

531

572

МЕХАНИКА

СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ,

МГНОВЕННЫЯ СИЛЫ И ВЗАИМНЫЕ УДАРЫ
МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ТѢЛАМИ.

СОСТАВИЛЪ

Д. Бобылевъ,

Заслуженный Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.

1905.

1331

Дел. 2007

Издание Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

МЕХАНИКА

СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ,

МГНОВЕННЫЯ СИЛЫ И ВЗАИМНЫЕ УДАРЫ
МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ТѢЛАМИ.

СОСТАВИЛЪ

Д. Бобылевъ,

Заслуженный Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.

1905.

1975

БИБЛИОТЕКА
Болорусскаго
института инженерное

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	СТР.
Механика системы материальных точек	1
§ 1. Система материальных точек. Связи. Сопротивления связей	1
§ 2. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, подверженных данным силам и связанным данными связями, величины и направления сопротивлений которых могут быть определены каким бы то ни было образом	7
§ 3. Уравнения равновесия сил и полных сопротивлений связей той же системы	8
§ 4. Общие законы движения материальных систем. Первый общий закон: движения центра инерции	8
§ 5. Частные случаи общего закона движения центра инерции и следствия их.	10
§ 6. Общий закон изменения главного момента количества движения материальной системы. (а) Моменты вокруг начала координат	12
§ 7. Общий закон изменения главного момента количества движения материальной системы. (б) Моменты вокруг центра инерции	14
§ 8. Общий закон изменения живой силы системы.	18
§ 9. Общий закон изменения количества движения каждой материальной точки системы	19
§ 10. Возможныя перемещения системы точек, подчиненных связям	20
§ 11. Величины и направления дифференциальных параметров связи. Разделение сопротивлений связи на реакции и на сопротивления, зависящія от трения и от физических свойств связи	23
§ 12, а. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, связанных несколькими идеальными связями (без трения)	27
§ 12, б. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, связанных несколькими связями с сопротивлениями трения	28
§ 13. Уравнения равновесия системы материальных точек, связанных несколькими идеальными связями. Условия равновесия данных сил, приложенных къ материальнымъ точкамъ	29
§ 14. Начало возможных перемещений изъ положений равновесия системы материальных точек, подчиненных идеальнымъ связямъ	40
§ 15. Число интегрированій, необходимыхъ для опредѣленія движения системы материальных точек, подчиненныхъ связямъ. Число произвольныхъ постоянныхъ. Условия, которымъ должны удовлетворять проекціи скорости точекъ вслѣдствіе существованія связей	44
§ 16. Интегралы совокупныхъ дифференциальныхъ уравненій движения, получаемые при интегрированіи дифференциальныхъ уравненій движения центра инерціи	45
§ 17. Случай, въ которыхъ дифференциальные уравнения главного момента количества движения даютъ интегралы, выражающіе законы площадей.	50
§ 18. Интегралъ, выражающій законъ сохранения полной энергіи системы. Теорема Кенига о разложеніи живой силы системы на двѣ части	54
§ 19. Понятіе о виртуальныхъ отклоненіяхъ движущихся материальныхъ точекъ	59
§ 20. Потерянные силы. Сила инерціи. Начало Даламбера. Начало виртуальныхъ отклоненій	61
§ 21. Примеры рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ изъ области динамики материальныхъ точекъ	63

Динамика твердыхъ тѣлъ	72
§ 1. Неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ и абсолютно твердое матеріальное тѣло	72
§ 2. Величины, опредѣляющія положеніе твердаго тѣла въ пространствѣ	74
§ 3. Дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла	76
§ 4. Моменты инерціи тѣла вокругъ разныхъ осей. Свойства моментовъ инерціи вокругъ разныхъ осей, пересѣкающихся или параллельныхъ. Эллипсоидъ инерціи для какой либо точки тѣла. Главныя оси инерціи. Центральный эллипсоидъ инерціи. Главныя центральныя оси инерціи. Главные моменты инерціи. Вычисленіе величинъ ихъ для однородныхъ тѣлъ и для тѣлъ, масса которыхъ имѣеть ось симметріи	80
§ 5. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси. Условія, при которыхъ ось вращенія можетъ быть свободною. Физическій маятникъ	90
§ 6. Поступательное движеніе твердаго тѣла	99
§ 7. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости. Мгновенный центръ и мгновенная ось центровъ. Центроиды; катаніе безъ скольженія центроиды, движущейся по центроидѣ неподвижной	99
§ 8. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости. Живая сила при этомъ движеніи. Законъ измѣненія живой силы тѣла. Сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ нему	103
§ 9. Вопросы о катаніи однородныхъ твердыхъ тѣлъ цилиндрическаго вида и тѣлъ вращенія по плоскостямъ или цилиндрическимъ поверхностямъ	105
§ 10. Объ относительномъ движеніи одного твердаго тѣла по отношенію къ другому въ томъ случаѣ, когда оба тѣла имѣють абсолютное движеніе параллельно одной и той же неподвижной плоскости	115
§ 11. Соединеніе вращеній вокругъ пересѣкающихся осей	120
§ 12. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ центра инерціи. Проекціи угловой скорости на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ	122
§ 13. Проекціи на оси, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ вращательной скорости какой либо точки тѣла при вращеніи его вокругъ центра инерціи	125
§ 14. Проекціи главнаго линейнаго момента количества движенія твердаго тѣла, вокругъ центра инерціи его, на главныя центральныя оси инерціи.	126
§ 15. Живая сила вращенія твердаго тѣла вокругъ центра инерціи	127
Мгновенныя силы и взаимные удары между твердыми тѣлами	129
§ 1. Общій законъ измѣненія количества движенія каждой матеріальной точки системы	129
§ 2. Мгновенныя силы	130
§ 3. Свободная неизмѣняемая система матеріальныхъ точекъ подѣйствіемъ мгновенной силы, приложенной къ одной изъ точекъ ея	132
§ 4. Ударъ двухъ гладкихъ твердыхъ, поступательно-движущихся шаровъ. Раздѣленіе удара на два акта. Измѣненіе живой силы при ударѣ	135
§ 5. Продольный ударъ какихъ либо твердыхъ тѣлъ, движущихся поступательно такъ, что центры тяжести ихъ остаются на одной прямой. Примѣненіе къ вопросу о вбиваніи свай	141
§ 6. Ударъ матеріальной точки о поверхность неподвижнаго или движущагося твердаго тѣла	143
§ 7. Ударъ твердаго гладкаго шара, движущагося поступательно, о твердое гладкое тѣло, движущееся параллельно неподвижной плоскости	147
§ 8. Ударъ шара о неподвижный свободный твердый брусъ перпендикулярно къ его длинѣ	150
§ 9. Ударъ движущагося бруса или параллелоипеда о вполнѣ неподвижное препятствіе	151
§ 10. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось. Центръ удара. Баллистическій маятникъ	153

быть или больше нуля, или равна нулю, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \geq 0, \quad \dots \quad (19)$$

или

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) \geq 0. \quad \dots \quad (19, \text{bis})$$

Это значит, что, если материальная точка находится на неударивающей по одну сторону кривой, то кривая допускает точку иметь скорость либо перпендикулярную къ нормали N , либо составляющую съ послѣднею острый уголъ.

Если скорость v дѣлаетъ полную производную

$$\frac{df}{dt} = \Delta f \cdot v \cos(v, N)$$

меньшею нуля, т. е., если уголъ между v и N тупой, то при такомъ, недопускаемомъ кривою направленіи скорости v , происходитъ ударъ, состоящій въ мгновенномъ развитіи весьма большой реакціи, направленной по N , которая, дѣйствуя въ теченіе весьма короткаго промежутка времени, измѣняетъ скорость точки въ скорость, удовлетворяющую условію (19).

Положимъ, что кривая, выражаемая уравненіемъ

$$f(x, y, t) = 0, \quad \dots \quad (20)$$

находится на наружной поверхности движущагося твердаго тѣла. Такъ какъ кривая имѣетъ собственное движеніе вмѣстѣ съ тѣломъ, то поэтому въ уравненіи ея, кромѣ координатъ x, y , входитъ еще и время явнымъ образомъ.

Если материальная точка всегда удерживается этою кривою, то полная производная по t отъ f должна быть равна нулю, т. е.:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \dots \quad (21)$$

или:

$$\Delta f \cdot v \cos(v, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (21, \text{bis})$$

Материальная точка находится на мгновеніе въ совпаденіи съ нѣкою точкою твердаго тѣла, на которомъ находится эта кривая. Но тѣло имѣетъ собственное движеніе. Назовемъ буквою w скорость этой точки твердаго тѣла. Такъ какъ и эта точка остается на кривой, то и скорость w должна удовлетворять условію (21, bis). Слѣдовательно:

$$\Delta f \cdot w \cos(w, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \Delta f \cdot w \cos (w, N) \dots \dots \dots (22)$$

Поэтому условию (21) или (21, bis) можно дать такой видъ:

$$\frac{df}{dt} = \Delta f \cdot (v \cos (v, N) - w \cos (w, N)) = 0, \dots \dots (23)$$

или, такъ какъ Δf есть величина неравная нулю, то условіе будетъ:

$$v \cos (v, N) = w \cos (w, N) \dots \dots \dots (24)$$

Примемъ теперь во вниманіе, что матеріальная точка не удерживается кривою линіею (20) и если находится на ней, то можетъ сойти съ нея въ наружную свободную сторону. Когда она находится на кривой, то послѣдняя допускаетъ матеріальную точку имѣть всякія скорости, удовлетворяющія условію:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0, \dots \dots \dots (25)$$

или, согласно предыдущему:

$$\frac{df}{dt} = \Delta f \cdot (v \cos (v, N) - w \cos (w, N)) \geq 0 \dots \dots \dots (26)$$

Если скорость v точки дѣлаетъ полную производную отъ f по t меньшею нуля:

$$\frac{df}{dt} < 0,$$

то происходитъ ударъ; мгновенно развивающаяся до весьма большой величины реакція измѣняетъ, въ теченіе весьма короткаго времени, скорость точки v въ такую, которая дѣлаетъ полную производную отъ f по t равною или большею нуля.

Импульсъ реакціи кривой за время отъ t_1 (момента начала удара) до какого либо момента t ($t < (t_1 + \vartheta)$) имѣетъ величину положительную, непрерывно возрастающую во время удара. Количество движенія матеріальной точки измѣняется въ это время по формуламъ (1), которыя въ настоящемъ случаѣ имѣютъ такой видъ:

$$m \frac{dx}{dt} - m (x')_1 = \frac{\partial f}{\partial x} J,$$

$$m \frac{dy}{dt} - m (y')_1 = \frac{\partial f}{\partial y} J,$$

гдѣ

$$J = \int_{t_1}^t \lambda dt$$

есть импульсъ множителя реакціи.

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на $\frac{\partial f}{\partial v}$, второе — на $\frac{\partial f}{\partial y}$ и сложивъ, получимъ:

$$m \left(\frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t} \right) + m \left(\left(\frac{df}{dt} \right)_1 - \frac{\partial f}{\partial t} \right) = (\Delta f)^2 J,$$

или

$$m \frac{df}{dt} = m \left(\frac{df}{dt} \right)_1 + (\Delta f)^2 \cdot J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Написанная въ скобкахъ полная производная отъ f по t имѣетъ въ моментъ t_1 величину отрицательную (какъ сказано раньше). Изъ этого равенства видно, что полная производная отъ f по t во время удара быстро возрастаетъ вслѣдствіе быстро увеличенія импульса J . Тотъ моментъ τ удара, въ который полная производная отъ f по t сдѣлается равною нулю, будетъ моментомъ, раздѣляющимъ ударъ на два акта. Импульсъ J_1 за время первого акта опредѣлится изъ равенства (27), примѣненного къ моменту τ . Изъ него получимъ:

$$J_1 = - \frac{m}{(\Delta f)^2} \left(\frac{df}{dt} \right)_1.$$

Въ этотъ моментъ τ скорость v_τ должна удовлетворять равенству:

$$v_\tau \cos(v_\tau, N) - w \cos(w, N) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

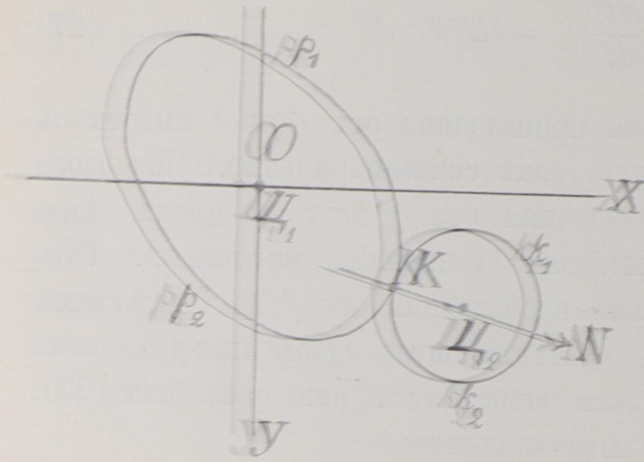
За время второго акта удара импульсъ множителя реакціи равенъ $J_1 \epsilon$, гдѣ ϵ коэффициентъ возстановленія.

Въ разсужденіяхъ этого параграфа предполагалось, что ударъ не измѣняетъ скоростей точекъ твердаго тѣла. Это мыслимо только при томъ условіи, чтобы масса твердаго тѣла была бесконечно велика сравнительно съ массою матеріальной точки m .

§ 7. Ударъ твердаго гладкаго шара, движущагося поступательно, о твердое гладкое тѣло, движущееся параллельно неподвижной плоскости.

Твердое тѣло массы M движется параллельно неподвижной плоскости XOY , въ которой остается центръ инерціи его Π_1 . Поверхность тѣла симметрична относительно этой плоскости. Центръ инерціи Π_2 шара остается также въ этой плоскости и шаръ движется поступательно, такъ что скорость всякой точки шара равна и параллельна скорости центра Π_2 . Въ моментъ t_1 поверхность шара встрѣчается съ кривою пересѣченія поверхности твердаго тѣла съ плоскостью XOY . Ударъ начинается въ моментъ t_1 въ точкѣ K прикосновенія круга Kk_1k_2 съ кривою p_1p_2K (фиг. 34). Начало координатъ находится въ центрѣ инерціи Π_1 тѣла,

скорость точки Π_1 направлена по оси X -овъ и равна A , а угловая скорость вращения тела въ моментъ t_1 равна ω_1 и вращение совершается ввертуть оси OZ . Скорости точки шара въ моментъ t_1 имѣютъ проекціи aa и bb на оси X -овъ и Y -овъ. Координаты точки K суть x_k и y_k и нормаль N въ точку K къ обѣимъ касающимся кривымъ составляетъ съ



Черт. 34.

осью X -овъ и Y -овъ углы α и β . Моментъ инерціи тела ввертуть оси OZ означимъ черезъ C .

Означимъ черезъ I импульсъ реакціи за время перваго акта удара. Импульсъ реакціи, дѣйствующій на шаръ массы m , проходитъ всегда черезъ Π_2 , по $K\Pi_2N$, и потому не сообщаетъ никакого вращенія шару. Проекціи на оси координатъ скоростей центра шара ввсѣхъ точкахъ его въ моментъ t означимъ черезъ

u_1 и v_1 за проекціи скоростей точки шара въ моментъ окончанія полнаго удара черезъ u_2 и v_2 . Обратный импульсъ, дѣйствующій на тело массы M за время перваго акта удара, измѣняетъ скорость A центра инерціи Π_1 въ скорость, имѣющую проекціи U_1 и V_1 въ моментъ t и угловую скорость ω въ угловую скорость ω_t . Въ концѣ всего удара проекціи скорости центра инерціи Π_1 суть U_2 и V_2 и угловая скорость равна ω_2 .

По формуламъ (4) § 33-го

$$\left. \begin{aligned} m(u_1 - a) &= J_1 \cos \alpha, \\ m(v_1 - b) &= J_1 \cos \beta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} M(U_1 - A) &= -J_1 \cos \alpha, \\ MV_1 &= -J_1 \cos \beta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Изъ формулъ (5) § 33-го понадобится только третья, въ которой моментъ количества движенія (J_c) надо замѣнить произведеніемъ момента инерціи C на угловую скорость; моментъ же импульса, дѣйствующаго на тело, будетъ равенъ $-J_1(x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)$. Такимъ образомъ получится равенство:

$$C(\omega_t - \omega_1) = -J_1(x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha) \dots \dots \dots (31)$$

Согласно съ тѣмъ, что сказано въ предыдущемъ параграфѣ, въ моментъ t окончанія 1-го акта удара проекція на нормаль N скорости точки шара K (или центра шара) должна быть равна проекціи на нее скорости точки K тела массы M . Проекціи первой на оси X -овъ и Y -овъ равны u_1 , v_1 .

а проэкціи на тѣ же оси скорости точки тѣла M равны $U_1 - y_k \omega_\tau$, $V_1 + x_k \omega_\tau$, поэтому для момента τ должно имѣть мѣсто равенство:

$$u_1 \cos \alpha + v_1 \cos \beta = U_1 \cos \alpha + V_1 \cos \beta + \omega_\tau (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha) \quad (32)$$

Раздѣливъ равенства (29) на m , умноживъ 1-е на $\cos \alpha$, второе — на $\cos \beta$ и сложивъ, получимъ:

$$u_1 \cos \alpha + v_1 \cos \beta - (a \cos \alpha + b \cos \beta) = \frac{J_1}{m}.$$

Раздѣлимъ равенства (30) на M , равенство (31) на C и составимъ изъ нихъ слѣдующее:

$$U_1 \cos \alpha + V_1 \cos \beta + \omega_\tau (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha) - (A \cos \alpha + \omega_1 (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)) = -\frac{J_1}{M} - \frac{J_1}{C} (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)^2.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ на основаніи равенства (32) слѣдуетъ равенство:

$$J_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{1}{C} (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha)^2 \right) = A \cos \alpha + \omega_1 (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha) - (a \cos \alpha + b \cos \beta), \quad (33)$$

изъ котораго опредѣлится J_1 .

Зная J_1 , изъ равенствъ (29), (30), (31) опредѣлимъ $u_1, v_1, U_1, V_1, \omega_\tau$, а затѣмъ, зная коэффициентъ возстановленія ε , изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} m(u_2 - u_1) &= J_1 \varepsilon \cos \alpha, \\ m(v_2 - v_1) &= J_1 \varepsilon \cos \beta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} M(U_2 - U_1) &= -J_1 \varepsilon \cos \alpha, \\ M(V_2 - V_1) &= -J_1 \varepsilon \cos \beta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

$$C(\omega_2 - \omega_\tau) = -J_1 \varepsilon (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha) \dots \dots (36)$$

опредѣлимъ всѣ величины $u_2, v_2, U_2, V_2, \omega_2$ послѣ окончанія удара.

Зная величину импульса J_1 , можно и прямо опредѣлить скорости въ моментъ окончанія удара по формуламъ, получаемымъ черезъ сложение равенствъ (29), (30), (31) съ соотвѣтственными равенствами (34), (35), (36). Эти формулы—слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} m(u_2 - a) &= J_1 (1 + \varepsilon) \cos \alpha, \\ m(v_2 - b) &= + J_1 (1 + \varepsilon) \cos \beta, \\ M(U_2 - A) &= - J_1 (1 + \varepsilon) \cos \alpha, \\ MV_2 &= - J_1 (1 + \varepsilon) \cos \beta, \\ C(\omega_2 - \omega_1) &= - J_1 (1 + \varepsilon) (x_k \cos \beta - y_k \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \dots \dots (37)$$

§ 8. Ударъ шара о неподвижный однородный свободный брусъ перпендикулярно къ его длинѣ.

Изложенное въ предыдущемъ параграфѣ примѣнимъ къ частному случаю.

Брусъ однородный, имѣющій видъ прямоугольнаго параллелоипеда, длина котораго $2l$, ширина $2n$, толщина $2c$, находится въ покоѣ въ такомъ положеніи, что центръ инерціи его C_1 совпадаетъ съ началомъ координатъ, главная ось $2l$ совмѣщена съ осью X_1OX , главная ось $2n$ совмѣщена съ осью Y_1OY . Масса бруса равна M , моментъ инерціи C вокругъ оси OZ равенъ $M(l^2 + n^2) : 3$.

Шаръ имѣетъ скорость b параллельно положительной оси Y -овъ, направленіе скорости пересѣкаетъ ударяемую грань въ точкѣ K , координаты которой суть:

$$x_k, y_k = -n.$$

Зная коэффициентъ возстановленія ϵ , опредѣлить окончательный результатъ удара.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $a = 0$, $A = 0$, $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = -1$, $\omega_1 = 0$, то импульсъ J_1 по формулѣ (33) имѣетъ слѣдующую величину.

$$J_1 = \frac{Mm(l^2 + n^2)b}{(M + m)(l^2 + n^2) + 3mx_k^2}.$$

По формуламъ (37) найдемъ, что u_2 и U_2 равны нулю, а прочія величины равны:

$$v_2 = b - \frac{J_1}{m}(1 + \epsilon),$$

$$V_2 = \frac{J_1}{M}(1 + \epsilon),$$

$$\omega_2 = \frac{3J_1x_k}{M(l^2 + n^2)}(1 + \epsilon).$$

Если подставить сюда найденное выше выраженіе для J_1 , то получимъ:

$$v_2 = b \frac{m(l^2 + n^2) + 3mx_k^2 - M(l^2 + n^2)\epsilon}{(M + m)(l^2 + n^2) + 3mx_k^2},$$

$$V_2 = \frac{m(l^2 + n^2)b(1 + \epsilon)}{(M + m)(l^2 + n^2) + 3mx_k^2},$$

$$\omega_2 = \frac{3mbx_k(1 + \epsilon)}{(M + m)(l^2 + n^2) + 3mx_k^2}.$$

Изъ этихъ выраженій видно, что скорость центра бруса будетъ всегда направлена по положительной оси OY , что, если $x_k > 0$, то угловая скорость ω_2 будетъ соответствовать вращенію слѣва на право, но скорость v_2

шара будетъ положительною или отрицательною, смотря потому будетъ ли $3mx_k^2$ болѣе $(M\varepsilon - m)(l^2 + n^2)$ или менѣе этой величины. Въ послѣднемъ случаѣ шаръ отразится обратно.

§ 9. Ударъ движущагося однороднаго бруса или параллелоипеда о вполнѣ неподвижное препятствіе, предполагая коэффициентъ возстановленія равнымъ нулю.

Представимъ себѣ, что шаръ неподвиженъ и накрѣпко придѣланъ къ совершенно неподвижному массиву, масса котораго безконечно велика. Тогда въ формулахъ § 7-го можно положить a и b равными нулю и m равнымъ безконечно-большой величинѣ.

Положимъ, что однородный брусь длины $2l$, ширины $2n$, толщины $2c$ въ моментъ удара находится въ слѣдующемъ положеніи: центр инерціи P_1 , бруса находится въ началѣ координатъ, главная ось $2l$ совмѣщена съ осью X_1OX , главная ось $2n$ —съ осью Y_1OY . Шаръ, придѣланный къ неподвижному массиву, прикасается къ грани $y = n$ въ точкѣ K , координаты которой суть x_k и $y_k = n$. Скорость центра инерціи P_1 , равная B , направлена по положительной оси OY . Угловая скорость ω_1 вокругъ оси OZ соотвѣтствуетъ вращенію слѣва на право.

Изъ равенства (33) § 7, въ которомъ $A \cos \alpha$ надо замѣнить черезъ $B \cos \beta$, положить a и b равными нулю, $\cos \alpha$ равнымъ нулю и $\cos \beta$ равнымъ 1, а m равнымъ ∞ , получимъ слѣдующую величину J_1

$$J_1 = \frac{M (B + \omega_1 x_k) (l^2 + n^2)}{l^2 + n^2 + 3x_k^2}.$$

Полагая ε равнымъ нулю, опредѣлимъ результатъ неупругаго удара о неподвижное препятствіе изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$M (V_1 - B) = -J_1, \quad C (\omega_\tau - \omega_1) = -J_1 x_k,$$

откуда

$$V_1 = B - \frac{J_1}{M}; \quad \omega_\tau = \omega_1 - \frac{3J_1 x_k}{M(l^2 + n^2)}.$$

Подставивъ сюда полученное выраженіе для J_1 , будемъ имѣть слѣдующія выраженія скорости V_1 и угловой скорости ω_τ :

$$V_1 = \frac{3Bx_k - \omega_1 (l^2 + n^2)}{l^2 + n^2 + 3x_k^2} x_k, \dots \dots \dots (38)$$

$$\omega_\tau = - \frac{3Bx_k - \omega_1 (l^2 + n^2)}{l^2 + n^2 + 3x_k^2} \dots \dots \dots (39)$$

Изъ этихъ выраженій видно, что скорость V_1 будетъ равна нулю,

если $x_k = 0$ и если

$$x_k = \frac{\omega_1 (l^2 + n^2)}{3B}, \quad (40)$$

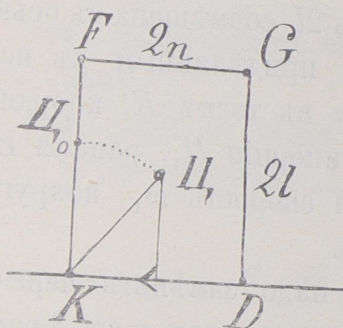
въ послѣднемъ случаѣ и $\omega_\tau = 0$.

При x_k большихъ величины (40) скорость V_1 направлена по положительной оси OY , а угловая скорость ω_τ имѣетъ направленіе обратное угловой скорости ω_1 ; при x_k меньшихъ величины (40), скорость V_1 направлена по отрицательной оси OY_1 и угловая скорость ω_τ имѣетъ направленіе одинаковое съ ω_1 .

Точка K представляетъ собою мгновенный центръ вращенія параллелоипеда. Если радиусъ шара ничтожно малъ, то точка K представляетъ собою остріе препятствія и вокругъ оси, проведенной черезъ K , и параллельной оси OZ параллелоипедъ начнетъ вращаться съ угловою скоростью ω_τ .

Мы разсмотримъ здѣсь слѣдующій вопросъ.

Однородный параллелоипедъ, размѣры котораго суть $2l$, $2n$ и $2c$, скользитъ по горизонтальной плоскости стороною DK (фиг. 35) съ нѣкоторою скоростью B по направленію DK . Въ точкѣ K встрѣчается твердое препятствіе, при встрѣчѣ съ которымъ тѣло получаетъ угловую скорость ω_τ .



Черт. 35.

Такъ какъ параллелоипедъ двигался поступательно, то угловая скорость была равна нулю и поэтому угловая скорость ω_τ получить по формулѣ (39) величину:

$$\omega_\tau = - \frac{3Bl}{4l^2 + n^2},$$

потому что теперь $x_k = l$.

Съ этою угловою скоростью тѣло вращается вокругъ ребра K и можетъ опрокинуться. Спрашивается, при какой скорости B является возможность опрокидыванія.

Такое опрокидываніе наступаетъ послѣ того, когда центръ Π получитъ вертикальное положеніе $K\Pi_0$.

Подъ вліяніемъ вѣса Mg тѣла, приложеннаго къ точкѣ M , живая сила вращающагося тѣла постепенно уменьшается.

При вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси живая сила его равна половинѣ произведенія момента инерціи вокругъ этой оси на квадратъ угловой скорости. Такъ какъ моментъ инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ K , равенъ

$$\frac{M}{3} (l^2 + n^2) + M \cdot \overline{K\Pi}^2 = \frac{4}{3} M (l^2 + n^2),$$

потому что $\overline{K\Pi}^2 = l^2 + n^2$, то живая сила при какой либо угловой скорости ω будетъ:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2) \omega.$$

Съ другой стороны, если при такой угловой скорости высота центра Π надъ плоскостью KD будетъ y , то потенциалъ вѣса тѣла будетъ $-Mgy$.

По закону сохраненія полной энергiи:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2) \omega^2 = -Mgy + h,$$

гдѣ h произвольная постоянная, опредѣляемая по начальнымъ обстоятельствамъ, при которыхъ $y = l$, $\omega = \omega_\tau$; поэтому

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2) \omega_\tau^2 = -Mgl + h.$$

Вычтя первое равенство изъ второго, получимъ:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2) (\omega_\tau^2 - \omega^2) = Mg(y - l).$$

Чтобы центръ Π принялъ положеніе Π_0 , когда $y = \sqrt{l^2 + n^2}$, достаточно, чтобы угловая скорость ω въ этомъ положеніи была равна нулю. Изъ предыдущаго же равенства тогда получимъ:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2) \omega_\tau^2 = Mg(\sqrt{l^2 + n^2} - l).$$

Отсюда слѣдуетъ, что для опрокидыванія квадратъ угловой скорости ω_τ долженъ быть больше

$$\frac{3}{2} \frac{g(\sqrt{l^2 + n^2} - l)}{l^2 + n^2},$$

а, слѣдовательно, должно быть

$$\frac{9B^2 l^2}{(4l^2 + n^2)^2} > \frac{3}{2} \frac{g(\sqrt{l^2 + n^2} - l)}{l^2 + n^2}.$$

Слѣдовательно, параллелопипедъ опрокинется, запнувшись о препятствіе, если скорость его будетъ больше

$$\frac{4l^2 + n^2}{l} \sqrt{g \frac{(\sqrt{l^2 + n^2} - l)}{6(l^2 + n^2)}}.$$

§ 10. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось. Центръ удара. Баллистическій маятникъ.

Для опредѣленія дѣйствія мгновенныхъ силъ на какое либо твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось, слѣдуетъ взять квадратуры за время

дѣйствія этихъ силъ отъ обѣихъ частей шести уравненій (20), находящихся на стр. 92-й. (§ 5. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси...)

Здѣсь, въ этомъ параграфѣ, имѣется въ виду рассмотреть дѣйствіе одной мгновенной силы на твердое тѣло, симметричное относительно плоскости, проведенной черезъ его центръ инерціи и имѣющее неподвижную ось, перпендикулярную къ этой плоскости, но не проходящую черезъ центръ инерціи. При этомъ предполагается, что мгновенная сила приложена къ нѣкоторой точкѣ той же плоскости и импульсъ ея заключается въ этой плоскости.

Кромѣ этого, мы здѣсь предположимъ, что точки опоры K_1 и K_2 оси вращенія находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ плоскости симметріи.

Въ § 4-мъ динамики твердыхъ тѣлъ на страницахъ 86 и 87 было показано, что, если твердое тѣло имѣетъ полную симметрію относительно нѣкоторой плоскости, то для всякой точки этой плоскости одна изъ главныхъ осей инерціи тѣла перпендикулярна къ этой плоскости слѣдовательно, произведенія инерціи D и E (стр. 93) для точки пересѣченія O оси вращенія съ плоскостью симметріи тѣла равны нулю. По этой причинѣ равны нулю и моменты количествъ движенія $(L_0)_x$, $(L_0)_y$ (стр. 92) количествъ движенія такого симметричнаго твердаго тѣла вокругъ осей OX , OY , заключающихся въ плоскости симметріи.

Предполагаемъ, что въ моментъ начала дѣйствія мгновенной силы тѣло было въ покоѣ, причемъ центръ инерціи его C находился на оси OY . Означимъ разстояніе центра C отъ O черезъ ξ_c . Моментъ инерціи тѣла вокругъ оси вращенія означимъ черезъ C_0 , а моментъ инерціи вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ инерціи, означимъ черезъ C_c . Какъ уже упомянуто на стр. 97-й, по формулѣ (18) стр. 85-й (выражающей зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей), зависимость между C_0 и C_c такая:

$$C_0 = C_c + M \xi_c^2, \quad \dots \dots \dots (41)$$

гдѣ M — масса тѣла.

Вслѣдствіе симметріи и тѣла и точекъ опоры относительно плоскости XOY , а также и вслѣдствіе того, что импульсъ мгновенной силы заключается въ этой плоскости, реакціи опоръ K_1 и K_2 должны быть равны и параллельны между собою, такъ что $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = \lambda_4$, а потому проэкціи мгновенныхъ импульсовъ этихъ реакцій должны быть равны между собою. Означимъ проэкціи этихъ импульсовъ (за время отъ $t = 0$ до $t = \vartheta$) на оси OX и OY такъ:

$$\mu_1 = \mu_3 = \int_0^{\vartheta} \lambda_1 dt = \int_0^{\vartheta} \lambda_3 dt,$$

$$\mu_2 = \mu_4 = \int_0^{\vartheta} \lambda_2 dt = \int_0^{\vartheta} \lambda_4 dt.$$

Точка приложенія импульса пусть будетъ на оси OY , такъ что координаты ея суть $x = 0$, и y , а проэкции импульса мгновенной силы на эти оси означимъ черезъ J_x и J_y . Моменты этого импульса вокругъ осей координатъ равны: вокругъ OX — нулю, вокругъ OY — нулю и вокругъ OZ равенъ — yJ_x .

Взявъ квадратуры за время дѣйствія мгновенной силы отъ обѣихъ частей равенствъ (20; 1), (20; 2), (20; 6) стр. 92-й, получимъ:

$$M \frac{dx_c}{dt} = J_x + 2\mu_1$$

$$M \frac{dy_c}{dt} = J_y + 2\mu_2$$

$$C_0 \omega = -yJ_x;$$

квадратуры же отъ обѣихъ частей равенствъ (20, 4), (20, 5) даютъ тождества $0 = 0$.

Такъ какъ твердое тѣло можетъ только вращаться вокругъ оси OZ , а угловая скорость, сообщенная импульсомъ, равна ω и центр инерціи находится на оси OY , то скорость его перпендикулярна къ оси Y и равна

$$\frac{dx_c}{dt} = -\xi_c \omega,$$

поэтому первое и второе изъ предыдущихъ равенствъ получаютъ такой видъ:

$$-M\xi_c \omega = J_x + 2\mu_1$$

$$0 = J_y + 2\mu_2.$$

Для того, чтобы точки опоры K_1 и K_2 при дѣйствіи мгновенной силы не получили удара, то есть, чтобы $2\mu_2$ и $2\mu_1$ были равны нулю, необходимо, чтобы было:

$$J_y = 0, \quad -M\xi_c \omega = J_x,$$

слѣдовательно, мгновенная сила должна быть перпендикулярна къ прямой OC .

На основаніи же третьяго изъ полученныхъ равенствъ:

$$\omega = -\frac{yJ_x}{C_0},$$

поэтому:

$$-M\xi_c \omega = M\xi_c \frac{yJ_x}{C_0}.$$