3 лежатъ на прямоугольныхъ плоскостяхъ координатъ, то они между собою составляютъ углы прямые, и косинусы этихъ угловъ, слѣд. равны нулямъ, поэтому будемъ имѣть такія равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0 \\ &\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3 = 0 \\ &\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0 \\ &\text{и, кромѣ того:} \\ &\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \\ &\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \\ &\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1 \end{aligned}\right\}(3)$$

Возвысивъ равенства (2) въ квадратъ и сложивъ результаты, найдемъ:

$$R'^2_1 + R'^2_2 + R'^2_3 = X^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) +$$
$$Y^2(\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3) + Z^2(\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3)$$
$$+ 2XY(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3)$$
$$+ 2XZ(\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3)$$
$$+ 2YZ(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3).$$

Откуда, на основанiи равенствъ (3), найдемъ:

$$R'^2_1 + R'^2_2 + R'^2_3 = X^2 + Y^2 + Z^2 \text{ а слѣд.}$$
$$\sqrt{R'^2_1 + R'_2 + R'^2_3} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

137. **Веревочная пирамида.** Выше видѣли, что для силъ, дѣйствующихъ на тѣло и расположенныхъ въ пространствѣ, можно построить въ плоскостяхъ координатъ три многоугольника силъ и три веревочныхъ многоугольника. Но, кромѣ того, можно доказать, что для силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, *не можетъ существовать одного веревочнаго многоугольника, но что существуетъ одна веревочная пирамида, владѣющая свойствами, аналогичными съ свойствами веревочнаго многоугольника.*

Возьмемъ систему силъ P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 (чер. 105), расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ.

Возьмемъ на направленiи силы P_1 какую угодно точку a_1 и разложимъ эту силу на три, такъ чтобы одна шла по линiи a_1a_0 и была произвольна по величинѣ и знаку, вторая a_10 проходила бы чрезъ произвольную точку 0, третья a_1a_2, встрѣчала бы силу P_2, напр. въ точкѣ a_2. Разложимъ P_2 на три, такъ чтобы одна шла по a_2a_1 и была равна и противоположна составляющей P_1, направленной по этой же линiи, вторая проходила черезъ 0, третья встрѣчала направленiе силы P_3, напр. въ точкѣ a_3. Разложимъ P_3 на три силы, такъ чтобы одна шла по a_3a_2, была равна и противоположна составляющей P, направленной по этой же линiи, вторая проходила черезъ 0, третья встрѣчала направленiя силы P_4. Такимъ образомъ, будемъ продолжать разложенiе до послѣдней силы P_6, которую разложимъ на три, такъ чтобы одна шла по a_6a_5 и была равна и противоположна составляющей P_5, направленной по этой же линiи, вторая проходила черезъ точку 0, третья встрѣчала линiю a_1a_0.

Итакъ, мы замѣнили данную систему силъ системой другихъ силъ, равнозначущихъ даннымъ: одни изъ нихъ проходятъ черезъ точку 0, другія направлены по сторонамъ многоугольника $a_0a_1a_2a_3 \ldots a_6$. Первыя, сходящіяся въ одной точкѣ, сложатся въ одну силу; силы, направленныя по промежуточнымъ сторонамъ многоугольника, уничтожатся, какъ равныя и противоположныя; силы, направленныя по двумъ крайнимъ сторонамъ многоугольника, сложатся также въ одну, такъ какъ стороны эти пересѣкаются между собою. Такимъ образомъ, данныя силы приведены къ двумъ силамъ, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ произвольную точку 0, т. е. мы доказали, между прочимъ, теорему, доказанную раньше: *силы, расположенныя какимъ угодно способомъ въ пространствѣ, могутъ быть приведены къ двумъ, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ произвольную точку*.

Но, кромѣ того, при этомъ разложеніи мы имѣемъ пирамиду, имѣющую вершину въ 0 и основаніе многоугольника $a_0a_1a_2a_3 \ldots, a_6$. Предположимъ, что двѣ точки одной изъ сторонъ этого многоугольника основанія и вершина 0 закрѣплены, т. е. сдѣланы точками неподвижными,—тогда пирамида будетъ находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ, потому что силы, проходящія черезъ 0, и силы, направленныя по двумъ крайнимъ сторонамъ многоугольника, уничтожатся неподвижностью трехъ точекъ 0, a_0, a_1, а другія силы, направленныя по промежуточнымъ сторонамъ многоугольника, уничтожатся попарно. Итакъ, мы видимъ, что для силъ, дѣйствующихъ какъ угодно въ пространствѣ, существуетъ пирамида, имѣющая большое сходство съ веревочнымъ многоугольникомъ, и ее можно назвать *веревочною пирамидою*. Одного же веревочнаго многоугольника для такихъ силъ не существуетъ.

Если система данныхъ силъ находится въ равновѣсіи, тогда двѣ силы, къ которымъ она приводится, должны быть равны и противоположны, что требуетъ, чтобы равнодѣйствующая силъ, проходящая черезъ точку 0 и двѣ силы, направленныя по крайнимъ сторонамъ веревочнаго многоугольника, были бы въ одной плоскости; другими словами: *при равновѣсіи силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, необходимо, чтобы веревочная пирамида была замкнутая*.

Если точка 0 будетъ находиться въ безконечности, то пирамида дѣлается призмой, и сѣченіе призмы какою угодно плоскостью (P) будетъ веревочнымъ многоугольникомъ системы данныхъ силъ, спроектированныхъ на плоскость (P) по направленію, параллельному основанію призмы.

Условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу и расположенныхъ, какъ угодно, въ пространствѣ, или условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ расположенныхъ, какъ угодно, въ пространствѣ.

138. Матеріальная точка *свободна*, когда ей можно дать какое угодно положеніе и перенести совершенно произвольнымъ путемъ изъ этого положенія въ другое, въ которомъ она не встрѣтитъ никакого сопротивленія, или препятствія. Если матеріальная точка не обладаетъ подобнымъ свойствомъ, а, напротивъ того, подчинена нѣкоторымъ препятствіямъ или *связямъ*, то такую точку называютъ *несвободной* точкой.

Все сказанное здѣсь объ одной матеріальной точкѣ прикладывается также и къ системѣ неизмѣняемыхъ матеріальныхъ точекъ, или къ твердому тѣлу. Когда мы говорили о равновѣсіи силъ, приложенныхъ въ какихъ угодно точкахъ плоскости, или о силахъ, приложенныхъ къ точкамъ тѣла и расположенныхъ, какъ угодно, въ пространствѣ, то предполагали, что эти точки подчинены одному лишь условію, что разстоянія между ними не измѣняются (параг. 16) во всемъ остальномъ онѣ оставались вполнѣ свободными, слѣд. выведенныя въ прежнихъ статьяхъ условія равновѣсія силъ тѣ же самыя, какъ и условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ свободной неизмѣняемой системѣ точекъ, т. е. не встрѣчающей препятствій при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ этой системы.

Здѣсь остается еще сказать объ условіяхъ равновѣсія силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу и направленныхъ какъ угодно въ пространствѣ. Мы уже видѣли, что въ этомъ случаѣ для равновѣсія необходимо, чтобы веревочная пирамида была замкнутой, но можно построить также условія равновѣсія въ другой формѣ. Такъ какъ всѣ силы, дѣйствующія на тѣло по какимъ угодно направленіямъ въ пространствѣ, могутъ быть приведены къ перенесенной равнодѣйствующей и къ равнодѣйствующей парѣ, и такъ какъ перенесенная равнодѣйствующая не можетъ уравновѣсить равнодѣйствующей пары, то слѣд. для равновѣсія всѣхъ силъ необходимо и достаточно, чтобы перенесенная равнодѣйствующая обращалась сама по себѣ въ нуль, и равнодѣйствующая пара также обращалась сама по себѣ въ нуль, т. е. моментъ равнодѣйствующей пары былъ равенъ нулю.

Выше мы видѣли, что всѣ силы, дѣйствующія на тѣло, могутъ быть замѣнены проэкціями силъ, лежащихъ въ координатныхъ плоскостяхъ, и тремя парами, лежащими въ тѣхъ же плоскостяхъ. Очевидно, если многоугольники силъ и веревочные многоугольники, лежащіе на координатныхъ плоскостяхъ, замкнуты, то три равнодѣйствующихъ R'_1 R'_2 R'_3 равны нулю, точно также и пары, лежащія въ плоскостяхъ координатъ, также будутъ равны нулю. Поэтому можно высказать слѣдующую теорему:

Теорема. *Для равновѣсія силъ, приложенныхъ къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла и направленныхъ какъ угодно въ пространствѣ, или для равновѣсія свободнаго тѣла, находящагося подъ дѣйствіемъ этихъ силъ, необходимо и достаточно, чтобы многоугольники проэкцій силъ на координатныхъ плоскостяхъ и ихъ веревочные многоугольники, лежащіе на тѣхъ же плоскостяхъ, были замкнутыми.*

Та же самая теорема можетъ быть выражена и иначе:

Теорема. *Для равновѣсія силъ, приложенныхъ къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла и направленныхъ какъ угодно въ пространствѣ; или для равновѣсія свободнаго твердаго тѣла, находящагося подъ дѣйствіемъ этихъ силъ, необходимо и достаточно, чтобы: 1) суммы проэкцій силъ на каждую изъ осей координатъ равнялись порознь нулю и 2) чтобы моментъ равнодѣйствующей пары или моментъ трехъ паръ, находящихся на координатныхъ плоскостяхъ, или моменты равнодѣйствующей силы относительно трехъ координатныхъ осей тоже равнялись порознь нулю.*

Эти условія аналитически выражаются слѣдующими шестью уравненіями:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = X = 0. \qquad Zy - Yz = L = 0.$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = Y = 0. \qquad Xz - Zx = M = 0.$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots = Z = 0. \qquad Yx - Xy = N = 0.$$

Условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ несвободному тѣлу, или условія равновѣсія несвободнаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ. Связи или препятствія.

139. Раньше мы уже указали различіе между свободнымъ и несвободнымъ тѣломъ. Разсмотримъ же какого рода препятствія или связи могутъ ограничивать свободу тѣла. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Матеріальная точка M, находящаяся на концѣ нерастяжимой нити OM, укрѣпленной въ неподвижной точкѣ O, несвободна, потому что она не можетъ удалиться отъ точки O по направленію длины OM. Она принуждена оставаться, или внутри шара, описаннаго изъ точки O радіусомъ OM, или на поверхности этого шара; говоря вообще, точка можетъ, въ этомъ случаѣ, находиться въ опредѣленной части пространства.

Замѣнимъ нить OM твердой полосой, нерастяжимой и несжимаемой; свобода точки M будетъ еще болѣе ограничена, чѣмъ прежде; она не только не будетъ имѣть возможности удалиться отъ точки O на разстояніе большее OM, но она не будетъ имѣть возможности отодвинуться отъ точки O на малѣйшее разстояніе. Итакъ, въ этомъ случаѣ, связь позволяетъ матеріальной точкѣ двигаться только по шаровой поверхности, описанной радіусомъ OM изъ центра O.

Вообразимъ, что точка M находится на оконечностяхъ двухъ стержней, нерастяжимыхъ, несжимаемыхъ и укрѣпленныхъ въ неподвижныхъ точкахъ O и O'. Въ этомъ случаѣ, очевидно, точка M можетъ перемѣщаться по двумъ шаровымъ поверхностямъ: одной, описанной изъ центра O, радіусомъ OM, другой, описанной изъ O', радіусомъ $O'M$. Слѣдовательно, она можетъ перемѣщаться только по кривой пересѣченія этихъ двухъ шаровыхъ поверхностей, т. е. по окружности, описанной радіусомъ, равнымъ перпендикуляру MA, опущенному на линію OO'. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, точка можетъ имѣть перемѣщенія лишь по линіи.

Если замѣнимъ нерастяжимыя и негибкія твердыя полосы

OM, $O'M$ двумя нерастяжимыми нитями, то точка M, вслѣдствіе этой связи, будетъ находиться внутри шаровъ, или на ихъ поверхностяхъ, описанныхъ радіусами OM и $O'M$.

Такимъ образомъ, существуетъ три рода связей или препятствій для матеріальной точки, именно:

1) Точка можетъ перемѣщаться лишь въ опредѣленной части пространства.

2) Она можетъ быть принуждена перемѣщаться или скользить по поверхности.

3) Наконецъ, она можетъ быть принуждена перемѣщаться по линіи.

Матеріальныя точки, составляющія систему, могутъ быть также подвержены различнымъ связямъ или препятствіямъ. Напр., двѣ точки могутъ быть принуждены оставаться на постоянныхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Это совершенно такая же связь, какъ если бы двѣ точки были соединены нерастяжимой и несжимаемой твердой полосой. Точно также твердое тѣло разсматривается системою, въ которой взаимныя разстоянія между матеріальными точками остаются неизмѣняемыми. Нѣкоторыя точки системы могутъ оставаться на поверхностяхъ, или на данныхъ линіяхъ, или оставаться въ опредѣленной части пространства, или сохранять постоянныя положенія. Система матеріальныхъ точекъ можетъ состоять изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна принуждена вращаться или скользить по другой.

Изъ этихъ примѣровъ ясно, что препятствія или связи, ограничивая свободу тѣла, не позволяютъ ему совершать *всевозможныя* перемѣщенія, но позволяютъ ему совершать лишъ нѣкоторыя,—возможныя для него,—перемѣщенія.

Связи системы могутъ замѣнять собою силы, и, обратно, всегда можно уничтожить связи, замѣняя ихъ соотвѣтствующими силами. Положимъ, имѣемъ систему, находящуюся въ равновѣсіи и подчиненную силамъ и нѣкоторымъ связямъ. Внѣшнія силы, дѣйствующія на эту систему, сами по себѣ могутъ не быть въ равновѣсіи, но въ соединеніи съ связями, онѣ находятся въ равновѣсіи. Предположимъ, что матеріальная точка M скользитъ по постоянной поверхности S подъ дѣйствіемъ силы MP, данной по величинѣ и направленію. Если точка M находится въ равновѣсіи, то изъ этого слѣдуетъ, что поверхность S оказываетъ на точку M дѣйствіе, равное и противоположное силѣ P. Слѣд., сила P равна противодѣйствію поверхности, а потому ее можно считать за силу, замѣняющую связь, представляемою поверхностью.

140. **Неподвижная точка. Давленіе на нее.** Если къ точкѣ приложимъ силу неопредѣленно большую, и если эта сила не въ состояніи привести точку въ движеніе, то эта послѣдняя называется *точкой неподвижной или постоянной.*

Если неизмѣняемая система точекъ, или твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку, то каждая точка системы можетъ быть разсматриваема какъ точка свободно движущаяся по шаровой поверхности, описанной изъ неподвижной точки, какъ изъ центра. Если система матеріальныхъ точекъ имѣетъ двѣ неподвижныя точки, то твердое тѣло можетъ свободно вращаться только вокругъ прямой, соединяющей эти двѣ неподвижныя точки.

Такимъ образомъ, неподвижность точки представляетъ сама по себѣ силу. Неподвижную точку, на которую не дѣйствуютъ никакія силы, можно разсматривать какъ свободную. Но какъ только къ ней будетъ приложена нѣкоторая сила, то неподвижность точки представитъ собою силу, равную и противоположную этой силѣ, или равнодѣйствующей системы приложенныхъ силъ. Такъ-что, въ этомъ случаѣ, точку можно разсматривать, какъ свободную, подчиненную двумъ силамъ, равнымъ и противоположнымъ или, другими словами, неподвижную точку можно разсматривать, какъ свободную, на которую, кромѣ силъ, приложенныхъ къ ней, дѣйствуетъ еще нѣкоторая фиктивная сила, уравновѣшивающаяся съ силами дѣйствующими. Такимъ образомъ, фиктивная сила, замѣняющая неподвижность точки, проходитъ чрезъ эту точку, но направленіе и напряженность ея неизвѣстны. Равнодѣйствующая P силъ, дѣйствующихъ на неподвижную точку, называется *давленіемъ*, производимымъ на эту точку; сила P', равная и противоположная P, называется *сопротивленіемъ* или *противодѣйствіемъ точки.* Если же сопротивленіе неопредѣленно велико, то точка остается неподвижной, какова бы ни была равнодѣйствующая P приложенныхъ силъ, т. е. каково бы ни было давленіе, дѣйствующее на нее. Напротивъ, если сопротивленіе равно величинѣ опредѣленной, то для равновѣсія необходимо, чтобы давленіе не превосходило сопротивленія.

Поэтому, чтобы знать величину сопротивленія, притерпѣваемаго неподвижной точкой, необходимо точно знать давленія, производимыя на неподвижную точку равнодѣйствующей данныхъ силъ.

141. Кромѣ силъ внѣшнихъ и силъ внутреннихъ, существуютъ слѣд. силы, замѣняющія собою связи. Когда имѣемъ систему несвободныхъ матеріальныхъ точекъ, то силы, происходящія отъ связей, могутъ быть внѣшними или внутренними. Напр., если система матеріальныхъ точекъ имѣетъ двѣ точки, соединенныхъ не гибкимъ и нерастяжимымъ стержнемъ, то силы, замѣняющія эту связь, будутъ напряженіями или давленіями стержня, приложенными къ двумъ точкамъ, соединеннымъ этимъ стержнемъ. Силы, замѣняющія въ этомъ случаѣ связь, суть силы *внутреннія*, взаимныя. Напротивъ, когда твердое тѣло имѣетъ двѣ неподвижныя точки, то силы, замѣняющія собою связи, суть противодѣйствія постоянныхъ точекъ и слѣд. онѣ силы внѣшнія.

142. **Нормальное противудѣйствіе и треніе.** Когда матеріальная точка принуждена скользить на постоянной матеріальной поверхности,то сила, могущая замѣнить эту связь, проходитъ чрезъ матеріальную точку; сила эта можетъ разложиться на двѣ составляющихъ: одну, по нормальной къ поверхности, и другую, находящуюся въ плоскости касательной къ поверхности.

Составляющая, направленная по нормальной, называется нормальнымъ противодѣйствіемъ. Составляющая, направленная по касательной, называется *треніемъ*. Опытъ показываетъ, что когда твердое тѣло скользитъ по матеріальной поверхности, то треніе тѣмъ менѣе, чѣмъ глаже соприкасающіяся поверхности. Если, кромѣ того, поверхность, на которой находится точка, поверхность геометрическая, идеальная, то слѣдуетъ допустить, что треніе равно нулю, или что полное противодѣйствіе совпадаетъ съ нормальнымъ противодѣйствіемъ. Геометрическая, направляющая поверхность ограничиваетъ свободу точки, движущейся по ней только въ томъ отношеніи, что точка не въ силахъ удаляться отъ поверхности въ томъ или въ другомъ направленіи, но поверхность представляетъ ей полную свободу для перемѣщенія по самой этой поверхности. Это заставляетъ сказать, что поверхность геометрическая не представляетъ никакого сопротивленія, уменьшающаго скольженіе; другими словами, она не сообщаетъ точкѣ никакого тренія.

Противодѣйствіе поверхности для точки, находящейся на ней, нормально къ поверхности. Слѣдовательно, направленіе противодѣйствія извѣстно, остается опредѣлить величину его и знакъ. Если точка расположена съ одной стороны поверхности, т.-е., если поверхность представляетъ собою только границу части пространства, въ которомъ точка можетъ двигаться, то противодѣйствіе поверхности равно нулю; ибо, въ силу принципа дѣйствія и противодѣйствія, силы, дѣйствующія на матеріальную точку, находящуюся въ равновѣсіи, имѣютъ равнодѣйствующую равную и противоположную противодѣйствію поверхности. Если противодѣйствіе поверхности можетъ быть направлено въ ту сторону, въ которую точка не можетъ проникнуть, то равнодѣйствующая сила будетъ направлена по противоположному направленію, т. е. въ томъ направленіи, гдѣ поверхность не дѣлаетъ препятствія точки.

143. Замѣтимъ еще, что если тѣло находится въ равновѣсіи и подчинено или не подчинено нѣкоторымъ связямъ, то введеніе новыхъ связей, очевидно, не только не нарушитъ равновѣсія, а напротивъ сдѣлаетъ это равновѣсіе еще болѣе прочнымъ, поэтому въ статикѣ часто пользуются слѣдующею теоремою:

Когда матеріальная система находится въ равновѣсіи, то. не нарушая равновѣсія, возможно ввести еще какія угодно связи.

Такъ какъ связи могутъ быть замѣнены силами, то, при розысканіи условій равновѣсія несвободнаго тѣла, по замѣнѣ связей неопредѣленными силами, тѣло предполагаютъ свободнымъ, но подчиненнымъ не только внѣшнимъ силамъ, дѣйствующимъ на него, но и силамъ, полученнымъ отъ замѣны связей. При построеніи же многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника, или при составленіи уравненій, выражающихъ условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла, принимаютъ во вниманіе, какъ данныя силы, такъ и полученныя отъ связей.

144. **Условія равновѣсія системы точекъ, расположенныхъ въ плоскости и имѣющихъ одну неподвижную точку.** Предположимъ, что имѣемъ нѣсколько силъ, расположенныхъ въ плоскости и дѣйствующихъ на тѣло, имѣющее неподвижную точку, находящуюся въ плоскости силъ. Система данныхъ силъ находится въ равновѣсіи, если ихъ равнодѣйствующая проходитъ

чрезъ неподвижную точку, потому что тогда равнодѣйствующая уравновѣсится съ силой ей противоположной и равной противодѣйствію точки. Чтобы провѣрить выполняется ли это условіе, или нѣтъ, достаточно начертить веревочный многоугольникъ для данныхъ силъ, какого угодно полюса, проводя первую сторону этого многоугольника чрезъ неподвижную точку. Послѣдняя его сторона должна будетъ также проходить чрезъ ту-же неподвижную точку, такъ какъ эта точка принадлежитъ равнодѣйствующей. Такимъ образомъ, можемъ высказать слѣдующую теорему.

Теорема. *Чтобы твердое тѣло или неизмѣняемая система точекъ, имѣющая неподвижную точку и находящаяся подъ дѣйствіемъ силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, была въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы какой угодно веревочный многоугольникъ, проходящій чрезъ неподвижную точку, былъ замкнутымъ.*

Если это условіе выполнено, давленіе на точку равно равнодѣйствующей данныхъ силъ, получаемой непосредственно изъ многоугольника силъ.

Чтобы выразить аналитически условія равновѣсія тѣла, имѣющаго неподвижную точку, отнесемъ его къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, начало которыхъ возьмемъ въ неподвижной точкѣ. Проэкціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу на осяхъ координатъ, назовемъ буквами X, Y и Z. Проэкціи силы, замѣняющей собою постоянство неподвижной точки на тѣхъ же осяхъ, назовемъ буквами λ, μ, η. Если неподвижная точка замѣнена силою, то тѣло теперь можно разматривать свободнымъ, а потому, прикладывая къ нему условія равновѣсія, выведенныя въ параграфѣ 138, нужно только не забыть, что моменты силы, замѣняющей неподвижную точку, относительно координатныхъ осей, должны быть равны нулю, такъ какъ эта сила проходитъ черезъ пересѣченіе осей, а потому будемъ имѣть слѣдующія шесть уравненій:

$$X + \lambda = 0 \qquad L = 0$$
$$Y + \mu = 0 \qquad M = 0$$
$$Z + \eta = 0 \qquad N = 0$$

Первыя три уравненія даютъ возможность найдти величины

λ, μ, η, а остальныя три служатъ, слѣдовательно, условіями равновѣсія тѣла, имѣющаго неподвижную точку и, между прочимъ, говорятъ намъ, *что для равновѣсія тѣла, имѣющаго неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, проходила черезъ начало координатъ.*

Тѣло, имѣющее одну неподвижную точку, называется рычагомъ; разсмотримъ же ближе условія равновѣсія рычага.

Пусть имѣемъ рычагъ (чер. 106) AOB, точка O котораго неподвижна; пусть на него дѣйствуютъ, кромѣ собственнаго его вѣса G, приложеннаго въ центрѣ тяжести g, еще силы P и Q расположенныя тоже въ отвѣсной плоскости. Означимъ разстоянія точки O до направленія силъ буквами p, q и x. Моменты данныхъ силъ относительно точки O будутъ: $-Pp$, $+Gx$ и $+Qq$, такъ какъ сила P вращаетъ свое плечо въ сторону противную движенію часовыхъ стрѣлокъ, а силы G и Q по направленію этого движенія.

Для равновѣсія рычага, очевидно, необходимо, чтобы сумма моментовъ относительно какой нибудь точки была равна нулю т. е. необходимо, чтобы существовало такое равенство:

$$-Pp+Qq+Gx=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Если затѣмъ предположимъ, что на рычагъ не дѣйствуютъ никакія силы, кромѣ его собственнаго вѣса, т. е. если предположимъ $P=0$ и $Q=0$, то, слѣд. будемъ имѣть: $Gx=0$; но такъ какъ вѣсъ не можетъ быть равенъ нулю, то это послѣднее равенство можетъ быть удовлетворено лишь при условіи $x=0$. Это значитъ, что для *равновѣсія рычага, на который не дѣйствуютъ никакія другія силы, кромѣ его вѣса, и имѣющаго неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы центръ тяжести и неподвижная или опорная точка находились на одной отвѣсной линіи.* Съ другой стороны, если неподвижная точка и центръ тяжести рычага находятся на отвѣсной линіи, т. е. если $x=0$ и на рычагъ дѣйствуютъ силы P и Q, лежащія въ отвѣсной плоскости, то, какъ показываетъ уравненіе (1), необходимо, чтобы:

$$-Pp+Qq=0 \quad \text{или} \quad P:Q=q:p,$$

такимъ образомъ можемъ сказать, что *для равновѣсія рычага, центръ тяжести котораго находится на одной отвѣсной линіи съ непод-*

вижною точкою и на который дѣйствуютъ двѣ силы, лежащія въ отвѣсной же плоскости, необходимо, чтобы эти силы были обратно пропорціональны разстояніямъ ихъ отъ неподвижной точки.

145. **Условія равновѣсія тѣла, опирающагося одною точкою на неподвижную линію. Давленіе на эту линію.** Разсмотримъ теперь (чер. 107) неизмѣняемую систему точекъ или твердое тѣло, опирающееся на постоянную или неподвижную линію BC точкой A. Еслибы на тѣло не дѣйствовала никакая сила, то оно было бы въ такомъ же положеніи, какъ если-бы неподвижной линіи не существовало. Но если на тѣло дѣйствуютъ силы, равнодѣйствующая которыхъ R, направленная по нормальной къ линіи BC въ точкѣ A, стремится прижать тѣло къ этой линіи, то неподвижная линія, очевидно, замѣняетъ собою нѣкоторую силу P′, равную и противоположную R. Итакъ, тѣло, опирающееся нѣкоторой своей точкой на неподвижную линію, можетъ быть разсматриваемо свободнымъ, если къ силамъ, дѣйствующимъ на него, прибавить фиктивную силу, проходящую черезъ опорную точку и соотвѣтствующую величинѣ нормальной. Тогда условія равновѣсія тѣла будутъ тѣ же, что и условія равновѣсія свободнаго тѣла, побуждаемаго двумя силами R и P′ равными и противоположными. *Слѣдов., чтобы тѣло, опирающееся на данную линію въ данной точкѣ, было въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, во 1-хъ, чтобы равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на тѣло, имѣла тоже направленіе, что и нормальная къ линіи въ точкѣ опоры, что непосредственно провѣряется на многоугольникѣ силъ; во 2-хъ, чтобы оно имѣло направленіе, стремящееся удержать тѣло на постоянной линіи, что также провѣряется на многоугольникѣ силъ, и, въ 3-хъ, необходимо, чтобы равнодѣйствующая проходила-бы черезъ точку опоры тѣла, т. е. чтобы всякій веревочный многоугольникъ, проходящій черезъ эту точку, былъ замкнутымъ многоугольникомъ.*

Сила R представляетъ собою *давленіе*, производимое тѣломъ на линію BC, сила P′ нормальное *сопротивленіе*, или реакцію линіи на тѣло. Чтобы линія, на которую опирается тѣло, представляла собою полное противодѣйствіе, необходимо и достаточно, чтобы P′ было равно или больше давленія R.

Чтобы выразить эти же условія аналитически, возьмемъ начало координатъ въ точкѣ опоры, за ось Z-овъ возьмемъ нормальную къ линіи BC, другія двѣ оси возьмемъ перпендикулярными къ оси Z-овъ. Проэкціи равнодѣйствующей данныхъ силъ на осяхъ координатъ пусть будутъ X, Y и Z. Сила, замѣняющая собою связь, представляемую линіей BC, будучи направлена по нормальной т. е. по оси Z-овъ, даетъ составляющую на этой оси, равную самой себѣ, т. е. это будетъ P'; на другихъ двухъ осяхъ, составляющія ея будутъ нули. Точно также, моменты силы P' будутъ нулями, такъ какъ сила эта проходитъ черезъ начало координатъ. Поэтому аналитическія условія равновѣсія тѣла, опирающагося одною точкою на неподвижную линію, на основаніи пар. 138, будутъ таковы:

$$\begin{array}{lll} X = 0 & (1) & \left.\begin{array}{l} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{array}\right\} (4) \\ Y = 0 & (2) & \\ Z + P' = 0 & (3) & \end{array}$$

Уравненіе (3) служитъ къ опредѣленію сопротивленія P'. Остальныя же пять уравненій служатъ условіями равновѣсія данныхъ силъ.

Уравненія (1) и (2) говорятъ, что равнодѣйствующая данныхъ силъ не имѣетъ составляющихъ на осяхъ X-овъ и Y-овъ, т. е. она направлена по оси Z. Уравненіе (3) говоритъ, что направленіе равнодѣйствующей обратно направленію силы P. Уравненіе (4) говоритъ, что равнодѣйствующая данныхъ силъ проходитъ чрезъ начало координатъ, т. е. чрезъ опорную точку A.

Такимъ образомъ, *для равновѣсія тѣла, опирающагося одною точкой на неподвижную линію, необходимо, чтобы равнодѣйствующая данныхъ силъ проходила чрезъ опорную точку и направленіе ея было таково, чтобы она прижимала тѣло къ неподвижной линіи, а не стремилась отрывать его отъ неподвижной линіи.*

146. **Условія равновѣсія тѣла, опирающагося двумя точками на двухъ плоскихъ неподвижныхъ линіяхъ. Давленія на эти линіи.** Тѣло, покоящееся двумя точками A и B на двухъ неподвижныхъ линіяхъ, можно разсматривать свободнымъ, если только къ силамъ, дѣйствующимъ на него, прибавить двѣ фиктивныхъ силы, направленныхъ по нормальнымъ AN и BN′ къ этимъ линіямъ (чер. 107). И, въ этомъ случаѣ, чтобы тѣло было въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая R силъ, дѣйствующихъ на него,

уравновѣшивалась бы съ силами, направленными по нормальнымъ AN и BN′. А для этого необходимо и достаточно, чтобы эта равнодѣйствующая проходила черезъ точку пересѣченія O этихъ нормальныхъ. И такъ, все сводится къ тому случаю, когда тѣло имѣетъ одну неподвижную точку O, и слѣд. условія равновѣсія будутъ такія же, какія выведены въ пар. 144, т. е. можемъ высказать такую теорему:

Теорема. *Чтобы твердое тѣло, опирающееся на двѣ неподвижныхъ линіи, было въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы: 1) направленіе равнодѣйствующей было обратно направленіямъ нормальныхъ противодѣйствій, и 2) всякій веревочный многоугольникъ для данныхъ силъ и проходящій черезъ пересѣченіе нормальныхъ къ неподвижнымъ линіямъ былъ замкнутымъ.*

Давленія на кривыя равны составляющимъ равнодѣйствующей, направленнымъ по нормальнымъ къ кривымъ. Онѣ получаются непосредственно изъ многоугольника силъ и должны стремиться прижимать тѣло къ неподвижнымъ кривымъ, а не удалять тѣла отъ нихъ.

147. **Условія равновѣсія тѣла, имѣющаго неподвижную точку и опирающагося другой точкой на неподвижную линію. Сопротивленіе опоръ.** Когда тѣло имѣетъ неподвижную точку O (чер. 109) и опирается другой точкой A на неподвижную линію BC, то оно будетъ въ равновѣсіи, каковы бы ни были силы, дѣйствующія на него.

Дѣйствительно, равнодѣйствующую приложенныхъ къ тѣлу силъ всегда можно разложить на двѣ другихъ силы: одну, направленную по нормальной NA къ неподвижной линіи въ точкѣ A, другую, проходящую черезъ точку O. Эта послѣдняя составляющая уничтожится неподвижностью точки O. Составляющая, направленная по нормальной, будетъ уничтожаться сопротивленіемъ неподвижной линіи. Эта составляющая вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ равна давленію на кривую.

Если система данныхъ силъ приводится къ парѣ, то всегда можно разложить каждую изъ двухъ силъ этой пары на двѣ другихъ,— одну по нормальной NA и другую, проходящую черезъ O, затѣмъ можно сложить въ одну двѣ силы, дѣйствующія по NA, и двѣ силы, дѣйствующія по NO.

Итакъ, во всякомъ случаѣ можно замѣнить данныя силы двумя силами: одной, идущей по нормальной, другой, проходящей чрезъ точку O. Эта послѣдняя уничтожается неподвижностью точки O,а первая уничтожается сопротивленіемъ линіи BC, если слагающая по нормальной стремится прижимать тѣло къ этой линіи.

148. **Опредѣленіе графическимъ путемъ величины давленій на опоры, когда силы, дѣйствующія на тѣло, даны по положенію, по направленію и величинѣ на многоугольникѣ силъ.** Чтобы сдѣлать тѣло свободнымъ, прибавимъ къ даннымъ силамъ двѣ силы фиктивныхъ, одну нормальную къ BC въ точкѣ A (чер. 110) она будетъ направленіемъ сопротивленія, представляемаго линіей BC, а другую, проходящую черезъ O. Направленіе первой изъ этихъ силъ извѣстно, также извѣстна точка, принадлежащая 2-й силѣ.

Пусть (чер. 110) 1, 2, 3 направленія силъ, приложенныхъ къ системѣ, эти силы равны длинамъ сторонъ 1, 2, 3, многоугольника силъ (чер. 111). Нормальное сопротивленіе линіи BC означимъ цифрой 4 и черезъ конецъ 3 многоугольника силъ проведемъ параллельно AN линію 3n.

Построимъ теперь веревочный многоугольникъ какого угодно полюса C, начавъ его построеніе отъ подвижной точки O. Такъ какъ тѣло теперь можно разсматривать свободнымъ, то для его равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы веревочный многоугольникъ былъ замкнутымъ, также какъ и многоугольникъ силъ.

Начертивъ соотвѣтственныя стороны веревочнаго многоугольника параллельно лучамъ, найдемъ, что послѣдняя сторона веревочнаго многоугольника 04, назовемъ ее цифрой 5. Эта линія будетъ направленіемъ противодѣйствія, производимаго неподвижной точкой O; а если отъ начала O многоугольника силъ проведемъ параллельную этой линіи до встрѣчи ея въ точкѣ 4 съ линіей 3n., то величина противудѣйствія линіи BC будетъ 34; величина же сопротивленія неподвижной точки O будетъ 04. Итакъ, правило нахожденія давленій на опоры, когда силы даны посредствомъ ихъ направленій дѣйствія и многоугольника силъ, таково: *надо построить многоугольникъ данныхъ силъ и затѣмъ веревочный многоугольникъ какого угодно полюса, начавъ его построеніе отъ неподвижной или опорной точки, продолжить послѣднюю сторону этого многоугольника до встрѣчи ея съ нормальной къ неподвижной линіи, и соединить точку встрѣчи съ данной неподвижной, или опорной точкой, это будетъ замыкающая сторона веревочнаго многоугольника; черезъ начало многоугольника силъ провести линію параллельную замыкающей сторонѣ* *веревоч. многоугольника, а через конец многоугольника сил провести линію параллельную нормальной.* Таким образом получится замкнутый многоугольник сил, и послѣднія его стороны будут представлять собою давленія на постоянную точку и на постоянную кривую.

150. **Условія равновѣсія тѣла, покоящагося тремя точками на неподвижных линіях.** Пусть AN, BN′, CN′ нормальныя к неподвижным линіям (чер. 112). Связь, представляемую одной из линій, напр. C, можно замѣнить силою фиктивною, направленною по CN″. Кромѣ того, система должна будет опираться еще на двѣ линіи A и B, или другими словами, система эта должна имѣть одну неподвижную точку, находящуюся в пересѣченіи O нормальных AN и BN′.

Таким образом тѣло будет имѣть неподвижную точку O и опираться на неподвижную линію. Но условія равновѣсія такого тѣла были уже разсмотрѣны в предыдущем параграфѣ.

151. **Условія равновѣсія тѣла, имѣющаго двѣ неподвижных точки. Неопредѣленность сопротивленія опор.** Разсмотрим тѣло, имѣющее (чер. 113) двѣ неподвижных точки O и O′; какова бы ни была равнодѣйствующая R сил, дѣйствующих на него, тѣло всегда будет находиться в равновѣсіи. Дѣйствительно на равнодѣйствующей можно взять произвольную точку и разложить силу R по двум линіям, проходящим чрез эту точку, напр. по линіям AO и AO′. Очевидно, эти двѣ силы будут уничтожены неподвижностью точек O и O′. Вмѣстѣ с тѣм эти силы будут слѣд. равны давленіям, производимым R на неподвижныя точки. Но так как A взята произвольно, то полученныя давленія будут неопредѣленны. Если части тѣла будут расположены относительно опор симметрично, то давленія на опоры будут равны между собою, и тогда онѣ дѣлаются вполнѣ опредѣленными.

Выведем тѣ же условія равновѣсія аналитически. Пусть данное тѣло имѣет двѣ неподвижныя точки O и O′. Замѣним неподвижность каждой из этих точек нѣкоторою силою, нам неизвѣстною. Пусть эти силы R_1 и R_2. Замѣнив таким образом связи, сдѣлаем тѣло свободным. Отнесем тѣло к прямоугольным осям координат, взяв начало в одной из неподвижных точек, напр. в O, а ось X—овъ проходящею чрезъ вторую точку O'. Пусть проэкціи силъ R_1 и R_2, на осяхъ координатъ суть X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2. Суммы проэкцій силъ, приложенныхъ къ тѣлу на осяхъ координатъ, пусть будутъ X, Y и Z (чер. 114).

Такъ какъ сила R_1 проходитъ чрезъ начало координатъ, то моменты ея проэкцій на осяхъ координатъ относительно начала O равны нулямъ: координаты точки O' суть X_2 нуль и нуль, поэтому моменты проэкцій силы R_2 будутъ: $+Y_2 x_2$ и $-Z_2 x_2$.

Вслѣдствіе всего этого, шесть уравненій, относящихся къ силамъ и моментамъ и выражающихъ условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла, въ этомъ случаѣ, будутъ таковы:

$$X + X_1 + X_2 = 0$$
$$Y + Y_1 + Y_2 = 0$$
$$Z + Z_1 + Z_2 = 0$$
$$M - Z_2 x_2 = 0$$
$$N + Y_2 x_2 = 0$$
$$L = 0$$

Первыя пять уравненій, какъ заключающія въ себѣ неизвѣстныя величины X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, послужатъ къ опредѣленію этихъ величинъ, а слѣд. къ опредѣленію вдличинъ неизвѣстныхъ сопротивленій R_1 и R_2. Послѣднее уравненіе, не заключающее въ себѣ неизвѣстныхъ величинъ, есть уравненіе условное, выражающее условія равновѣсія данныхъ силъ и говорящее, что *для равновѣсія тѣла, имѣющаго двѣ неподвижныя точки или неподвижную ось, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментовъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, относительно неподвижной оси была равна нулю.*

Обратимся къ первымъ пяти уравненіямъ для опредѣленія неизвѣстныхъ величинъ, найдемъ:

$$Y_2 = -\frac{N}{x_2}$$

$$Z_2 = \frac{M}{x_2}$$

$$Y_1 = -Y_2 - Y = \frac{N}{x_2} - Y$$

$$Z_1 = -Z_2 - Z = -\frac{M}{x_2} - Z$$

$$X_1 + X_2 = -X$$

Изъ этого видимъ, что Y_2, Z_2, Y_1, Z_1 имѣютъ вполнѣ опредѣленныя величины; остаются неопредѣленными лишь X_1 и X_2, а потому силы R_2 и R_1 тоже будутъ неопредѣленными. Это совершенно понятно: изъ пяти уравненій шесть величинъ опредѣлить нельзя.

152. **Условія равновѣсія тѣла, опирающагося четырьмя точками на четырехъ неподвижныхъ линіяхъ. Неопредѣленность величины сопротивленія.**

Если тѣло (чер. 115) опирается на четыре линіи A и B, C и D, то это все равно, что тѣло имѣетъ двѣ неподвижныя точки: одну въ пересѣченіи напр. нормальныхъ AO и BO къ линіямъ A и B, другую въ пересѣченіи нормальныхъ CO и DO къ линіямъ C и D. И такъ, когда тѣло опирается четырьмя точками на четырехъ линіяхъ, то вопросъ сводится къ условіямъ равновѣсія тѣла, имѣющаго двѣ неподвижныхъ точки O и O′.

Взявъ точку E на равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ тѣлу, разложимъ эту равнодѣйствующую по направленіямъ EO и EO′, затѣмъ разложимъ силу EO на двѣ силы, дѣйствующихъ по AO и BO, а силу EO′ на двѣ силы, дѣйствующихъ по O′C и O′D; такимъ образомъ будемъ имѣть четыре давленія на соотвѣтствующія кривыя; и такъ какъ точка E взята произвольно, то давленія будутъ неопредѣленными.

Величина давленій будетъ также величиной неопредѣленной, если опорныхъ линій въ тѣлѣ будетъ больше четырехъ.

Неопредѣленность будетъ существовать также въ случаѣ трехъ опоръ, если нормальныя къ этимъ опорамъ сходятся въ одну точку, потому что тогда равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на тѣло, должна будетъ проходить чрезъ эту же точку, и ее можно разложить всевозможными способами по тремъ направленіямъ, проходящимъ чрезъ точку пересѣченія нормальныхъ.

153. Когда тѣло опирается на линіяхъ, или на неподвижныхъ поверхностяхъ, то, каково-бы ни было число опоръ, оно находится въ состояніи совершенно опредѣленномъ.

При этомъ давленія на опоры вполнѣ опредѣленны въ томъ смыслѣ, что онѣ должны всегда оставаться такими же при одинаковыхъ обстоятельствахъ. Между этими обстоятельствами есть неизвѣстныя, зависящія отъ формы тѣлъ и отъ перемѣнъ, происходящихъ въ этихъ формахъ, влѣдствіе упругости матеріи. Статика же предполагаетъ тѣла твердыми, неизмѣняемыми, поэтому въ статикѣ могутъ быть разсматриваемы только силы, независимыя отъ формы тѣлъ, и для того, чтобы задача опредѣленія неизвѣстныхъ силъ могла быть разрѣшена одной статикой, необходимо, чтобы эти силы оставались тѣми же самыми, каковы бы ни были измѣненія формы тѣла, которымъ оно можетъ подвергнуться вслѣдствіе упругости его. Чтобы уничтожить неопредѣленности, надо къ условіямъ равновѣсія, выведеннымъ въ статикѣ, прибавить условія, доставляемыя математической теоріей упругости и математической физикой и указывающія на отношенія между силами, зависящими отъ измѣненія въ формѣ тѣла.

153. **Напряженіе нити. Напряженіе или давленіе полосы.** Пусть дана (чер. 116) нить ab, поддерживаемая на двухъ ея концахъ двумя силами f и f', направленными по ab, равными и противоположными. Очевидно, подъ дѣйствіемъ этихъ силъ нить находится въ равновѣсіи.

Каждая изъ ея частей, напр. ma, также находится въ равновѣсіи. Въ самомъ дѣлѣ, эта часть находится подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: во 1-хъ, подъ дѣйствіемъ силы f, дѣйствующей въ a, во 2-хъ, подъ дѣйствіемъ, производимымъ частью mb на часть ma. Это послѣднее дѣйствіе называется напряженіемъ, производимымъ первой частью нити на вторую. Напряженіе нити непремѣнно равно и противоположно f, потому что она поддерживаетъ ma въ равновѣсіи. Означимъ его буквой f''.

Обратно, часть ma производитъ на mb напряженіе f''', равное и противоположное f'', потому что mb находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ f' и f'''. Точка m взята произвольно, поэтому можемъ сказать, что въ каждой точкѣ нити, натянутой двумя силами равными и противоположными, дѣйствующими на ея концы, можно разсматривать два напряженія: одно производимое частью нити помѣщенной слѣва m на часть, помѣщенную справа, и другое напряженіе обратное первому. Эти двѣ силы равны и противоположны, онѣ однѣ и тѣ же на всемъ протяженіи нити и равны по абсолютной величинѣ силамъ, дѣйствующимъ въ двухъ ея концахъ.

Къ тѣмъ же выводамъ придемъ, если вмѣсто нити возьмемъ твердую полосу. Въ этомъ случаѣ также можно разсматривать обѣ силы f и f′ равныя и противоположныя, или сжимающими полосу, или растягивающими ее. Сдѣлавъ сѣченіе въ m, найдемъ, что часть mb производитъ на ma дѣйствіе f равное и противоположное f′, и стремящееся растянуть или сжать эту часть полосы; также часть ma произведетъ на mb растяженіе или сжатіе равное и противоположное f, или f″. Эти дѣйствія называются не только напряженіями, но и давленіями. *Слѣдовательно, давленія и напряженія одинаковы по абсолютной величинѣ на всемъ протяженіи полосы, находящейся въ равновѣсіи.*

154. **Условія равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ лежащихъ въ плоскости и соединенныхъ между собою негибкими полосами или стержнями.**

Пусть будетъ дана плоская фигура, стороны которой предположимъ твердыми полосами.

Пусть въ плоскости фигуры къ вершинамъ ея приложена система силъ, подъ дѣйствіемъ которыхъ данная фигура остается въ равновѣсіи. Въ числѣ силъ, дѣйствующихъ въ вершинахъ фигуры, находятся тяжести полосъ; каждую изъ этихъ послѣднихъ можно разложить на двѣ составляющихъ, приложенныхъ къ двумъ концамъ полосы. Такъ какъ данная фигура находится въ равновѣсіи, то каждая изъ полосъ ее составляющихъ также находится въ равновѣсіи, (чер. 117]. Отнимемъ полосы A, A_1 A_2 прилежащія къ вершинѣ C, за исключеніемъ одной изъ нихъ CE. Равновѣсіе не будетъ нарушено, если только въ точкѣ C приложимъ фиктивныя силы, равныя напряженіямъ или давленіямъ, производимымъ каждой изъ этихъ полосъ на точку C. Точно также можно устранить полосы D_1, $D_2 \ldots$, и каждую изъ нихъ замѣнить фактивной силой, представляющей ея напряженіе или давленіе. Сложивъ между собою всѣ напряженія, приложенныя къ C, также какъ и внѣшнія силы, дѣйствующія на эту точку, получимъ нѣкоторую силу f. Равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ въ E, будетъ нѣкоторая сила f′.

Мы не знаемъ величины силъ f и f′; но такъ какъ полоса EC остается въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ двухъ силъ, то слѣд. онѣ равны между собою, направлены обѣ по линіи EC' и противоположныхъ знаковъ. Величина каждой изъ нихъ представляетъ напряженіе полосы EC', и ихъ знаки укажутъ, сжата или растянута эта полоса.

И такъ, *для равновѣсія фигуры, составленной негибкими полосами и лежащей въ плоскости, необходимо и достаточно, чтобы силы, дѣйствующія на фигуру, и напряженія ея полосъ были таковы, чтобы сходились къ двумъ равнодѣйствующимъ, равнымъ и противоположнымъ и направленнымъ по одной изъ сторонъ фигуры.*

Обыкновенно говорятъ про всѣ полосы, что онѣ напряжены, но разъ задача рѣшена, то становится извѣстнымъ, какія именно полосы вытянуты и какія сжаты.

155. **Условія равновѣсія свободнаго шарнирнаго многоугольника.** Возьмемъ замкнутый многоугольникъ, составленный изъ полосъ, соединенныхъ между собою въ вершинахъ шарнирами. Въ каждой изъ этихъ вершинъ пусть будетъ приложена сила. Требуется опредѣлить, во 1-хъ, условія равновѣсія многоугольника подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ; во 2-хъ, напряженія сторонъ многоугольника, когда равновѣсіе существуетъ.

Очевидно, если многоугольникъ состоитъ изъ трехъ сторонъ то онъ образуетъ неизмѣняемую систему, и, слѣдовательно, необходимыя и достаточныя условія для его равновѣсія будутъ заключаться въ томъ, что многоугольникъ силъ, дѣйствующихъ на него, и какой угодно веревочный многоугольликъ тѣхъ же силъ должны быть замкнутыми. Когда замкнутый шарнирный многоугольникъ содержитъ болѣе трехъ сторонъ, то разстоянія между вершинами могутъ сдѣлаться измѣняемыми, и слѣдов. высказанныя выше условія равновѣсія, говоря вообще, перестаютъ быть достаточными. Чтобы открыть въ этомъ случаѣ всѣ условія необходимыя и достаточныя, замѣтимъ, что если многоугольникъ находится въ равновѣсіи, то каждая изъ его вершинъ въ отдѣльности также находится въ равновѣсіи, подъ дѣйствіемъ силъ къ ней приложенныхъ и напряженій полосъ, прилегающихъ къ этой вершинѣ. И обратно, если подъ дѣйствіемъ силъ внѣшнихъ и напряженій полосъ, сходящихся въ вершинѣ, каждая вершина его находится въ равновѣсіи, то и весь многоугольникъ также будетъ находиться въ равновѣсіи. И такъ, вся задача оостоитъ въ отысканіи условій, при которыхъ каждая вершина отдѣльно находится въ равновѣсіи.

Пусть (чер. 25) данъ замкмутый многоугольникъ $\alpha A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \alpha$, на вершины котораго дѣйствуютъ силы R, P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5, равныя сторонамъ многоугольника силъ (фиг. 26).

Чтобы 1-ая вершина даннаго многоугольника была въ равновѣсіи на основаніи предыдущаго параграфа, необходимо чтобы равнодѣйствуюшая напряженій двухъ сторонъ A_1A_2 и $A_1\alpha$ была бы силой равной и противоположной силѣ, приложенной по направленію линіи дѣйствія A_1P_1, поэтому линіи CO и C1, проведенныя черезъ концы линіи O1 многоугольника силъ, параллельно сторонамъ A_1A_2 и $A_1\alpha$ даннаго замкнутаго многоугольника дадутъ величины напряженій сторонъ A_1A_2 и $\alpha_1\alpha$ этого многоугольника. Первая будетъ направлена отъ C къ O, вторая отъ C къ 1. Слѣдовательно эти силы противоположныхъ направленій и вмѣстѣ съ тѣмъ равны составляющимъ силы P, направленнымъ по сторонамъ $\alpha_1 A$ и A_1A_2. Давленія, производимыя силою P_1 на эти стороны, равны этимъ составляющимъ.

Перейдемъ теперь къ вершинѣ A_2. Она будетъ въ равновѣсіи, если равнодѣйствующія напряженій сторонъ A_1A_2 и A_2A_3 будетъ равна и противоположна силѣ, направленной по линіи A_2P_2 и равна сторонѣ 12 многоугольника силъ. Составляющія этой силы выражаются линіями C1 и C2 и идутъ 1-я отъ C къ 1, а 2-я отъ 2 къ C. Напряженіе стороны A_1A_2 извѣстно, оно равно и параллельно лучу C1; направленіе силы P_2 параллельно силѣ 12. Поэтому направленіе стороны A_2A_3 должно опредѣляться длиною линіи C2 и должно быть направлено отъ 2 къ C, а для этого необходимо, чтобы сторона A_2A_3 была параллельна линіи C2. Точно также найдемъ, что всѣ слѣдующія стороны даннаго многоугольника должны быть параллельны лучамъ, проходящимъ чрезъ полюсъ C, т. е. что данный многоугольникъ долженъ быть однимъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ силъ, дѣйствующихъ на его вершины. Всѣ вершины 1, 2, 3, 4, 5 даннаго многоугольника находятся въ равновѣсіи, а лучи, выходящіе изъ полюса C, измѣряютъ напряженія послѣдовательныхъ сторонъ даннаго многоугольника. Такимъ образомъ дойдемъ до по слѣдн҃й вершины α, и также какъ напряженія двухъ сторонъ $A_1\alpha$ и $A_5\alpha$, чрезъ нее проходящихъ, извѣстны, а величина ихъ изображается въ многоугольникѣ силъ лучами C0 и C5, то поэтому сила R, дѣйствующая въ вершинѣ α, должна быть равна силѣ, замыкающей многоугольникъ пяти другихъ данныхъ силъ.

И такъ, *чтобы система силъ могла удержать въ равновѣсіи замкнутый многоугольникъ, о числѣ сторонъ, болѣе трехъ, составленный изъ полосъ, соединенныхъ шарнирами, необходимо и достаточно, во 1-хъ, чтобы многоугольникъ этихъ силъ былъ замкнутъ, во 2-хъ, чтобы данный замкнутый шарнирный многоугольникъ былъ бы однимъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ силъ, дѣйствующихъ въ его вершинахъ. Если эти условія выполнены, то лучи, выходящіе изъ полюса этого веревочнаго многоугольника, представляютъ напряженія его различныхъ сторонъ.* Другими словами, *напряженія полосъ фигуры, находящейся въ равновѣсіи, опредѣляются линіями взаимной фигуры.*

156. **Условія равновѣсія висячаго шарнирнаго многоугольника.** Разсмотримъ теперь (чер. 24) многоугольникъ незамкнутый

$$\alpha_1 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \alpha_5$$

и висящій двумя своими концами въ двухъ неподвижныхъ точкахъ a_1 и a_5. Приложимъ къ его вершинамъ какія угодно силы P, P_2, P_3, P_4, P_5, и во 1-хъ, опредѣлимъ условія, при которыхъ эти силы удерживаютъ данный незамкнутый многоугольникъ въ равновѣсіи; во 2-хъ, опредѣлимъ напряженія всѣхъ его сторонъ, и, въ 3-хъ, опредѣлимъ давленія, производимыя на неподвижныя точки a_1 и a_5.

Данный многоугольникъ можно сдѣлать свободнымъ, если приложить двѣ силы: одну, направленную по сторонѣ $\alpha_2 A_1$ равную напряженію, происходящему отъ неподвижной точки α_1 и другую, направленную по сторонѣ $a_5 A_5$, равную напряженію, происходящему отъ неподвижной точки α_5. Эти новыя силы, дѣйствующія по сторонамъ $\alpha_1 A_1$ и $\alpha_5 A_5$, могутъ быть разсматриваемы приложенными къ точкѣ пересѣченія этихъ сторонъ, равнодѣйствующая ихъ выразится силою R. Такимъ образомъ задача сведется къ нахожденію условій равновѣсія свободнаго замкнутаго многоугольника $\alpha_1 A_1 A_2 A_3$

$A_4 A_5 \alpha_5$, подверженнаго дѣйствію силъ R, P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5, изъ которыхъ первая неизвѣстна. Но изъ предыдущаго параграфа знаемъ, что замкнутый многоугольникъ, на вершины котораго дѣйствуютъ эти силы, долженъ быть однимъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ, и, слѣдовательно, какая угодно часть этого замкнутаго многоугольника должна принадлежать этому веревочному многоугольнику силъ, приложенныхъ къ его вершинамъ. И такъ, часть α_1 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 α_5 будетъ веревочнымъ многоугольникомъ пяти данныхъ силъ; лучи, выходящіе изъ полюса этого веревочнаго многоугольника и проходящіе чрезъ вершины многоугольника данныхъ силъ, на основаніи предыдущаго параграфа, будутъ равны напряженіямъ различныхъ сторонъ даннаго веревочнаго многоугольника; крайніе лучи CO и C5 будутъ выражать напряженія крайнихъ сторонъ α_1 A_1 и α_5 A_5 или давленія, производимыя на постоянныя точки α_1 и α_5. Итакъ, *всякій шарнирный многоугольникъ будетъ въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ какихъ угодно силъ, если этотъ многоугольникъ, закрѣпленный двумя своими концами въ неподвижныхъ точкахъ, представляетъ собою одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ силъ, дѣйствующихъ на его вершины*. Напряженія полосъ даннаго многоугольника, находящагося въ равновѣсіи, опредѣляются величинами лучей многоугольника силъ, т. е. *опредѣляются линіями фигуры, взаимной фигурѣ данной*.

Никакой другой многоугольникъ не владѣетъ указаннымъ выше свойствомъ, поэтому это свойство веревочныхъ многоугольниковъ и послужило поводомъ къ названію ихъ *шарнирными или веревочными*.

157. Стороны шарнирныхъ многоугольниковъ могутъ быть составленными не только изъ твердыхъ полосъ, но также изъ гибкихъ и нерастяжимыхъ нитей. Для того, чтобы можно было замѣнить нити полосами, необходимо, чтобы всѣ стороны многоугольника были вытянуты, и чтобы ни одна изъ нихъ не была сжата.

Чѣмъ больше число силъ, тѣмъ больше число сторонъ веревочнаго многоугольника; когда разстоянія между силами неопредѣленно уменьшаются, то стороны веревочнаго многоугольника дѣлаются все меньше и меньше, и въ предѣлѣ многоульникъ преобразуется въ кривую, которую называютъ, смотря по обстоятелььтвамъ, *цѣпною линіей* или *кривою давленія*.

Общая теорія взаимныхъ діаграммъ.

158. Изъ вышеизложеннаго мы видимъ, что напряженія частей многоугольника, находящагося въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, могутъ быть найдены графически, при помощи взаимныхъ фигуръ или взаимныхъ діаграммъ. Это обязываетъ насъ войти въ разсмотрѣніе механическихъ свойствъ взаимныхъ фигуръ. Но прежде всего вспомнимъ, что для равновѣсія силъ, расположенныхъ какъ угодно въ плоскости, необходимо, чтобы не только былъ замкнутымъ многоугольникъ силъ, но также и веревочный многоугольникъ; если-бы веревочный многоугольникъ не былъ замкнутъ, то силы привелись бы къ парѣ. *Но если данныя силы, лежащія въ плоскости, проходятъ чрезъ одну точку, то для равновѣсія ихъ достаточно, чтобы только одинъ многоуг. силъ былъ замкнутъ*, такъ какъ въ этомъ случаѣ силы никоимъ образомъ не могутъ преобразоваться въ пару, потому что равнодѣйствующая всѣхъ силъ, безъ одной какой нибудь, будетъ равна и противоположна этой одной въ случаѣ равновѣсія силъ.

Пусть будетъ данъ шарнирный многоугольникъ. Предположимъ, что онъ находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ его вершинамъ. На двухъ концахъ каждой изъ линій, или полосъ его составляющихъ, и по направленію осей этихъ полосъ будутъ дѣйствовать, кромѣ того, напряженія этихъ полосъ, какъ силы равныя и противоположныя. Эти попарно равныя и противоположныя силы, какова бы ни была величина каждой изъ нихъ, вмѣстѣ съ силами внѣшними, дѣйствующими на многоугольникъ, образуютъ систему силъ, находящихся въ равновѣсіи.

Постараемся опредѣлить величины этихъ силъ. Чтобы каждая вершина фигуры находилась въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ всѣхъ силъ, проходящихъ чрезъ эту вершину, необходимо и достаточно, чтобы силы, проходящія чрезъ каждую вершину, составляли бы собою замкнутый многоугольникъ.

Итакъ, если возможно отыскать величину напряженій полосъ данной фигуры, то всегда возможно построить новую фигуру, составленную изъ такого числа замкнутыхъ многоугольниковъ, сколько вершинъ или узловъ въ данной фигурѣ. Стороны этихъ многоугольниковъ должны быть параллельны линіямъ данной фигуры, взятой вмѣстѣ съ направленіями силъ, дѣйствующихъ на вершины этой фигуры. Каждый изъ замкнутыхъ многоугольниковъ новой фигуры будетъ о такомъ числѣ сторонъ, сколько сходящихся силъ въ соотвѣтствующемъ узлѣ. Нѣкоторыя стороны этихъ замкнутыхъ многоугольниковъ будутъ принадлежать двумъ многоугольникамъ. Такимъ образомъ вновь построенная фигура будетъ фигурой взаимной фигурѣ, составленной изъ сторонъ даннаго шарнирнаго многоугольника и силъ дѣйствующихъ, проходящихъ черезъ его вершины.

Итакъ, *когда возможно опредѣлить величину напряженій полосъ данной фигуры, то всегда возможно построить фигуру взаимную данной.*

И *обратно, когда данная фигура допускаетъ діаграмму взаимную, то всегда возможно найти напряженія линій, или полосъ данной фигуры, находящейся въ равновѣсіи.*

Дѣйствительно, предположивъ напряженія линій, или полосъ данной фигуры пропорціональными соотвѣтствующимъ сторонамъ взаимной діаграммы, найдемъ, что силы проходящія чрезъ каждую вершину данной фигуры, будутъ составлять замкнутый многоугольникъ, т. е. эти силы будутъ въ равновѣсіи.

159. Изслѣдуемъ же, въ какихъ случаяхъ и какія фигуры допускаютъ существованіе діаграммъ взаимныхъ. Но для этого необходимо войти въ чисто геометрическія разсмотрѣнія.

Замѣтимъ, что мы будемъ разсматривать фигуры, состоящія изъ нѣкотораго числа многоугольниковъ такихъ, чтобы, во 1-хъ каждая сторона принадлежала бы двумъ изъ этихъ многоугольниковъ и только двумъ; во 2-хъ, чтобы изъ каждой вершины многоугольника выходило бы покрайней мѣрѣ три линіи, или чтобы каждый узелъ составлялся по меньшей мѣрѣ изъ трехъ сторонъ и въ 3-хъ, чтобы каждая сторона проходила по крайней мѣрѣ черезъ двѣ вершины.

Затѣмъ, во всемъ остальномъ форма фигуры можетъ быть совершенно произвольная.

Эти фигуры будемъ называть фигурами, обладающими свойствами взаимности.

Теорема. *Въ каждой фигурѣ, обладающей свойствами взаимности, сумма числа узловъ и числа замкнутыхъ многоугольниковъ больше числа сторонъ на величину постоянную и равную числу 2.*

Пусть m число сторонъ фигуры; n число узловъ, или, что то же самое, число вершинъ; p число замкнутыхъ многоугольниковъ. Докажемъ сначала, что, какова бы ни была фигура, всегда $p+n-m$ равна величинѣ постоянной, независимой отъ числа вершинъ, сторонъ и замкнутыхъ многоугольниковъ фигуры.

Дѣйствительно, возьмемъ какую угодно фигуру: начертимъ въ ней новую линію, такъ чтобы число m сторонъ увеличилось на единицу.

Если линія вновь начертанная будетъ соединять вершину данной фигуры съ нѣкоторою новою точкою, не соединенною ни съ одною вершиною данной фигуры, то число замкнутыхъ многоугольниковъ въ данной фигурѣ послѣ прибавленія одной линіи останется прежнее, но число вершинъ увеличится на единицу.

Если новая линія соединитъ двѣ вершины, уже принадлежащія данной фигурѣ, то эта линія или замкнетъ еще незамкнутый многоугольникъ, или раздѣлитъ замкнутый многоугольникъ на два. Въ обоихъ этихъ случаяхъ вновь введенная въ фигуру линія увеличитъ на единицу число p замкнутыхъ многоугольниковъ, тогда какъ число n вершинъ не измѣняется. Итакъ, если m, или число сторонъ, увеличивается на единицу, то сумма $p+n$, или сумма узловъ и отдѣльныхъ многоугольниковъ, тоже увеличивается лишь на одну единицу, а потому можно сказать: величина $p+n-m$ не измѣняется отъ добавленія одной или нѣсколькихъ новыхъ линій.

По той же причинѣ величина эта не можетъ измѣниться и отъ сокращенія линій, если это сокращеніе не нарушаетъ условій взаимности или двойственности.

Но прибавленіемъ или сокращеніемъ соотвѣтствующаго числа линій всегда можно перейти отъ одной фигуры, имѣющей n вершинъ, p замкнутыхъ многоугольниковъ и m сторонъ, къ другой фигурѣ, для которой эти числа перейдутъ въ нѣкоторыя другія, напр. въ такія: n_1 p_1 m_1; и для этой новой фигуры отношеніе $p_1+n_1-m_1$ будетъ, очевидно, равно величинѣ $p+n-m$, т. е. можно написать:

$$p+n-m=p_1+n_1-m_1=\text{const}.$$

Чтобы найти величину этой постоянной, достаточно вычислить ее для какихъ нибудь двухъ взаимныхъ между собою фигуръ.

Наиболѣе простыя фигуры, удовлетворяющія условіямъ взаимности, изображены на чер. 26 и 27 и составленны шестью линіями, соединяющими четыре точки, лежащія въ плоскости. И такъ какъ для этихъ фигуръ имѣемъ:

$$n = 4,\ m = 6,\ p = 4,\ \text{то}$$

$$p + n - m = 2.$$

Такимъ образомъ теорема доказана сполна.

160. **Раздѣленіе фигуръ на фигуры неправильныя, строго правильныя и фигуры съ излишними линіями.** Неправильными фигурами называются такія, у которыхъ стороны остаются постоянными, неизмѣняемыми, а углы могутъ измѣняться до безконечности; правильными фигурами будемъ называть такія, у которыхъ углы имѣютъ вполнѣ опредѣленную величину, разъ длина сторонъ дана. И для построенія такой фигуры достаточно знать слѣд. только длину сторонъ ея. Фигуры правильныя дѣлятся на два разряда: однѣ изъ нихъ перестаютъ быть правильными, когда число ихъ сторонъ уменьшается на одну сторону; такія фигуры будемъ называть *строго правильными*, или просто *правильными*; другія изъ нихъ остаются правильными и послѣ того, какъ число сторонъ ихъ уменьшено на одну, или нѣсколько сторонъ. Эти послѣднія фигуры будемъ называть фигурами *правильными съ излишними линіями*.

Теорема. *Если m обозначаетъ число сторонъ, n число вершинъ фигуры, то всегда будетъ существовать отношеніе*

$$m = 2n - 3 + k,\ \text{причемъ:}$$

для неправильныхъ фигуръ . . . . . . $k < 0$
для фигуръ строго правильныхъ . . . . $k = 0$
для фигуръ съ излишними линіями . . $k > 0.$

Фигура строго правильная содержитъ столько сторонъ, что по данной длинѣ ихъ возможно построить самую фигуру. Чтобы начертить ее, отложимъ на какой угодно линіи длину равную одной изъ данныхъ сторонъ, напр. AB. Концы этой длины будутъ двумя вершинами фигуры, всѣ другія вершины будутъ непремѣнно опредѣлены пересѣченіемъ каждыхъ двухъ другихъ сторонъ и только двухъ. Итакъ, каждой изъ $n-2$ другихъ вершинъ будутъ соотвѣтствовать по двѣ стороны, такъ что число остальныхъ сторонъ фигуры, за исключеніемъ первой стороны AB, будетъ равно двойному числу всѣхъ остальныхъ вершинъ, за исключеніемъ двухъ первыхъ вершинъ, т. е. число это будетъ таково:

$$2(n-2).$$

А полное число m сторонъ, включая и первую сторону, будетъ:

$$m = 2(n-2) + 1 = 2n - 3.$$

Итакъ, для фигуръ строго правильныхъ, предложенная теорема доказана.

Пусть дана фигура строго правильная; начертимъ въ ней k новыхъ сторонъ. Ясно, что эти k линій будутъ излишними, и ихъ длины могутъ быть выражены посредствомъ m первыхъ сторонъ фигуры, потому что этихъ m сторонъ достаточно для построенія фигуры.

Итакъ, число сторонъ фигуры, имѣющей k лишнихъ линій, выражается формулой:

$$m = 2n - 3 + k.$$

И между сторонами фигуры съ k излишнихъ линій существуетъ вообще k геометрическихъ отношеній.

Если въ фигурѣ строго правильной, и для которой слѣд. существуетъ отношеніе $m = 2n - 3$, отнимемъ k линій, тогда задача построенія остальной фигуры по извѣстнымъ $m-k$ ея сторонамъ будетъ неопредѣлена, т. е. будетъ существовать множество фигуръ, имѣющихъ своими сторонами данныя стороны и различные углы; другими словами, новая фигура будетъ неправильна и, чтобы ее сдѣлать правильною, нужно подчинить k новымъ условіямъ напр. начертить въ ней k новыхъ сторонъ, образующихъ новыя связи между ея разными вершинами; т. е. для фигуры неправильной число сторонъ будетъ таково:

$$m = 2n - 3 - k.$$

Всѣ эти разсужденія можно выразить такъ: если m число сторонъ, n число узловъ фигуры и k какое угодно цѣлое число, положительное или отрицательное, то всегда существуетъ отношеніе:

$$m = 2n - 3 + k,$$

гдѣ k равно нулю, когда фигура строго правильная, гдѣ k положительное, когда фигура правильная, но содержитъ k лишнихъ линій т. е. когда между длинами ея сторонъ существуетъ k геометрическихъ отношеній, и наконецъ k отрицательное, когда фигура неправильная, и, для того, чтобы она сдѣлалась строго правильною, нужно подчинить длины ея сторонъ k условіямъ.

161. Постараемся опредѣлить теперь общіе признаки, по которымъ можно было бы узнать допускаетъ ли данная фигура одну взаимную діаграмму, или допускаетъ ихъ безконечное множество, или же совсѣмъ не допускаетъ взаимныхъ діаграммъ.

Для того, чтобы фигура была взаимной данной, нужно во 1-хъ, чтобы она содержала такое же число сторонъ, какъ и данная фигура, въ 2-хъ, чтобы каждому изъ узловъ данной фигуры соотвѣтствовалъ бы, во взаимной діаграммѣ, замкнутый многоугольникъ и въ 3-хъ, чтобы каждому изъ замкнутыхъ многоугольниковъ данной фигуры соотвѣтствовалъ бы узелъ въ діаграммѣ взаимной. Послѣднее условіе, какъ обратное 2-му, можетъ быть разсматриваемо слѣдствіемъ двухъ первыхъ.

Такимъ образомъ, чтобы фигура, состоящая изъ n многоугольниковъ, допускала взаимную діаграмму, она должна удовлетворять $2n$ условіямъ. И слѣдовательно, чтобы построить взаимную діаграмму данной фигуры достаточно опредѣлить m сторонъ взаимной діаграммы изъ условія, что стороны отвѣчаютъ $2n$ условіямъ. Но легко показать, что эти $2n$ условій приводятся къ $2n-3$ условіямъ.

Дѣйствительно, отстранимъ на минуту двѣ вершины данной фигуры, соединенныя какой нибудь линіей AB. Построимъ сначала $n-2$ многоугольниковъ взаимной діаграммы, отвѣчающихъ $n-2$ остальнымъ вершинамъ данной фигуры, тогда линія ab взаимной діаграммы, соотвѣтствующая линіи AB данной фигуры, вполнѣ опредѣлится начерченными $n-2$ многоугольниками. И для того, чтобы діаграмма дѣйствительно была взаимной данной фигурѣ, необходимо, чтобы линія ab была параллельна линіи AB данной фигуры т. е. необходимо, чтобы выполнено было одно условіе. Кромѣ того, для построенія $n-2$ многоугольниковъ взаимной діаграммы необходимо должны выполняться $2(n-2)$ условія. Итакъ, полное число условій, для того чтобы данная діаграмма допускала взаимную фигуру, равно:

$$2(n-2)+1=2n-3.$$

Эти условія, выраженныя аналитически, дадутъ $2n-3$ уравненія, заключающихъ m неизвѣстныхъ длинъ сторонъ искомой взаимной діаграммы. А такъ какъ, абсолютную длину сторонъ взаимной діаграммы обыкновенно не опредѣляютъ, а только опредѣляютъ отношенія всѣхъ сторонъ къ одной изъ нихъ, то, слѣдовательно, будемъ имѣть $2n-3$ уравненій, заключающихъ въ себѣ $m-1$ неизвѣстныхъ.

Если число этихъ неизвѣстныхъ равно числу уравненій или условій, то, очевидно, задача опредѣленія всѣхъ длинъ взаимной діаграммы возможна и вполнѣ опредѣленна, т. е. она будетъ возможна, когда существуетъ такое равенство:

$$m-1=2n-3, \text{ или } m=2n-3+1.$$

Послѣднее отношеніе, на основаніи параграфа 160, означаетъ, что фигура правильная, но содержитъ одну лишнюю линію, такимъ образомъ мы можемъ утверждать, что *всякая фигура правильная съ одною излишнею линіей допускаетъ взаимную діаграмму.*

Если въ уравненіе

$$p+n-m=2$$

внесемъ выраженіе для m, имѣющее мѣсто въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ, т. е. $m=2n-2$, то получимъ

$$p+n-2n+2=2 \text{ или } p=n.$$

т. е. если данная фигура имѣетъ столько же узловъ сколько и многоугольниковъ, то она допускаетъ діаграмму взаимную.

Если данная фигура строго правильная т. е. если

$$m=2n-3, \text{ или } m-1=2n-4,$$

то мы будемъ имѣть 2n—3 уравненій, а число неизвѣстныхъ длинъ 2n—4, т. е. неизвѣстныхъ однимъ больше чѣмъ уравненій и слѣд. задача будетъ неопредѣленна, пока одно изъ этихъ уравненій не сдѣлается тождествомъ.

Итакъ, *если фигура строго правильная, то, вообще говоря, она не допускаетъ взаимной діаграммы и для того, чтобы она могла имѣть одну взаимную діаграмму, необходимо, чтобы она удовлетворяла одному нѣкоторому условію.*

Если въ уравненіи

$$p+n-m=2$$

внесемъ вмѣсто m его величину, какую она имѣетъ въ разсмотрѣнномъ случаѣ, то найдемъ: $p+n-2n+3=2$, откуда $p+1=n$, т. е. *когда число многоугольниковъ на единицу больше числа узловъ, то фигура не допускаетъ взаимной діаграммы.*

Если фигура неправильная, т. е. если $m=2n-3-k$, гдѣ k число положительное, то $m-1=2n-3-(k+1)$, слѣд. неизвѣстныхъ $2n-3-(k+1)$, а условій, или уравненій $2n-3$ т. е. будемъ имѣть $k+1$ уравненій больше чѣмъ неизвѣстныхъ. Итакъ, *фигура неправильная допуститъ взаимную діаграмму только тогда, когда она удовлетворяетъ* $k+1$ *условіямъ.*

Если въ уравненіе

$$p+n-m=2,$$

внесемъ вмѣсто m величину, какую оно имѣетъ въ разсматриваемомъ случаѣ, то получимъ:

$$p+n-2n+3+k=2 \text{ и } p=n-(k+1),$$

т. е. фигура, у которой число узловъ меньше числа многоугольниковъ на $(k+1)$*, тогда только допускаетъ одну взаимную діаграмму, когда она удовлетворяетъ* $(k+1)$ *условіямъ.*

Если фигура содержитъ k лишнихъ линій, т. е. если

$$m=2n-3+k, \text{ или } m-1=2n-3+k-1,$$

то неизвѣстныхъ слѣд. будетъ $2n-3+k-1$, а уравненій по прежнему $2n-3$ т. е. число неизвѣстныхъ больше числа уравненій на $k-1$, а поэтому $k-1$ изъ этихъ неизвѣстныхъ могутъ быть взяты произвольно, т. е. въ этомъ случаѣ будетъ $(k-1)$ неопредѣленныхъ рѣшеній.

Итакъ, *если фигура содержитъ k лишнихъ линій, то она допускаетъ $k-1$ взаимныхъ діаграммъ.*

Если въ уравненіе

$$p+n-m=2$$

подставимъ вмѣсто m его выраженіе, имѣющее мѣсто въ настоящемъ случаѣ, то получимъ:

$$p+n-2n+3-k=2$$

$$p=n+k-1,$$

Другими словами: *когда фигура имѣетъ число узловъ больше числа многоугольниковъ на величину $k+1$, то она допускаетъ $k-1$ взаимныхъ діаграммъ.*

Такимъ образомъ, безусловно, плоская фигура допускаетъ взаимную діаграмму, когда она имѣетъ столько же вершинъ, сколько и многоугольниковъ.

Всякій сомкнутый многогранникъ всегда обладаетъ тоже тѣмъ свойствомъ, что число его вершинъ или узловъ равно числу граней. Поэтому всякая проекція такого многогранника на плоскость также обладаетъ этимъ свойствомъ, а потому мы можемъ высказать такую теорему.

Теорема. *Плоская фигура, могущая быть разсматриваемой, какъ проекція сомкнутаго многогранника, всегда допускаетъ діаграмму взаимную.*

Въ послѣдующемъ мы будемъ разсматривать фигуры, допускающія лишь одну взаимную діаграмму. Къ числу такихъ фигуръ можно отнести фигуры, составленныя осями частей стропильныхъ кружальныхъ и мостовыхъ фермъ.

162. **Стропильныя фермы.** Кровли зданій покоятся обыкновенно на такъ называемыхъ стропильныхъ фермахъ. Поэтому на стропильныя фермы, кромѣ ихъ собственнаго вѣса, дѣйствуютъ еще вѣсъ кровли, вѣсъ снѣга, могущаго лежать на кровлѣ, и наконецъ давленіе вѣтра.

Вѣсъ погонной сажени деревянной стропильной фермы, смотря по конструкціи, выходитъ обыкновенно равнымъ отъ 4 до 16 пудовъ, среднимъ числомъ въ 12 пудовъ. Вѣсъ погонной сажени желѣзной стропильной фермы выходитъ отъ 6 до 12 пудовъ.

Вѣсъ снѣга, лежащаго на пологихъ крышахъ толщиною не болѣе аршина на квадратную сажень кровли, выходитъ равнымъ около 28 пудовъ.

Давленіе или напоръ вѣтра измѣняется въ зависимости отъ скорости вѣтра и можетъ доходить до 50 пудовъ на квадратную сажень плоскости, перпендикулярной къ его направленію.

Разъ найдена полная нагрузка на квадратную единицу кровли, то найдена будетъ и величина нагрузки на всю кровлю.

Раздѣляя эту нагрузку по ровну на всѣ фермы, разставляемыя обыкновенно другъ отъ друга на сажень, найдемъ нагрузку на каждую ферму.

Нагрузку на каждую ферму можно считать или равномѣрно распредѣленною на всю ферму, или же сосредоточенною въ узловыхъ точкахъ фермы.

Способы опредѣленія нагрузокъ на стропильныя фермы излагаются въ курсѣ строительной механики, поэтому въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать величину нагрузки извѣстной.

Зная нагрузки въ узловыхъ точкахъ фермы или внѣшнія вертикальныя силы, по правиламъ, изложеннымъ въ параграфѣ 143, найдемъ противудѣйствіе опоръ, и затѣмъ останется только опредѣлить внутреннія силы т. е. напряженія различныхъ частей фермы, что достигается построеніемъ діаграммы взаимной, соотвѣтствующія стороны которой представятъ собою напряженія частей фермы.

Возьмемъ для перваго примѣра ферму изображенную на черт. 118.

Пусть линіи 1,2,3 представляютъ равныя между собою нагрузки, распредѣленныя на узлы фермы и дѣйствующія сверху внизъ; предположимъ, что ферма, опираясь конечными своими точками на двѣ опоры, находится въ равновѣсіи, и что для этого равновѣсія ферма вызываетъ со стороны опоръ противудѣйствія, направленныя слѣд. снизу вверхъ. Означимъ эти противудѣйствія линіями 4 и 5. Цифрами 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13 означимъ части фермы. Построимъ многоугольникъ данныхъ силъ, въ какомъ либо опредѣленномъ масштабѣ выбраннымъ для силъ; въ нашемъ случаѣ онъ, очевидно, будетъ прямая линія напр. 03 (черт. 119), и замыкающая его сторона 30 должна представлять собою силу, уравновѣшивающеюся съ данными силами; а такъ какъ съ ними уравновѣшивается сопротивленіе опоръ, то, слѣд. линія 30 представляетъ собою сумму сопротивленій опоръ. Ферма и нагрузки, дѣйствующія на нее, расположены симметрично относительно опоръ, поэтому для нахожденія сопротивленія каждой изъ опоръ нѣтъ надобности чертить веревочнаго многоугольника, а достаточно линію 30 раздѣлить пополамъ въ точкѣ а, и тогда 3а будетъ равно сопротивленію правой опоры т. е. 4, и ао равно сопротивленію лѣвой опоры т. е. 5.

Чтобы найти, графически, величины напряженій частей данной фермы, надо построить взаимную діаграмму. Начнемъ построеніе ея съ узла (5, 6, 7). Во взаимной діаграмѣ этому узлу долженъ соотвѣтствовать замкнутый треугольникъ, одна сторона котораго 5 = ао уже извѣстна. Чтобы найти двѣ другія стороны, надо отъ концевъ линіи ао провести линіи параллельныя линіямъ 6 и 7 данной фигуры.

Но здѣсь является вопросъ: отъ какой же точки слѣдуетъ вести линію параллельную 6, а отъ какой линію параллельную 7. Линія 6 проходитъ чрезъ два узла (6, 7, 5) и (6, 1, 8, 8) слѣд. во взаимной фигурѣ линія ей параллельная должна начинаться не только отъ конца линіи оа, но также отъ конца линіи 1, т. е. она должна начинаться отъ точки общей этимъ двумъ линіямъ т. е. отъ о. Построивъ такимъ образомъ треугольникъ oab, найдемъ графически напряженія полосъ 6 и 7. Напряженія эти будутъ ob и ab, означимъ ихъ тоже цифрами 6 и 7.

Узлу (6, 1, 8, 9) данной фигуры долженъ соотвѣтствовать во взаимной діаграммѣ замкнутый четыреугольникъ, двѣ стороны котораго 1 и 6 уже извѣстны и начерчены (черт. 119); остается построить напряженіе полосъ 9 и 8. Такъ какъ 9 проходитъ не только чрезъ узелъ, въ которомъ она пересѣкается съ 1, но также чрезъ узелъ, въ которомъ она пересѣкается съ 2, то, слѣд. во взаимной діаграммѣ, линія соотвѣтствующая 9 должна проходить чрезъ точку общую и 1 и 2, т. е. она должна начинаться отъ конца силы 1. Линія взаимной діаграммы, соотвѣтствующая 8 должна слѣд. начинаться отъ точки b. Проводя эти линіи, какъ сказано, до взаимнаго ихъ пересѣченія въ точкѣ c, найдемъ графически искомыя напряженія въ полосахъ 8 и 9.

Узлу (7, 8, 14, 11 и 12) данной фигуры долженъ соотвѣтствовать во взаимной діаграммѣ замкнутый пятиугольникъ, двѣ стороны котораго 7 и 8 уже извѣстны. Если бы мы провели отъ концовъ этихъ линій параллельныя двумъ другимъ линіямъ узла, то мы не знали бы на какое разстояніе эти линіи надо продолжать, чтобъ, соединивъ концы ихъ, получить линію, соотвѣтствующую 5-й линіи узла т. е. здѣсь явилась бы неопредѣленность. Чтобы этой неопредѣленности избѣжать, надо предварительно опредѣлить величину линіи взаимной діаграммы, соотвѣтствующую одной изъ этихъ трехъ неизвѣстныхъ, для чего надо обратиться къ смежному узлу (9, 2, 10, 14), для котораго во взаимной діаграммѣ слѣдуетъ построить только двѣ линіи, такъ какъ двѣ другія 9 и 2 уже извѣстны. Построивъ четыреугольникъ 12fc, найдемъ, что 2f будетъ представлять напряженіе въ полосѣ 10, а линіи fc напряженіе въ полосѣ 14. Послѣ чего уже легко построить замкнутый пятиугольникъ, соотвѣтствующій узлу (7, 8, 14, 11 и 12); онъ будетъ abcfda.

Узлу (10, 3, 13 и 11) соотвѣтствуетъ четыреугольникъ, стороны котораго 10, 3 и 11 уже извѣстны, поэтому, соединяя точки d и 3, найдемъ эту 4-ю сторону, она должна выражать собою напряженіе въ полосѣ 13 данной фермы, и слѣд. должна быть параллельна этой полосѣ. Если она дѣйствительно окажется параллельной этой полосѣ, то взаимная діаграмма построена вѣрно. Такимъ образомъ, это обстоятельство даетъ возможность всегда знать вѣрно ли опредѣлено, графически, напряженіе всѣхъ полосъ.

До сихъ поръ мы опредѣляли напряженія полосъ, не обращая вниманія на то, какія же изъ этихъ полосъ сжаты, какія вытянуты. Вопросъ этотъ: какія части фермы вытянуты, а какія сжаты, рѣшается слѣдующимъ образомъ: послѣ того какъ построенъ во взаимной фигурѣ замкнутый многоугольникъ, соотвѣтствующій 1-му узлу данной фигуры, надо на всѣхъ его сторонахъ поставить стрѣлки, такъ чтобы всѣ они шли по одному направленію, начиная обходъ замкнутаго многоугольника отъ данной силы, направленіе которой уже извѣстно на многоугольникѣ силъ. Затѣмъ, эти стрѣлки надо перенести соотвѣтственнымъ образомъ на стороны соотвѣтствующаго узла. Здѣсь однѣ изъ этихъ стрѣлокъ будутъ направлены остріями къ узлу, другія отъ узла. Стороны, у которыхъ стрѣлки окажутся направленными остріями къ узлу, будутъ сжаты, а стороны, у которыхъ острія стрѣлокъ будутъ направлены въ противуположную сторону отъ узла, будутъ вытянуты. Дѣйствительно, такъ какъ ферма находится въ равновѣсіи, то узлы представляютъ собою точки неподвижныя, а слѣд. усилія, направленныя къ узламъ, будутъ сжимать часть фермы, заключенную между этими узлами.

При обходѣ слѣдующихъ замкнутыхъ многоугольниковъ взаимной діаграммы окажется, что каждая сторона будетъ имѣть по двѣ стрѣлки, а потому и стороны данной фигуры будутъ имѣть тоже по двѣ стрѣлки; но двѣ стрѣлки каждой изъ этихъ послѣднихъ линій всегда будутъ, такъ сказать, противуположныя, т. е. или обѣ будутъ направлены другъ къ другу остріями, или же обѣ будутъ направлены другъ къ другу отверстіями, и такъ какъ каждая сторона проходитъ чрезъ два узла, то можно еще сказать, что обѣ стрѣлки каждой полосы будутъ направлены остріями къ узламъ, или обѣ стрѣлки каждой полосы будутъ направлены отъ узловъ; въ первомъ случаѣ полоса фермы будетъ сжата, во 2-мъ случаѣ она будетъ вытянута.

Опредѣленіе—какая часть сжата и какая вытянута, лучше всего дѣлать постепенно, по мѣрѣ построенія замкнутыхъ многоугольниковъ взаимной діаграммы. На всѣхъ послѣдующихъ чертежахъ стороны вытянутыя означены тонкими линіями, а стороны сжатыя толстыми.

Чер. 120 представляетъ собою стропильную ферму, употребляемую во Франціи и Англіи. Напряженія частей ея получаются совершенно также какъ въ предъидущемъ случаѣ на взаимной діаграммѣ чер. 121. Ферма эта носитъ названіе простой фермы Полонсо.

Черт. 122 представляетъ собою такъ называемую нѣмецкую или швейцарскую стропильную ферму. Черт. 123 взаимная діаграмма къ этой фермѣ.

Черт. 124 представляетъ англійскую стропильную ферму. На черт. 125 діаграмма напряженій частей этой фермы.

Черт. 126 и 128 представляютъ фермы, употребляемыя для кровель и кружалъ. Черт. 127 и 129 діаграммы силъ для этихъ фермъ. Здѣсь та особенность, что нагрузка распредѣлена на всѣ узлы, не исключая узловъ, въ которыхъ дѣйствуютъ опорныя давленія.

Черт. 130 представляетъ собою ферму для кружала арочнаго свода.

Черт. 131 ея взаимная діаграмма.

Черт. 132 представляетъ форму кружала арочнаго очень пониженнаго свода. Черт. 133 діаграмму усилій для нея.

163. Обратимся къ чертежу 124 и разсѣчемъ ферму такъ, чтобы сѣченіе проходило чрезъ три какихъ нибудь части. Напр. если возьмемъ сѣченіе bc, разсѣкающее части 21, 20 и 19, и обратимся къ напряженіямъ этихъ частей, имѣющихся на діаграммѣ усилій, то увидимъ, что напряженія 21, 20 и 19 не составляютъ сомкнутаго многоугольника, а замыкающая ихъ есть 3a, т. е. 3a уравновѣшиваетъ эти три усилія. Но, съ другой стороны, 3a есть равнодѣйствующая силъ 1, 2, 3 и 9 т. е. равнодѣйствующая силъ, находящихся слѣва отъ сѣченія фермы. Изъ этого мы заключаемъ, что если сдѣлаемъ въ фермѣ сѣченіе, разсѣкающее три ея части, то напряженія этихъ частей уравновѣсятся силами, дѣйствующими слѣва отъ сдѣланнаго сѣченія. Тоже самое относится и къ сѣченію df, разсѣкающему части фермы 21, 20, 18, 16 и 15. Напряженія этихъ полосъ вмѣстѣ съ равнодѣйствующею силъ, дѣйствующихъ слѣва отъ сѣченія, составляютъ замкнутый многоугольникъ, т. е. уравновѣшиваются.

Черт. 134 представляетъ сложную ферму Палонсо. При построеніи діаграммы усилій для этой фермы приходится нѣсколько отступить отъ того порядка построенія, какой былъ изложенъ въ предыдущихъ случаяхъ. Здѣсь, построивъ многоугольники, соотвѣтствующіе узламъ (9, 10, 11), (10, 1, 12, 13) и (11, 12, 13, 14., нельзя будетъ перейти ни къ узлу (13, 14, 16, 18, 17, 2) ни къ узлу (15, 16, 19, 23), и въ томъ и другомъ надо будетъ найти 3 величины. Поэтому здѣсь поступаютъ такъ: дѣлаютъ сѣченіе по bc, пересѣкающее три части 20, 22 и 23; напряженія этихъ частей должно уравновѣшиваться, на основаніи предыдущаго, съ равнодѣйствующею силъ, дѣйствующихъ слѣва отъ сѣченія т. е. съ 3a, слѣд. чтобъ получить напряженія частей 20, 22 и 23, надо силу 3a разложить на три направленія, параллельныя линіямъ 20, 22 и 23 (черт. 134), что, какъ знаемъ, представляется возможнымъ (параграфъ 41). Сдѣлавъ это разложеніе и найдя напряженія, проведемъ изъ точекъ a и 3 линіи параллельныя 20 и 23 и отложимъ на нихъ найденныя составляющія; линія, соединяющая концы ихъ df, будетъ напряженіемъ стороны 22. Послѣ этого для дальнѣйшаго вычерчиванія діаграммы взаимной надо будетъ перейдти къ узлу (20, 21, 3, 17), которому во взаимной діаграммѣ долженъ соотвѣтствовать четыреугольникъ, двѣ стороны котораго 3 и 20 уже извѣстны. Затѣмъ надо перейти къ узлу (22, 21, 18, 19); найдутся напряженія сторонъ 18 и 16, послѣ чего можно уже перейти къ узлу (2, 13, 14, 16, 18, 17), въ которомъ неизвѣстны напряженія лишь сторонъ 16 и 17. Другая половина діаграммы, какъ симетричная 1-ой, получается точно такая же.

164. Балочныя фермы одинаковой и неодинаковой высоты, находящіяся подъ дѣйствіемъ однообразнымъ или какихъ угодно нагрузокъ, направленныхъ вертикально.

Черт. 136 представляетъ собою раскосную ферму, находящуюся подъ дѣйствіемъ нагрузокъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Построивъ многоугольникъ силъ, который будетъ въ настоящемъ случаѣ прямой линіей, и веревочный многоугольникъ и проведя затѣмъ на многоугольникѣ силъ линію 3a, параллельную замыкающей сторонѣ веревочнаго многоугольника, раздѣлимъ равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ въ точкѣ a на двѣ части. Эти части и будутъ противодѣйствіями опоръ. Въ частномъ случаѣ, когда всѣ нагрузки равны, каждое противодѣйствіе будетъ равно полусуммѣ всѣхъ нагрузокъ или половинѣ равнодѣйствующей и, въ этомъ случаѣ, нѣтъ надобности чертить лучей и веревочнаго многоугольника. Означимъ противодѣйствія опоръ цифрами 9 и 10. Чтобы найти напряженія всѣхъ частей фермы, построимъ взаимную діаграмму (Черт. 137) по правиламъ, извѣстнымъ изъ предъидущаго.

Поставивъ стрѣлки на чертежѣ 136 и 137, найдемъ, что части верхняго пояса (верхнія горизонтальныя полосы) всѣ сжаты, части нижняго пояса всѣ вытянуты. Раскосы, попеременно, то вытянуты, то сжаты, исключая раскосовъ 23 и 25, которые оба вытянуты. Между ними проходитъ равнодѣйствующая нагрузокъ, приложенныхъ къ балкѣ. Напряженія увеличиваются, начиная съ концовъ фермы до точки приложенія равнодѣйствующей нагрузокъ. Сжатія и вытягиванія раскосовъ, наоборотъ, уменьшаются, начиная отъ концовъ фермы до точки приложенія равнодѣйствующей.

Черт. 138 представляетъ эпюру балки, симметричные узлы которой одинаково нагружены. Черт. 139, діаграмму напряженій. Изъ нея видимъ, что сжатія и вытягиванія частей верхняго и нижняго пояса увеличиваются, и напряженія раскосовъ уменьшаются отъ концовъ къ серединѣ. Двѣ среднія полосы совершенно не напряжены т. е. другими словами, напряженія ихъ равны нулю.

Чертежъ 140 представляетъ собою раскосную ферму постоянной высоты, находящуюся подъ дѣйствіемъ сосредоточенной нагрузки въ одномъ какомъ угодно узлѣ ея нижняго пояса. Противодѣйствія опоръ здѣсь получены при помощи веревочнаго многоугольника.

Разсматриваніе діаграммы силъ (черт. 141) приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ: всѣ части верхняго пояса сжаты, всѣ части нижняго пояса вытянуты. Напряженія этихъ частей увеличиваются, начиная съ концовъ фермы до точки приложенія нагрузки. Раскосы поочередно вытянуты и сжаты, исключая двухъ смежныхъ нагрузокъ, которыя обѣ вытянуты.

Напряженія раскосовъ уменьшаются, начиная отъ концовъ фермы, до точки приложенія нагрузки.

Взаимныя діаграммы также просто строятся, когда нагрузки приложены къ узламъ верхняго пояса.

Черт. 142 представляетъ ферму неодинаковой высоты по всей длинѣ, покоющуюся на двухъ опорахъ, и составленную изъ вертикальныхъ стоекъ и раскосовъ, симметрично помѣщенныхъ относительно середины, и находящуюся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ вертикальныхъ силъ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Построимъ противодѣйствія опоръ 1 и 9, какъ это было объяснено уже раньше. Такимъ образомъ получимъ замкнутый многоугольникъ силъ и построимъ затѣмъ взаимную діаграмму (Чер. 143).

165. **Висячіе мосты.** Чер. 144 представляетъ собой цѣпь висячаго моста, соединенную съ поясомъ посредствомъ раскосовъ.

Вертикальныя силы, дѣйствующія на цѣпь, пусть будутъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, а силы, дѣйствующія на нижній поясъ, — 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Чтобы опредѣлить направленія крайнихъ звеньевъ цѣпи, построимъ сначала (чер. 145) всѣ силы по одной прямой, а затѣмъ проведемъ, изъ концовъ ея, линіи параллельныя крайнимъ звеньямъ цѣпи. Эти линіи представятъ собою графическія напряженія крайнихъ звеньевъ цѣпи. Эти напряженія, вмѣстѣ съ тѣмъ, будутъ равны противодѣйствіямъ опоръ, и такъ какъ онѣ не отвѣсныя, то многоугольникъ силъ не будетъ прямою линіей, онъ изобразится четыреугольникомъ, — 0, 8, 9, 10, 0 на чер. 146. Именно: проведя прямую, равную восьми первымъ силамъ отъ конца силы 8, проведемъ линію параллельную и равную сопротивленію 9, а отъ конца 9 проведемъ линію вертикальную, на которой назначимъ длину остальныхъ 7 силъ. А затѣмъ построимъ діаграмму взаимную фигурѣ 145, по общимъ правиламъ.

Чер. 147 представляетъ ферму обыкновеннаго висячаго моста, нижній поясъ котораго прикрѣпленъ къ цѣпи, при помощи вертикальныхъ тяжей. Поступая совершенно также, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, получимъ, на чер. 148, діаграмму напряженій частей цѣпи.

Чер. 149 представляетъ собою ферму арочнаго моста, подверженную вертикальнымъ силамъ 1, 2, 3, ... 12, дѣйствующимъ на верхній поясъ, и силамъ 14, 15, 16 ..... 26 дѣйствующимъ на арку, противодѣйствія опоръ означены цифрами 27 и 13.

Опредѣливъ величину противодѣйствія опоръ, какъ въ цѣпномъ мостѣ, построимъ четыреугольникъ силъ, а затѣмъ діаграмму напряженій (чер. 150).

Изъ этой діаграммы видимъ, что въ арочной фермѣ верхній и нижній поясы сжаты, а раскосы, попеременно, то вытянуты, то сжаты.

166. **Станина крана.** Ферма, составленная изъ треугольниковъ (черт. 151), вращается вокругъ вертикальной оси, означенной цифрою 12 и подпертой подкосомъ, означеннымъ цифрою 11. Означимъ силы, дѣйствующія на углу крана, цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Величина этихъ силъ начерчена на многоугольникѣ силъ (черт. 152). Пусть силы эти находятся въ равновѣсіи съ напряженіями частей крана и R — равнодѣйствующая этихъ внѣшнихъ силъ, величина которой и положеніе найдены при помощи многоугольника

силъ и веревочнаго многоугольника. Разложимъ силу R на три: по направленiямъ осей частей фермы 10, 11 и 12. Для этого, сначала разложимъ ее по направленiямъ 10 и AB, съ какою цѣлiю проведемъ изъ начала 0 многогранника силъ линiю параллельную AB, а изъ точки 9 линiю параллельную 10, до взаимнаго пересѣченiя въ точкѣ b, силу ob вновь разложимъ на два направленiя параллельныя 11 и 12. Такимъ образомъ ровна дѣйствующая 90 будетъ уравновѣшиваться съ силами oc, cb и b9 (черт. 152) т. е. съ напряженiями частей 10, 11 и 12. Опредѣленiе напряженiй остальныхъ частей найдется построенiемъ взаимной дiаграммы, по правиламъ уже извѣстнымъ.

КОНЕЦЪ 1-ОЙ ЧАСТИ.

ОПЕЧАТКИ И ОШИБКИ.

Стран.	Строка.	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
10	18	угла PMP, двѣ	угла PMP, то двѣ
11	5	A и A	A и C
17	5	какъ дѣйствующія	равныя между собою, дѣйствующія
—	30	силы	силъ
—	31	она получается	точка эта получается
23	6	abcb, будетъ	abcd, то она будетъ
25	18	A_1 A	A_1 A_2
26	14	P_2	P_1
27	4	чер. 33 съ 29	чер. 38 съ 39
28	20	44, 45 и 46.	44 и 45.
32	8	AB	DB
33	14	равнодѣйствующей системы силъ,	равнодѣйствующей системы параллельныхъ силъ.
34	10	48	(не надо).
34	16	моментовъ силъ	моментовъ параллельныхъ силъ.
—	32	силъ P и P′	силъ P и — P
38	22	$AP \times OP$	$AP \times Op$
39	20	проведенные	проведенной
—	21	OS	OZ
40	5	OR,	OR_1
—	9	OR_1	OR
41	14	X, Y, Z	x, y, z
—	21	оси OZ, равенъ нулю	оси OZ, относительно этой оси равенъ нулю.
43	32	Для того же	Для проекціи G′ того же
—	—	и другое	слѣдующіе
—	32 и 33	Дѣйствительно	Извѣстно, что
44	5	G	G′
—	30	конца A	концовъ
46	3	Rr_1	Rr
—	7	линія дѣйствія	равнодѣйствующая
—	14	(3)	(4)
48	26	aq	Q
53	15	перпендикулярную къ N	перпендикулярную къ N и параллельную общему направленію данныхъ силъ.
—	19	моменту ея проекціи	моменту проекціи каждой силы.
54	29	67	68
55	12	68	(не надо)
64	31	отъ точки E разстоянія	отъ точки E на разстояніи
8	32	Q_2	Q_3

Стран.	Строка	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
72	32	углаваго	тавроваго
—	34	углаваго	тавроваго
74	27	b'	b
81	17	дуги SA и Sa AA′ и aa′ радіусами.	дуги AA′ и aa′ радіусами SA Sa.
83	22	параллельную P_1P	параллельную G_1P
86	30	силы P_1 и P_1	силы P_1 и P_2
87	15	$(P_1 - P)$	$(P, - P)$
88	13	F	f
89	9	$\frac{P}{P} =$	$\frac{P}{P_1} =$
92	23	ос	OC
—	30	ABCD	ABCO
92	31	равныхъ и противуположныхъ,	противуположныхъ и
93	20	X_z	$- X_z$
99	29	никогда	вообще говоря
102	9	составленныхъ данной силой	составляющихъ данной силы
115	33	(чер. 107).	(чер. 108).
120	13	CO и DO	CO′ и DO′
142	18 и 19	смежныхъ иагрузокъ, которыя обѣ	смежныхъ съ нагрузкою, поторые оба
143	8	10	16
143	32	углу	узлы
144	4	многогранника	многоугольника
—	7	ровно дѣйствующая	равнодѣйствующая

Вмѣсто строкъ 19-й, 20-й, 21-й и 22-й страницы 34-й слѣдуетъ читать:

48. **Теорема моментовъ для силъ расположенныхъ какъ угодно въ плоскости.** Пусть дана сила AP (чер. 62); чтобы найти, графически, ея моментъ относительно точки O, необходимо концы силы соединить съ точкою O; полученный треугольникъ будетъ равенъ половинѣ искомаго момента. Съ другои стороны, если къ линіи AO возставимъ перпендикуляръ и изъ точки P проведемъ линію параллельную AO до пересѣченія съ перпендикуляромъ въ точкѣ P′, то найдемъ, что треугольникъ AOP′ равновеликъ треугольнику AOP, слѣдоват. моментъ силы AP равенъ моменту силы AP′.

Предположимъ теперь, что имѣемъ двѣ силы AP и AP_1 (чер. 63), сходящіяся въ точкѣ A, равнодѣйствующая ихъ AR. Моментъ равнодѣйствующей, относительно точки O, выражается двойною площадью треугольника AOR, или на основаніи предыдущаго, двойною площадью треугольника AOR′. На томъ же основаніи моментъ силы P, относительно точки O, выражается двойною площадью треугольника AOB, а моментъ силы P_1, относительно той же точки, выражается двойною площадью треугольника AOC.

Изъ чертежа же имѣемъ:

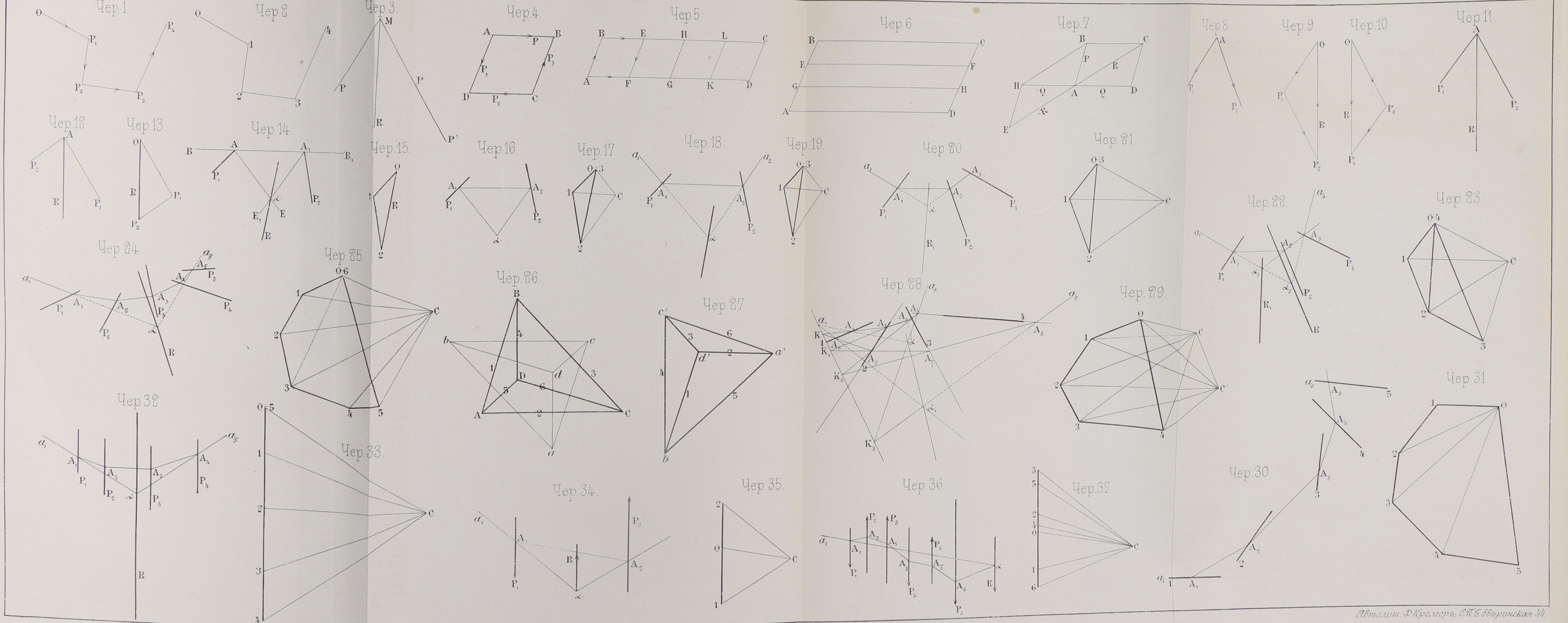
$$AOR' = AOC + OCR'$$

Линіи AB и CR′ равны между собою, какъ проекціи одной и той же силы P на одной и той же линіи, составляющей съ силами P и P одинаковые углы, поэтому треугольникъ OCR′ можетъ быть замѣненъ треугольникомъ AOB, и слѣд. можно написать:

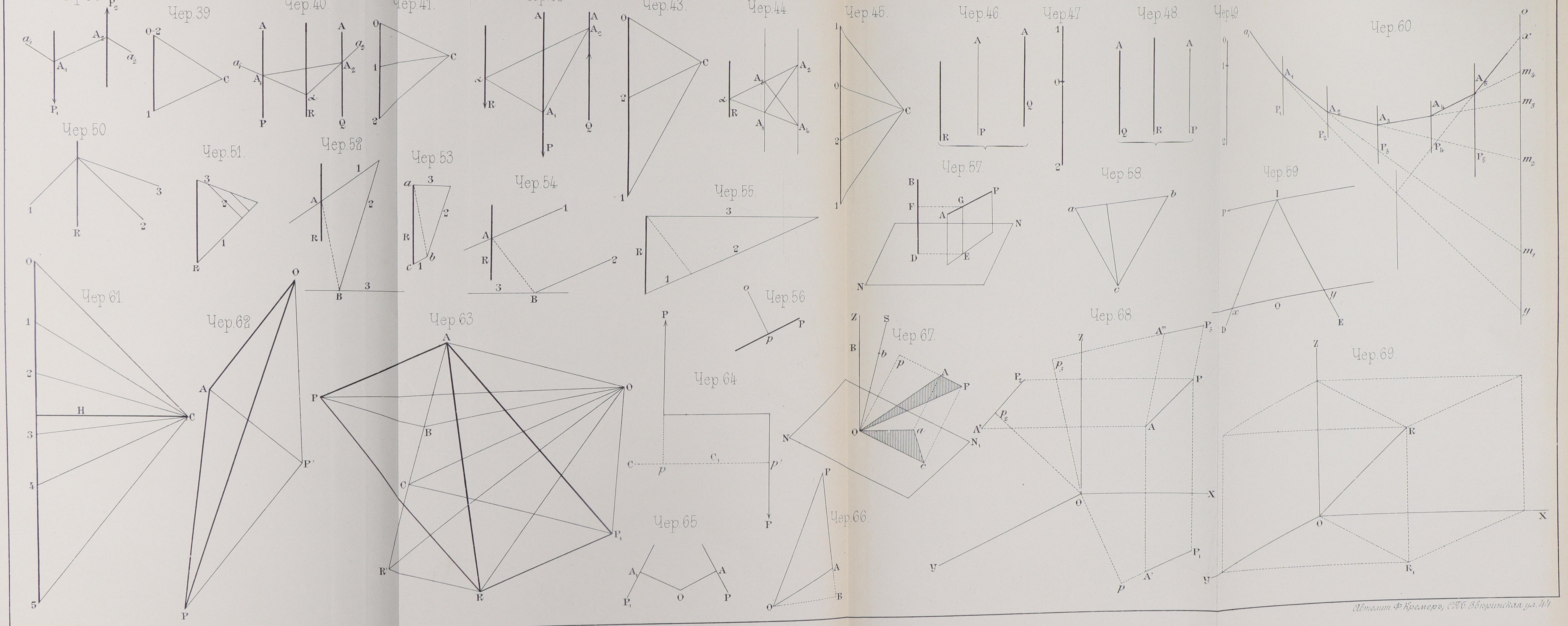
$$2AOR' = 2AOC + 2AOB$$

что выражается словами такъ: *моментъ равнодѣйствующей двухъ сходящихся силъ относительно точки равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же точки.*

Но такъ какъ каждая составляющая можетъ представлять собою равнодѣйствующую двухъ другихъ силъ, то высказанная теорема справедлива также и для трехъ, четырехъ силъ и слѣд. справедлива и для какого угодно числа силъ, лежащихъ въ одной плоскости, поэтому теорему моментовъ можно выразить такъ: *моментъ равнодѣйствующей, относительно точки, какихъ угодно силъ, расположенныхъ въ плоскости, равенъ суммѣ моментовъ этихъ данныхъ силъ, относительно той же точки.*

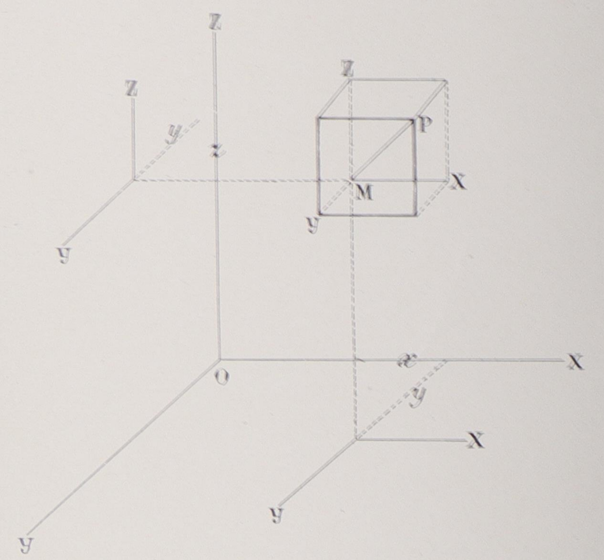


Автолит. Ф. Кремеръ, СПБ. Звѣринская 44.

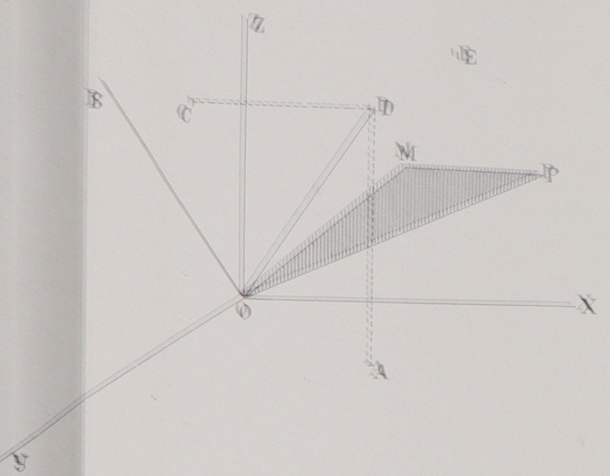


Автолит. Ф. Кремеръ, СПб. Звѣринская ул. 44.

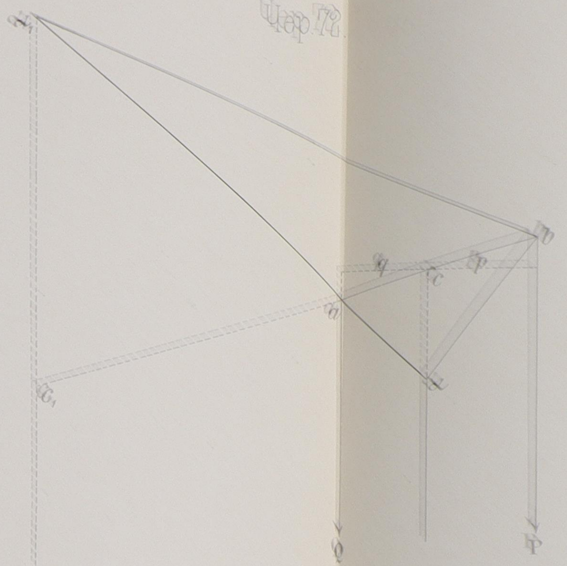
Чер. 70.



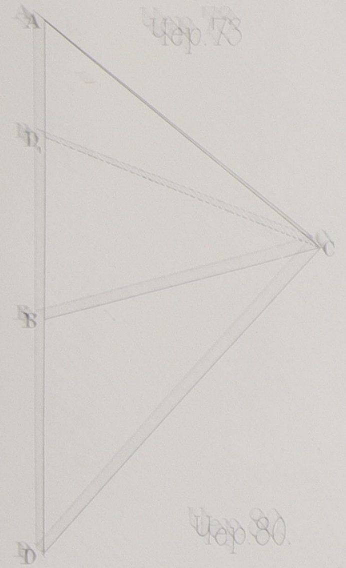
Чер. 71.



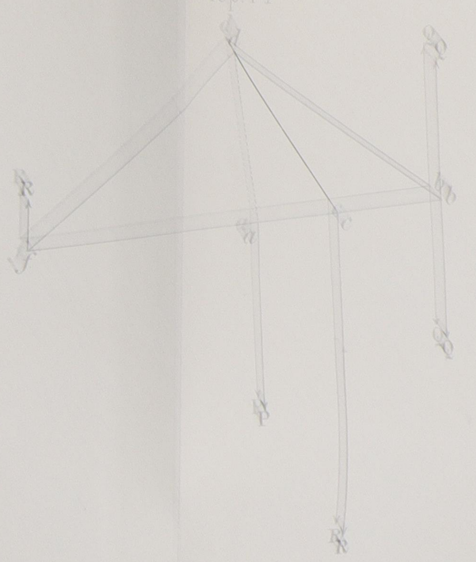
Чер. 72.



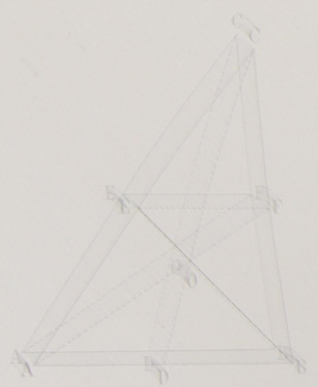
Чер. 73.



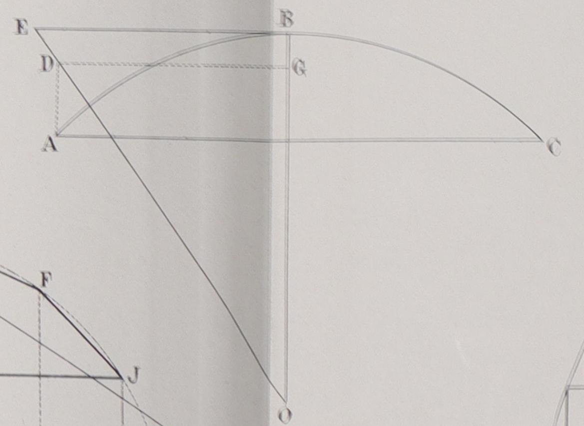
Чер. 74.



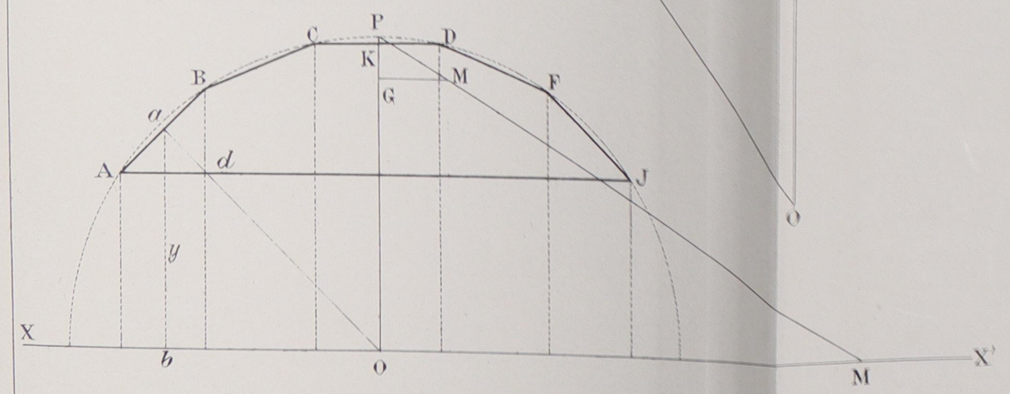
Чер. 75.



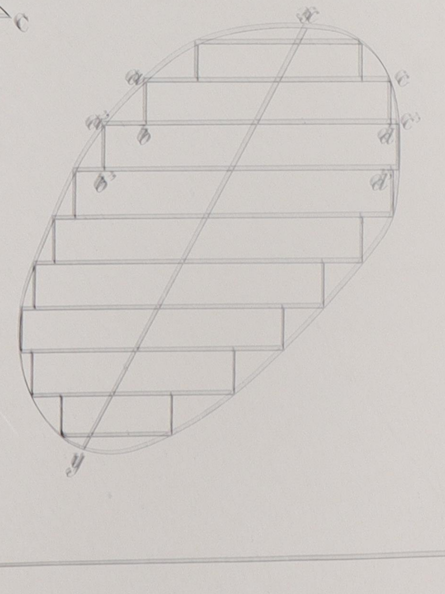
Чер. 77.



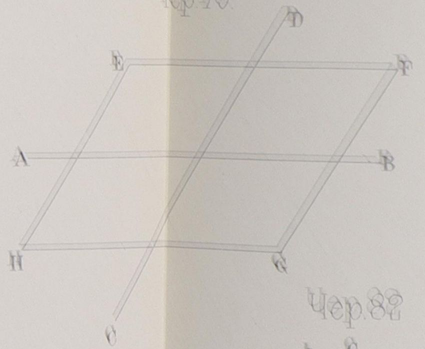
Чер. 76.



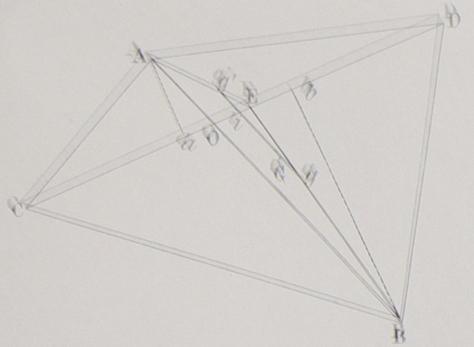
Чер. 78.



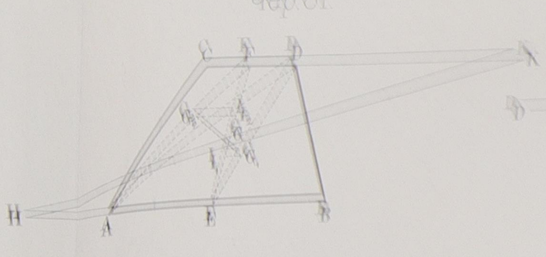
Чер. 79.



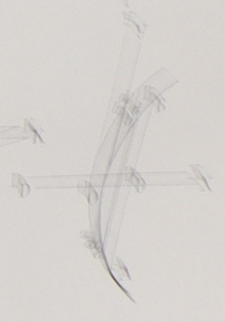
Чер. 80.



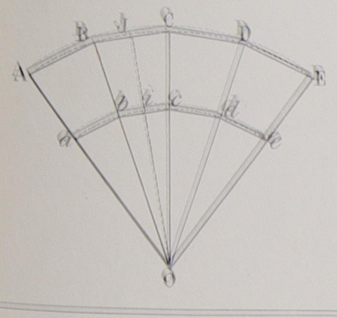
Чер. 81.



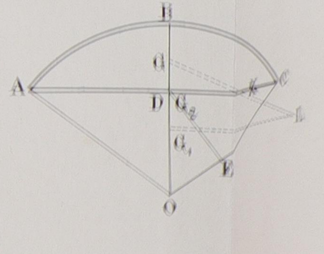
Чер. 85.



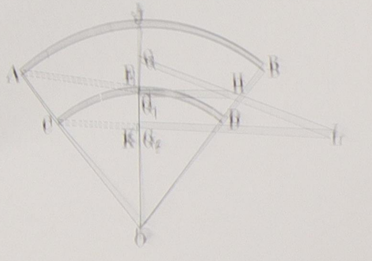
Чер. 82.



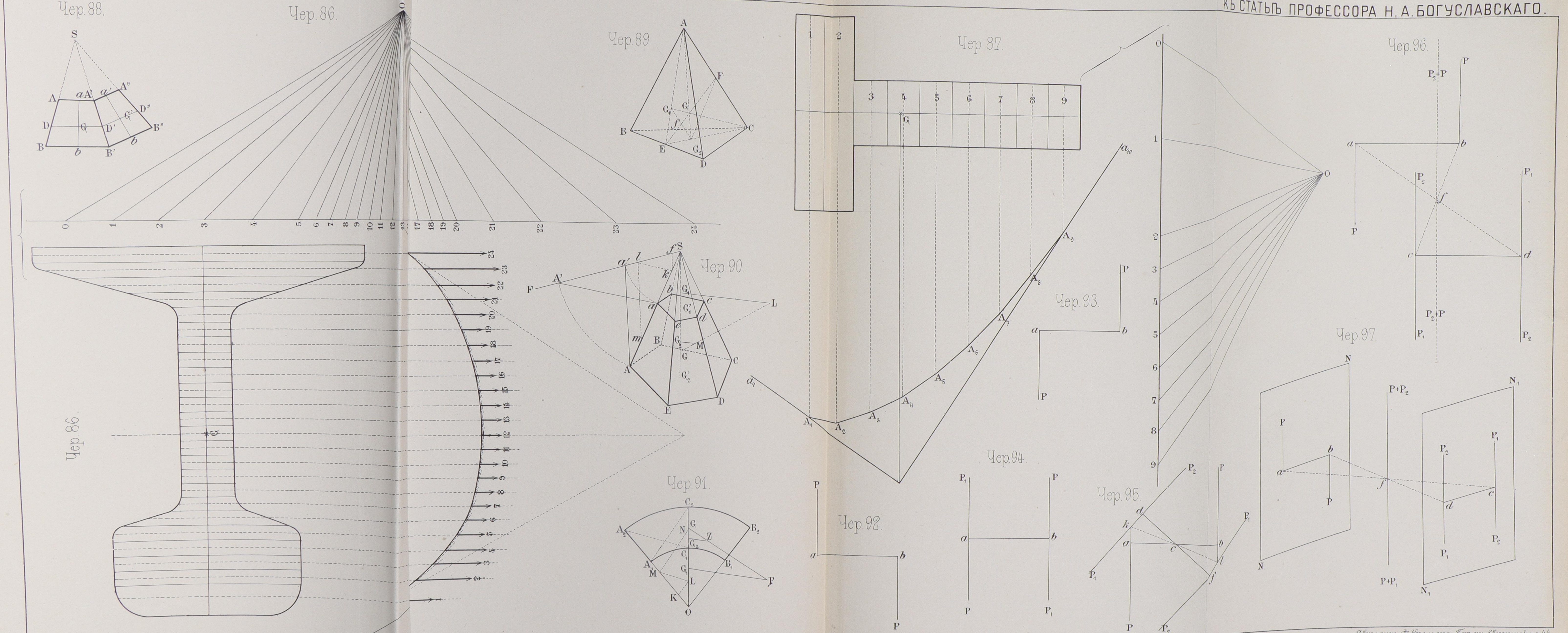
Чер. 83.



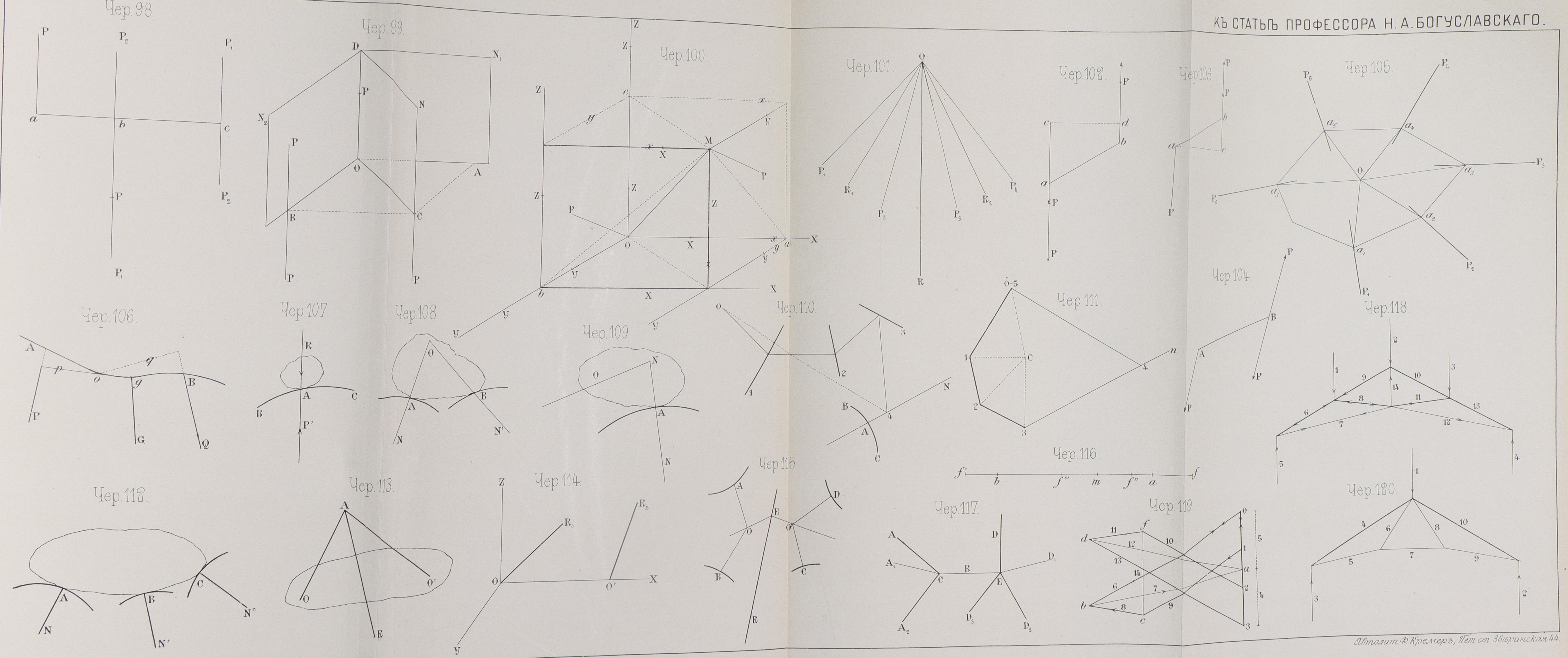
Чер. 84.



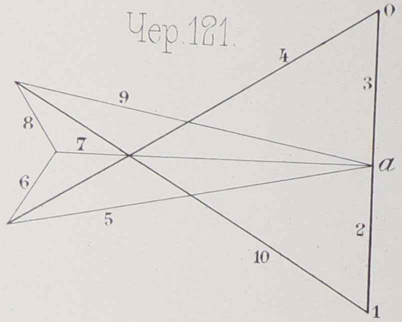
Къ статьѣ профессора Н. А. Богуславскаго.

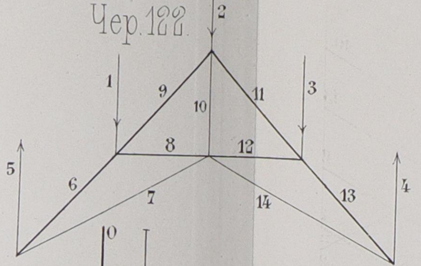


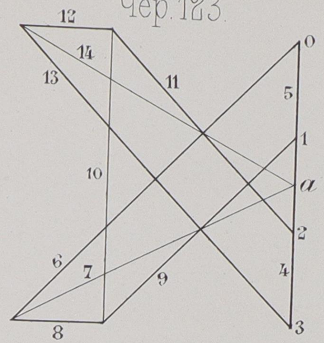
Автолит. Ф. Кремеръ, Пет. ст. Вв...инская 44.

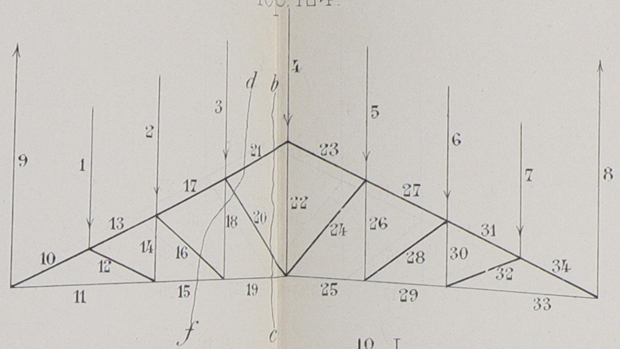


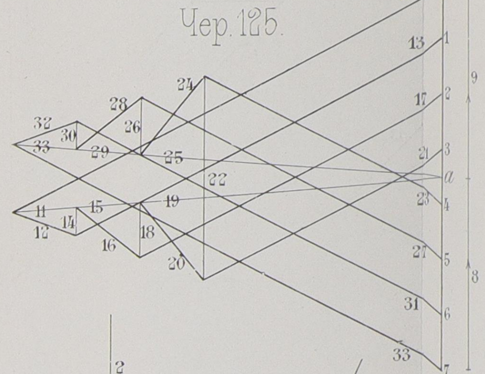
Автолит. Ф. Кремеръ, Пет. ст. Звѣринская 44.

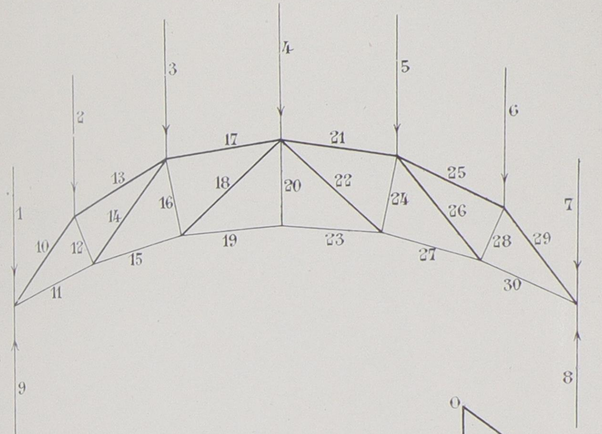

Чер. 121.

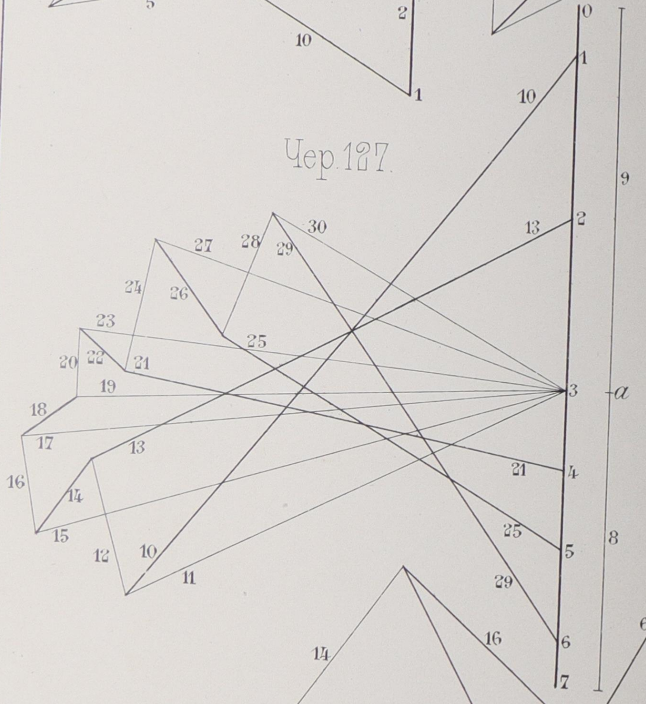

Чер. 122.

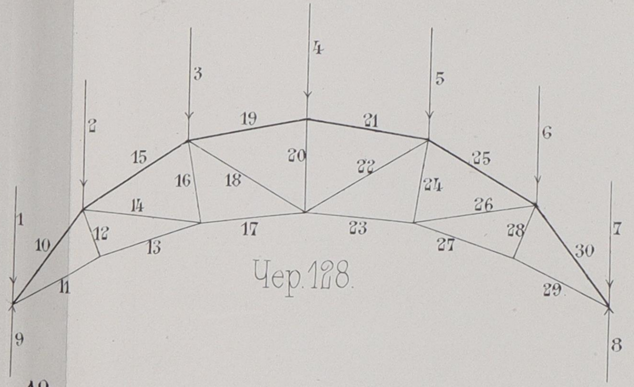

Чер. 123.

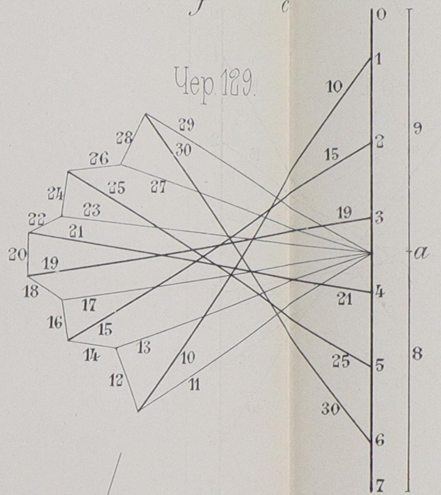

Чер. 124.

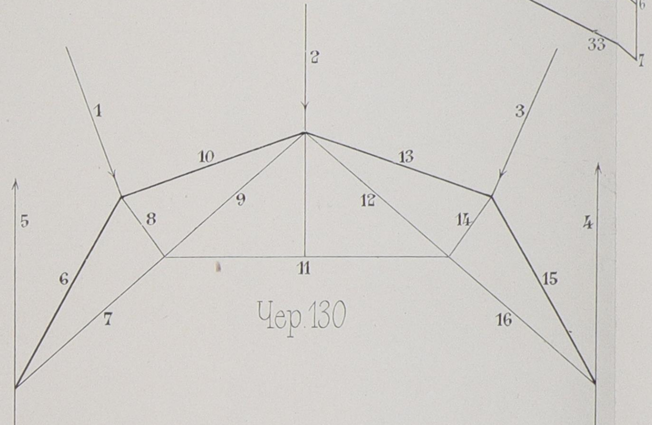

Чер. 125.

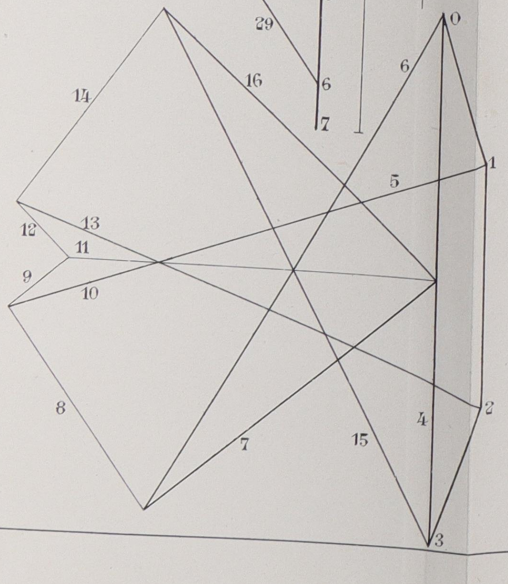

Чер. 126.

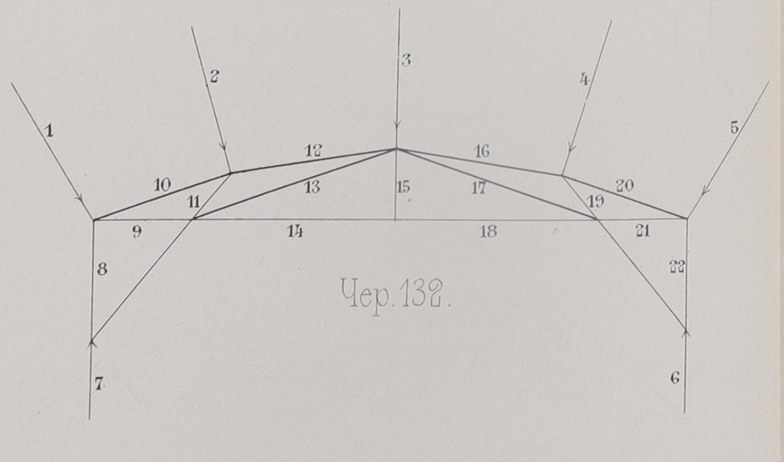

Чер. 127.

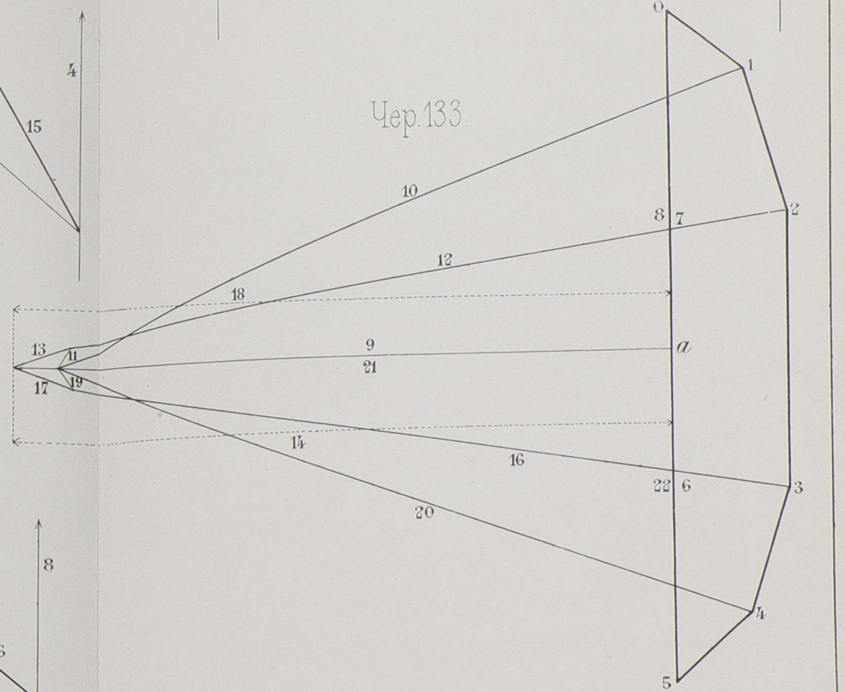

Чер. 128.

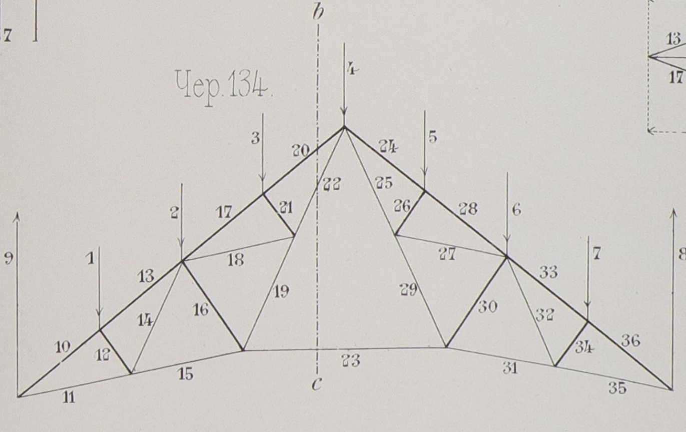

Чер. 129.


Чер. 130.


Чер. 131.

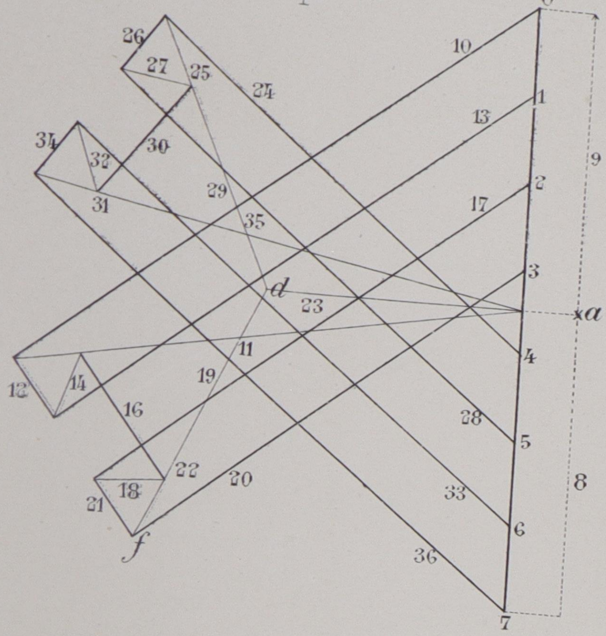

Чер. 132.


Чер. 133.

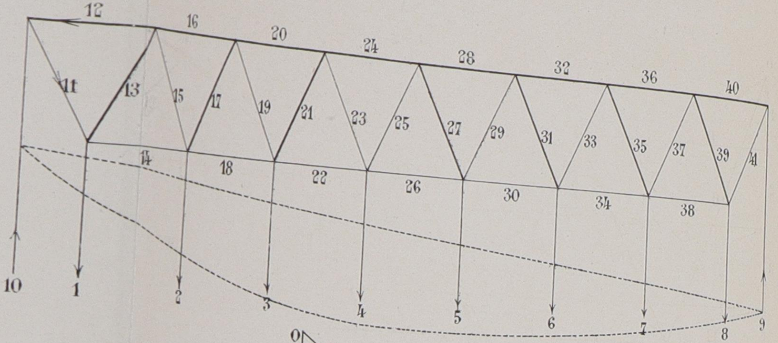

Чер. 134.

Автолит. Ф. Кремеръ, Петст. Звѣринская 44.

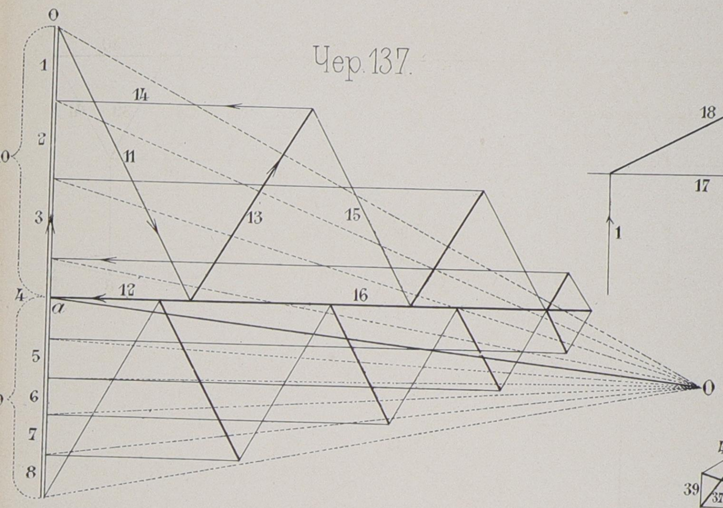
Чер. 135.



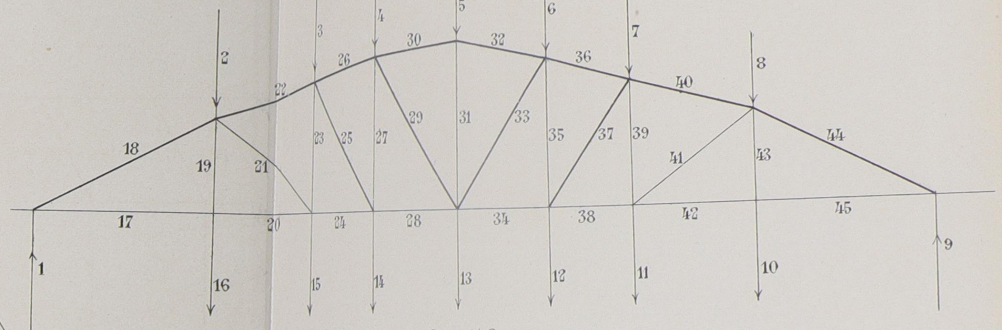
Чер. 136.



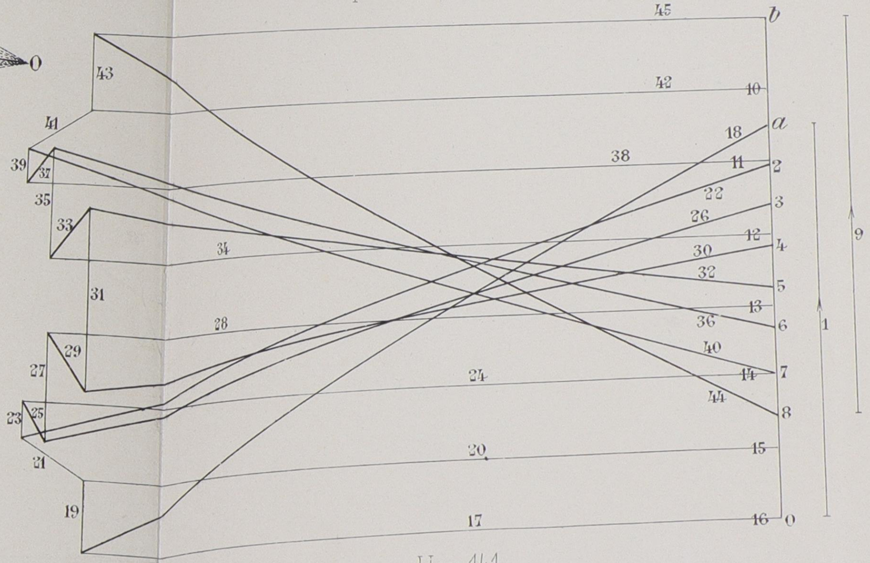
Чер. 137.



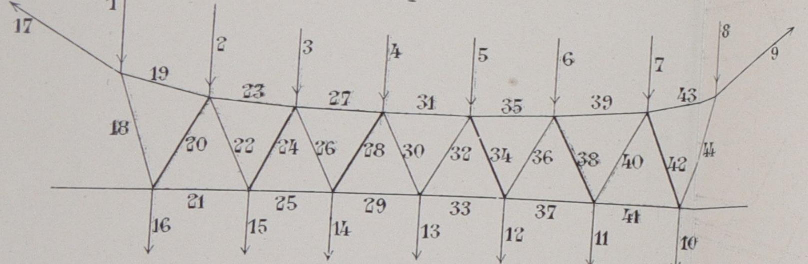
Чер. 142



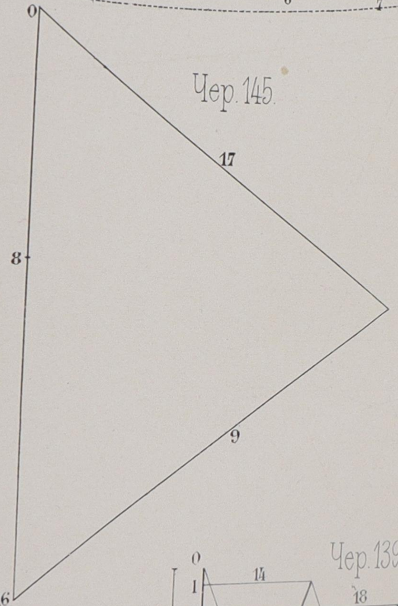
Чер. 143



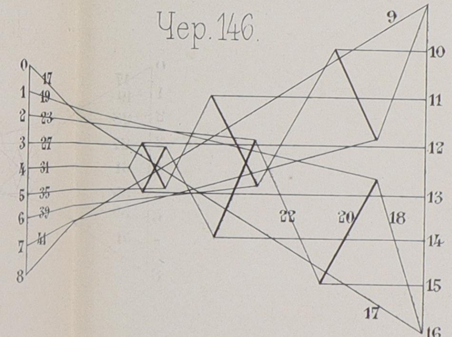
Чер. 144.



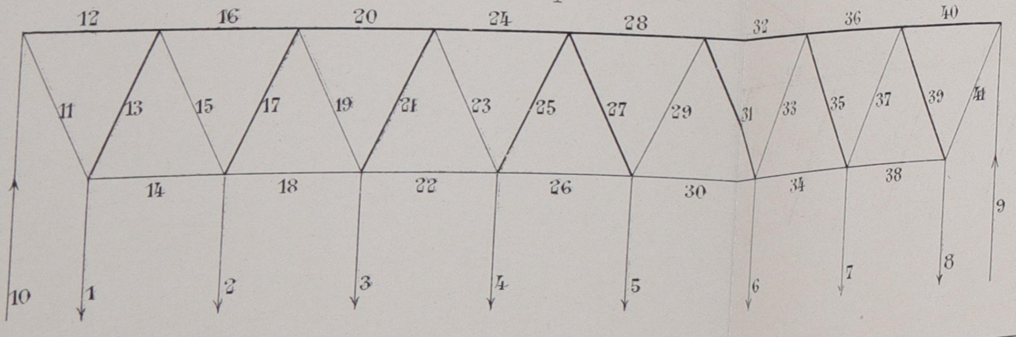
Чер. 145.



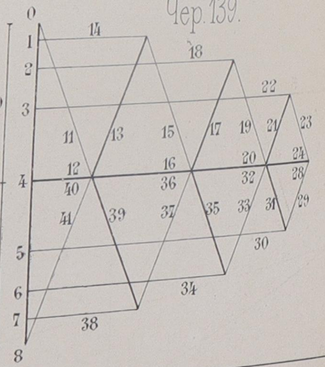
Чер. 146.



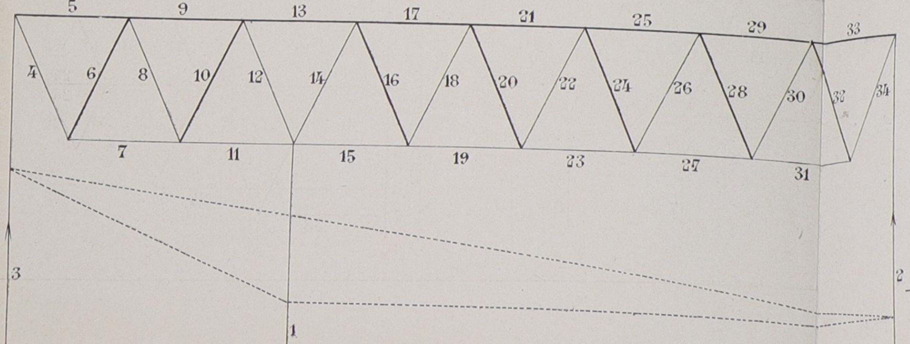
Чер. 138.



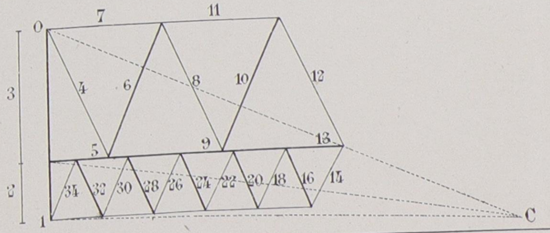
Чер. 139.



Чер. 140.

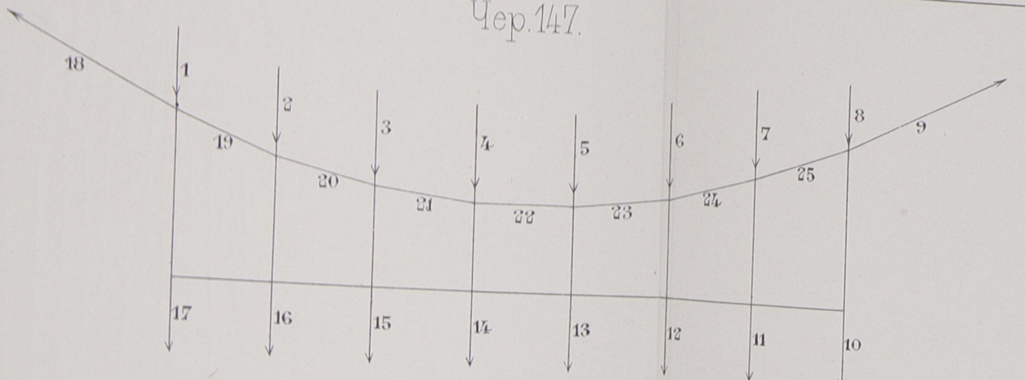


Чер. 141.

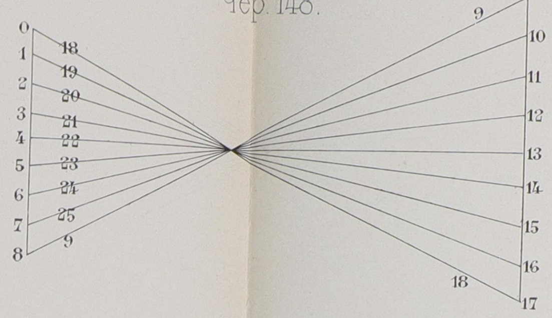


Автолит. Ф. Кремеръ, Пет. ст. Звѣринская 4.

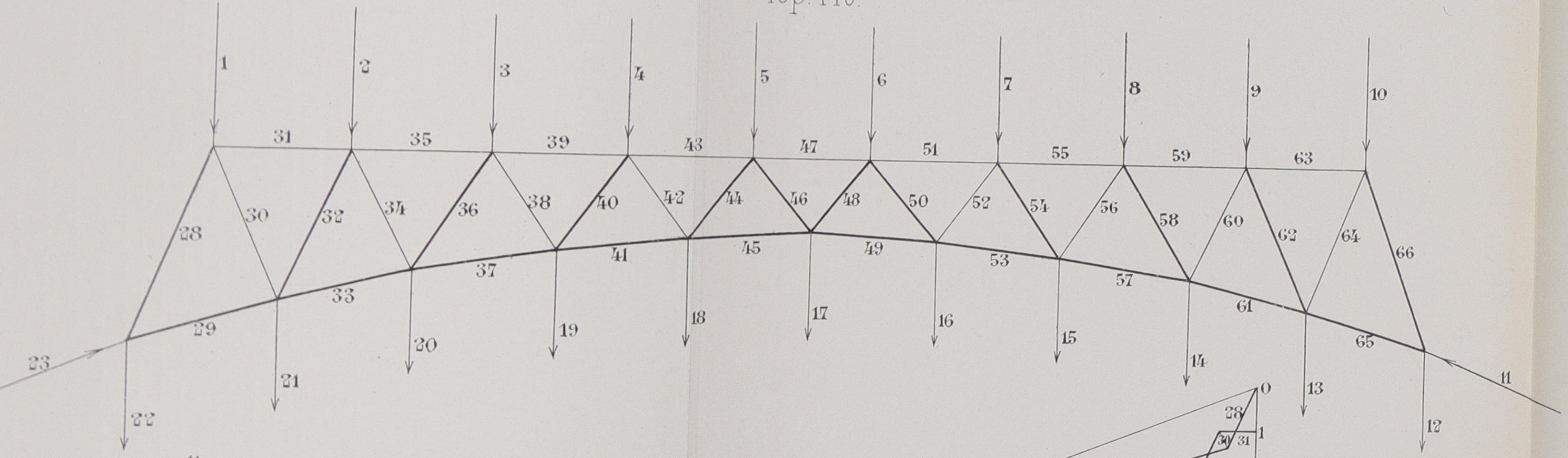
Чер. 147.



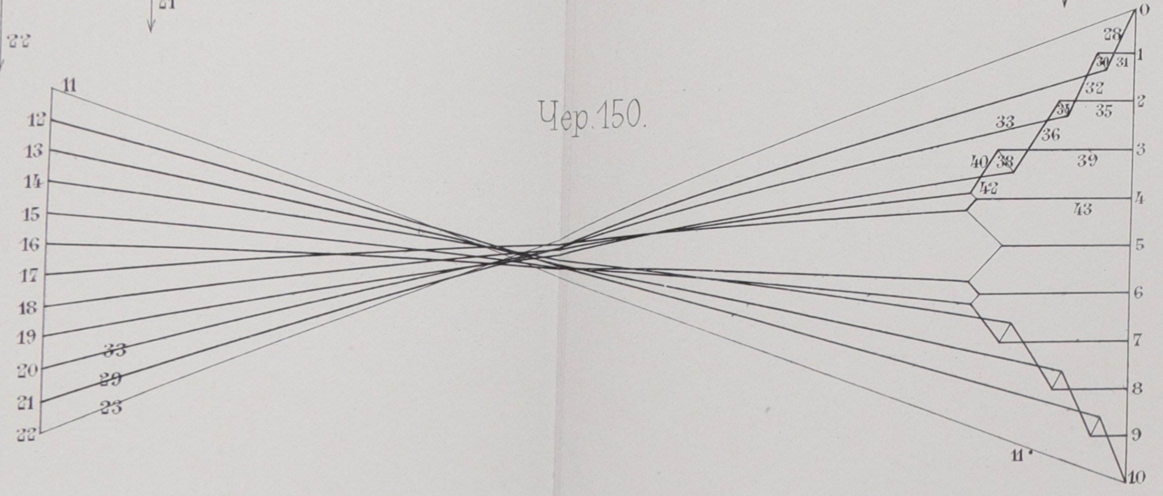
Чер. 148.



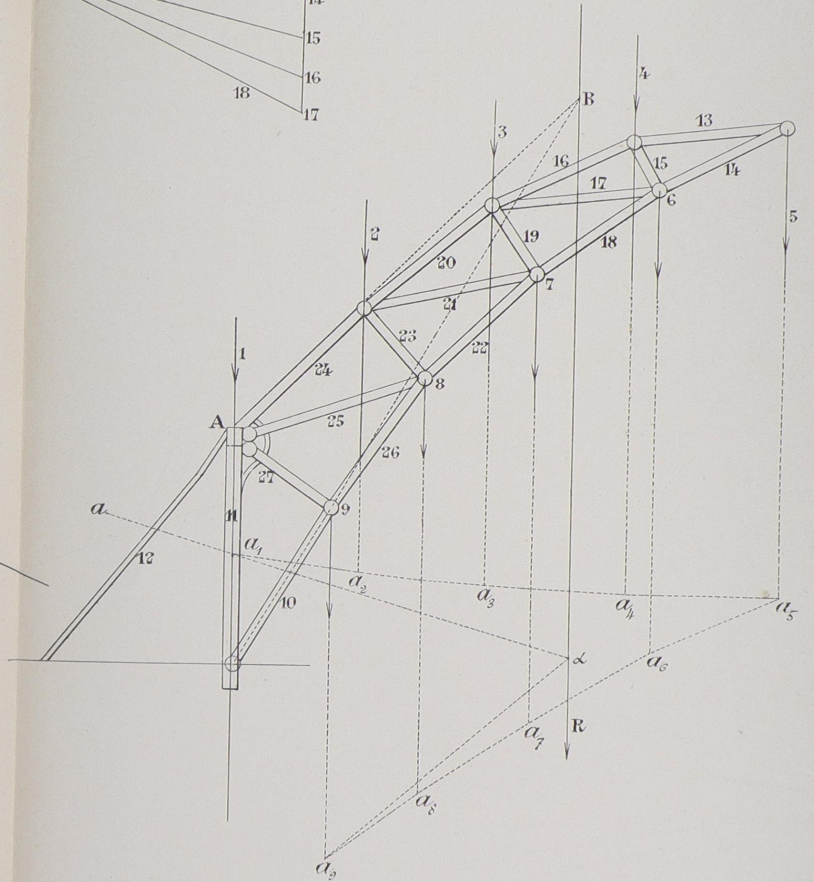
Чер. 149.



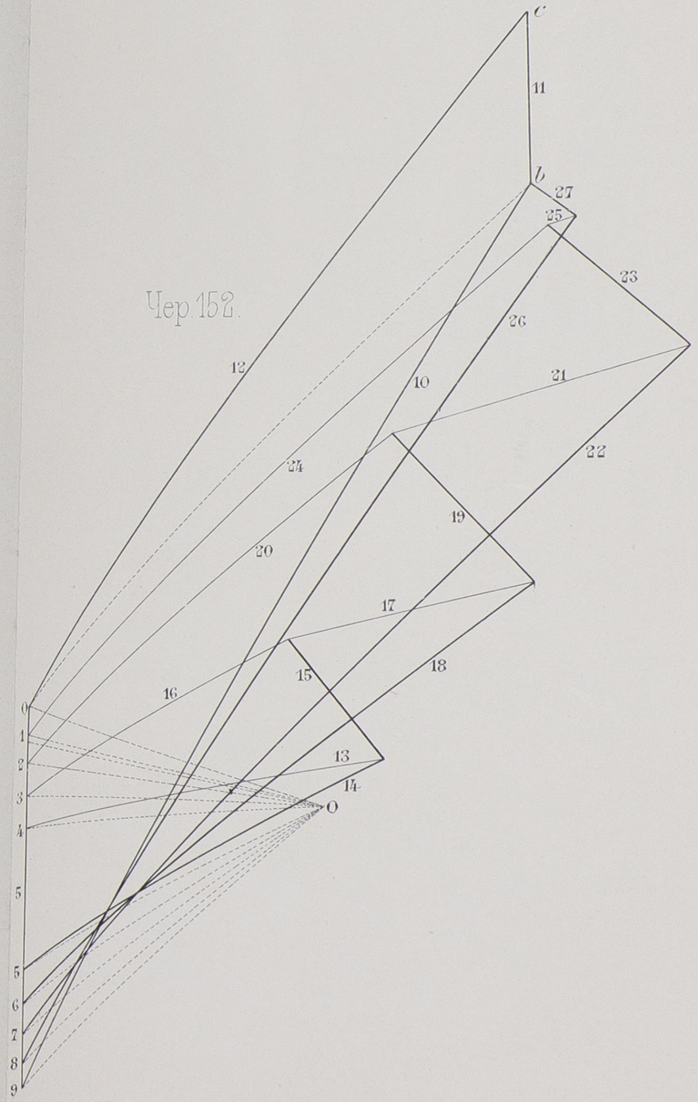
Чер. 150.



Чер. 151.



Чер. 152.



Автолит. Ф. Кремеръ, Петерб. Звѣринская 44.