Дата 2007

Эд. Аутенритъ.

Профессоръ Королевской Высшей Технической Школы въ Штутгартѣ.

СТАТИЧЕСКІЙ РАСЧЕТЪ КУПОЛЬНЫХЪ СВОДОВЪ.

Перевелъ, съ согласія автора, Гражданскій Инженеръ
В. Р. Бернгардъ.

Приложеніе къ журналу «ЗОДЧІЙ» за 1898 г.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія С.-Петербургскаго Градоначальства, Милліонная, № 17.
1898.

БИБЛИОТЕКА
Белорусского
института инженеров
железнодорожного
транспорта

Предисловіе автора.

Автору настоящей статьи были поручены всѣ статическіе расчеты для большого церковнаго сооруженія, причемъ ему пришлось также опредѣлить толщину купольнаго свода значительнаго пролета. Послѣднее заставило его подробно изучить теорію купольныхъ сводовъ. При этомъ онъ пришелъ къ заключенію, что теорія расчета купольныхъ сводовъ крайне нуждается во всестороннемъ изученіи, анализѣ и дальнѣйшей разработкѣ. Вслѣдствіе этой потребности онъ и рѣшился опубликовать нижеизложенное.

Штутгартъ, въ Мартѣ 1894 г.

Эд. Аутенритъ.

Предисловіе переводчика.

Настоящій переводъ былъ сдѣланъ не только съ цѣлью познакомить семью русскихъ техниковъ съ остроумною теоріею Аутенрита, но вызванъ еще другими, вѣскими соображеніями.

Въ настоящее время бетонныя покрытія все болѣе и болѣе вытѣсняютъ кирпичъ и камень; сравнительная легкость бетона, безспорная несгораемость его и опредѣленная крѣпость этого матеріала при одинаковой пропорціи песку и цемента въ массѣ, сравнительная простота изготовленія бетона, – все это заставляетъ все чаще и чаще прибѣгать къ его употребленію. Между тѣмъ, существующія теоріи расчета, которыми приходится пользоваться, выведены большею частью на основаніи теоріи предѣльнаго равновѣсія, гдѣ весь сводъ разсматривается какъ тѣло, состоящее изъ отдѣльныхъ, ничѣмъ не связанныхъ клиньевъ,—теорія безспорно не подходящая для расчета такого упругаго тѣла, какимъ является напримѣръ, бетонный куполъ, гдѣ игнорировать сцѣпленіемъ частицъ очевидно нельзя

Попытки примѣнить данныя теоріи упругости къ расчету купольныхъ сводовъ точно также оказались пока практически невыполнимыми и поэтому при повѣркѣ прочности и устойчивости бетонныхъ куполовъ примѣняли, по неволѣ, невѣрный способъ расчета. Не вдаваясь въ критическую оцѣнку теоретическихъ достоинствъ метода Аутенрита, (читатель найдетъ для этого всѣ данныя въ разъясненіяхъ, дѣлаемыхъ самимъ авторомъ), замѣтимъ только, что для цѣлей практики, гдѣ подчасъ быстрое и, до извѣстной степени, увѣренное опредѣленіе размѣровъ и наивыгоднѣйшей формы купольныхъ покрытій имѣетъ громадное значеніе, графо-аналитическій методъ Аутенрита представляетъ всѣ необходимыя для этого данныя.

Первоначальное наше предположеніе—дополнить переводъ численными примѣрами, по независящимъ отъ насъ обстоятель-

ствамъ, оказалось, въ настоящее время, еще не выполнимымъ, но въ ближайшемъ будущемъ мы намѣрены пополнить этотъ пробѣлъ.

Что касается самаго перевода, то мы по мѣрѣ силъ старались не отступать отъ оригинала; при всемъ этомъ, однако, для многихъ терминовъ, впервые употребляемыхъ Аутенритомъ пришлось установить таковые и въ русскомъ языкѣ; при этомъ нами допущены нѣкоторыя, быть можетъ, ошибки въ смыслѣ точности перевода, но мы старались для ясности послѣдняго, придерживаться установившихся у насъ въ техникѣ терминовъ. Такъ, напримѣръ, слово: *Lagerfugenstützlinie*, обозначающее въ буквальномъ переводѣ *пятовая опорная кривая*, переведено нами: « *пятовая кривая давленія*», она же и есть *кривая сопротивленія опоръ для каждаго пятоваго сѣченія*; но въ виду того, что пята свода и опорная плоскость его, въ сущности синонимы, то читатель, надѣемся, извинитъ вольность нашего толкованія.

Кромѣ того, вслѣдствіе чрезмѣрной иногда сжатости подлинника, особенно по отношенію къ математическимъ выводамъ, по неволѣ пришлось сдѣлать свои дополненія, но при этомъ мы вездѣ тщательно выдѣляли послѣднія отъ текста оригинала.

Смѣю надѣяться, что мои собратья не откажутся сообщить вкравшіяся неточности, и всякія указанія въ этомъ направленіи будутъ приняты съ благодарностью.

В. Бернгардъ.

Замѣченныя опечатки:

				Напечатано:	Должно быть.
Стран.	3	7	строка сверху	меридіанальными	меридіональными
»	6	5	» снизу	меридіанальнаго	меридіональнаго
»	»	8	» »	меридіанальными	меридіональными
»	11	5	» »	$E_1 E_2 E_1' E_2'$	$E_1 E_2 E_2' E_1'$
»	12	3	» сверху	$E_1' E_1'$	$E_1 E_1'$
»	13	1	» »	$\rho x\, d\omega\, ds = 0.$	$p x\, d\omega\, ds = 0.$
»	»	на	чертежѣ А	r	v
»	14	3	строка сверху	ȣ	γ
»	»	5	» »	$\sigma_0 = \frac{pv}{2\delta} = \frac{\delta ȣ . v}{2\delta} = \frac{v . ȣ}{2}$	$\sigma_0 = \frac{pv}{2\delta} = \frac{\delta . \gamma . v}{2\delta} = \frac{v . \gamma}{2}$
»	15	10	» »	$\rho = \sigma\gamma$	$p = \sigma\gamma$
»	»	14	» »	$p \operatorname{Sin}\alpha + \frac{dA}{ds} + \frac{A - B}{\tau} = 0;$	$p \operatorname{Sin}\alpha + \frac{dA}{ds} + \frac{A - B}{t} = 0$
»	18	8 и 17	» »	e	c
»	28	11	» »	$= \frac{N}{x\, c}$	$\frac{N}{x_c . c}$
»	»	17	» »	$\frac{dH}{dy} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{c_0}$	$\frac{dH.}{dy} \frac{dy}{dx^1} \cdot \frac{1}{c_0}$

шей величинѣ горизонтальнаго распора, есть истинная кривая давленія. Другіе ученые, наоборотъ, утверждали, что *наивыгоднѣйшая* кривая давленія есть въ то же время и истинная.

I-ая ГЛАВА.

Введеніе.

Всѣ извѣстныя до настоящаго времени теоріи разсчета сводовъ преслѣдуютъ одну главную цѣль: опредѣлить наименьшую толщину свода такимъ образомъ, чтобы наибольшее сжимающее напряженіе, проявляющееся въ частяхъ свода, не превосходило предѣла прочнаго сопротивленія матеріала кладки его; разсматриваются ли цилиндрическіе или купольные своды—безразлично: условіе это соблюдается вообще для сводовъ всевозможнаго образованія.

Методы разсчета цилиндрическихъ сводовъ, наиболѣе примѣняемыхъ въ строительномъ дѣлѣ, до извѣстной степени служатъ основою для разсчетовъ сводовъ другихъ формъ, почему казалось бы не лишнимъ остановиться на разсмотрѣніи теоріи цилиндрическихъ сводовъ.

Въ цилиндрическихъ сводахъ обыкновеннаго устройства, давленія, производимыя полусводами на ихъ пяты, или, такъ называемыя, *опорныя давленія* свода—величины статически неопредѣлимыя, поэтому нельзя непосредственно опредѣлить *истинную* кривую давленія свода, а стало-быть, и наибольшее напряженіе матеріала кладки его. Не смотря на это, въ прежнее время многими учеными дѣлались разнообразнѣйшія предположенія относительно истиннаго положенія этой кривой въ сводѣ, и каждый, естественно, старался доказывать правильность своихъ допущеній. Шефлеръ, напримѣръ, полагалъ доказаннымъ, что кривая давленія, соотвѣтствующая *наименьшей величинѣ горизонтальнаго распора*, есть истинная кривая давленія. Другіе ученые, наоборотъ, утверждали, что *наивыгоднѣйшая* кривая давленія есть въ то же время и истинная.

Но приводимыя, какъ тѣми, такъ и другими, доказательства, не выдерживаютъ строгой научной критики. Съ того только времени, когда стали примѣнять теорію разсчета упругихъ арокъ къ разсчету цилиндрическихъ сводовъ, явилась возможность въ извѣстныхъ случаяхъ получить болѣе ясное представленіе относительно расположенія истинной кривой давленія въ сводахъ и добыть болѣе положительныя данныя о дѣйствительныхъ наибольшихъ напряженіяхъ, претерпѣваемыхъ матеріаломъ свода.

Тѣмъ не менѣе и въ настоящее время цилиндрическіе своды рѣдко разсчитываются по даннымъ теоріи упругихъ арокъ, а производятъ разсчетъ чаще всего, притомъ проще и съ достаточною точностью, на основаніи практическаго правила, по которому толщина всякаго цилиндрическаго свода, можетъ считаться достаточною, если возможно построить такую кривую давленія, которая, не выходя за линіи ядра поперечнаго сѣченія свода, въ то же время не вызываетъ напряженій, превышающихъ прочное сопротивленіе матеріала кладки.

Изъ сказаннаго видно, что рядомъ съ строго научнымъ способомъ разсчета, основанномъ на выводахъ теоріи упругости, получилъ права гражданства и другой методъ повѣрки устойчивости и прочности цилиндрическихъ сводовъ, основанный на данныхъ наблюденій и опытовъ.

Въ какомъ однако положеніи находится нынѣ теорія купольныхъ сводовъ? Возможно ли въ настоящее время опредѣлить толщину купольнаго свода съ такою же увѣренностью, какъ это дѣлается при разчетѣ цилиндрическаго свода? Каковы данныя, существующія по этому вопросу въ настоящее время?

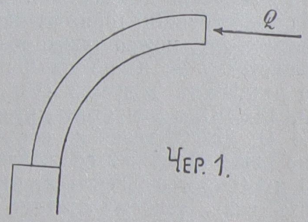
Постараемся отвѣтить сначала на послѣдній вопросъ.

II-ая ГЛАВА.

Критическій разборъ важнѣйшихъ изъ существующихъ теорій разсчета полныхъ купольныхъ сводовъ.

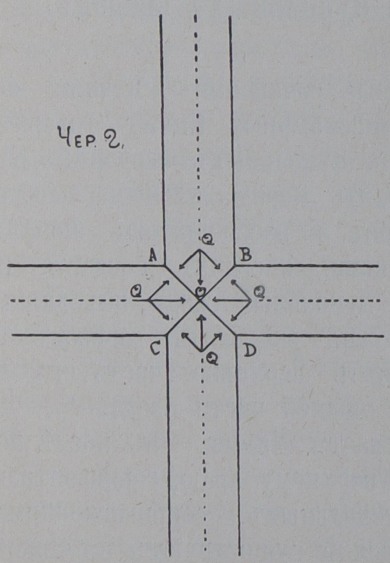
Методъ Navier. Въ своемъ сочиненіи: «Resumé des leçons sur l'application de la mêcanique» Navier говоритъ слѣдующее относительно разсчета купольныхъ сводовъ: «Купольный сводъ слѣдуетъ раздѣлить меридіанальными плоскостями на большое число секторовъ, и разсматривать послѣдніе какъ отдѣльные вырѣзки цилиндрическихъ сводовъ, не связанные между собою. Всякій купольный сводъ, находящійся въ состояніи равновѣсія, можно раздѣлить горизонтальною сѣкущею плоскостью и отнять верхнюю часть его, не нарушая равновѣсія оставшейся нижней части свода.

«Вслѣдствіе этого», продолжаетъ Navier, «въ послѣдней развиваются по направленію къ верхнему краю, горинзонтальныя усилія, нормально къ вертикальнымъ, соприкасающимся гранямъ или швамъ свода, которыя не существуютъ въ сплошныхъ сводахъ». Для удержанія же въ равновѣсіи отдѣльныхъ купольныхъ секторовъ сплошного свода Navier допустилъ, что въ каждомъ такомъ секторѣ дѣйствуетъ въ шелыгѣ его горизонтальная сила Q (чер. 1), подобная горизонтальному распору цилиндрическаго свода, не поясняя однако возможность появленія такого усилія. Почему однако давленія въ соприкасающихся швахъ купольнаго сектора исчезаютъ, коль скоро сводъ сплошной, и взамѣнъ этого являются горизонтальныя силы Q, сомнительнаго происхожденія, это совершенно непо-



Чер. 1.

нятно. Scheffler впервые обратилъ вниманіе на ошибочность допущеній Navier, въ изданномъ въ 1857 году сочиненіи «Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken», указавъ, что купольные своды, состоящіе изъ кольцеобразныхъ слоевъ или колецъ (Kränzen), лежащихъ на наклонныхъ коническихъ основаніяхъ, сжимаются поочередно вышележащими кольцами, и потому между отдѣльными клиньями послѣднихъ вызываются сжимающія усилія и давленія, направленныя нормально къ соприкасающимся швамъ и возрастающія постепенно по направленію къ шелыгѣ свода. Предполагаемыя же горизонтальныя усилія Q, по словамъ Шефлера, дѣйствующія въ шелыгѣ свода, должны равняться нулю, иначе матеріалъ свода претерпѣвалъ бы конечное давленіе, передающееся безконечно малой площади или, принимая эту площадь за конечную, слѣдуетъ допустить, что послѣдняя должна воспринять безконечно большое давленіе. Далѣе Scheffler замѣчаетъ, вполнѣ основательно, что всѣ теоріи купольныхъ сводовъ, допускающія въ шелыгѣ купола проявленіе горизонтальнаго распора, слѣдуетъ признать несостоятельными.

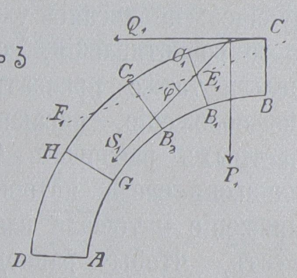


Примѣчаніе переводчика. Несообразность допущенія Navier относительно существованія горизонтальнаго распора, приложеннаго въ шелыгѣ купольнаго свода, можно также доказать на основаніи слѣдующихъ соображеній: разсмотримъ въ планѣ четыре самостоятельныя однородныя и одинаковыя по размѣрамъ полуарки (чер. 2), взаимно пересѣкающіяся по линіямъ AO, BO, CO DO, и допустимъ, что каждая полуарка производитъ въ шелыгѣ давленіе Q, дѣйствующее по средней линіи таковой. Разложивъ затѣмъ поочередно силы Q на двѣ составляющія, перпендикулярныя къ прямымъ AO, BO, DO и CO, легко убѣдиться, что, по причинѣ симметричности расположенія всѣхъ силъ, таковыя взаимно уравновѣсятся. Предполагая далѣе, что число такихъ пересѣкающихся арокъ стало безконечно большимъ (а слѣдовательно ширина каждой безконечно малой), то мы получимъ купольный сводъ, въ которомъ, по доказанному, точно также уравновѣсятся всѣ горизонтальныя усилія, приложенныя къ шелыгѣ отдѣльныхъ элементовъ его, а слѣдовательно распоръ купольнаго свода никоимъ образомъ не можетъ быть приложенъ въ шелыгѣ его.

Теорія Шефлера о купольныхъ сводахъ.

Въ вышеуказанномъ сочиненіи Шефлера: «Theorie der Gewölbe etc» впервые развивается имъ теорія купольныхъ сводовъ, основанная, также какъ и его теорія цилиндрическихъ сводовъ на, такъ называемомъ, принципѣ наименьшаго сопротивленія. Разсматривая купольный секторъ, ограниченный двумя меридіальными плоскостями, раздѣленный на отдѣльные клинья, Шефлеръ говоритъ слѣдующее: «предполагая, что сила P_1 представляетъ собственный вѣсъ перваго клина BCC_1B_1 (черт. 3), сложеннаго съ нагрузкою на таковой, то для равновѣсія его необходимо, чтобы направленіе силы P_1 пересѣкало шовъ B_1 C_1 или составляло съ нормалью къ нему уголъ, не превосходящій угла тренія φ.

Чер 3



При несоблюденіи одного изъ этихъ условій, нужно допустить, что, проявляющееся въ этомъ случаѣ въ кольцѣ, къ которому принадлежитъ клинъ BCC_1B_1, горизонтальное усиліе Q_1, вмѣстѣ съ вѣсомъ клина P_1, должны складываться въ равнодѣйствующую S_1, удовлетворяющую упомянутымъ двумъ условіямъ. Изъ этого слѣдуетъ, что въ томъ случаѣ, когда эта равнодѣйствующая пройдетъ черезъ точку B_1, не составляя угла тренія съ нормалью къ шву B_1C_1, то слѣдуетъ опредѣлить величину Q_1 такимъ образомъ, чтобы уголъ (чер. 3). $S_1E_1F_1$ равнялся бы углу тренія. Во второмъ—т. е. когда направленіе S_1 составить съ нормалью къ шву B_1C_1 уголъ тренія, не проходя черезъ точку B_1 то величина Q_1 опредѣлится при томъ условіи, чтобы направленіе равнодѣйствующей встрѣтило бы названную точку.

Вводимыя горизонтальныя усилія или частные распоры Q_1 Q_2 .., на основаніи принципа наименьшаго сопротивленія, по величинѣ своей должны быть только что достаточными для сохраненія должнаго равновѣсія, т. е. должны быть минимальными и поэтому точки ихъ приложенія въ соотвѣтственныхъ клиньяхъ должны совпадать съ наивысшими точками послѣднихъ C, C_1, C_2..... Продолжая, на основаніи изложеннаго, опре-

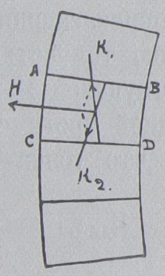
дѣленіе частныхъ горизонтальныхъ распоровъ, не трудно убѣдиться, что при обыкновенной формѣ купольнаго свода, въ концѣ концовъ, встрѣтится такой шовъ GH, для котораго введеніе частнаго, такъ сказать, удерживающаго распора, въ выше лежащемъ кольцѣ, уже не представляется необходимымъ. И такъ, предполагая, что всѣ частные распоры до этого шва опредѣлены, легко уже получить полный распоръ вырѣзка купольнаго свода, который будетъ равенъ суммѣ всѣхъ частныхъ распоровъ до шва GH...; толщина же свода на практикѣ можетъ быть опредѣляема, зная величину нормальнаго давленія производимаго вырѣзкомъ на опорную часть AD. Относительно изложеннаго метода Шефлера слѣдуетъ замѣтить слѣдующее: не касаясь уже безосновательности принципа наименьшаго сопротивленія, составляющаго основу теоріи Шефлера, нельзя также признать соотвѣтствующимъ дѣйствительности предположеніе, касающееся мѣстъ или точекъ приложеніи частныхъ распоровъ Q_1Q_2... въ высшихъ кромкахъ C_1C_2... клиньевъ свода, которые производятъ безконечно большое напряженіе матеріала кладки. По той же причинѣ нельзя допустить, чтобы равнодѣйствующія встрѣчали нижнія грани клиньевъ въ точкахъ B_1 B_2.... Изъ этого слѣдуетъ, что опредѣляемыя изложеннымъ способомъ напряженія въ сводѣ не могутъ быть истинными, толщина свода, опредѣленная по Шефлеру, можетъ также оказаться не соотвѣтственной.

При всемъ этомъ за Шефлеромъ остается громадная заслуга, заключающаяся въ выводѣ данныхъ, служащихъ основою раціональной теоріи о купольныхъ сводахъ.

Послѣдователемъ Шефлера является Wittmann, изложившій въ журналѣ «Zeitschrift für Bauwesen» за 1879 годъ свою теорію купольныхъ сводовъ, помѣщенную также въ его сочиненіи «Statik der Hochbau—Konstruktionen». Wittman также разсматриваетъ одинъ камень купольнаго вырѣзка, ограниченнаго двумя меридіанальными плоскостями. «Этотъ камень», говоритъ Wittman, «находится подъ вліяніемъ силы собственнаго вѣса и того давленія, которое производитъ на него вышележащая часть меридіанальнаго вырѣзка. Разсматриваемый камень сохранитъ свое равновѣсіе до тѣхъ поръ, пока равнодѣйствующая R изъ двухъ названныхъ усилій встрѣтитъ постель камня внутри ядра поперечнаго сѣченія его, составляя одновременно съ нормалью къ шву уголъ меньшій угла тренія φ;

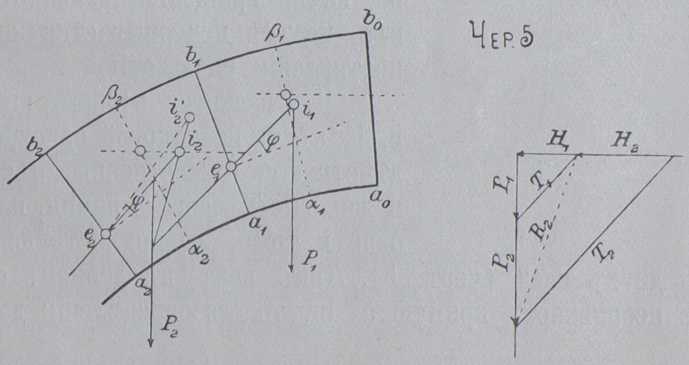
при такомъ допущеніи разсматриваемый камень не можетъ оказать никакого дѣйствія на два смежныхъ съ нимъ клина одного и того же горизонтальнаго слоя или кольца свода, а поэтому и не вызоветъ никакого противодѣйствія съ ихъ стороны.

«Коль скоро уголъ между R и нормалью къ шву станетъ большимъ угла тренія φ или, когда точка приложенія ея выходитъ изъ предѣловъ ядра поперечнаго сѣченія камня, то послѣдній начнетъ скользить по своей постели или начнетъ вращаться около нѣкоторой оси, стараясь раздвинуть сосѣдніе съ нимъ клинья; послѣдніе въ свою очередь окажутъ извѣстное противодѣйствіе, выражающееся силами K_1 и K_2, (черт. 4), *) направленными нормально къ соприкасающимся швамъ AB и CD; величина этихъ силъ конечно должна быть такова, чтобы удержать клинъ ABCD въ равновѣсіи. Дѣйствіе силъ K_1 и K_2 можетъ быть замѣнено одною горизонтальной силой H, дѣйствующей въ меридіональной плоскости, проходящей черезъ центръ тяжести клина ABCD. Величина H опредѣляется въ зависимости отъ вышеперечисленныхъ условій... наименьшая величина H, необходимая для удержанія клина въ равновѣсіи, въ дѣйствительности вызоветъ послѣднее».



Чер. 4

Сообразно сказанному Wittmann предлагаетъ слѣдующій пріемъ для опредѣленія давленія въ швахъ купольнаго свода (чер. 5).



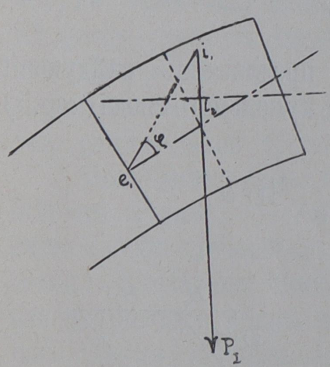
*) Чертежъ 4-й вставленъ переводчикомъ для большей ясности текста.

«Верхній камень a_1 b_1 b_0 a_0 находится подъ дѣйствіемъ силы собственнаго вѣса его P_1; для равновѣсія камня необходимо, чтобы равнодѣйствующая T_1 изъ этого вѣса и горизонтальной силы H_1 прошла черезъ точку e_1, находящуюся на $^1/_3$ толщины шва отъ нижней кривой направляющей свода, составляя въ то же время съ нормалью къ прямой a_1 b_1 уголъ = углу тренія φ».

На основаніи этого имъ опредѣлены (черт. 5) силы T_1 и H_1. T_1 дѣйствующія по направленію прямой, проведенной черезъ точку e_1 подъ угломъ φ къ нормали, H_1 проходитъ черезъ точку пересѣченія i_1 прямой e_1 i_1 съ направленіемъ силы вѣса. Далѣе Wittmann продолжаетъ:

«Положеніе точки i_1 впрочемъ не можетъ быть произвольнымъ, такъ какъ противодѣйствія или реакціи K_1 и K_2 *разумѣется* не должны выходить за предѣлы ядра поперечнаго сѣченія соприкасающихся швовъ, и можно предположить, съ достаточною точностью, что крайнее, допускаемое положеніе равнодѣйствующей H_1 изъ K_1 и K_2, будетъ прямая, проведенная на одной трети средней линіи α_1 β_1 камня, считая сверху. Допуская, что точка i_1 получится выше этой линіи, тогда направленіе равнодѣйствующей T_1 опредѣлится, соединивъ точку e_1 (черт. 6*) (не съ i_1, а съ точкою i_2, лежащей на пересѣченіи P_1 **) съ предѣльнымъ положеніемъ H_1, случай, доказывающій, что сопротивленіе камня вращенію проявляется ранѣе, нежели исчерпывается его сопротивленіе скольженію».

Черт. 6



Что касается второго камня a_1 b_1 b_2, a_2, то на таковой одновременно дѣйствуютъ и собственный вѣсъ его, и давленіе T_1 перваго камня, или, что одно и тоже, равнодѣйствующая R_2 этихъ двухъ силъ (черт. 5). Такъ какъ въ данномъ случаѣ R_2 не пересѣкаетъ прямую a_2 b_2, то для опредѣленія давленія

*) Дополнительный чертежъ, вставленный для большей ясности текста переводчикомъ.

**) Дополненіе переводчика.

T_2, перетерпѣваемаго плоскостью шва a_2 b_2, проводятъ черезъ нижнюю треть его, т. е. черезъ точку e_2 прямую подъ угломъ φ къ нормали къ a_2, b_2, принимая эту прямую за направленіе равнодѣйствующей T_2; въ этомъ случаѣ, однако получилось, что горизонтальный распоръ H_2, разсматриваемый какъ равнодѣйствующая двухъ реакцій въ соприкасающихся швахъ, пройдетъ черезъ точку i_2 пересѣченія направленій T_2 и R_2. Но такъ какъ при этомъ изъ чертежа 5 усматривается, что точка i_2 лежитъ выше горизонтальной прямой, проходящей черезъ верхнюю треть прямой α_2 β_2, между тѣмъ, какъ эта прямая есть предѣльное допускаемое положеніе H_2, то именно эту прямую и слѣдуетъ принять за истинное положеніе H_2 и въ то же время, соединивъ точку i_2 съ e_2, получимъ направленіе T_2. Опредѣливъ же направленіе T_2, этимъ самымъ опредѣляется и T_2, равно какъ и H_2. По изложенному способу опредѣляютъ частные распоры остальныхъ клиньевъ купольнаго сектора, продолжая указанныя построенія до тѣхъ поръ, пока не получится камень, для котораго $H = 0$. Въ соотвѣтственномъ кольцѣ купольнаго свода уже не проявляются горизонтальныя напряженія; тоже самое можно сказать и о нижележащихъ частяхъ свода, если пренебречь сопротивленіемъ ихъ вытягиванію».

Изслѣдуемъ теперь изложенный методъ.

Предположимъ, что камни $a_0b_0b_1a_1$ верхняго кольца купольнаго свода (чер. 5), лежатъ на своихъ постеляхъ, не соприкасаясь между собою, тогда вѣса P_1 этихъ камней будутъ перемѣщать камни книзу, прижимая ихъ къ постелямъ, такъ какъ углы, составляемые силами P_1 съ нормалями къ швамъ, очевидно будутъ больше угла тренія φ. Вслѣдствіе произшедшаго движенія, начинается взаимное соприкасаніе камней, развиваются сжимающія напряженія K, а стало быть, и горизонтальныя усилія H. Эти усилія, возрастая постепенно во все время движенія камней, въ концѣ концовъ приводятъ послѣдніе въ равновѣсіе. Какъ только достигнута граница равновѣсія, то прекращается опусканіе камней, а слѣдовательно и дальнѣйшее приращеніе силъ K и H; около сказанной границы противодѣйствіе T_1, вызываемое постелями камней, уже составляетъ съ нормалью къ первымъ уголъ тренія. На основаніи

такихъ разсужденій предположеніе Wittmann'а относительно направленія T_1 кажется доказаннымъ, точно также какъ его замѣчаніе: «наименьшая его величина H, необходимая для удержанія клина въ равновѣсіи, въ дѣйствительности вызоветъ послѣднее». Однако нельзя не замѣтить, что на практикѣ рѣдко приходится выводить купольные своды изъ штучнаго камня, а въ большинствѣ случаевъ изъ кирпичной кладки, сложенной на болѣе или менѣе доброкачественномъ растворѣ, и поэтому приходится принимать во вниманіе не столько треніе между отдѣльными кирпичами, сколько силу сцѣпленія раствора. Въ этомъ случаѣ нельзя опредѣлить a priori направленіе T_1. Что же касается точки приложенія T_1, то допущеніе, что эта точка должна лежать на краю ядра поперечнаго сѣченія, ошибочно, такъ какъ оно основано на ложномъ предположеніи, что камень, прижимаемый нѣкоторой силой R къ своей постели, начинаетъ вращаться, коль скоро точка приложенія силы выходитъ за линію ядра поперечнаго сѣченія или постели камня. Опусканье клиньевъ свода и вызываемое этимъ противодѣйствіе смежныхъ клиньевъ никогда не начинается въ тотъ моментъ, когда точка приложенія R помѣщается внѣ ядра плоскости шва. Съ другой же стороны равновѣсіе камня, прижатаго къ своей постели силою R, можетъ продолжаться даже тогда, когда точка приложенія ея лежитъ внѣ предѣловъ ядра; равновѣсіе же поколеблется только въ случаѣ чрезмѣрнаго давленія на кромку камня, т. е. когда начнетъ послѣдняя разрушаться. И такъ точка приложенія силы T_1 можетъ лежать и внѣ ядра поперечнаго сѣченія.

Точно также раіонъ дѣйствія силъ K не можетъ ограничиваться ядромъ сѣченія соприкасающихся швовъ, а слѣдовательно нельзя, признать горизонтальныя прямыя, проведенныя черезъ точки i (чер. 5), за предѣльныя наивысшія положенія силъ H. *Поэтому, нельзя быть увѣреннымъ, что сжимающія усилія въ отдѣльныхъ швахъ камней, опредѣленныя по Wittmann'у будутъ соотвѣтствовать дѣйствительнымъ напряженіямъ.*

Соединяя отдѣльныя точки приложенія усилій, проявляющихся въ постеляхъ камней, непрерывною линіею, получаютъ кривую давленія сектора купольнаго свода. Построивъ, слѣдовательно, эту кривую по теоріи Wittmann'а, нельзя быть увѣреннымъ, что это будетъ *истинная* кривая давленія — она

будетъ только *возможной* кривой. Кривая же давленія, построенная по Шефлеру, должна быть признана прямо *невозможной*, такъ какъ она доходитъ до самой шелыги свода. Въ послѣднемъ отношеніи нельзя не признать, что измѣненная Wittmann'омъ теорія Шефлера, представляется болѣе соотвѣтственной.

Что же касается истинной кривой давленія, то слѣдуетъ имѣть въ виду, что все относящееся до опредѣленія таковой въ цилиндрическихъ сводахъ, равнымъ образомъ, относится и къ купольнымъ: — точно также, какъ нельзя опредѣлить въ первыхъ истинную кривую давленія и дѣйствительное, наибольшее напряженіе, не пользуясь всеобщею теоріею упругости, точно также не удается этого сдѣлать и для купольныхъ сводовъ. Разрѣшеніе этого вопроса и въ прежнее время приводило къ ложнымъ выводамъ, почему слѣдуетъ остерегаться повторенія прежнихъ ошибокъ при опредѣленіи кривой давленія въ купольныхъ сводахъ.

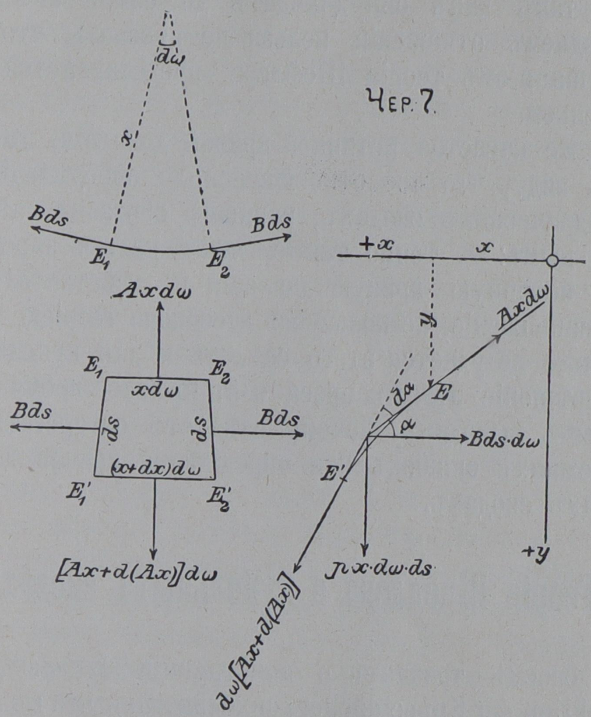
Теорія Шведлера о купольныхъ сводахъ.

Въ своемъ трактатѣ о конструкціи купольныхъ крышъ (Konstruktion der Kuppeldächer) опубликованнымъ въ «Zeitschrift für Bauwesen» за 1866 годъ, Schwedler выводитъ также теорію купольныхъ сводовъ. Онъ исходитъ изъ равновѣсія купольныхъ поверхностей, подразумѣвая подъ купольною поверхностью — поверхность вращенія, происшедшую отъ вращенія кривой, лежащей въ вертикальной плоскости, вокругъ вертикальной оси, лежащей въ той же плоскости, каковая поверхность вращенія «вѣсома и эластична». Далѣе Schwedler говоритъ.

«Равновѣсіе такой поверхности будетъ тождественно съ равновѣсіемъ чаши, незначительной толщины и одинаковой съ ней формы, коль скоро можно допустить, что всѣ силы упругости распредѣлены равномѣрно по толщинѣ ея».

Разсмотримъ элементъ $E_1E_2E_1'E_2'$ (черт. 7) вырѣзаннаго и ограниченнаго двумя меридіональными плоскостями и двумя параллельными кругами, на который дѣйствуютъ пять силъ, т. е. собственный вѣсъ элемента (включая и нагрузку) и сопротивленія или противодѣйствія, приложенныя къ четыремъ

боковымъ поверхностямъ элемента. Предполагая, что: σ нормальное напряженіе въ плоскости шва E_1E_2 элемента купола,



τ—нормальное усиліе въ соприкасающемся швѣ $E_1'E_1'$ (кольцевое напряженіе), примемъ пока оба названныя усилія вытягивающими, δ—толщина элемента купола, и обозначая $\sigma\delta$ черезъ A. и $\delta\tau$. черезъ B, тогда всѣ показанныя на чертежѣ 7-омъ усилія, дѣйствующія на элементъ $E_1E_2E_2'E_1'$, будутъ въ равновѣсіи. Такъ какъ сумма горизонтальныхъ составляющихъ *) должна равняться нулю, то:

$$-Axd\omega.\ \mathrm{Cos}\alpha + [Ax+d(A.x.)]\,d\omega.\ \mathrm{Cos}(\alpha+d\alpha) - Bds.\ d\omega = 0.$$

или упростивъ это выраженіе:

$$d\,(A\,x\,\mathrm{Cos}\,\alpha) - Bds = 0$$

откуда:

$$A\,x.\mathrm{Cos}\,\alpha = \int_0^s Bds$$

точно также второе условіе равновѣсія (сумма вертикальныхъ составляющихъ = 0) получитъ видъ:

*) Разсматривая таковыя какъ проекціи дѣйствующихъ на ось X-овъ.

$$-Axd\omega \operatorname{Sin}\alpha + [Ax + d.(Ax)]\, d\omega \operatorname{Sin}(\alpha + d\alpha) + \rho x d\omega ds = 0.$$

или упрощенно:

$$d(Ax.\operatorname{Sin}\alpha) + pxds = 0.$$

откуда:

$$Ax \operatorname{Sin}\alpha = -\int_0^s pxds$$

принимая за купольную поверхность, шаровую—описанную радіусомъ V и полагая p постояннымъ получимъ:

$$A = -\frac{pv}{1 + \operatorname{Cos}\alpha}\ ^{*)} \quad \text{и} \quad B = pv\left(\frac{1}{1 + \operatorname{Cos}\alpha} - \operatorname{Cos}\alpha\right)^{**)}$$

Первое изъ выведенныхъ двухъ уравненій указываетъ, что A всегда отрицательно, и что, слѣдовательно, въ постеляхъ камней никогда не могутъ проявляться вытягивающія напряженія.

---

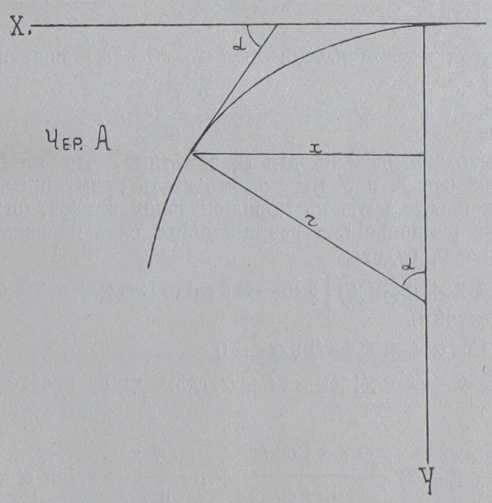
*) Изъ чертежа A видно, что $x = v.\operatorname{Sin}\alpha$ и $S = V\alpha$

тогда уравненіе $A\,x \operatorname{Sin}\alpha = -\int_0^S pxds$

приметъ видъ:

$$A\,V \operatorname{Sin}^2\alpha = -pV^2 \int_0^\alpha \operatorname{Sin}\alpha\, d\alpha =$$

$$= pV^2 \int_\alpha^0 \operatorname{Sin}\alpha\, d\alpha = pv^2(-\operatorname{Cos}\alpha)\,{}_\alpha^0$$



Въ вершинѣ купола: $A = -\frac{pV}{2}$ и обозначая допускаемое напряженіе черезъ σ_0 и вѣсъ кубической единицы сводчатой кладки черезъ ε (кромѣ собственнаго вѣса нѣтъ другой нагрузки),

$$-\sigma_0 = \frac{A}{\delta} \cdot \sigma_0 = \frac{pV}{2\delta} = \frac{\delta\varepsilon . V}{2\delta} = \frac{V\varepsilon}{2}$$

т. е. *сжатіе независимо отъ толщины свода*, коль скоро нѣтъ нагрузки на куполѣ. Что же касается значенія B, то въ шелыгѣ купола

$$B = -\frac{pV}{2} = A.$$

Съ возрастаніемъ α величина B остается еще нѣкоторое время отрицательной, т. е. въ сопрягающихся швахъ дѣйствуютъ сжимающія напряженія, абсолютное значеніе B постепенно уменьшается и, наконецъ, для извѣстнаго значенія α, которое обозначимъ черезъ α', $B = 0$. Пока $\alpha > \alpha'$, B—положительно, т. е. въ соприкасающихся швахъ дѣйствуютъ вытягивающія напряженія.

$$\mathbf{A}\, V \operatorname{Sin}^2 \alpha = -\, p\, V^2 \left(-\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Cos} 0\right) =$$
$$= +\, p\, V^2 \left(\operatorname{Cos} \alpha - 1\right).$$

$$A = -\frac{p\, V^2 \left(1 - \operatorname{Cos} \alpha\right)}{v \operatorname{Sin}^2 \alpha} = -\frac{p\, V \left(1 - \operatorname{Cos} \alpha\right)}{1 - \operatorname{Cos}^2 \alpha} \text{ или,}$$

раздѣливъ числителя и знаменателя на $(1 - \operatorname{Cos} \alpha)$, получимъ

$$A = -\frac{p\, V}{1 + \operatorname{Cos} \alpha}$$

**) Для вывода выраженія для B, замѣтимъ, что вмѣсто разсмотрѣнныхъ проэкцій на оси X и У мы можемъ взять сумму проэкцій всѣхъ силъ на нормальную и касательную къ меридіональной кривой, тогда получимъ два новыхъ уравненія равновѣсія. Проэкція всѣхъ силъ на касательную, сумма которыхъ должна $= 0$, будетъ:

$$-\mathbf{A}\,\mathbf{X}\, d\omega + \left[\mathbf{A}\,\mathbf{X} + d\left(\mathbf{A}\,\mathbf{X}\right)\right] d\omega - \mathbf{B}\, d s\, d\omega \operatorname{Cos} \alpha + p\,\mathbf{X}\, d\omega\, d s \operatorname{Sin} \alpha = 0$$

или сокративъ получимъ:

$$d\left(\mathbf{A}\,\mathbf{X}\right) - \mathbf{B}\, d s \operatorname{Cos} \alpha + p\,\mathbf{X}\, d s \operatorname{Sin} \alpha = 0$$

но $d\left(\mathbf{A}\,\mathbf{X}\right) = \mathbf{X}\, d\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\, d\,\mathbf{X}$; $\mathbf{X} = t \operatorname{Cos} \alpha$ гдѣ t длина касательной и $\mathbf{X}\, d s = t\, d x$ тогда

$$t \frac{d\,\mathbf{X}}{d s} d\,A + \mathbf{A}\, d\,\mathbf{X} - B \frac{t\, d x \operatorname{Cos} \alpha}{t \operatorname{Cos} \alpha} + p \frac{t\, d x}{d s} d s . \operatorname{Sin} \alpha = 0$$

раздѣливъ на $t\, d x$, получимъ: $\frac{d\,\mathbf{A}}{d s} + \frac{A}{t} - \frac{B}{t} + p . \operatorname{Sin} \alpha = 0.$

Величина α' опредѣляется, полагая въ выраженіи для B таковое равнымъ нулю.

Тогда получится, что: $\cos^2\alpha' + \cos\alpha' = 1$ *) откуда $\alpha' = 51^0\ 50'$ **).

Для полукупола (при $\alpha = 90^0$).

$$A = -pv \text{ и } B = +pv$$

Въ пятѣ происходитъ сжатіе, въ сопрягающихся швахъ— вытягиваніе. Обозначая давленіе въ пятѣ черезъ σ'' и вытягивающее усиліе въ сопрягающихся швахъ черезъ τ'', тогда $\sigma'' = \tau''$ и такъ какъ $\rho = \sigma\gamma$, то $\sigma'' = \nu\gamma$, т. е. сжатіе матеріала кладки не зависитъ отъ толщины свода. Далѣе Schwedler говоритъ: ***) «Когда вытягивающее напряженіе $\tau'' = \nu\gamma$ получается слишкомъ большимъ, то можно уменьшить таковое,

---

или $p \sin\alpha + \frac{dA}{ds} + \frac{A-B}{\tau} = 0.$

Далѣе опредѣляемъ сумму проэкцій силъ на нормаль и приравняемъ ее нулю, тогда получимъ:

$$A\,x\,d\omega.\,d\alpha. + B\,ds.\,d\omega.\,\sin\alpha + p\,x\,d\omega\,ds.\,\cos\alpha = 0.$$

Раздѣлимъ обѣ части уравненія на $x\,d\omega\,ds$.

$$A.\frac{d\alpha}{ds} + \frac{B}{x}\sin\alpha + p\cos\alpha = 0. \text{ но}$$

$\frac{ds}{d\alpha} = V$ или $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{V}$: также $\frac{\sin\alpha}{x} = \frac{1}{V}$ и слѣдовательно

$$p\cos + \frac{A+B}{V} = 0.$$

отсюда

$$B = -pV.\cos\alpha - A = -pV\cos\alpha + \frac{pV}{1+\cos\alpha}$$

или

$$B = pV\left(\frac{1}{1+\cos\alpha} - \cos\alpha\right).$$

*) Полагая $B = 0$ получимъ, что: $pV\left(\frac{1}{1+\cos\alpha'} - \cos\alpha'\right) = 0$

или $\frac{1}{1+\cos\alpha'} = \cos\alpha'$ откуда $1 = \cos^2\alpha' + \cos\alpha'$.

**) Рѣшая уравненіе относительно α' получимъ:

$\cos\alpha' = -\frac{1}{2} + \sqrt{5/4} = 0{,}618$, а слѣдов. $\alpha' = 51^0\ 50'$.

***) При поясненіи выведенныхъ уравненій численнымъ примѣромъ (см. Zeitschrift für Bauwesen за 1866 годъ. Текстъ стр. 14.

Примѣчаніе переводчика.

увеличивъ поперечное сѣченіе, при чемъ однако добавочная масса должна быть подперта непосредственно стѣнами».

Послѣ этихъ поясненій Шведлеръ переходитъ къ разсмотрѣнію условій равновѣсія пологихъ купольныхъ поверхностей, въ которыхъ можно допустить равномѣрное распредѣленіе собственнаго вѣса и нагрузки на горизонтальной проэкціи таковыхъ и находитъ, что въ параболической купольной поверхности матеріалъ по всѣмъ направленіямъ одинаково сжимается. Далѣе онъ отыскиваетъ для плоской купольной поверхности условія, при которыхъ кольцевыя напряженія τ становятся равными нулю, причемъ является возможность разложить весь куполъ на отдѣльные меридіональные вырѣзки, изолированные другъ отъ друга, не нарушая ихъ устойчивости и находитъ, что для разсматриваемаго случая, образующая кривая должна быть кубическая парабола, но что вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя примѣнить условія $\tau = o$ близъ вершины купола; напротивъ, слѣдуетъ допустить близь этого мѣста существованіе круговаго твердаго тѣла, въ которое упирались бы отдѣльные вырѣзки купола.

Теорія Шведлера основывается на допущеніи равномѣрнаго распредѣленія давленія не только въ поперечныхъ, но и въ сопрягающихся швахъ камней; по Шведлеру, слѣдовательно, кривая давленія проходитъ черезъ центры тяжести площадей постелей камней, т. е. совпадаетъ съ среднею линіею купольнаго сектора. Чѣмъ собственно подтверждается справедливость такого допущенія, сдѣланнаго Шведлеромъ? Подходитъ ли кривая давленія Шведлера болѣе къ истинной, нежели кривая построенная по Wittmann'у?—на эти вопросы на столько же трудно получить отвѣтъ, какъ и на вопросъ о положеніи истинной кривой давленія въ цилиндрическомъ сводѣ. Кромѣ того, по Шведлеру, согласно вышеизложенному, въ полныхъ купольныхъ сводахъ, давленія въ замкѣ и въ пятахъ независимы отъ толщины свода. Какимъ образомъ опредѣлить теперь (что, строго говоря, вѣдь самое важное) необходимую толщину подобныхъ сводовъ? Относительно послѣдняго, статья Шведлера почти не содержитъ соотвѣтственныхъ указаній; краткое вышеприведенное замѣчаніе Шведлера: «когда вытягивающее напряженіе получается слишкомъ большимъ и т. д.» никоимъ образомъ нельзя считать удовлетворительнымъ отвѣтомъ на второй изъ предложенныхъ вопросовъ.

Изъ всего изложеннаго видно, что благодаря труду Шведлера появился цѣлый рядъ интересныхъ выводовъ, относящихся къ теоріи купольныхъ сводовъ, причемъ нельзя однако утверждать, какъ это иногда уже дѣлалось, что эта теорія достаточна разработана. Выше предложенные вопросы, на которые до сихъ поръ нѣтъ еще положительныхъ отвѣтовъ, вполнѣ подтверждаютъ такой выводъ.

Теорія Föppl'а. Въ своемъ сочиненіи «Theorie der Gewölbe», въ 1881 году, Föppl пытался примѣнить теорію цилиндрическихъ сводовъ, обоснованную на данныхъ теоріи упругости, къ расчету купольныхъ сводовъ, сознавая неполноту существующихъ методовъ расчета послѣднихъ. Къ сожалѣнію, ему не удалось найти такое разрѣшеніе этого вопроса, которое вполнѣ отвѣчало бы потребностямъ практики. Тѣмъ не менѣе заслуга Föppl'а заключается въ попыткѣ направить теорію купольныхъ сводовъ на путь строго научнаго анализа. Въ поименованной книгѣ, послѣ изложенія теоретическихъ изслѣдованій, касающихся расчета купольныхъ сводовъ, Föppl еще добавляетъ: «Въ большинствѣ случаевъ обыкновенно нѣтъ надобности опредѣлять положеніе кривой давленія по даннымъ теоріи упругости и провѣрить по ней устойчивость купола; достаточно построить произвольную кривую давленія и удостовѣриться, что при избранномъ положеніи ея, сводъ еще обладаетъ извѣстнымъ избыткомъ устойчивости. Сообразно этому, Föppl принимаетъ среднюю линію вырѣзка купольнаго сектора за направленіе кривой давленія, допуская, стало-быть, въ то же время равномѣрное сжиманіе колецъ,—допущеніе согласующееся съ допущеніями Шведлера. Далѣе, онъ строитъ, начиная съ верхняго камня свода, напряженія въ отдѣльныхъ клиньяхъ и находитъ, что съ нѣкотораго кольца должны проявляться вытягивающія напряженія, которыми, по его мнѣнію, можно пренебречь и, исходя изъ послѣдняго допущеніи, опредѣляетъ положеніе кривой давленія въ нижней части купола. Въ заключеніе Föppl говоритъ: «Если, построивъ указаннымъ способомъ кривую давленія какъ для купольнаго свода, такъ и для опорной стѣны его, мы убѣдимся, что она не выходитъ изъ поперечнаго сѣченія и не вызываетъ напряженій болѣе допускаемыхъ, и что при этомъ углы составляемые направленіемъ ея съ нормалями къ отдѣльнымъ швамъ нигдѣ не превосходятъ допускаемой величины угла тренія, то этимъ самымъ доказы-

БИБЛИОТЕКА
Белорусского
института инженеров

вается, что вся конструкція, съ точки зрѣнія механики неизмѣняемыхъ твердыхъ тѣлъ, будетъ въ равновѣсіи. «*Обрушенія, стало быть, нечего опасаться*».

Изслѣдуемъ на примѣрѣ данный Föppl'омъ приближенный методъ расчета. Разсмотримъ плоскій купольный сводъ, средній радіусъ котораго $r = 10$ метрамъ, при центральномъ углѣ $2\varphi'' = 100^0$; толщина свода пусть будетъ постоянна и равна e, а вѣсъ кубической единицы кладки—$\gamma - 2000$ килогр. Такъ какъ допущенія Föppl'а, касающіяся кривой давленія и равномѣрности сжиманія отдѣльныхъ колецъ, согласуются съ допущеніями, сдѣланными Шведлеромъ, то для опредѣленія наибольшаго напряженія кладки, стало быть, можно воспользоваться результатами теоріи Шведлера: Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ, наибольшее сжатіе (δ max.) будетъ дѣйствовать въ пятовомъ швѣ и :

$$\delta \max = \frac{r.\ \gamma^{*)}}{1 + \cos\varphi''} = 0{,}61\ r\gamma = 1{,}22 \text{ килограм. на } 1 \square \text{ сант.}$$

выраженіе, *въ которомъ толщина свода (e) вовсе не встрѣчается*. Полагая, затѣмъ, что толщина свода постепенно уменьшается, мы видимъ, что всѣ условія устойчивости, требуемыя формулою Föppl'а, будутъ соблюдены, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности такой сводъ становится очевидно все болѣе и болѣе сомнительнымъ и обрушеніе его, въ концѣ концовъ, весьма вѣроятнымъ. Методъ Föppl'а, поэтому, оказывается недостаточнымъ для расчета купольныхъ сводовъ.

Теорія купольныхъ сводовъ Гагена. Эта теорія выведена въ сочиненіи Гагена: «Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen und Kuppeln. 2 Auflage 1874». Теорія Гагена, разсматривающаго купольные своды равнаго сопротивленія, опирающихся на опоры неизмѣнной толщины, и допускающаго, какъ и Navier, проявленіе горизонтальнаго распора въ вершинѣ купола, непригодна для сплошныхъ купольныхъ сводовъ и поэтому мы оставимъ ее безъ разсмотрѣнія.

По той же причинѣ слѣдуетъ оставить безъ вниманія *теорію Durand-Claye*, помѣщенную въ журналѣ «Annales des ponts et chaussées» за 1880 годъ.

Заключительныя замѣчанія. Изъ приведеннаго разбора существующихъ теорій о купольныхъ сводахъ, нельзя не

---

*) $\frac{10.2000}{1 + \cos 50^0} = \frac{20000}{1{,}643} = 12173$ килогр. на 1 □ метръ или 1, 22 килогр. на 1 □ сантим.

придти къ заключенію, что дальнѣйшая разработка таковыхъ является, какъ кажется, не только желательною, но даже необходимой. При дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ можно придерживаться, подобно тому, какъ въ цилиндрическихъ сводахъ, двухъ методовъ. Съ одной стороны можно слѣдовать методу Föppl'a, т. е. на основаніи данныхъ теоріи упругости постараться опредѣлить истинное наибольшее напряженіе даннаго купольнаго свода; съ другой же стороны, слѣдовало бы выработать методъ, удобный и достаточно точный для практическаго примѣненія его и въ то же время основанный на данныхъ, выведенныхъ изъ наблюденій надъ купольными сводами, подобно тому, какъ таковой выработанъ для цилиндрическихъ сводовъ. Всякій, которому, подобно автору настоящей статьи, поручено расчитать купольный сводъ, предназначенный къ исполненію, конечно постарается придерживаться данныхъ, добытыхъ наблюденіями надъ существующими и испытанными уже купольными сводами, въ виду отвѣтственности, связанной съ такимъ порученіемъ, и поэтому сочтетъ болѣе подходящимъ послѣдовать второму изъ упомянутыхъ методовъ. Такой методъ былъ выработанъ авторомъ на основаніи нижеизложенныхъ разсужденій.

ГЛАВА III.

Наибольшее напряженіе въ купольномъ сводѣ въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ.

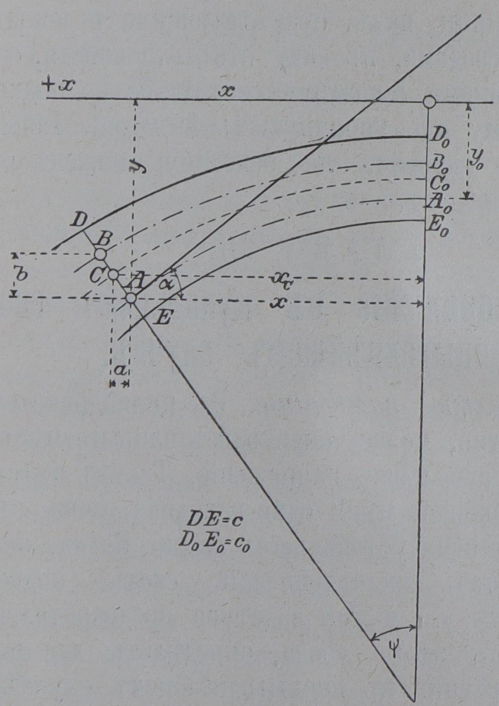
Предварительное замѣчаніе. Въ цилиндрическихъ сводахъ, какъ извѣстно, можно опредѣлить наивыгоднѣйшую кривую давленія и наибольшее напряженіе. Такимъ путемъ устанавливается по крайней мѣрѣ одна исходная точка, съ которой можно судить о степени устойчивости свода. Когда, напримѣръ, требуется разсчитать цилиндрическій сводъ, подверженный извѣстной нагрузкѣ, то можно задаться предварительно поперечнымъ сѣченіемъ этого свода, опредѣлить для послѣдняго наибольшее напряженіе въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ и повѣрить, согласуется ли послѣднее, не съ тѣмъ коэффиціентомъ прочнаго сопротивленія матеріала кладки, который допускается при расчетахъ статически опредѣлимыхъ каменныхъ сооруженій, но съ тѣмъ наибольшимъ сжимающимъ напряженіемъ, проявляющимся въ существующемъ однородномъ, по матеріалу,

сводѣ, допуская, что послѣдній подверженъ тому же самому наивыгоднѣйшему напряженію.

Этотъ раціональный способъ, быть можетъ, примѣнимъ также для купольныхъ сводовъ, почему, предварительно, постараемся опредѣлить максимальное и въ то же время наивыгоднѣйшее напряженіе въ купольномъ сводѣ.

Системы кривыхъ давленія. Разсмотримъ секторъ купольнаго свода, ограниченнаго двумя вертикальными меридіональными плоскостями, заключающими уголъ $d\varphi$. Представимъ себѣ этотъ секторъ раздѣленнымъ на отдѣльные элементы, со швами, идущими по радіусамъ. Одинъ такой элементъ находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ: собственнаго вѣса, приложеннаго въ центрѣ тяжести элемента, двухъ напряженій, дѣйствующихъ на постели клина (Lagerfugendrücke) и двухъ напряженій направленныхъ по кольцу (т. е. дѣйствующихъ на сопрягающіеся швы клина)* (Stossfugendrücke); соединяя точки приложенія A (чер. 8) усилій дѣйствующихъ на площади швовъ плавною кривою, мы получимъ соотвѣтственную кривую давленія, которую условимся называть *пятовой кривой давленія* (Lagerfugen-stützlinie); точно также, соединяя точки приложенія B, давленій, проявляющихся въ сопрягающихся швахъ и лежащихъ въ одной меридіональной плоскости (и дѣйствующихъ нормально къ боковымъ гранямъ элемен-

Чер. 8.



*) Напеч. въ скобкахъ добавленіе переводчика.

та, т. е., такъ сказать, по кольцу свода) *) кривою, получимъ, такъ называемую, кривую давленія въ сопрягающихся швахъ, которую условимся называть *стыковой кривой давленія* (Stossfugenstützlinie). (Слѣдовательно въ купольныхъ сводахъ нельзя довольствоваться одною кривою давленія, а необходимо принять въ расчетъ систему двухъ кривыхъ давленія). *) Опредѣливъ для всѣхъ возможныхъ системъ кривыхъ давленія соотвѣтствующее имъ максимальное сжимающее напряженіе, сравнивъ полученныя величины между собою и выбравъ изъ нихъ наименьшую, мы получимъ максимальное напряженіе купольнаго свода, которое будетъ въ то же время и *наивыгоднѣйшее*; соотвѣтственныя же этому кривыя давленія составятъ *наивыгоднѣйшую систему кривыхъ давленія.*

Опредѣленіе горизонтальнаго распора при данной системѣ кривыхъ давленія.

Постараемся опредѣлить горизонтальный распоръ для шва DE купольнаго сектора, показаннаго на чертежѣ 8-мъ, съ центральнымъ угломъ равнымъ $d\varphi$, причемъ пусть C_0C представляетъ среднюю линію сектора, AA_0 — пятовую, а BB_0 стыковую — кривыя давленія. Положимъ, что AA_0 и BB_0 плавныя кривыя, касательныя къ которымъ, проведенныя соотвѣтственно въ точкахъ A_0 и B_0 — горизонтальны, и что кривыя эти, пересѣкающія каждый шовъ только одинъ разъ, вообще произвольнаго очертанія. На часть купольнаго сектора DEE_0D_0, лежащую выше шва DE, дѣйствуютъ слѣдующія силы:

1. Собственный вѣсъ $Q.d\varphi = F.x_0.d\varphi.\gamma$ **), гдѣ F площадь DEE_0D_0; x_0 — разстояніе центра тяжести площади F отъ вертикальной оси свода; γ — вѣсъ кубической единицы сводчатой кладки и $d\varphi$, по вышеизложенному, — центральный уголъ купольнаго сектора.

2. Давленія T смежныхъ частей кольца, направленныя нормально къ вертикальнымъ боковымъ площадямъ разсматриваемой части купола.

3. Дѣйствующее въ точкѣ A опорное сопротивленіе $S.d\varphi$ пятовой плоскости клина DE, горизонтальная составляющая котораго пусть будетъ $Hd\varphi$, а вертикальная — $Vd\varphi$.

---

*) Напечатанное въ скобкахъ добавлено переводчикомъ.

**) $Fx_0d\varphi$ = площади (F) × на путь ($x_0d\varphi$), пройденный центромъ тяжести ея.

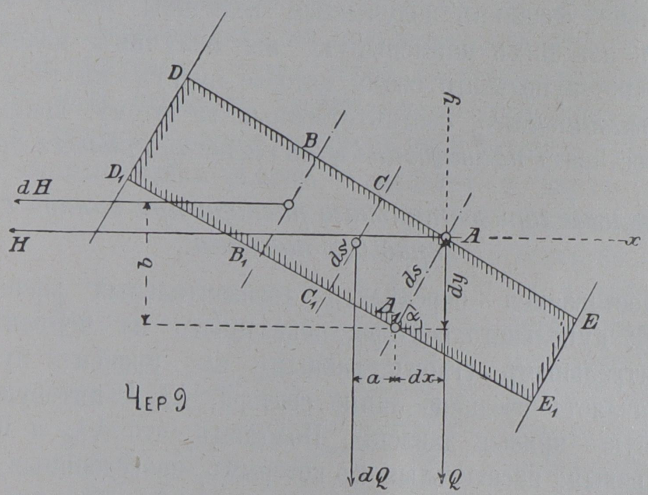
Добавл. переводчика.

И такъ искомый торизонтальный распоръ, дѣйствующій на шовъ DE купольного сектора, будетъ $Hd\varphi$, но:

$$V = Q \text{ и } Hd\varphi = 2\,T \sin\frac{d\varphi}{2}\,^{*)} = 2\,.\,T\,\frac{d\varphi}{2};\ H = T;$$

$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{Q^2 + H^2}.$$

Давая углу ψ (чер. 8) приращеніе $d\psi$, мы получимъ элементъ DEE_1D_1 купольнаго сектора (чер. 9); координаты точки

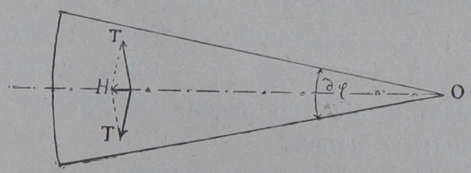


Чер 9

A (чер. 8) увеличиваются на dx и dy, Q — на dQ, T — на dT,

*) Изъ статики извѣстно, что (чер. B): $H^2 = T^2 + T^2 + 2T^2 \cos(180 - d\varphi)$

Чер. B.



или: $H^2 = 2T^2 - 2T^2 \cos d\varphi$

$H^2 = 2T^2\ (1 - \cos d\varphi)$; но:

$1 - \cos\varphi = 2 \sin^2 \frac{d\varphi}{2}$

слѣдовательно:

$H = 2T \sin \frac{d\varphi}{2}$.

Допол. переводчика.

H—на dH. Какъ видно изъ чертежа 9, на элементъ DEE_1D_1 дѣйствуютъ слѣдующія силы: 1) въ центрѣ тяжести элемента—собственный вѣсъ $dQ.d\varphi$, 2) въ A давленіе $Sd\varphi$ или составляющія его: $Hd\varphi$ и $Vd\varphi$, 3) нормальныя усилія dT въ своихъ точкахъ приложенія, опредѣленныхъ стыковою кривою давленія или, что все равно, равнодѣйствующая ихъ $=dH.d\varphi$. 4) Въ точкѣ A_1 сопротивленіе опорной площади D_1E_1. Уравненіе моментовъ *) всѣхъ названныхъ силъ относительно точки A_1 должно имѣть слѣдующій видъ:

$$dH.b+dQ.a+H.dy=Q.dx$$

откуда:

$$H=Q.\frac{dx}{dy}-a.\frac{dQ}{dy}-b.\frac{dH}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

или, когда подставить, $\frac{dy}{dx}=tg\alpha$; $\frac{dQ}{dy}=tg\beta$ **)

получимъ: $H=Q\,Cotg\,\alpha-a.tg\beta-b.\frac{dH}{dy}$ . . . . . (1a).

полагая же: $Q.Cotg\,\alpha-a.tg\beta=H^1$ . . . . . (2).

выводимъ что:

$$H=H^1-b.\frac{dH}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Далѣе, для полученія значеній для H, соотвѣтствующихъ произвольнымъ значеніямъ y, сначала разбиваютъ разсматриваемую часть сектора на отдѣльные клинья ***), опредѣляютъ вѣса Q таковыхъ, по правилу Гюльдина и откладываютъ противъ y-овъ, разсматриваемыхъ какъ абсциссы, ординаты равныхъ соотвѣтственнымъ вѣсамъ Q; вычерчиваютъ затѣмъ кривую вѣсовъ Q, опредѣляютъ графически для отдѣльныхъ швовъ соотвѣтственныя имъ значенія $a\,tg\beta$ и $Q\,Cotg\,\alpha$, затѣмъ вычисляютъ по уравненію (2) величину H^1 и, наконецъ, отложивъ противъ абсциссъ y ординаты H^1, строятъ линію H^1-овъ (чер. 10).

---

*) Камень DD_1EE_1 находится въ равновѣсіи и поэтому сумма моментовъ относительно точки (A_1) должна равняться нулю.

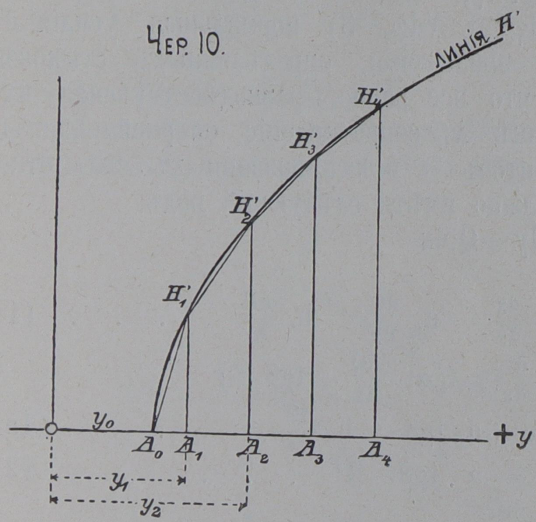
**) Возможность такого допущенія выясняется нижеизложеннымъ построеніемъ кривой вѣсовъ Q.

***) Это построеніе слѣдуетъ дѣлать въ возможно крупномъ масштабѣ, раздѣливъ внутреннюю направляющую на одинаковое число частей (выраженныхъ въ цѣлыхъ частяхъ градуса) такимъ образомъ, чтобы безъ особой погрѣшности можно было принять части дугъ за прямыя линіи.

Примѣчанія переводчика

Затѣмъ вписываютъ въ кривую H^1-овъ многоугольникъ и отыскиваютъ соотвѣтствующія сторонамъ этого многоугольника, части кривой H, дифференціальное уравненіе которой приведено выше (урав. 3).

Чер. 10.



Это можетъ быть сдѣлано слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, для примѣра, что требуется опредѣлить часть кривой H между точками A_1 и A_2 или, что все равно, между абсциссами y_1 и y_2 (чер. 10)

Линія H^1-овъ, на основаніи вышесказаннаго замѣнена между точками A_1 и A_2 прямою, уравненіе которой пусть будетъ: $H^1 = my + A$, а слѣдовательно $dH^1 = mdy$ и $dy = \frac{dH^1}{m}$ или, подставляя найденную величину dy въ уравненіи (3), получится: $H = H^1 - mb.\frac{dH}{dH^1}$ . . . . . (4).

причемъ m и b будутъ постоянными величинами на протяженіи A_1 A_2 . Интегрируя уравненіе (4), получаемъ *):

---

*) Уравненіе (4) можетъ быть написано въ такомъ видѣ: $H . dH^1 = H^1dH^1 - mb . dH$ или, взявъ dH^1 за скобки, получимъ: $(H - H^1)\, dH^1 = - mb. dH$; такъ какъ H перемѣнная величина, то допустимъ, что $H = u.v$ гдѣ u и v также перемѣнныя. Подставляя значенія $H = u.v$ въ предъидущее уравненіе получимъ: $(uv - H^1)\, dH^1 = - mb. \left\{ udv + vdu \right\}$ или, взявши v за скобки: $\left\{ u. dH^1 + mb. du \right\} v = H^1dH^1 - mb. u. dv.$

Такъ какъ u и v произвольныя перемѣнныя, то на основаніи правилъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій, можно дать v и u такія значенія, для которыхъ первая часть этого уравненія обратится въ нуль, т. е. $\left\{ u\, dH^1 + mb. du \right\} v = 0$ или, что тоже:

$udH^1 + mb.du = 0$. Раздѣляя обѣ части послѣдняго выраженія на u.m.b., получимъ: $\frac{dH^1}{m.b} + \frac{du}{u} = 0$. Далѣе, интегрируя послѣднее уравненіе,

$$H = H^1 - mb + \frac{C}{e^{\frac{H^1}{mb}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Въ послѣднемъ уравненіи е основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, а С произвольная постоянная. Для $y = y_1$, обозначимъ и Н черезъ H_1 и H^1 черезъ $H_1{}^1$, откуда:

получимъ:

$$\int \left\{ \frac{dH^1}{m.b.} + \frac{du}{u} \right\} = \int \frac{dH^1}{mb} + \int \frac{du}{u} = \frac{H^1}{mb} + log\ u = 0$$

откуда $log\ u = -\frac{H^1}{mb}$

а слѣдовательно: $u = e^{-\frac{H^1}{m.b.}}$; полагая далѣе, что:
$H\ dH^1 - mbudv = 0$ и, подставляя вмѣсто u его значеніе, получимъ:

$H^1dH^1 - mbe^{-\frac{H,}{mb.}} dv = 0$ опредѣляемъ далѣе dv изъ предъидущаго уравненія;

$dv = \frac{H^1 e^{\frac{H'}{mb.}} dH^1}{m.\ b}$, отсюда:

$$v = \frac{1}{m.b} \int H^1 dH^1 e^{\frac{H^1}{m.\ b}} + C.$$

или:

$$v = \frac{1}{m.b.} \left\{ H^1 e^{\frac{H^1}{m.b}}\ m.b - \int e^{\frac{H^1}{m.b}}\ dH^1 m\ b \right\} + C$$

или:

$$v = H^1\ e^{\frac{H^1}{mb}} - e^{\frac{H^1}{m.\ b}}\ m.b + C$$

отсюда:

$$H = u.v = \left\{ H^1\ e^{\frac{H^1}{m.\ b.}} - e^{\frac{H^1}{m.\ b.}}\ m.b + C. \right\}. - e^{\frac{H^1}{mb}}$$

или:

$$H = H^1 - mb + C - e^{\frac{H^1}{mb}}$$

или окончательно:

$$H = H^1 - mb + \frac{C}{e^{\frac{H^1}{mb}}}$$

Прибавленіе переводчика.

$$H_1 = H^1{}_1 - mb + \frac{C}{e^{\frac{H^1{}_1}{mb}}}, \text{ откуда:}$$

$$C = e^{\frac{H^1{}_1}{mb}} \left\{ H_1 - H^1{}_1 + mb \right\}$$

и уравненіе (5) приметъ видъ:

$$H = H^1 - mb - \left\{ H'_1 - H_1 - mb \right\} \cdot \frac{e^{\frac{H^1{}_1}{mb}}}{e^{\frac{H^1}{mb}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

полагая, что: $\frac{e^{\frac{H^1{}_1}{mb}}}{e^{\frac{H^1}{mb}}} = \frac{1}{n}$ получимъ:

$$H = H^1 - mb - \left\{ H^1{}_1 - H_1 - mb \right\} \frac{1}{n} \text{ или:}$$

$$H = H^1 - \frac{1}{n} \left\{ H_1' - H_1 \right\} - mb \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \ldots\ldots (7)$$

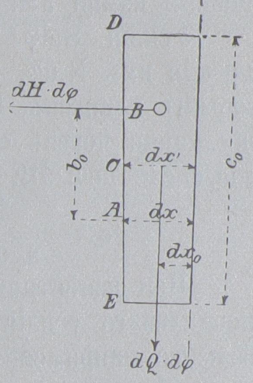
Для опредѣленія же n, мы имѣемъ: $\log n = \lg e^{\frac{H^1}{mb}} - \lg e^{\frac{H_1'}{mb}} = \frac{H^1 - H^1{}_1}{m} \cdot \frac{\log e}{b}$, или:

$$\log n = \frac{y - y_1}{b} \cdot \log e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Слѣдовательно мы въ состояніи, зная величину H_1, соотвѣтствующую абсциссѣ y_1, опредѣлить всѣ значенія, которыя принимаетъ послѣдовательно распоръ H для всѣхъ значеній y, т. е. въ предѣлахъ отъ $y = y_1$, до $y = y_2$. Обыкновенно же довольствуются тѣмъ, что опредѣляютъ для $y = y_2$ ординату H_2' и поступаютъ затѣмъ съ H_2 въ слѣдующей части кривой H-овъ, точно также, какъ это только что было сдѣлано съ H_1. Для опредѣленія же H_1, разсмотримъ условія равновѣсія

верхняго клинообразнаго элемента купольнаго сектора (черт. 11). Этотъ элементъ или камень прижимается къ своей постели равнодѣйствующей изъ двухъ силъ: $dQ.d\varphi$ и $dH.d\varphi$; вмѣсто H мы слѣдовательно должны подставить dH, т. е. при $y=y_0$ и величина $H=0$. Съ другой же стороны должно имѣть мѣсто равенство:

Чер. 11.



$$dH.b_0 = dQ\ (dx - dx_0)$$

*) также: $\frac{dH}{dy} b_0 = \frac{dQ}{dy}\ (dx - dx_0)$ . . . (9);

$\frac{dQ}{dy}$ не есть безконечно большая величина, поэтому нужно допустить (ибо b_0 не $=0$), что $\frac{dH}{dy} = 0$, что возможно, если кривая H-овъ пересѣчетъ въ точкѣ A_0 ось абсциссъ. H^1 также обращается въ нуль при $y=y_0$, такъ какъ изъ уравненія (2) имѣемъ, что:

$$H^1 = \frac{dQ}{dy} dx - 0.\frac{dQ}{dy} = \frac{dQ}{dy}.\ 0 = 0.$$

Теперь уже возможно опредѣлить упомянутую величину H_1, т. е. соотвѣтственную абсциссѣ y_1 величину ординаты кривой H-овъ. Сначала изъ уравненія (8) получаемъ: $\log n_1 = \frac{y_1 - y_0}{b_1} \log e$; затѣмъ изъ уравненія (7)—:

$$H_1 = H_1^1 - \frac{1}{n_1}\ (0-0) - m_1 b_1 \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) =$$

$$= H_1^1 - m_1 b_1 \left(1 - \frac{1}{n_1}\right).$$

Опредѣливши такимъ способомъ H_1, возможно, согласно вышесказанному, опредѣлить также H_2; сначала получаемъ

$$\log n_2 = \frac{y_2 - y_1}{b_2}.\ \log e,$$

и затѣмъ: $H_2 = H_2^1 - \frac{1}{n_2}\ (H_1^1 - H_1) - m_2 b_2 \left(1 - \frac{1}{n_2}\right).$

Такимъ образомъ возможно, хотя и съ большимъ трудомъ, вычислить соотвѣтствующія абсциссамъ y_1, y_2, y_3 . . . . . значенія для H, а затѣмъ и начертить линію H-овъ, т. е. кривую распоровъ.

*) Раздѣляя обѣ части уравненія на dy.

Опредѣленіе наибольшаго сжимающаго напряженія въ постеляхъ клиньевъ.

Когда кривая H-овъ (горизонтальныхъ распоровъ) построена, то возможно опредѣлить во всѣхъ клиньяхъ усилія $S.d\varphi$, прижимающія камни или клинья свода къ ихъ постелямъ.

Усилія $S.d\varphi$ могутъ быть разложены, и тогда составляющія ихъ $N.d\varphi$, направленныя нормально къ опорнымъ плоскостямъ клиньевъ, будутъ производить сжимающія напряженія. Обозначая черезъ σ_c среднее напряженіе *) постели клина или плоскости шва DE (чер. 8) получается, что:

$$\sigma_c = \frac{N\,d\varphi}{x_c.d\varphi.c\ ^{**})} = \frac{N}{x\,.\,c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

При извѣстномъ σ_c и при данной точкѣ приложенія A нормальнаго усилія (черт. 8) не трудно опредѣлить ***) наибольшее напряженіе σ_m крайнихъ, ближайшихъ къ силѣ волоконъ. Въ шелыгѣ купольнаго сектора $N' = dH$; $x_c = dx^1$ (чер. 11); $c = c_0$ и поэтому среднее сжимающее напряженіе:

$$\sigma_0 = \frac{dH}{dx^1 c_0} \text{ или } \sigma_0 = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{c_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Но въ шелыгѣ свода, по выше доказанному, вслѣдствіе того, что b_0 не $= 0$, $\frac{dH}{dy} = 0$ и поэтому $\sigma_0 = 0$ ****).

Такъ какъ мы теперь въ состояніи опредѣлить наибольшее сжатіе въ каждомъ швѣ, то можемъ также опредѣлить, при избранномъ положеніи кривыхъ давленія, и наибольшее сжатіе въ постеляхъ клиньевъ, проявляющееся въ купольномъ секторѣ.

---

*) т. е. равномѣрное напряженіе волоконъ, предполагая, что нормальное усиліе проходитъ черезъ центры тяжести сѣченія и когда, стало быть, все сѣченіе претерпѣваетъ одно и то же сжимающее напряженіе.

**) Давленіе σ_c отнесено, къ единицѣ площади; усиліе $Nd\varphi$ дѣйствуетъ на всю площадь шва, которая равняется дугѣ S на c (толщина), но $\smile S = d\varphi . x_c$ и поэтому площадь $= x_c . d\varphi . c$, а на единицу площади дѣйствуетъ усиліе:

$$\sigma_0 = \frac{Nd\varphi}{x_c d\varphi . c} = \frac{N}{x_c . c}.$$

Примѣчаніе переводчика.

***) По формуламъ теоріи неравномѣрнаго сжатія.

****) Выбравъ же положеніе кривыхъ давленій такимъ образомъ, что $b_0 = 0$, то изъ уравненія (11) и (9) мы бы получили $\sigma_0 = \frac{0}{0}$.

Примѣчаніе автора.

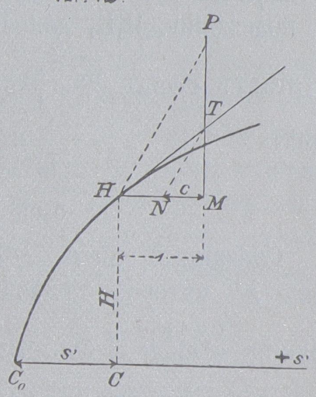
Опредѣленіе наибольшаго сжимающаго напряженія въ стыкахъ.

Разсмотримъ элементъ DED_1E_1 (чер. 9) купольнаго сектора. Въ стыковыхъ (боковыхъ) плоскостяхъ его дѣйствуютъ въ извѣстныхъ точкахъ, опредѣленныхъ положеніемъ стыковой кривой давленія, нормальныя усилія dT. Поэтому получается среднее стыковое сжатіе:

$$\tau_c = \frac{dF}{c.\,ds^1} = \frac{dH}{c.\,ds^1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Величина τ_c опредѣляется для разныхъ положеній шва DE графически, слѣдующимъ образомъ: откладываютъ (чер 12) по одной изъ осей прямоугольныхъ координатъ величины $C_0C = s^1$ (см. чер. 8) соотвѣтствующія длинамъ дугъ различныхъ швовъ (считая отъ оси купола *), а по другой оси, соотвѣтственныя разнымъ швамъ величины H, какъ ординаты; далѣе вычерчиваютъ кривую H-овъ и проводятъ къ послѣдней, въ концахъ ординатъ касательныя **) HT, затѣмъ черезъ точки H проводятъ параллельныя къ оси абсциссъ, и откладываютъ на послѣдней, въ масштабѣ длинъ, отрѣзки HM = погонной единицѣ и MN = c ***); въ точкахъ M возставляютъ перпендикуляры MT къ HM, проводятъ TN и черезъ H—HP || NT, тогда длина MP изображаетъ соотвѣтственное значеніе τ_c. Измѣряя наконецъ длины (MP) въ томъ же масштабѣ силъ, въ которомъ были нанесены H-ы, получаемъ искомыя величины τ_c. Если среднее сжимающее напряженіе полосы DE меридіальнаго сѣченія купольнаго свода извѣстно, то возможно также опредѣлить и наибольшее сжимающее напряженіе въ этой полосѣ, такъ какъ точка приложенія этого усилія находится на пересѣченіи стыковой кривой давленія со

Чер. 12.



*) Вставка переводчика.
**) Авторъ относитъ построеніе ко всѣмъ точкамъ кривой H-овъ.
***) c—толщина свода.

швомъ DE *). Итакъ опредѣленіе наибольшаго *стыковаго сжимающаго напряженія* вполнѣ возможно.

Допуская же, что плоскость шва DE совпадаетъ съ замковымъ сѣченіемъ купола, вмѣстѣ съ тѣмъ, получаемъ, что: $ds^1 = dx^1$; $c = c_0$

и поэтому: $\tau_0 = \frac{dH}{c_0 . dx^1}$ . . . . . (13)

Равенство средняго стыкового и пятового сжимающихъ напряженій въ вершинѣ купольнаго свода.

Изъ уравненій (11) и (13) вообще слѣдуетъ, что:

$\sigma_0 = \tau_0$ . . . . . (14)

Но, такъ какъ b_0 т. е. A_0C_0 (чер. 8) не $= 0$,

то $\sigma_0 = \tau_0 = 0$.

Предѣльный шовъ (Grenzfuge). Существуетъ еще другое положеніе D_1E_1 для DE, при которомъ $\tau_c = 0$. Когда H достигаетъ своего максимальнаго значенія, то $\frac{dH}{dy} = 0$ и поэтому:

$$\tau_c = \frac{dH}{c . ds^1} = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{ds^1} \cdot \frac{1}{c} = 0.$$

Сказанный шовъ D^1E^1 проходитъ слѣдовательно черезъ точку A^1 пятовой кривой давленіи, которой соотвѣтствуетъ вершина кривой H-овъ. Ниже шва D^1E^1 величина $\frac{dH}{dy}$, а поэтому и τ_c будутъ отрицательными, т. е. въ стыковыхъ плоскостяхъ, или въ плоскостяхъ сопрягающихъ швовъ, ниже D^1E^1, могли бы произойти вытягивающія напряженія, если матеріалъ кладки свода обладалъ бы возможностью сопротивляться вытягиванію. Если же нельзя расчитывать на такое сопротивленіе, тогда нѣтъ и никакой надобности въ разсматриваніи напряженій, проявляющихся въ стыкахъ колецъ ниже прямой D^1E^1.

Поэтому величина горизонтальнаго распора H для всѣхъ клиньевъ, находящихся ниже D^1E^1, остается постоянной. Мы

---

*) Понимая подъ DE тотъ шовъ, въ которомъ фактически проявляется maximum сжатія.

Примѣч. переводчика.

будемъ называть шовъ D^1E^1 *предѣльнымъ швомъ;* а уголъ Ψ^1, образуемый швомъ D^1E^1 съ вертикальной осью купола—*предѣльнымъ угломъ* (Grenzwinkel).

Возможныя системы кривыхъ давленія.

Такъ какъ всѣ вышеуказанные выводы при опредѣленіи сжимающихъ напряженій въ частяхъ свода не указывали на ошибочность сдѣланнаго нами допущенія о возможномъ существованіи пятовой кривой давленія A_0A и стыковой кривой давленія B_0B (чер. 8), то мы въ правѣ допустить, что такая система кривыхъ давленій A_0A и B_0B (чер. 8) дѣйствительно возможна, предполагая конечно, что проявляющіяся при этомъ сжимающія напряженія не превосходятъ коэффиціента прочнаго сопротивленія матеріала сводчатой кладки. Изъ сказаннаго можно затѣмъ заключить, что: *во всякомъ непрерывномъ купольномъ сводѣ, расположенномъ симметрично относительно его вертикальной оси, не касаясь ограниченія, вызываемаго ограниченною прочностью матеріала, произвольная пара плавныхъ кривыхъ, расположенныхъ въ меридіальномъ сѣченіи и пересѣкающихъ, каждая, опорные швы клиньевъ одинъ только разъ, обладающихъ горизонтальными касательными въ вершинѣ купола *), могутъ быть разсматриваемы какъ возможная система кривыхъ давленія.*

Наивыгоднѣйшая система кривыхъ давленія.

Чтобы выяснить себѣ положеніе наивыгоднѣйшихъ кривыхъ давленія, равсмотримъ сферическій купольный сводъ, постоянной толщины $c = 0{,}75$ метра, при радіусѣ $= 10$ метр. и единичномъ вѣсѣ (1 куб. метра) $\gamma = 2000$ килогр., принявъ за кривыя давленія линіи ядра поперечнаго сѣченія купола, притомъ нижнюю линію за пятовую, верхнюю—за стыковую кривую давленія. Для этой системы кривыхъ давленія была построена кривая Н-овъ по способу, изложенному на страницѣ 24 и слѣдовательно, вслѣдствіе этого опредѣлился для

*) Горизонтальность касательной въ вершинѣ купола основана на томъ, что для кривыхъ давленія ось купола должна быть осью симметріи и что непрерывность этихъ кривыхъ не должна нарушаться и въ самой вершинѣ купола.

Примѣчаніе автора.

каждаго шва горизонтальный распоръ H, а также сила S, и ея составляющая N, нормальная къ плоскости шва. При извѣстномъ N опредѣлилось по уравненію (10) и среднее сжимающее напряженіе σ_c, послѣ чего уже при данной точкѣ приложенія A всего давленія, возможно было вычислить наибольшее пятовое сжимающее напряженіе σ_m. Точно также по способу, намѣченному на чер. 12 опредѣлилось среднее стыковое давленіе τ_c и затѣмъ уже при данномъ положеніи точки (B) приложенія всѣхъ силъ—наибольшее стыковое давленіе τ_m. Далѣе на табл. I, чер. 1 на перпендикулярахъ возставленныхъ изъ точекъ C средней линіи купольнаго свода, развернутой въ прямую, были отложены вычисленныя значенія σ_m и τ_m въ видѣ ординатъ; концы послѣднихъ соединены плавными непрерывными линіями и опредѣлены такимъ путемъ кривыя σ_m-овъ и τ_m-овъ для избранныхъ кривыхъ давленія. Эти кривыя обозначены буквами σ_m^I и τ_m^I. На чер. 1 табл. I построены затѣмъ еще линіи σ_m-овъ и τ_m-овъ для двухъ другихъ системъ кривыхъ давленія, а именно для системы кривыхъ, совпадающихъ съ линіею CC (черт. 8) меридіональнаго вырѣзка и затѣмъ для другой системы, въ которой пятовая кривая давленія также совпадаетъ съ среднею линіею CC, между тѣмъ какъ стыковая кривая давленія совпадаетъ съ верхнею линіею ядра меридіональнаго вырѣзка; значенія σ_m и τ_m соотвѣтствующія первой системѣ кривыхъ давленія обозначены черезъ σ_m^{II} и τ_m^{II}, а соотвѣтствующія второй—черезъ σ_m^{III} и τ_m^{III}. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что значенія σ_m^{II} и τ_m^{II} вычислились весьма просто, такъ какъ при совпаденіи системы кривыхъ давленія съ среднею линіею, величины a и b (чер. 8) = 0 и поэтому, согласно уравненію (1a) = H Q cotg α, а сжимающіе усиліе $S = \sqrt{H^2 + Q^2}$ дѣйствуетъ по касательной къ средней линіи вырѣзка, причемъ это усиліе распредѣляется равномѣрно по плоскостямъ швовъ. Прослѣдивъ, соотвѣтствующія тремъ избраннымъ кривымъ давленія, линіи σ_m-овъ и τ_m-овъ, мы видимъ, что система кривыхъ давленія, совпадающихъ съ среднею линіею CC меридіональнаго вырѣзка, вызываетъ относительно наименьшія сжимающія напряженія въ частяхъ купольнаго свода. Если даже выбрать еще другія системы кривыхъ давленія, то всетаки окажется, что избранная система наивыгоднѣйшая. Вообще можно допустить, что *для части купольнаго свода, лежащей выше предѣльнаго шва (шва перелома) система кривыхъ давле-*

нія, совпадающихъ съ среднею линіею меридіональнаго вырѣзка—наивыгоднѣйшая.

Наибольшее напряженіе, въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ, купольнаго свода шароваго очертанія и постоянной толщины.

Какъ видно изъ черт. 1 табл. I, при допущеніи наивыгоднѣйшей системы кривыхъ давленія, наибольшее напряженіе σ_m^1 части купольнаго свода, лежащей надъ предѣльнымъ швомъ D^1E^1, будетъ дѣйствовать въ плоскости этого шва. Это σ_m^1 вычисляется слѣдующимъ образомъ:

Для произвольнаго пятоваго шва купольнаго вырѣзка, составляющаго съ вертикальною осью купола уголъ ψ, при центральномъ углѣ вырѣзка $d\varphi$ и радіусѣ средней окружности сектора r, получимъ, придерживаясь прежнихъ обозначеній, что:

$$\sigma_m = \sigma_c = \frac{S\, d\varphi}{C.\, r.\, \mathrm{Sin}\, \psi.\, d\varphi},$$

причемъ $S = \frac{Q}{\mathrm{Sin}\, \psi}$ и $Q.\, d\varphi = r.\, \psi.\, C.\, x_0\, d\varphi.\, \gamma$, гдѣ x_0—разстояніе центра тяжести дуги C_0C отъ оси купола. Но:

$$x_0 = \frac{r.\, \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}.\, \mathrm{Sin}\, \frac{\psi}{2} = \frac{2r.\, \mathrm{Sin}^2\frac{\psi}{2}}{\psi},$$

и такъ:

$$Q = 2r^2.\, c.\, \gamma.\, \mathrm{Sin}^2\frac{\psi}{2} = r^2 c.\, \gamma.\, (1 - \mathrm{Cos}.\, \psi) \text{ и:}$$

$$\sigma_m = \sigma_c = \frac{r.\, \gamma.\, (1 - \mathrm{Cos}.\, \psi)^{*}}{\mathrm{Sin}^2 \varphi} = \frac{r.\, \gamma.}{1 + \mathrm{Cos}\, \psi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15a)$$

Въ вершинѣ купола:

$$\sigma_c = \frac{r.\, \gamma}{2}.$$

Для опредѣленія значенія σ_c для предѣльнаго шва D^1E^1, необходимо сначала опредѣлить положеніе послѣдняго, т. е. вычислить уголъ ψ^1. Для этой цѣли припомнимъ, что въ сѣченіи $D^1E^1 - \tau_c = 0$.

---

*) $\frac{r.\gamma.\,(1-\mathrm{Cos}\,\psi)}{\mathrm{Sin}^2\,\psi} = \frac{r.\,\gamma\,(1-\mathrm{Cos}\,\psi)}{1-\mathrm{Cos}^2\,\psi} = \frac{r.\gamma\,(1-\mathrm{Cos}\,\psi)}{(1-\mathrm{Cos}\,\psi)\,(1+\mathrm{Cos}\,\psi)} = \frac{r.\gamma}{1+\mathrm{Cos}\,\psi}$

Примѣч. переводчика.

Уравненіе (12) даетъ для средняго стыкового давленія τ_c:

$$\tau_c = \frac{dH}{c.\,ds^1},$$

такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ:

$$\tau_m = \tau_c = \frac{dH}{c.\,ds^1} = \frac{dH}{c.r.\,d\psi}.$$

Но:

$$H = Q\,\mathrm{cotg}\,\psi = \frac{r^2.\,c.\,\gamma.\,(1 - \mathrm{Cos}\,\psi).\,\mathrm{Cos}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,\psi},$$ откуда:

$$\frac{dH.}{d\psi} = r^2.\,c.\,\gamma.\,\frac{2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \mathrm{Cos}^3\,\psi - 1}{\mathrm{Sin}^2\psi} = r^2.\,c.\,\gamma\left(\mathrm{Cos}\psi - \frac{1}{1+\mathrm{Cos}\psi}\right)$$

а потому:

$$\tau_m = r.\,\gamma.\left(\mathrm{Cos}\,\psi - \frac{1}{1+\mathrm{Cos}\,\psi}\right) \ldots\ldots\ldots (15b)$$

а въ вершинѣ купола:

$$\tau_m = \tau_o = \frac{r.\gamma}{2} = \sigma_o.$$

Для $\psi = \psi^1$ величина $\tau_m = 0$ и поэтому:

$$\mathrm{Cos}\,\psi^1 - \frac{1}{1 \times \mathrm{Cos}\psi^1} = 0;\ \mathrm{Cos}^2\,\psi^1 \times \mathrm{Cos}\,\psi^1 = 1;$$

$$\psi^1 = 51^0\ 50'$$

Подставляя теперь въ уравненіе (15a) вмѣсто ψ уголъ ψ^1, получимъ *наибольшее напряженіе* въ купольномъ сводѣ *въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ:*

$$\sigma_m^1 = \frac{r.\gamma}{1 + \mathrm{Cos}\,\psi^1} = 0{,}62\ r.\gamma \ldots\ldots (16).$$

IV ГЛАВА.

Расчетъ замкнутаго въ шелыгѣ купольнаго свода при данномъ очертаніи его, на основаніи наивыгоднѣйшей системы кривыхъ давленія.

Цѣлесообразность постоянной толщины свода надъ предѣльнымъ швомъ.

Чертежъ 1, таб. I показываетъ, что въ шаровомъ купольномъ сводѣ постоянной толщины, и при допущеніи наивыгод-

нѣйшей системы кривыхъ давленія, пятовое давленіе весьма мало измѣняется по направленію отъ предѣльнаго шва къ вершинѣ купола, и, кромѣ того,—что стыковыя сжимающія напряженія σ_m, увеличиваются по направленію къ шелыгѣ купола; поэтому казалось бы цѣлесообразнымъ, въ данномъ случаѣ, придавать части купольнаго свода, расположенной выше предѣльнаго шва, постоянную толщину.

Выводъ способа для расчета меридіональнаго сѣченія сплошныхъ купольныхъ сводовъ.

Разсмотримъ опять шаровой купольный сводъ. На первый взглядъ казалось бы возможнымъ, согласно изложенному на стр. 19, принять наибольшее пятовое давленіе въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ равнымъ давленію, проявляющемуся въ существующемъ сводѣ той же толщины. Однако давленіе σ_m^1, какъ только что было выведено, не зависитъ отъ толщины свода, а поэтому и нельзя заранѣе принять опредѣленную величину этого давленія *). Поэтому необходимо прибѣгнуть къ другому способу, причемъ ниже изложенный примѣръ можетъ указать путь, которому нужно слѣдовать.

Предположимъ, что требуется опредѣлить площадь поперечнаго сѣченія F бруса, подверженнаго растягивающему дѣйствію силы P. Для этого воспользуемся выраженіемъ $\frac{P}{F} = k$, гдѣ k наибольшее допускаемое напряженіе, изъ котораго выводимъ $F = \frac{P}{k}$. Строго говоря, величина $\frac{P}{F}$ представляетъ максимальное допускаемое напряженіе въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ, ибо предполагая что P дѣйствуетъ не по самой оси бруса, или что, по другимъ какимъ либо причинамъ, не вся площадь F работаетъ на сжатіе, то наибольшее напряженіе получалось бы больше величины $\frac{P}{F}$.

---

*) Этотъ способъ одинаково непримѣнимъ для плоскихъ цилиндрическихъ сводовъ, которые, подобно купольнымъ сводамъ, служатъ исключительно перекрытіемъ и, кромѣ собственнаго вѣса, не несутъ никакой другой нагрузки. Точно также нельзя въ этомъ случаѣ примѣнить обыкновенный способъ расчета цилиндрическихъ сводовъ, упомянутыхъ на стран. 2.

Примѣчаніе автора.

Для желѣзной стойки, подверженной неподвижной нагрузкѣ, можно допустить $k = 10$ килогр. на кв. миллиметръ *), откуда:

$$F = \frac{P}{10}.$$

Въ томъ случаѣ, когда стойка подъ дѣйствіемъ силы P подвергается сверхъ того еще сотрясеніямъ, ударамъ или другимъ случайнымъ усиліямъ, то k пришлось бы уменьшить. Пусть опытами установлено, что величину допускаемаго напряженія k въ конструктивныхъ частяхъ, подверженныхъ вытягиванію, нельзя принять болѣе 3 килогр. на 1 кв. миллим.; при такихъ условіяхъ сѣченіе стойки будетъ:

$$F^1 = \frac{P}{3}.$$

Допустимъ теперь, что стойка, площадью F^1, подвержена кромѣ P, еще дѣйствію постоянной нагрузки Z, причемъ величина послѣдней такова, что:

$$\frac{P + Z}{F^1} = 10; \quad P + Z = 10\,F^1 = 10.\,\frac{P}{3}; \quad Z = {}^7/_3\,P.$$

Такимъ образомъ сѣченіе стойки, подверженной дѣйствію вышеприведенныхъ случайныхъ усилій, вліяніе которыхъ на величину наибольшаго прочнаго сопротивленія матеріала стойки едва-ли удастся установить, можетъ быть опредѣлено еще въ томъ предположеніи, что стойка эта наивыгоднѣйшимъ образомъ напряжена (т. е. что усиліе дѣйствуетъ по оси стойки при отсутствіи толчковъ и т. п.), прибавивъ къ данной силѣ P «*добавочную нагрузку*» $Z = {}^7/_3 P$, приравнивая затѣмъ наибольшее допускаемое напряженіе коэффиціенту прочнаго сопротивленія $k = 10$ килогр. на кв. мил. Этимъ самымъ обрисовываются основы того метода, которому можно также слѣдовать при расчетѣ купольныхъ сводовъ.

Примѣненіе вышеизложеннаго метода къ купольнымъ сводамъ.

Нагрузка, дѣйствующая на купольный сводъ, есть собственный вѣсъ этого свода.

---

*) 400 пуд. на 1 кв. дюймъ.

Послѣдній можно разсматривать какъ равномѣрную нагрузку, распредѣленную по средней поверхности купола, т. е. по поверхности, образованной вращеніемъ средней линіи меридіональнаго сѣченія вокругъ оси купола. Если c — толщина купольнаго свода, γ — вѣсъ кубической единицы сводчатой кладки и q — нагрузка отъ собственнаго вѣса на единицу площади средней купольной поверхности, то $q = c\gamma$.

Если опредѣлить наибольшее пятовое давленіе σ_m^1, въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ, въ существующихъ прочныхъ купольныхъ сводахъ, то оказывается, что таковое значительно менѣе коэффиціента прочнаго сопротивленія k, принимаемаго въ основаніе расчета статически опредѣлимыхъ каменныхъ сооруженій, возводимыхъ изъ такого же матеріала. Увеличивая же нагрузку q, вызванную собственнымъ вѣсомъ, на величину p, увеличивается также и σ_m^1. *Мы придаемъ* p *такую величину, чтобы* σ_m^1 *равнялось* k. Для шаровиднаго купольнаго свода, съ среднимъ радіусомъ r, мы выше нашли (ур. 16), что:

$$\sigma_m^1 = 0{,}62\, r.\gamma = \frac{0{,}62.\, r.\, c.\, \gamma}{c}, \text{ а потому:}$$

$$k = \frac{0{,}62\, r\,(c\gamma + p)}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить для даннаго существующаго купольнаго свода величину p.

На основаніи изслѣдованій, произведенныхъ надъ цѣлымъ рядомъ исполненныхъ купольныхъ сводовъ, можно допустить, что:

$$p = 4800 \left(1 + \frac{1{,}5}{r}\right) {}^{*)} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

гдѣ p — получается въ килограммахъ на квадр. метръ, причемъ средній радіусъ r купольнаго свода долженъ быть выраженъ въ метрахъ. Эта нагрузка p на квадр. метръ средней

---

*) Для полученія же p въ пудахъ на квадр. саж., формула получитъ слѣдующій видъ:

$$p = 1334 \left(1 + \frac{0{,}7}{r}\right), \text{ гдѣ } r \text{ выражено въ саженяхъ.}$$

Прим. переводчика.

купольной поверхности есть, стало быть, искомая *добавочная нагрузка*.

Простая формула, опредѣляющая толщину c *замка сферическаго купольнаго свода.*

Если требуется опредѣлить постоянную толщину сферическаго купольнаго свода со среднимъ радіусомъ r, то полагаютъ:

$$\sigma_m^1 = \frac{0,62.r(c\gamma + p)}{c} = k,$$

откуда:

$$c = \frac{0,62.p.r}{k - 0,62\,r\gamma},$$

или, если вмѣсто p подставить его величину изъ уравненія (18)

$$c = \frac{3000\ (r + 1,5)\ ^{**})}{k - 0,62.r\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (19),$$

подразумѣвая подъ k, по вышесказанному, сжимающее напряженіе на единицу площади, допускаемое для матеріала *статически опредѣлимыхъ* каменныхъ сооруженій. При этомъ всѣ величины выражены въ метрахъ, a—r, разумѣется, въ предѣлахъ, допускаемыхъ практикою.

Часть меридіональнаго вырѣзка шаровиднаго купольнаго свода, лежащая ниже предѣльнаго шва.

Раньше было указано, что стыковыя поверхности колецъ свода, лежащихъ ниже предѣльнаго шва, вовсе не напряжены, если пренебречь сопротивленіемъ вытягиванію матеріала кладки свода.

Поэтому можно разсматривать часть купольнаго вырѣзка, лежащаго ниже предѣльнаго шва, какъ свободностоящій камен-

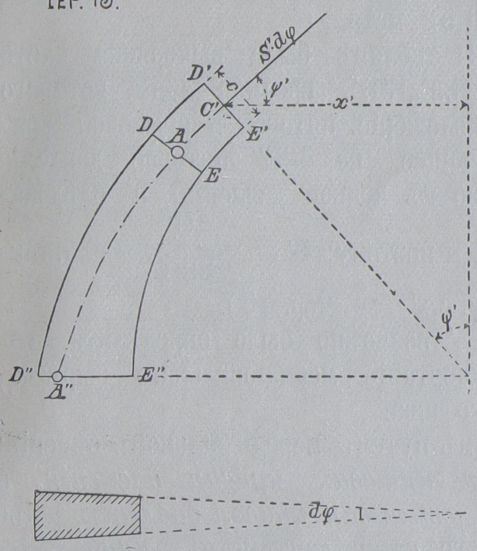
---

**) $c = \frac{827\ (r + 0,7)}{k - 0,628.r\gamma}$ въ саженяхъ.

Прим. переводчика.

ный массивъ (чер. 13), подверженный, кромѣ собственнаго вѣса, еще въ точкѣ C^1, перпендикулярно къ шву $D'E'$, усилію $S^1.d\varphi = \sigma^1_m.c.x^1.d\varphi$. Полагая далѣе, что толщина свода во всей нижней части купольнаго вырѣзка одинакова, можетъ случиться, что кривая давленія, постепенно приближаясь къ внѣшней направляющей свода, въ концѣ концовъ, выйдетъ изъ тѣла свода. Изъ этого слѣдуетъ, что толщина свода, по направленію къ пятамъ, должна постепенно возрастать и притомъ такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ швѣ, положимъ въ D, наибольшее напряженіе крайнихъ волоконъ не превышало бы того, которое дѣйствуетъ въ предѣльномъ швѣ D^1E^1, т. е. σ^1_m. Для этого поступаютъ слѣдующимъ образомъ: сначала избираютъ для шва DE положеніе точки D, пока произвольно, опредѣляютъ сжатіе σ_m въ D и сравниваютъ таковое съ σ^1_m и мѣняютъ затѣмъ положеніе точки D до тѣхъ поръ, пока σ_m не станетъ равнымъ σ^1_m.

Чер. 13.



Такимъ же образомъ опредѣляется положеніе точки D для слѣдующаго шва, продолжая это до тѣхъ поръ, пока не получится достаточно точекъ для вычерчиванія верхней направляющей DD купольнаго сектора.

Примѣръ. Требуется опредѣлить очертаніе меридіональнаго сѣченія сплошнаго купольнаго свода, внутренняя направляющая котораго описана радіусомъ $r_1 = 10$ метр. Вѣсъ одного кубическаго метра сводчатой кладки пусть будетъ $\gamma = 1600$ килогр, а наибольше допускаемое напряженіе кладки=8 килогр. на 1 кв. сантиметръ. Изъ уравненія (19) сначала опредѣляютъ толщину свода надъ предѣльнымъ швомъ, образующаго, при постоянной толщинѣ свода, съ вертикаль-

ной осью купола уголъ $\psi' = 51^{\circ}\ 50'$, полагая сначала, что $r = r_1 = 10$ метр., получаемъ:

$$c = \frac{3000.11,5}{80000 - 0,62.\ 10.1600} = 0,49 \text{ метр.},$$

послѣ чего уже опредѣляется точная величина $r = 10,25$ м., для которой получаемъ $c = 0,52$ метр.

Сообразно этому на II таблицѣ была вычерчена часть меридіональнаго вырѣзка $D_0E_0E^1D^1$, средняя линія котораго C_0C^1, опредѣляетъ собою положеніе пятовой и стыковой кривыхъ давленія. Дѣйствующее на $D'E'$ пятовое давленіе $S'.d\varphi$ направлено касательно къ кривой давленія, а слѣдовательно и къ средней линіи, и поэтому: $S' = \frac{Q'}{\sin\psi'}$ или, также $S' = \sigma'_m.\ c.x' = 0,62\ r.\ \gamma.\ c.x'$ (см. чер. 13).

Помощью этой силы S' возможно было опредѣлить, согласно вышесказанному, очертаніе меридіональнаго вырѣзка, лежащаго ниже предѣльнаго шва.

Въ полученномъ такимъ путемъ меридіональномъ сѣченіи: $C_0CC'C''$—*наивыгоднѣйшая пятовая кривая давленія*, а C_0CC'—соотвѣтственная ей *стыковая кривая давленія*, далѣе $\sigma'_m = 0,62.\ r.\ \gamma = 1,27$ килогр. на кв. сантиметръ—*наибольшее напряженіе* въ купольномъ сводѣ *въ наивыгоднѣйшемъ случаѣ*.

Для наглядности распредѣленія всѣхъ дѣйствующихъ въ сводѣ пятовыхъ и стыковыхъ давленій, были вычислены для различныхъ положеній шва DE величины σ_m и τ_m, отложены какъ ординаты къ абсциссамъ $C_0\,C$ (представляющія развернутыя дуги $C_0\,C$) и концы ихъ соединены плавною линіею. При этомъ σ_m, на протяженіи отъ D_0E_0 до $D'E'$, вычислялось по уравненію (15 a):

$$\sigma_m = \frac{r.\ \gamma}{1 + \cos\psi}, \text{ а поэтому:}$$

$$\sigma_m' = \frac{r.\ \gamma}{1 + \cos\psi'} = 0,62.\ r\gamma$$

а τ_m изъ уравненія (15 b):

$$\tau_m = r.\ \gamma.\ \left(\cos\psi - \frac{1}{1 + \cos\psi}\right).$$

Отъ $D'E'$ до $D''E''$ величина σ_m постоянна, а $\tau_m = 0$.

Купольные своды произвольнаго очертанія. Хотя въ сплошныхъ купольныхъ сводахъ, едва-ли примѣняется иное

очертаніе, чѣмъ круговое, тѣмъ не менѣе разсмотримъ купольный сводъ съ направляющими произвольнаго очертанія. При этомъ цѣлесообразнѣе всего принять толщину купола въ верхней его части постоянною, опредѣляя таковую, пока по уравненію (19):

$$c = \frac{3000\ (r + 1{,}5)}{k - 0{,}62.\ r.\ \gamma},$$

принимая r равнымъ полупролету въ свѣту. Затѣмъ проводятъ швы DE нормально къ средней линіи, вычисляютъ по правилу Гюльдина вѣса отдѣльныхъ клиньевъ, откладываютъ ихъ по вертикали силъ*) (см. таб. II), опредѣляютъ такимъ образомъ для отдѣльныхъ швовъ величины Q и помощью прямыхъ, проведенныхъ параллельно къ касательнымъ къ средней линіи меридіональнаго сѣченія, также и значенія для S и H. Послѣднія даютъ кривую H-овъ, вершина которой опредѣляетъ предѣльный шовъ D′E′ и предѣльный уголъ ψ'. Послѣ этого предполагаютъ, что средняя купольная поверхность купольнаго сектора подвержена дѣйствію добавочной нагрузки:

$$p = 4800\left(1 + \frac{1{,}5}{r}\right)$$

килогр. на квад. метръ, причемъ опять вмѣсто r можно подставить полупролетъ купольнаго свода въ свѣту, и вычисляютъ равномѣрное сжатіе σ_m' площади предѣльнаго шва D′E′, принимая во вниманіе какъ собственный вѣсъ, такъ и добавочную нагрузку, изъ выраженія:

$$\sigma_m' = \frac{S'.d\varphi}{c.x'.d\varphi} = \frac{S'}{c.\ x'} = \frac{Q'}{c.\ x'.\mathrm{Sin}\,\psi'}.$$

Если толщина свода c избрана правильно, то σ_m' должно получиться равнымъ k, т. е. прочному сопротивленію раздробленію, допускаемому для статически-опредѣлимыхъ сооруженій.

Опредѣливши такимъ образомъ меридіональное сѣченіе купольнаго свода отъ вершины до предѣльнаго шва, далѣе вычисляютъ *истинное* значеніе пятового напряженія σ_m' въ предѣльномъ швѣ (исключивъ, стало быть, добавочную нагрузку) и опредѣляютъ форму части меридіональнаго сѣченія свода, лежащей ниже предѣльняго шва, по тому же способу какъ и въ шаровыхъ купольныхъ сводахъ.

---

*) Вертикальная прямая, на которой въ извѣстномъ масштабѣ отложены вѣса, разсматриваемые какъ силы.

Примѣч. переводчика.

Плоскій сферическій купольный сводъ (Kugelflächiges Kappengewölbe *). Когда данный купольный сводъ представляетъ только часть полушара,—притомъ верхнюю часть послѣдняго (скуфію), то такой купольный сводъ называется плоскимъ.

Предполагая, что толщина c такого свода постоянна, предѣльный уголъ (уголъ перелома) ψ' получится опять $= 51^0 50'$. Когда центральный уголъ плоскаго купольнаго свода $2\psi'' > 2\psi'$, то послѣдній расчитывается какъ полный шаровой купольный сводъ. Когда же $\psi'' < \psi'$, то опредѣляютъ постоянную толщину свода по извѣстному уже способу, принимая величину равномѣрнаго пятового давленія σ''_m, дѣйствующаго въ пятовомъ или опорномъ швѣ, вызваннаго собственнымъ вѣсомъ свода и добавочною нагрузкою, p килогр. на кв. единицу площади, равномѣрно распредѣленной по всей средней купольной поверхности, равнымъ коэффиціенту прочнаго сопротивленія k избраннаго матеріала кладки.

Согласно уравненію (15a) пятовое давленіе σ_m въ швѣ, составляющемъ съ осью купола уголъ ψ, при постоянной толщинѣ свода, равняется:

$$\sigma_m = \frac{r.\ \gamma}{1+\mathrm{Cos}\psi} = \frac{r.\ c.\ \gamma}{c\ (1+\mathrm{Cos}\psi)}.$$

Вводя еще добавочную нагрузку p на квадр. единицу, необходимо подставить вмѣсто $c\gamma$—величину $c\gamma+p$, тогда получаемъ:

$$\sigma_m = \frac{r\ (c\gamma + p)}{c\ (1+\mathrm{Cos}\ \psi)}$$

и:

$$\sigma''_m = \frac{r\ (c\gamma+p)}{c\ (1+\mathrm{Cos}\psi'')} = k,$$

откуда:

$$c = \frac{r.\ p}{k\ (1 + \mathrm{Cos}\,\psi'') - r.\ \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Относительно добавочной нагрузки p слѣдуетъ замѣтить, что таковая вообще должна убывать вмѣстѣ съ угломъ ψ'' и поэтому можно предположить, принимая килограммы и метры за единицы, для сводовъ небольшаго выноса (т. е. въ которыхъ

*) Этотъ новый терминъ предложенъ авторомъ, хотя слово «Kappengewölbe» во всей нѣмецкой технической терминологіи означаетъ плоскій цилиндрическій сводъ небольшого пролета (до $1^1/_2$ саж.).

Примѣч. переводчика.

$\operatorname{tg} \frac{\psi''}{2}$, примѣрно, не менѣе 0,2), что:

$$p = 9880 \left(1 + \frac{1,5}{r}\right) \operatorname{tg} \frac{\psi''}{2} \text{ *)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Принимая въ этомъ уравненіи $\psi'' = \psi' = 51^0\ 50'$, получаемъ, что:

$$p = 4800 \left(1 + \frac{1,5}{r}\right),$$

т. е. какъ и должно быть, прежнюю величину нагрузки (см. уравненіе 18).

V ГЛАВА.

Сплошной купольный сводъ съ постояннымъ пятовымъ давленіемъ **).

Меридіональное сѣченіе надъ предѣльнымъ швомъ при круговой средней линіи. Какъ видно изъ примѣра, приведеннаго на таблицѣ II, въ сферическомъ купольномъ сводѣ, постоянной толщины и при наивыгоднѣйшемъ расположеніи кривыхъ давленія, пятовое давленіе постоянно, хотя и медленно убываетъ по направленію къ вершинѣ купола. Для полученія, стало быть, неизмѣннаго пятового давленія, необходимо принять толщину свода с за перемѣнную величину. Называя постоянное пятовое давленіе черезъ k′ и придерживаясь прежнихъ обозначеній (см. также таб. II) получимъ:

$$\frac{S}{c.\,x} = k' \quad \text{или} \quad \frac{Q}{\operatorname{Sin}\psi} \cdot \frac{1}{c.\,r.\,\operatorname{Sin}\psi} = k';$$

$$Q = r.\,k'.\,c.\,\operatorname{Sin}^2\psi.$$

отсюда:

$$\frac{dQ}{d\psi} = r.\,k' \left(c.\,2\operatorname{Sin}\psi.\operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Sin}^2\psi\,\frac{dc}{d\psi}\right).$$

---

*) $p = 2746 \left(1 + \frac{0,7}{r}\right) \operatorname{tg} \frac{\psi''}{2}$ для пуд. и саж.

Примѣч. переводчика.

**) т. е. сводъ равнаго сопротивленія.

Примѣч. переводчика.

Но:

$$dQ = c.r.\, d\psi.x.\gamma, \text{ а поэтому } \frac{dQ}{d\psi} = c.r.x.\gamma = c.r^2.\gamma.\operatorname{Sin}\psi$$

откуда:

$$c.\, r^2.\, \gamma.\, \operatorname{Sin}\psi = r.\, k' \left\{ c.\, 2 \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi + \operatorname{Sin}^2\psi.\, \frac{dc}{d\psi} \right\},$$

$$c\left(\frac{r.\gamma}{k'} - 2\cos\psi\right) = \operatorname{Sin}\psi.\frac{dc}{d\psi},$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\frac{r.\gamma}{k'} - 2\operatorname{Cos}\psi}{\operatorname{Sin}\psi}.\, d\psi = \frac{r.\gamma}{k'}.\frac{d\psi}{\operatorname{Sin}\psi} - 2\operatorname{Cotg}\psi.\, d\psi.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\log c = \frac{r.\gamma}{k'}.\log \operatorname{tg} {}^1/_2\,\psi - 2\log \operatorname{Sin}\psi + \log B,$$

подразумѣвая подъ B произвольную постоянную. Или:

$$\log c = \log\left(\operatorname{tg} {}^1/_2\,\psi\right)^{\frac{r\gamma}{k'}} + \log B - \log \operatorname{Sin}^2\psi =$$

$$= \log \frac{B.\left(\operatorname{tg} {}^1/_2\,\psi\right)^{\frac{r\gamma}{k'}}}{\operatorname{Sin}^2\psi}.$$

откуда:

$$c = \frac{B.\left(\operatorname{tg} {}^1/_2\,\psi\right)^{\frac{r\gamma}{k'}}}{\operatorname{Sin}^2\psi} = \frac{B.\left(\operatorname{tg} {}^1/_2\psi\right)^n}{\operatorname{Sin}^2\psi}$$

или:

$$c = B.\left\{\frac{\operatorname{Sin}\psi}{1 + \operatorname{Cos}\psi}\right\}^n.\frac{1}{\operatorname{Sin}^2\psi}$$

При $k' = \frac{r\gamma}{2}$, т. е. при k' равнымъ пятовому давленію въ вершинѣ сферическаго купольнаго свода постоянной толщины (см. стр. 33),

$$n = \frac{r.\gamma}{k'} = 2 \text{ и } c = \frac{B.\operatorname{Sin}^2\psi}{(1 + \operatorname{Cos}\psi)^2}.\frac{1}{\operatorname{Sin}^2\psi} = \frac{B}{(1 + \operatorname{Cos}\psi)^2}$$

а толщина c_0, въ вершинѣ, соотвѣтствующая $\psi = 0$:

$$c_0 = \frac{B}{4}.$$

При $k' > \frac{r\gamma}{2}$ или $n = \frac{r\gamma}{k'} < 2$, получилось бы:

$$c = \frac{B}{(1+\operatorname{Cos}\psi)^n (\operatorname{Sin}\psi)^{2-n}}; \quad c_0 = \frac{B}{2^n . 0} = \infty.$$

Если же $k' < \frac{r\gamma}{2}$ или $n = \frac{r\gamma}{k'} > 2$ то:

$$c = \frac{B. (\operatorname{Sin}\psi)^{n-2}}{(1+\operatorname{Cos}\psi)^n} \text{ и } c_0 = 0.$$

И такъ въ разсматриваемомъ купольномъ сводѣ возможно допустить одно лишь постоянное пятовое давленіе $k' = \frac{r\gamma}{2}$, для опредѣленія же толщины свода (въ разныхъ мѣстахъ) необходимо пользоваться формулою:

$$c = \frac{B}{(1+\operatorname{Cos}\psi)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

гдѣ B—произвольная постоянная.

Если задаться толщиною свода въ какомъ либо мѣстѣ, то величина B перестаетъ быть произвольною. Пусть, напримѣръ, для угла $\psi = 51^\circ\, 50'$, толщина свода $= c'$, тогда:

$$c' = \frac{B}{(1+\operatorname{Cos} 51^\circ\, 50')^2},$$

а слѣдовательно:

$$B = 2{,}62.\ c'.$$

$$c = \frac{2{,}62\ .\ c'}{(1+\operatorname{Cos}\psi)^2}; \text{ толщина въ вершинѣ } c_0 = \frac{2{,}62}{4}.\ c'$$

или, приближенно:

$$c_0 = {}^2/_3\ c'.$$

Съ другой же стороны получаютъ изъ уравненія для c:

$$c_0 = \frac{B}{4}; B = 4\ c_0 \text{ и } c = \frac{4\ c_0}{(1+\operatorname{Cos}\psi)^2} \quad \ldots\ldots \quad (22\,a).$$

Коль скоро толщина c сферическаго купольнаго свода, будетъ измѣняться вмѣстѣ съ угломъ ψ, что видно изъ послѣдняго уравненія (22 a), то предѣльный шовъ D'E' не будетъ имѣть то же положеніе, какъ въ купольномъ сводѣ постоянной толщины, т. е. уголъ наклоненія ψ' предѣльнаго шва къ оси купола не будетъ $= 51^\circ 50'$. Постараемся теперь опредѣлить этотъ уголъ ψ'.

Для произвольнаго пятового шва:—

$$H = Q.\ \cot g\ \psi$$

и отсюда:

$$\frac{dH}{d\psi} = Q\left(-\frac{1}{\sin^2\psi}\right) + \cot g\ \psi \cdot \frac{dQ}{d\psi}.$$

Но:

$$\frac{Q}{\sin\psi} = S = c.\ x.\ k' = c.\ r.\ \sin\psi.\ k'$$

и, какъ мы выше видѣли:

$$\frac{dQ}{d\psi} = r^2.\ \gamma.\ c.\ \sin\psi;$$

сообразно этому:

$$\frac{dH}{d\psi} = -\ c.\ r.\ k' + \cot g\ \psi.\ r^2.\ \gamma.\ c.\ \sin\psi = r.\ c.\ (r.\ \gamma.\ \cos\psi - k').$$

Для $\psi = \psi'$ величина $\frac{dH}{d\psi} = 0$, а слѣдовательно:

$$r.\ \gamma.\ \cos\psi' = k' = \frac{r.\gamma}{2};\ \cos\psi' = {}^1/_2;\qquad \psi' = 60^0.$$

Стало быть, отъ вершины купола до предѣльнаго шва, наклоненнаго подъ угломъ въ 60° къ оси купола, сжимающія напряженія въ постеляхъ клиньевъ остаются постоянными и $= k' = \frac{r.\gamma}{2}$; кривая σ_m-овъ обращается въ прямую, параллельную оси абсциссъ. Для полученія кривой τ_m-овъ, замѣтимъ, что согласно уравненію (12):

$$\tau_m = \frac{dH}{c.\ ds'} = \frac{dH}{c.\ r.\ d\psi}.$$

Съ другой же стороны, какъ мы только что видѣли:

$$\frac{dH}{d\psi} = r.\ c.\ (r\gamma\ \mathrm{Cos}\ \psi - k'),$$

слѣдовательно:

$$\tau_m = r.\ \gamma.\ \mathrm{Cos}\ \psi - k' \quad \ldots\ldots\ldots (23).$$

Изъ этого выраженія можно опредѣлить для произвольной величины ψ, соотвѣтственныя значенія для τ_m. Въ вершинѣ купола $\psi = 0$, и поэтому:

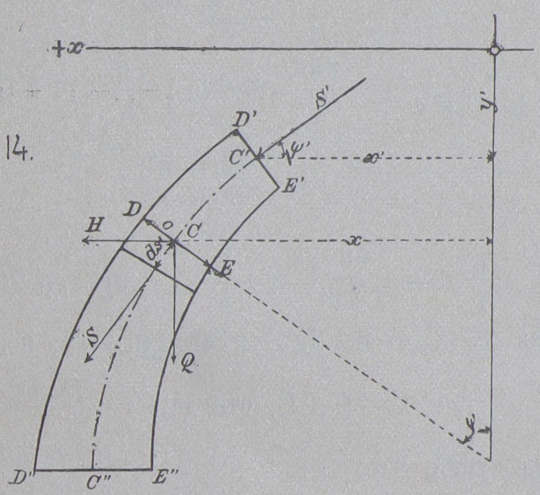
$$\tau_m = r.\gamma - k' = r.\gamma - \frac{r.\gamma}{2} = \frac{r.\gamma}{2};$$

Въ предѣльномъ же швѣ, для котораго $\psi = 60^0$, $\cos\psi = 1/2$,

$$\tau_m = \frac{r.\gamma}{2} - \frac{r.\gamma}{2} = 0.$$

Часть меридіональнаго сѣченія, лежащая ниже предѣльнаго шва.

Ниже предѣльнаго шва разсматриваютъ купольный секторъ, какъ свободно стоящій каменный массивъ, подверженный въ точкѣ C′ (черт. 14) нормальному усилію $S'.d\varphi$, причемъ въ каждомъ швѣ, расположенномъ нормально къ средней линіи, должно проявляться равномѣрное сжатіе $\sigma_m = k' = \frac{r\gamma}{2}$.



Черт. 14.

Сначало нужно опредѣлить очертаніе средней линіи.

Для произвольнаго шва, составляющаго съ вертикальною осью купола уголъ ψ, для котораго вѣсъ вышележащей части купольнаго сектора $= Q.d\varphi$ и горизонтальный распоръ $= H.d\varphi$, получаемъ:

$$Q = H.\ tg\,\psi = H.\ u.$$

Этотъ горизонтальный распоръ H, постояненъ для всей части купольнаго сектора, лежащей ниже предѣльнаго шва, и не зависитъ отъ угла ψ, а поэтому:

$$dQ = H.\ du.$$

Но:

$$dQ = c.\ ds'.\ x.\ \gamma = c.\ x.\ \gamma.\ \frac{dx}{\cos\psi},$$

а слѣдовательно:

$$H.\,du = c.\,x.\,\gamma.\ \frac{dx}{\operatorname{Cos}\psi}.$$

Далѣе имѣемъ, что:

$$S = \frac{H}{\operatorname{Cos}\psi} \quad \text{и} \quad \frac{S}{cx} = k',$$

откуда:

$$c.x = \frac{H}{k'.\operatorname{Cos}\psi}$$

и:

$$H\,du = \frac{H.\,\gamma.\,dx}{k'.\operatorname{Cos}^2\psi}$$

или:

$$du = \frac{\gamma\,dx}{k'.\operatorname{Cos}^2\psi} = \frac{\gamma\,dx}{k'}\cdot\operatorname{Sec}^2\psi = \frac{\gamma\,dx}{k'}\,(1+\operatorname{tg}^2\psi) =$$

$$= \frac{\gamma\,dx}{k'}\,(1+u^2);$$

откуда:

$$\frac{\gamma}{k'}\,dx = \frac{du}{1+u^2} \quad \text{и} \quad \frac{\gamma}{k}.\,x = \operatorname{arc\,tg} u + C.$$

Для $x = x'$, — $u = \operatorname{tg}\psi'$ и $\operatorname{arc\,tg} u = \psi'$, поэтому:

$$\frac{\gamma}{k'}\cdot x' = \psi' + C, \text{ откуда } C = \frac{\gamma x'}{k'} - \psi'.$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\frac{\gamma}{k'}\,(x - x') + \psi' = \operatorname{arctg} u$$

и:

$$u = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left\{\frac{\gamma}{k'}\,(x - x') + \psi'\right\} =$$

$$\operatorname{cotg}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{k'}\,(x - x') - \psi'\right\}.$$

Полагая, что $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{k'}\,(x - x') - \psi = \xi$, получимъ, что:

$$d\xi = -\frac{\gamma}{k'}\,dx; \quad dx = -\frac{k'}{\gamma}.\,d\xi; \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\xi;$$

$$dy = \cot g\,\xi.\,dx = -\frac{k'}{\gamma}.\cot g\,\xi.\,d\xi;$$

$$y = -\frac{k'}{\gamma}\int \cot g\,\xi.\,d\xi = -\frac{k'}{\gamma}\log nat\,\mathrm{Sin}\,\xi + \frac{k'}{\gamma}\cdot\log nat.\,C',$$

гдѣ C'—произвольная постоянная.

$$y = \frac{k'}{\gamma}\log nat\,\frac{C'}{\mathrm{Sin}\,\xi} = \frac{k'}{\gamma}\log nat\,\frac{C'}{\mathrm{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi'\right\}}.$$

Для опредѣленія C' имѣемъ:
для $x = x'$ и $y = y'$. Это даетъ:

$$y' = \frac{k'}{\gamma}\log nat\,\frac{C'}{\mathrm{Cos}\,\psi'},$$

откуда получается:

$$y - y'\,^{*)} = \frac{k'}{\gamma}\log nat\,\frac{\mathrm{Cos}\,\psi'}{\mathrm{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi'\right\}} \quad \ldots\ldots (24)$$

Выше мы имѣли, что:

$$u = \mathrm{tg}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi'\right\};$$

но:

$u = \mathrm{tg}\,\psi$, слѣдовательно, $\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi' = \psi$

---

*) $y-y' = \frac{k'}{\gamma}\log nat\,\frac{C'}{\mathrm{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi'\right\}} - \frac{k'}{\gamma}\log nat.\frac{C'}{\mathrm{Cos}\,\psi'}$

или

$$y-y' = \frac{k'}{\gamma}\log nat\left\{\frac{C'}{\mathrm{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi'\right\}} : \frac{C'}{\mathrm{Cos}\,\psi'}\right\} =$$

$$\frac{k'}{\gamma}\log nat\,\frac{\mathrm{Cos}\,\psi'}{\mathrm{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x-x')+\psi'\right\}}.$$

Дополненіе переводчика.

откуда:

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{\operatorname{Cos}\psi'}{\operatorname{Cos}\psi} \quad \ldots\ldots\ldots (24a).$$

Въ разсматриваемомъ же случаѣ $\psi' = 60^0 = \frac{\pi}{3}$ и поэтому $\operatorname{Cos}\psi' = \frac{1}{2}$ и:

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} . \log \text{nat} \frac{1}{2 \operatorname{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}(x - x') + \frac{\pi}{3}\right\}} \quad \ldots (24b)$$

или же, такъ какъ $k' = \frac{r.\gamma}{2}$,

$$y - y' = \frac{r}{2} . \log \text{nat} \frac{1}{2 \operatorname{Cos}\left\{2\frac{(x - x)}{r} + \frac{\pi}{3}\right\}} {}^{*)} =$$

$$= \frac{r}{2} \log. \text{nat}. \frac{1}{2 \operatorname{Cos}\psi} \quad \ldots\ldots\ldots (24c)$$

Теперь остается лишь опредѣлить для различныхъ точекъ этой средней линіи соотвѣтственныя имъ значенія столщины свода.

Толщина свода c' въ предѣльномъ швѣ, по вышенайденному опредѣляется изъ выраженія:

$$c' = \frac{B}{(1 + \operatorname{Cos}\psi')^2} = \frac{B}{(1 + {}^1/_2)^2} = {}^4/_9\, B$$

и, сообразно этому, нормальное къ шву усиліе:

$$S' = c'.\ x'.\ k' = {}^4/_9\, B.\ x'.\ \frac{r\ \gamma}{2}.$$

Постоянный горизонтальный распоръ H, дѣйствующій на часть купольнаго свода, лежащую ниже предѣльнаго шва, равняется:

$$H = S'.\ \operatorname{Cos}\psi' = \frac{S'}{2} = \frac{B.\ x'.\ r.\ \gamma}{9}.$$

Такимъ образомъ опредѣляется нормальное усиліе S, для произвольнаго шва:

---

*) Такъ какъ, согласно вышевыведенному $\frac{\gamma}{k'}(x - x') + \psi' = \psi$ или $\frac{2}{r}(x - x') + \psi' = \psi$.

Дополненіе переводчика

$$S = \frac{H}{\cos\psi} = \frac{B.x'.r.\gamma}{9\cos\psi}.$$

Съ другой же стороны должно существовать равенство:

$$\frac{S}{c\,x} = k', \text{ откуда } c = \frac{S}{x\,k'} = \frac{2\,S}{x.r.\gamma}$$

поэтому:

$$c = \frac{2}{9} \cdot \frac{B\,x'}{x\cos\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

При разсмотрѣніи части купольнаго сектора, лежащей выше предѣльнаго шва, мы нашли для толщины c_0 вершины свода, что:

$$c_0 = \frac{B}{4}, \quad \text{или} \quad B = 4c_0$$

и

$$c = \frac{8}{9} \cdot \frac{c_0.\,x'}{x.\cos\psi} = c_0 \cdot \frac{8}{9}\,\frac{x'}{x} \cdot \frac{1}{\cos\left\{\frac{2\,(x-x')}{r} + \psi'\right\}}. \qquad (25a)$$

причемъ слѣдуетъ предположить $\psi' = \frac{\pi}{3}$

Задаваясь затѣмъ c_0, при данномъ r, можно будетъ опредѣлить форму и размѣры всего купольнаго свода.

Примѣръ расчета свода съ постояннымъ пятовымъ давленіемъ (Табл. III). Требуется опредѣлить размѣры меридіональнаго сѣченія купольнаго свода, въ которомъ горизонтальное разстояніе нижней конечной точки C'' средней линіи отъ оси купола = 8 метрамъ:; высота верхней точки C_0 надъ горизонталью, проведенной черезъ $C'' = 10$ метр.; $\gamma = 1600$ килогр. и $k = 8$ килогр. на квадр. сантиметръ (k—обыкновенно допускаемое прочное сопротивленіе того каменнаго матеріала, изъ котораго состоитъ сводъ; k' постоянное пятовое давленіе).

Согласно вышеизложенному, средняя линія искомаго меридіональнаго сѣченія, на протяженіи отъ вершины купола до предѣльнаго шва, наклоненнаго къ вертикальной оси купола подъ угломъ $\psi' = 60^0$, есть дуга круга, а къ ней касательно примыкаетъ другая кривая, выраженная слѣдующимъ уравненіемъ:

$$y - y' = \frac{r}{2}\log\text{nat}\,\frac{1}{2\cos\left\{\frac{2\,(x-x')}{r} + \psi'\right\}} \qquad \text{(см. ур. 24)}$$

въ которомъ x и y—разсматриваемые координаты, r—радіусъ вышеупомянутой дуги круга,

$$\psi' = \frac{\pi}{3}; \quad x' = r.\,\mathrm{Sin}\,\psi'; \quad y' = r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\psi').$$

Средняя линія купольнаго сектора должна пройти черезъ данныя точки C_0 и C'' (черт. 2 таб. III). Спрашивается, чему должна равняться величина r? Если принять точку C_0 за начало координатъ, то координаты точки C'' будутъ: $x = 8$ метр. и $y = 10$ метр.; эти координаты должны удовлетворять только что приведенному уравненію средней линіи свода, расположенной ниже предѣльнаго шва. Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$10 - r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\psi') = \frac{r}{2}\,\log\,\mathrm{nat}\,\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\left\{\frac{2\,(8 - r\,\mathrm{Sin}\,\psi')}{r} + \psi'\right\}}$$

Изъ этого трансцедентнаго уравненія можно бы приближенно опредѣлить r по извѣстному способу, между тѣмъ, гораздо проще построить r графически, какъ показано на таблицѣ III.

На черт. 1 таб. III. сначала описана, произвольно избраннымъ радіусомъ $\eta = 8$ метр., дуга круга S_0S' (центральный уголъ $\psi' = 60^0$) и, въ связи съ ней, по уравненію кривой (24 a), кривая $S'S''$. Кривая $S^0S'S''$ вообще есть средняя линія купольнаго свода съ постояннымъ пятовымъ давленіемъ, такъ какъ всѣ кривыя S_0S'', вычисленныя для различныхъ радіусовъ r, будутъ подобны между собою.

Чтобы опредѣлить теперь величину r для средней линіи, проходящій черезъ точки C_0 и C'', на черт. 1 таб. III была проведена прямая C_0C'' и продолжена до пересѣченія съ кривой S_0S'' въ точкѣ S'' и затѣмъ—горизонтальная прямая $S''P$. Изъ подобія среднихъ линій слѣдуетъ, что:

$$\frac{r}{C''M} = \frac{\eta}{S''P}, \text{ откуда } r = C''M.\ \frac{\eta}{S''P}.$$

Отложивши затѣмъ $PN = \eta$ получимъ $r = MK = 7{,}36$ метр., а слѣдовательно и (чер. 2) круговую часть C_0C' средней линіи, послѣ чего уже, помощью уравненія (24 a), опредѣлена часть $C'C''$. Такимъ образомъ оставалось только установить толщину свода c для разныхъ точекъ средней линіи. Толщина свода отъ вершины купола до предѣльнаго шва опредѣляется по уравненію (22 a), а именно:

$$c = \frac{4\,c_0}{(1+\cos\psi)^2},$$

въ которомъ c_0 толщина свода въ вершинѣ купола, а для опредѣленія толщины свода отъ предѣльнаго шва до опоры служитъ уравненіе (25а):

$$c = c_0 \cdot \frac{8\,x'}{9\,x} \cdot \frac{1}{\cos\left\{\frac{2(x-x')}{r} + \psi'\right\}}.$$

При данномъ c_0, слѣдовательно, форма меридіональнаго сѣченія вполнѣ опредѣлена. Какую величину однако придать c_0 въ данномъ случаѣ?

Очевидно слѣдуетъ опять допустить существованіе добавочной нагрузки, p килогр. на единицу площади, расположенной по всей средней купольной поверхности свода, при условіи, чтобы наибольшее пятовое давленіе не превышало коэффиціента прочнаго сопротивленія k матеріала кладки купольнаго свода. Допуская, однако, дѣйствіе этой добавочной нагрузки, вмѣстѣ съ тѣмъ, нужно допустить, что предѣльный шовъ, составлявшій до этого съ осью купола уголъ въ 60^0, перемѣстится къ верху и въ виду того, что p значительно больше дѣйствительной нагрузки $c.\gamma$, онъ займетъ почти тоже положеніе, какъ въ купольномъ сводѣ однообразной толщины, т. е. предѣльный шовъ составитъ съ вертикальною осью купола, примѣрно, уголъ въ $51^0\,50'$.

На основаніи изложенныхъ соображеній, въ разсматриваемомъ примѣрѣ, была опредѣлена толщина свода c_1 для шва $D_1 E_1$ (чер. 2 таб. III) составляющаго съ осью купола уголъ въ $51^0\,50'$, пользуясь уравненіемъ (19), изъ котораго получилось:

$$c_1 = \frac{3000\ (7{,}36+1{,}5)}{80000-0{,}62.\,7{,}36.\,1600} = 0{,}36 \text{ метр.}$$

Но между c_1 и c_0, согласно уравненію (22а), существуетъ слѣдующее соотношеніе:

$$c_1 = \frac{4\,c_0}{\left\{1+\cos(51^0\,50')\right\}^2},$$

откуда, при $c_1 = 0{,}36$ получается:

$$c_0 = 0{,}24 \text{ метра.}$$

Опредѣливши c_0, оказалось возможнымъ, пользуясь приведенными выше уравненіями, вычислить для произвольныхъ швовъ, соотвѣтственную имъ толщину свода c; половины найденныхъ для c величинъ были затѣмъ отложены отъ средней линіи свода вверхъ и внизъ, и этимъ путемъ получено все искомое очертаніе меридіональнаго вырѣзка.

Въ опредѣленномъ такимъ путемъ купольномъ сводѣ, наивыгоднѣйшая пятовая кривая давленія проходитъ по серединѣ всѣхъ швовъ, въ которыхъ къ тому же дѣйствуетъ одно и то же равномѣрное сжимающее напряженіе:

$$k' = \frac{r.\gamma}{2} = \frac{7{,}36.1600}{2} = 5888$$ килогр. на кв. метръ $= 0{,}6$ килогр. на кв. сант. (0,24 пуд. на 1 кв. дюймъ *).

Точно также всѣ стыковыя части клиньевъ подвержены равномѣрному сжимающему напряженію, причемъ наибольшее стыковое давленіе, проявляющееся въ вершинѣ купола, также $= k' = 0{,}6$ килогр. на кв. сантиметръ.

Купольные своды съ постояннымъ пятовымъ давленіемъ и неизмѣнной толщины.

Въ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ купольныхъ сводахъ, средняя линія части купольнаго сектора, лежащей выше предѣльнаго шва, составляла дугу круга, причемъ для *постояннаго* пятового давленія толщина свода получилась *перемѣнной*. Но можно поставить себѣ еще такого рода задачу, а именно: опредѣлить ту форму средней линіи, при которой толщина свода можетъ остаться постоянной. Придерживаясь прежнихъ обозначеній и въ особенности таковыхъ на чертежахъ 9 и 8-мъ, получимъ:

$$dQ = c.ds.x.\gamma.$$

и

$$\frac{Q}{\sin\psi} = S = c.x.k'; \quad Q = c.k'.x.\sin\psi,$$

откуда:

$$dQ = c\,k'\,(x.\cos\psi\,d\psi + \sin\psi\,.\,dx)\,.$$

---

*) Дополненіе переводчика.

Итакъ:

$$ds.\ x.\ \gamma. = k'.\ (x\,Cos\psi\ d\psi + Sin\psi.\ dx)$$

или, такъ какъ $dx = ds.\ Cos\ \psi$, то:

$$\frac{\gamma}{k'} = Cos^2\ \psi.\ \frac{d\ \psi}{dx} + \frac{Sin\ \psi\ \ Cos\ \psi}{x}.$$

Это есть дифференціальное уравненіе искомой средней линіи. Не останавливаясь пока на дальнѣйшемъ изслѣдованіи этого вопроса, замѣтимъ только, что мы вернемся къ нему въ слѣдующей главѣ, посвященной разсмотрѣнію плоскихъ купольныхъ сводовъ.

VI ГЛАВА.

Наиболѣе цѣлесообразная форма плоскихъ купольныхъ сводовъ.

Плоскій параболическій купольный сводъ. Въ плоскихъ купольныхъ сводахъ постоянной толщины, въ которыхъ можно допустить равномѣрное распредѣленіе собственнаго вѣса ихъ по горизонтальной проекціи, какъ доказано Шведлеромъ въ его статьѣ о купольныхъ сводахъ, приведенной въ введеніи, пятовыя и стыковыя сжимающія напряженія будутъ постоянны, если средняя линія меридіальнаго сѣченія—парабола, ось которой совпадаетъ съ осью купола.

Это впрочемъ вытекаетъ также изъ сдѣланныхъ нами до сихъ поръ выводовъ.

Какъ извѣстно $dQ = c.\ ds'\ x.\ \gamma$ или, приближенно, для плоской формы средней линіи свода можно принять $dQ = c.\ d\,x.\ x.\ \gamma$, откуда:

$$Q = \frac{c.\ \gamma.\ x^2}{2}.$$

Далѣе имѣемъ, что:

$$\frac{Q}{Sin\ \psi} = c.\ x.\ k',$$

гдѣ k' — постоянное пятовое давленіе, или такъ какъ ψ по допущенію величина весьма малая, то:

$$\frac{Q}{tg\ \psi} = c.\ x.\ k$$

откуда :

$$\frac{c.\ \gamma.\ x^2}{2} = c.\ x.\ k'.\ tg\,\psi$$

или :

$$\frac{\gamma.\ x}{2\ k'} = tg\,\psi = \frac{dy}{dx}\ ;$$

интегрируя— :

$$y = \frac{\gamma}{4\ k'}\ .\ x^2\ .$$

Это и есть уравненіе средней линіи: послѣдняя, сталобыть—парабола.

Для вычисленія средняго стыковаго давленія τ_m воспользуемся раньше выведеннымъ уравненіемъ:

$$\tau_m = \frac{dH}{c.dx}$$

но :

$$Q = H\ .\ tg\,\psi = H \cdot \frac{dy}{dx}$$

или :

$$\frac{c\ \gamma.\ x^2}{2} = H.\ \frac{\gamma.\ x}{2\ k'}\ ,$$

откуда $H = c\ k'.\ x$; $\frac{dH}{dx} = ck'$ и поэтому $\tau_m = k'$.

По вышесказанному, величина k' въ купольныхъ сводахъ вообще относительно мала. Принимая, для примѣра, $k' = 1{,}6$ килогр. на кв. сантм., изъ уравненія средней параболической линіи, при $\gamma = 1600$ килогр., получаемъ:

$$y = \frac{1}{40}\ x^2\ ;$$

Далѣе :

$$tg\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{20}$$

а радіусъ кривизны въ вершинѣ:

$$\rho_0 = \frac{2k'}{\gamma} = 20 \text{ метр.}$$

При k' равнымъ всей половинѣ допущеннаго, т. е. $= 0{,}8$, получилось бы $\rho_0 = 10$ m.; итакъ: чѣмъ больше радіусъ кривизны, тѣмъ больше напряженіе.

Разсматривая же плоскій купольный сводъ, при пролетѣ средней линіи = 20 метр., въ которомъ k′ должно быть постояннымъ и = 1,6 килогр. на кв. сантим., тогда уравненіе средней линіи опять получитъ видъ:

$$y = \frac{1}{40} x^2$$

стрѣла же подъема h = 2,5 метр.

Спрашивается, достаточно ли пологимъ является разсматриваемый сводъ, чтобы оправдать параболическую форму средней линіи?

Для купольнаго вырѣзка съ центральнымъ угломъ $d\varphi$ и толщиною c, нормальное давленіе $S . d\varphi$, проявляющееся въ пятовомъ швѣ, расположенномъ подъ угломъ ψ къ вертикальной оси купола, будетъ:

$$S . d\varphi = c . x . d\varphi . \sigma_m ; \qquad S = c . x . \sigma_m ,$$

гдѣ σ_m — пятовое давленіе. Но:

$$S d\psi . \operatorname{Sin}\psi = Q d\varphi = \int_0^x c . ds . x d\varphi . \gamma = c . \gamma . d\varphi \int_0^x ds . x$$

или:

$$S . \operatorname{Sin}\psi = c . \gamma \int_0^x x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$= c . \gamma \int_0^x x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{x}{20}\right)^2} = \frac{c.\gamma}{20} \int_0^x x\, dx \sqrt{400 + x^2} =$$

$$= \frac{c.\gamma}{60} . \left\{ \left(400 + x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 8000 \right\} .$$

Далѣе:

$$\operatorname{Sin}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2\psi}} = \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}} ;$$

итакъ:

$$c . x . \sigma_m . \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}} = \frac{c.\gamma}{60} \left\{ (400 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 8000 \right\}$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma}{60\,x^2}\left\{(400+x^2)^2 - 8000\sqrt{400+x^2}\right\}$$

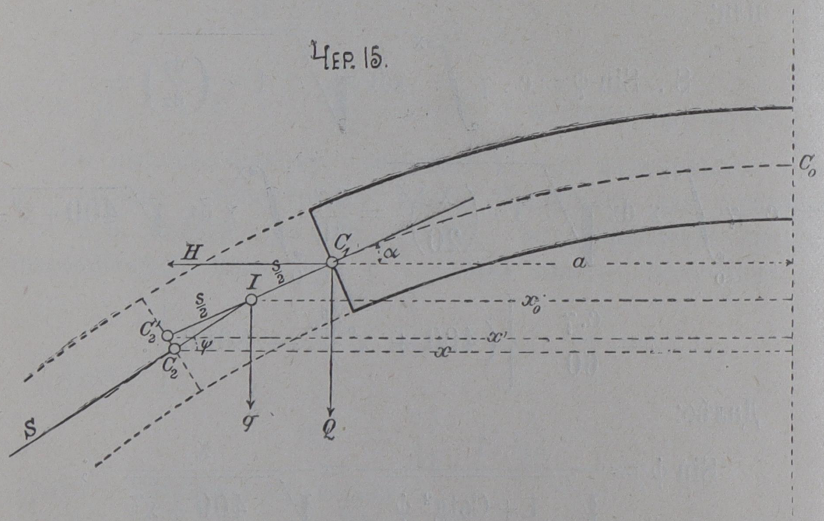
а для $x = 10$ метр. . . $\sigma_m = 1{,}9$ килогр. на кв. сант.
» $x = 3$ » . . $\sigma_m = 1{,}62$ » » »

Въ данномъ случаѣ, слѣдовательно, возможно было допустить параболическую среднюю линію; при подъемѣ же свода, превышающемъ 2,5 метра, параболическая форма оказывается уже ничѣмъ не оправданной, и среднюю линію пришлось-бы тогда опредѣлить сообразно изложенному въ концѣ предъидущей главы.

Плоскіе купольные своды постоянной толщины и съ постояннымъ пятовымъ давленіемъ. Вмѣсто того, чтобы пользоваться вышеприведеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ средней линіи, можно опредѣлить послѣднюю, приближенно, графическимъ путемъ, слѣдующимъ образомъ:

Если C_1 (чер. 15) та точка средней линіи, до которой эту линію, съ достаточною точностью, можно принять за па-

Чер. 15.



раболу; α—уголъ образуемый касательной къ средней линіи въ точкѣ C_1 съ горизонтальною прямою; а—абсцисса этой точки; с—постоянная толщина свода и k'—постоянное пятовое давленіе; далѣе — $Qd\varphi$ вѣсъ части $C_0\,C_1$ купольнаго

сектора, тогда, принимая $\gamma = 1600$ килогр. и $k' = 1{,}6$ килогр. на кв. сантим., согласно вышеизложенному, выраженіе:

$$y = \frac{\gamma}{4\,k'} \cdot x^2 = \frac{1}{40} \cdot x^2$$

будетъ уравненіемъ параболической средней линіи.

$$tg\alpha = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_{x=a} = \frac{a}{20}$$

$$Q\,d\varphi = \frac{c.\gamma}{60} \cdot d\varphi \left\{(400+a^2)^{\frac{3}{2}} - 8000\right\} = c.\ \gamma.\ d\varphi.\ A.$$

Разсмотримъ теперь клинъ C_1C_2, для котораго даны: точка C_1, а также длина дуги $C_1C_2 = s$,—неизвѣстна лишь точка C_2. Откладывая, по направленію касательной, проведенной въ точкѣ C_1 къ средней линіи, отъ точки C_1 къ низу длину $C_1J = \frac{s}{2}$, точку J, съ достаточною точностью, можно принять за центръ тяжести камня C_1C_2, почему и вѣсъ послѣдняго ($qd\varphi$) по правилу Гюльдина равняется:

$$q\,.\,d\varphi = s.\,x_0\,.\,d\varphi\,.\,c\,.\,\gamma.$$

Обозначая полное нормальное давленіе въ пятовомъ швѣ C_2 черезъ $S_2\,.\,d\varphi$, получаемъ:

$$S_2\,.\,d\varphi = c\,.\,x\,.\,d\varphi\,.\,k'.$$

Для равновѣсія же камня C_1C_2 необходимо, чтобы:

$$S_2\,.\,\mathrm{Sin}\,\psi = Q + q,$$

откуда слѣдуетъ:

$$c\,.\,x\,.\,k'\,.\,\sin\psi = c\,.\,\gamma\,(A + s\,.\,x_0)$$

$$\mathrm{Sin}\,\psi = \frac{\gamma}{k'} \cdot \frac{A + s\,.\,x_0}{x}.$$

Подставляя сначала въ уравненіе, вмѣсто x, разстояніе точки C_2' отъ оси купола, измѣренное по чертежу, вычисляютъ приближенное значеніе для ψ, положимъ ψ', проводятъ черезъ точку J прямую $JC_2'' = \frac{s}{2}$, подъ угломъ ψ' къ горизонтали, опускаютъ изъ C_2'' перпендикуляръ на ось купола, измѣряютъ его длину x'' и затѣмъ уже, подставляя въ уравненіе для $\mathrm{Sin}\,\psi$, вмѣсто x — величину x'', вычисляютъ значеніе для ψ и, такъ какъ $JC_2 = \frac{s}{2}$, то опредѣляютъ съ достаточною точностью также положеніе точки C_2.

*

По этому методу на таб. 1 на 2 чертежѣ, при $\gamma=1600$ килогр. и $k'=1,6$ килогр. на кв. сантим., была построена средняя линія купольнаго свода съ одинаковымъ пятовымъ напряженіемъ и одинаковой толщины.

Наиболѣе цѣлесообразная форма плоскаго купольнаго свода. Для сравненія, на чертежѣ 2-мъ таблицы I, нанесена также параболическая средняя линія, для которой пятовое сжимающее напряженіе въ вершинѣ также равняется 1,6 килогр. на кв. сант. Теперь уже можно судить о томъ, возможно-ли допустить параболу какъ среднюю линію свода. Уравненіе этой параболы, согласно вышеизложенному:

$$y=\frac{1}{40}x^2;$$

радіусъ кривизны ея въ вершинѣ — $\rho_0=20$ метр. Въ сферическомъ купольномъ сводѣ, при радіусѣ r, пятовое давленіе въ замкѣ $=\frac{r.\gamma}{2}$. Полагая теперь $\frac{r.\gamma}{2}=k'$ или $r.\ 800=16000$, r получится $=20$ метр. $=\rho_0$. Эта круговая средняя линія также нанесена на чер. 2 таб. I.

Изъ черт. 2 таб. I теперь слѣдуетъ, что для удовлетворенія условію постоянства сжимающаго пятоваго напряженія, при постоянной толщинѣ свода, *круговая средняя линія* является болѣе соотвѣтствующею, нежели параболическая и, что поэтому болѣе цѣлесообразно придавать плоскимъ купольнымъ сводамъ *однообразную* толщину и шарообразное очертаніе.

VII ГЛАВА.

Купольный сводъ съ круговымъ отверстіемъ въ вершинѣ.

Общія замѣчанія. Весьма часто встрѣчаются въ купольныхъ сводахъ круговыя отверстія, ограниченныя каменнымъ кольцомъ, несущимъ иногда еще грузъ фонаря или барабана

Расчетъ подобныхъ купольныхъ сводовъ производился прежде обыкновенно аналогично расчету купольныхъ стропилъ, разсматривая каменное кольцо свода, какъ сжимаемое тѣло, въ которое отдѣльные секторы купольнаго свода упирались по-

добно распоркамъ. Принимая затѣмъ, что отверстіе въ шелыгѣ все болѣе и болѣе уменьшалось и, наконецъ, совершенно исчезало, невольно приходили къ замкнутому купольному своду, раздѣленному на отдѣльные независимые другъ отъ друга секторы, съ дѣйствующими въ шелыгѣ ихъ, сомнительными, горизонтальными усиліями Navier. Было уже указано не разъ, что подобное допущеніе въ замкнутыхъ купольныхъ сводахъ едва-ли соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Разъясненіе этого вопроса, стало быть, является крайне необходимымъ.

Положеніе предѣльнаго шва. На таблицѣ II представленъ сплошной купольный сводъ постоянной толщины, съ указаніемъ способа опредѣленія горизонтальнаго распора H. $d\varphi$ (гдѣ $d\varphi$ центральный уголъ сектора) для всевозможныхъ швовъ. При этомъ отдѣльные вѣса клиньевъ свода, вычисленные по правилу Гюльдина, были отложены по вертикали, начиная съ точки O внизъ, а черезъ точки дѣленія этой вертикали силъ, проведены лучи параллельные касательнымъ къ средней линіи меридіональнаго сѣченія, въ соотвѣтственныхъ точкахъ C. Точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ горизонтальною линіею, проведенной черезъ начальную точку O, опредѣляютъ искомыя величины H. Такъ, напримѣръ, длина OV, умноженная на $d\varphi$, равняется горизонтальному распору $H_5 d\varphi$, дѣйствующему въ швѣ D_5E_5 купольнаго сектора.

Изъ чертежа видно, что точки пересѣченія лучей, проведенныхъ черезъ точки дѣленія вертикали силъ съ горизонтальною прямою, проходящей черезъ O до шва (9,9), все болѣе и болѣе удаляются отъ точки O, начиная же со шва (10,10) снова приближаются къ точкѣ O, и что слѣдовательно горизонтальный распоръ достигаетъ своего maximum въ швѣ, лежащемъ между швами (9,9) и (10,10) или, другими словами: предѣльный шовъ находится между (9,9) и (10,10). Положеніе предѣльнаго шва опредѣляется крайнею точкою (P) пересѣченія лучей съ горизонтальною линіею, проведенной черезъ O.

Допустивъ, далѣе, что нѣсколько колецъ свода, положимъ четыре, вынуты у вершины, то устойчивость купольнаго свода этимъ не нарушается,—получаются лишь иныя величины для горизонтальнаго распора H и для пятоваго давленія S въ швахъ. Это слѣдуетъ также изъ черт. 1 таб. IV, на которомъ представленъ тотъ-же сводъ, что на таб. II. Въ сплош-

номъ купольномъ сводѣ горизонтальный распоръ получается на пересѣченіи лучей вертикали силъ съ горизонталью, проведенной черезъ точку O, между тѣмъ какъ въ сводѣ, имѣющемъ отверстіи, начиная со шва (4,4), величина распора опредѣляется пересѣченіемъ лучей съ горизонтально проходящей черезъ точку O_4.

Далѣе мы усматриваемъ изъ вертикали силъ (черт. 1 таб. IV), что въ сплошномъ купольномъ сводѣ точка IX, пересѣченія луча, проходящаго черезъ дѣленіе 9, съ горизонталью, проведенной черезъ O, находится на большемъ разстояніи отъ O, нежели точка пересѣченія луча 10 съ тою же горизонтальною прямою. Maximum горизонтальнаго распора H, слѣдовательно, проявиться между швами (9,9) и (10,10). Въ *открытомъ* *) купольномъ сводѣ, между тѣмъ, горизонтальный распоръ достигаетъ своего maximum'а въ швѣ между (10,10) и (11,11), такъ какъ $O_4 X_4 > O_4 IX_4$, но $O_4 XI_4 < O_4 X_4$. Слѣдовательно *въ открытомъ купольномъ сводѣ предѣльный шовъ лежитъ ниже, нежели въ сплошномъ.*

Принимая теперь «краевую плоскость» D_4E_4 открытаго купольнаго свода за шовъ, отдѣляющій собственно купольный сводъ отъ нагруженнаго каменнаго кольца, окаймляющаго отверстіе въ вершинѣ, и что въ этомъ, такъ называемомъ «краевомъ швѣ» (Randfuge) давленіе передается равномѣрно и нормально къ шву, и называя вертикальную составляющую $G.d\varphi$ этого пятоваго давленія *краевою нагрузкою*, остается только отложить отъ точки O_4, являющейся начальною—для вертикали силъ, нагрузку G къ верху, и провести черезъ верхнюю точку длины G горизонтальную прямую, тогда точки пересѣченія продолженныхъ лучей многоугольника силъ съ этою горизонталью, опредѣлятъ горизонтальные распоры для отдѣльныхъ швовъ. Если, въ частномъ случаѣ, краевая нагрузка $G.d\varphi$ равнялась бы вѣсу $G_0\ d\varphi$ той части купольнаго сектора, которая при сплошномъ сводѣ расположена надъ швомъ (4,4), то уголъ, образуемый предѣльнымъ швомъ съ осью купола, получился бы вновь равнымъ $51^0\ 50'$.

---

*) т. е. снабженнымъ отверстіемъ въ шелыгѣ.

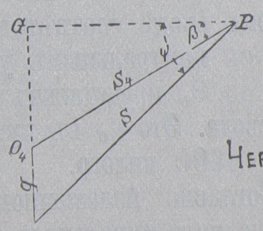
Примѣч. переводчика.

При возрастаніи же краевой нагрузки, перемѣщается также и предѣльный шовъ кверху до тѣхъ поръ, пока онъ наконецъ не совпадетъ со швомъ (4,4).

Предѣльная нагрузка. При достаточно большой краевой нагрузкѣ, согласно изложенному, краевой шовъ можетъ быть одновременно и предѣльнымъ. Наименьшая величина краевой нагрузки, при дѣйствіи которой это еще имѣетъ мѣсто, т. е. при дѣйствіи которой ни въ одномъ изъ пятовыхъ швовъ купольнаго сектора не проявляется большій распоръ, чѣмъ въ краевомъ швѣ, условимся называть ***предѣльною нагрузкою,*** обозначивъ ее черезъ—G′.

Для опредѣленія величины предѣльной нагрузки G′, прослѣдимъ точки пересѣченія P лучей многоугольника силъ, на таблицѣ IV, съ лучемъ S_4, соотвѣтствующемъ краевому шву (4,4). Эти точки пересѣченія все болѣе и болѣе удаляются отъ многоугольника силъ. Если P′ крайняя—изъ точекъ пересѣченія и G′—точка пересѣченія горизонтали, проведенной черезъ P′, съ многоугольникомъ силъ, тогда отрѣзокъ O_4G' опредѣляетъ собою величину предѣльной нагрузки G′. И дѣйствительно, если въ данномъ случаѣ $G' \times d\varphi$ соотвѣствуетъ краевой нагрузкѣ купольнаго сектора съ центральнымъ угломъ $d\varphi$, то положеніе точекъ пересѣченія лучей многоугольника силъ, съ горизонталью проходящей черезъ P′, показываетъ, что въ купольномъ секторѣ по направленію сверху внизъ, не происходитъ приращенія горизонтальнаго распора и что распоръ, дѣйствующій на краевой шовъ, въ то же время наибольшій. Если краевая нагрузка допущена менѣе G′, то послѣднее обстоятельство не имѣетъ мѣста; въ томъ случаѣ, когда краевая нагрузка больше G′, наибольшій горизонтальный распоръ вновь получится въ краевомъ швѣ.

Аналитическимъ путемъ можно опредѣлить предѣльную нагрузку слѣдующимъ образомъ:



Чер. 16.

Пусть $qd\varphi$ будетъ вѣсъ части D_4E_4ED купольнаго сектора, отъ краеваго шва D_4E_4, до произвольнаго шва DE, составляющаго съ вертикальною осью купола уголъ ψ; $Sd\varphi$ пятовое давленіе; β — уголъ, заключенный между краевымъ швомъ и осью купола, тогда, согласно чер. 16-ому,

разстояніе (PG) точки пересѣченія P, луча S съ лучемъ S_4 вертикали силъ получится:

$$(PG) = (O_4P) \cos\beta.$$

Но:

$$\frac{(O_4P)}{q} = \frac{\sin\ (90-\psi)}{\sin\ (\psi-\beta)}, \text{ а потому: } (PG) = \frac{q}{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\beta},$$

гдѣ q зависитъ отъ ψ. Maximum выраженія:

$$\frac{q}{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\beta}$$

даетъ наибольшее разстояніе P'G' точекъ пересѣченія P отъ вертикали силъ. Но такъ какъ предѣльная нагрузка $G' = (P'G')$ $\operatorname{tg}\beta$, то отсюда слѣдуетъ, что:

$$G = \left\{\frac{q}{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\beta}\right\}_{\max.} \cdot \operatorname{tg}\beta \ldots\ldots \quad (26)$$

Вообще же проще опредѣлять эту предѣльную нагрузку G' графически, согласно вышеизложенному (Чер. 1 таб. IV). Для купольнаго свода, изображеннаго на таблицѣ IV, въ которомъ $c = 0{,}52$; дуга $C_0C_4 = 4$ метр. и поэтому $\beta = 22^0\ 20'8''$, полупролетъ $r_1 = 10$ метр., G' оказалось $= 13300$ килогр.

Методъ опредѣленія меридіональнаго сѣченія при данномъ очертаніи и краевой нагрузки, меньшей предѣльной нагрузки. Для полученія необходимыхъ данныхъ, разсмотримъ сплошной сферическій купольный сводъ, представленный на таблицѣ II. Примемъ, что изъ этого свода вынута часть его, начиная съ вершины и до нѣкотораго шва (4,4), и замѣнена каменнымъ кольцомъ, по вѣсу одинаковымъ съ вынутой частью и лежащимъ въ (4,4). При этомъ, очевидно, можно допустить, что условія устойчивости сводчатой части, находящейся ниже шва (4,4), а также положеніе предѣльнаго шва, останутся безъ измѣненія. Если $G_0 d\varphi$ въ полномъ купольномъ сводѣ соотвѣтствуетъ вѣсу части купольнаго вырѣзка съ центральнымъ угломъ $d\varphi$, расположенной надъ швомъ (4,4), то G_0 представитъ краевую нагрузку открытаго купольнаго свода. Это G_0 въ купольномъ сводѣ на таб. II и IV, равняется 6600 килогр.

Согласно изложенному въ главѣ IV, меридіональное сѣченіе полнаго купольнаго свода опредѣляется такимъ образомъ, что принимаютъ всю часть купольнаго свода, лежащую надъ предѣльнымъ швомъ, одинаковой толщины, загружаютъ сред-

нюю купольнею поверхность добавочною нагрузкою p на единицу площади, требуя, чтобы при существованіи наивыгоднѣйшей системы кривыхъ давленія, наибольшее давленіе въ предѣльномъ швѣ, не превышало бы допускаемаго напряженія k для даннаго матеріала кладки.

При открытомъ же сводѣ и при условіи сохраненія одинаковаго меридіональнаго сѣченія ниже шва (4,4), необходимо прибавить къ краевой нагрузкѣ $G_0.d\varphi$ купольнаго сектора еще краевой грузъ, соотвѣтственно той добавочной нагрузкѣ въ полномъ купольномъ сводѣ, на протяженіи C_4C_0, т. е. при сферическомъ купольномъ сводѣ нужно прибавить нагрузку:

$$P.d\varphi = p.\ r^2\ (1 - \mathrm{Cos}\ \beta).\ d\varphi.\ ^{*)}$$

гдѣ β—уголъ составляемый краевымъ швомъ (4'4) съ осью купола и r—полудіаметръ круговой средней линіи купольнаго сектора.

Сообразно изложенному, для опредѣленія меридіональнаго сѣченія открытаго купольааго свода, при данномъ, хотя и произвольномъ очертаніи его и при данной нагрузкѣ на кольцо, окаймляющаго отверстіе въ сводѣ, пришлось бы поступить слѣдующимъ образомъ:

Вычерчиваютъ данную направляющую E_4E' (см. чер. 2 таб. IV), задаются предварительно толщиною свода—c и проводятъ краевой шовъ D_4E_4, нормально къ направляющей, чѣмъ опре-

---

*) $P.d\varphi$ есть краевой грузъ, расположенный на поверхности F образованной движеніемъ дуги $C_0\ C_4$ на уголъ $d\varphi$, причемъ на единицѣ поверхности лежитъ нагрузка p, поэтому

$$P\ .\ d\ \varphi = F\ .\ p\ .\ d\ \varphi\ .$$

но F = дугѣ C_0C_4 умноженной на путь, пройденный центромъ тяжести ея, т. е. окружность, описанная радіусомъ x_0, равному разстоянію центра тяжести дуги до оси купола. Слѣдовательно

$$F = \smile C_0\ C_4\ .\ x_0 = r\ \beta\ .\ x_0$$

$$\text{но } x_0 = \frac{r\ .\ \mathrm{Sin}\ \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}\ .\ \mathrm{Sin}\ \frac{\beta}{2} = \frac{2\ r\ \mathrm{Sin}^2\frac{\beta}{2}}{\beta} \text{ и } F = 2\ r^2\ \mathrm{Sin}^2\frac{\beta}{2}$$

а поэтому:

$$P\ .\ d\ \varphi = 2\ .\ r^2\ .\ \mathrm{Sin}^2\frac{\beta}{2}\ .\ p\ .\ d\ \varphi = p\ .\ r^2\ (1 - \mathrm{Cos}\ \beta)\ .\ d\ \varphi.$$

Примѣч. переводчика.

дѣляется уголъ β; затѣмъ вычерчиваютъ верхнюю направляющую и среднюю линію меридіональнаго сѣченія, равно какъ и цѣлый рядъ швовъ DE, вычисляютъ по правилу Гюльдина вѣса $q.d\varphi$, отдѣльныхъ камней купольнаго сектора, съ центральнымъ угломъ $d\varphi$, откладываютъ, отъ точки O_4 (чер. 1 таб. IV) вертикали силъ, краевую нагрузку G къ верху, а къ низу — вычисленные вѣса q, проводятъ черезъ точку G вертикали силъ горизонтальную прямую и черезъ точки дѣленія O_4, O_5, O_6 . . . . вертикали силъ, прямыя, параллельныя касательнымъ къ средней линіи меридіональнаго сѣченія въ точкахъ C_4, C_5, C_6 . . . . Если точки пересѣчѣнія этихъ лучей съ горизонтальною прямою, проходящей черезъ точку G, будутъ удаляться отъ послѣдней, то изъ этого можно заключить, что краевая нагрузка G меньше предѣльной нагрузки G'. Пусть въ данномъ случаѣ имѣетъ мѣсто послѣднее обстоятельство, тогда приступаютъ къ построенію кривой H-овъ, опредѣляютъ помощью ея положеніе предѣльнаго шва D'E' (см. также таб. II) и измѣряютъ длину соотвѣтствующаго этому шву луча S' до горизонтали, проведенной черезъ G, чѣмъ опредѣляется величина S' нормальнаго давленія на предѣльный шовъ. Къ найденной величинѣ S' слѣдуетъ, однако, еще прибавить извѣстную долю *добавочной нагрузки*. Для опредѣленія этой добавочной нагрузки, продолжимъ среднюю линію $C'C_4$ меридіональнаго сѣченія до оси купола, причемъ продолженіемъ линіи $C'C_4$, пусть будетъ дуга круга, касательная къ $C'C_4$ въ точкѣ C_4, и допускающей проведенія горизонтальной касательной въ C_0, т. е. дуга круга, описанная радіусомъ:

$$r = \frac{a}{\operatorname{Sin} \beta}$$

гдѣ a—разстояніе средней точки краеваго шва отъ оси купола. Послѣ этого слѣдуетъ предположить, что вся средняя линія $C'C_4C_0$ вращается вокругъ оси купола, и полученная такимъ образомъ поверхность вращенія загружена вѣсомъ p на единицу площади, причемъ по прежнему:

$$p = 4800 \left(1 + \frac{1,5}{r}\right)$$

гдѣ $r = \frac{a}{\operatorname{Sin} \beta}$.

При постоянной толщинѣ свода c, вѣсъ $Q' d\varphi$ части $C'C_4$ купольнаго сектора, равняется средней поверхности купола, опредѣленной среднею линіею $C'C_4$, умноженной на $c.\gamma$, добавочная же нагрузка, расположенная на этой поверхности, равняется поверхности умноженной на p. Отсюда получается добавочная нагрузка:

$$Q'.d\varphi.\frac{p}{c\,\gamma.}\ ^{*)}.$$

Нагрузка же поверхности вращенія C_4C_0 тяжестью p, будетъ:

$$P_0.d\varphi = p.r^2.(1-\mathrm{Cos}\,\beta).d\varphi = p.\frac{a^2}{\mathrm{Sin}^2\beta}(1-\mathrm{Cos}\,\beta).d\varphi$$

Взявъ теперь полную нагрузку (краевую нагрузку, собственный вѣсъ и добавочную нагрузку), вертикальная составляющая нормальнаго давленія S' на предѣльный шовъ, получится равною:

$$S'.\ \mathrm{Sin}\ \psi' = G + Q'\left(1 + \frac{p}{c\gamma}\right) + P_0$$

Отсюда опредѣляютъ S' и, наконецъ, равномѣрное сжимающее напряженіе σ'_m въ предѣльномъ швѣ:

$$\sigma'_m = \frac{S'\ d\varphi}{c.\,x'.\,d\varphi} = \frac{S'}{c.\ x'}$$

Величина σ'_m, при правильно назначенной толщинѣ свода c, должна получиться равною коэффиціенту прочнаго сопротивленія k матеріала кладки, изъ котораго предположено вывести купольный сводъ. Что же касается части меридіональнаго сѣченія, лежащей ниже предѣльнаго шва $D'E'$, то она расчитывается сообразно примѣру, указанному на таблицѣ II.

Изслѣдованіе метода Navier. Въ началѣ настоящей статьи было упомянуто, что Navier, въ своей теоріи о ку-

---

*) $Q'.\ d\varphi = F.\ c.\ \gamma$, откуда:

$$F = \frac{Q'.\ d\varphi}{c.\ \gamma.}$$

а потому:

$$F.p = Q'.d\varphi.\frac{p}{c.\gamma}$$

Примѣч. переводчика.

польныхъ сводахъ принимаетъ, что въ открытыхъ купольныхъ сводахъ, снабженныхъ каменнымъ кольцомъ, послѣднее подпирается отдѣльными купольными секторами, не оказывающими никакого дѣйствія другъ на друга. Это допущеніе само по себѣ не безосновательно, однако требуетъ разъясненія.

Для этой цѣли разсмотримъ вновь примѣръ расчета открытаго сферическаго купольнаго свода, представленнаго на черт. 2 таб. IV, (полупролетъ = 10 метр., толщина свода $c = 0,52$ метр., $\gamma = 1600$ килогр., $\beta = 22^0\ 20'\ 8''$) допуская, что величина краеваго давленія $G = G_0 = 6600$ килогр., причемъ $G.d\varphi = 6600.\ d\varphi =$ вѣсу части $D_4\ E_4\ E_0\ D_0$ купольнаго сектора сплошнаго купольнаго свода.

Допуская, что система кривыхъ давленія до предѣльнаго шва совпадаетъ съ среднею линіею свода т. е. допуская *наивыгоднѣйшую* систему кривыхъ давленія, для *открытаго* купольнаго свода, начиная со шва D_4E_4, получится то же самое меридіональное сѣченіе, какъ для *сплошнаго*,—такъ какъ въ первомъ, давленіе, испытываемое краевымъ швомъ, равняется давленію въ швѣ $D_4\ E_4$ сплошнаго свода. Равнымъ образомъ предѣльный шовъ $D'\ E'$ въ обоихъ сводахъ имѣетъ одно и то же положеніе ($\psi' = 51^0\ 50'$). Устойчивость въ обоихъ случаяхъ также одинаковая. Для сплошнаго же купольнаго свода, показаннаго на таб. II, согласно прежнимъ разъясненіямъ, устойчивость вполнѣ удовлетворительна, поэтому нужно также допустить, что она будетъ достаточна въ открытомъ, снабженномъ краевою нагрузкою G_0, сводѣ, представленномъ на чер. 2 таб. IV. Если же согласиться съ Navier, что стыковыя давленія, начиная съ краеваго шва, равны нулю, вслѣдствіе чего будетъ дѣйствовать только пятовая кривая давленія, то оказывается, что эта кривая давленія, которая построена по извѣстному способу на чер. 2 таб. IV, и обозначена черезъ C_4M, весьма скоро выходитъ изъ толщины свода. На основаніи этого, можно было заключить, что разсматриваемый купольный сводъ неустойчивъ, хотя другимъ путемъ доказано, что устойчивость его вполнѣ обезпечена. И такъ, если согласно даннымъ Navier равновѣсіе купольнаго свода и окажется недостаточнымъ, то вовсе нельзя быть увѣреннымъ въ недостаточности запаса устойчивости свода. Мы принимаемъ въ основу нашихъ расчетовъ наивыгоднѣйшую систему кривыхъ давленія, Navier же разсматриваетъ иное положеніе этихъ кривыхъ. Допуская существованіе пер-

выхъ, разсматриваемый сводъ оказывается въ равновѣсіи, при допущеніяхъ Navier, послѣднее не имѣетъ мѣста. Точно также возможно, что данный устойчивый цилиндрическій сводъ, для котораго наивыгоднѣйшая кривая давленія подтверждаетъ существованіе равновѣсія, можетъ оказаться неустойчивымъ, если избрать или построить такую кривую давленія, которая выходитъ изъ тѣла свода.

По Navier, слѣдовательно, разсматриваемый купольный сводъ съ краевою нагрузкою $G = 6600$ килогр. *не устойчивъ*, и однимъ утолщеніемъ свода нельзя было достигнуть желаемой устойчивости. Одно увеличиваніе краевой нагрузки на сводъ можетъ отклонить выходящую кривую давленія во внутрь свода. На этомъ, между прочимъ, и основывается устарѣлый взглядъ, что грузные барабаны или фонари, въ извѣстныхъ случаяхъ статически необходимы.

Методъ опредѣленія меридіональнаго сѣченія, при данномъ очертаніи и краевой нагрузкѣ, превышающей предѣльную нагрузку.

На чертежѣ 1 таб. V вычерченъ сферическій купольный сводъ, въ которомъ, какъ на черт. 2 таб. IV, полупролетъ $r_1 = 10$ метр. и уголъ β — составляемый краевымъ швомъ съ осью купола, опять $= 22^0\ 20'\ 8''$, краевая же нагрузка $G = 20000$ килограммамъ.

Первоначально слѣдуетъ опредѣлить толщину свода c_1 въ краевомъ швѣ D_1E_1. Для этой цѣли, придерживаясь ранѣе преслѣдуемому нами принципу, примемъ, что краевой шовъ наивыгоднѣйшимъ образомъ нагруженъ, т. е. что онъ подверженъ одному равномѣрному давленію, но вмѣстѣ съ тѣмъ прибавимъ къ данной краевой нагрузкѣ G еще дополнительную или добавочную нагрузку P, и затѣмъ уже опредѣлимъ напряженіе σ_1 въ краевомъ швѣ на единицу площади, причемъ должно быть соблюдено условіе, что это давленіе равнялось бы k, т. е. коэффиціенту прочнаго сопротивленія сжатію даннаго матеріала кладки. Для полученія этой добавочной нагрузки P, слѣдовало бы продолжить краевой шовъ D_1E_1, нормальный къ внутренней направляющей, до пересѣченія съ осью купола въ точкѣ F_1, описать изъ этой точки F_1, радіусомъ $r = F_1C_1$, дугу круга C_1C_0 и вращать затѣмъ дугу C_1C_0 вокругъ оси купола, чѣмъ опре-

дѣлится купольная поверхность, несущая добавочную нагрузку p (на единицу площади). На разсматриваемый купольный секторъ, съ центральнымъ угломъ $d\varphi$, давитъ дополнительная нагрузка:

$$pr^2 (1 - \cos \beta) d\varphi,$$

причемъ:

$$p = 4800 \left(1 + \frac{1,5}{r}\right).$$

Но такъ какъ точка C_1 не дана, а слѣдовательно и радіусъ r неизвѣстенъ, то замѣняютъ r приближенною величиною $r_1 = F_1 E_1$.

Такимъ образомъ приходится прибавить къ данной кривой нагрузкѣ, еще добавочную нагрузку:

$$P = pr^2 (1 - \cos \beta).$$

а слѣдовательно все давленіе на краевой шовъ получится равнымъ:

$$S_1 \,.\, d\varphi = \frac{G + P}{\sin \beta} \,.\, d\varphi$$

а равномѣрное давленіе σ_1 на краевой шовъ:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{r \sin \beta \,.\, c_1},$$

гдѣ c_1 толщина свода въ краевомъ швѣ.

Но σ_1 должно быть равнымъ k, и поэтому:

$$c_1 = \frac{S_1}{k.r \sin \beta}$$

Въ разсматриваемомъ купольномъ сводѣ, принимая сначала $r = E_1F_1 = 10$ метр.,

$$P = 4800 \left(1 + \frac{1,5}{10}\right) . \; 10^2.0,075 = 41400 \text{ килогр.},$$

$$S_1 = \frac{61400}{\sin \beta}; \quad c_1 = \frac{61400}{80000.10. \sin^2 \beta} = 0,53 \text{ метр.}$$

Вставляя это значеніе для c_1, получимъ истинное напряженіе k′ краеваго шва:

$$k' = \frac{G}{\text{Sin}\ \beta . c_1 . r . \text{Sin}\beta} = \frac{20000}{0,53 . 10,27 . \text{Sin}^2 \beta} = 25440$$ килогр. на кв. метръ.

или:

$k' = 2,5$ килогр. на кв. сантим.

Теперь остается провѣрить, дѣйствительно-ли краевая нагрузка G больше предѣльной нагрузки G′. Для этого примемъ сначала толщину свода ниже краеваго шва постоянной и прослѣдимъ, увеличивается ли горизонтальный распоръ H книзу. Если послѣднее не имѣетъ мѣста, то и краевая нагрузка G будетъ не менѣе предѣльной нагрузки G′ и поэтому не будутъ проявляться стыковыя сжимающія напряженія ниже краеваго шва. И такъ въ данномъ случаѣ мы находимъ, что при $G = 20000$ килогр. и $c = 0,53$ метр.—$G > G'$. При одинаковой толщинѣ ($= 0,53$ метр.) свода, на всемъ его протяженіи, пятовая кривая давленія будетъ постепенно отклоняться внаружу отъ средней линіи меридіональнаго сѣченія, и, наконецъ, выйдетъ изъ тѣла свода на внѣшней кривой направляющей его, что видно на чер. 2 таб. IV, гдѣ кривая давленія C_4N построенная при $G = 20000$ килогр. выходитъ изъ свода. Въ послѣднемъ случаѣ, т. е. когда кривая давленія отклоняется внаружу, конечно можно направить ее опять во внутрь свода, увеличивая соотвѣтственно толщину свода по направленію, сверху внизъ

Разсматриваемый купольный сводъ теперь вполнѣ схожъ съ частью сплошнаго купольнаго свода, лежащей ниже шва перелома. На этомъ основаніи вычисляютъ размѣры меридіональнаго сѣченія точно такимъ же образомъ, какъ это сдѣлано для части D′E″E″D″ купольнаго свода, на таб. II, т. е. опредѣляютъ противъ всѣхъ швовъ, начерченныхъ нормально къ направляющей свода, соотвѣтственную имъ толщину свода, при условіи, чтобы наибольшее сжимающее напряженіе въ каждомъ швѣ равнялось бы проявляющемуся въ краевомъ швѣ. На черт. 1 таб. V, по изложенному способу, опредѣлено меридіональное сѣченіе. При этомъ мы однако видимъ, что при данной краевой нагрузкѣ $G = 20000$ килогр., избранное очертаніе свода неудачной формы, такъ какъ толщина меридіональнаго сѣченія черезчуръ велика.

VIII ГЛАВА.

Раціональныя формы купольныхъ сводовъ съ отверстіями въ вершинѣ, въ которыхъ краевая нагрузка превышаетъ предѣльную нагрузку.

Меридіональное сѣченіе съ постояннымъ пятовымъ напряженіемъ. Пусть C_1 и C'' будутъ конечными точками средней линіи меридіональнаго сѣченія (чер. 1 таб. V) и, въ то же время, конечными точками кривой давленія купольнаго сектора, принявъ краевую нагрузку $G = 20000$ килогр., а также постоянное пятовое давленіе $k' = 2,5$ килогр. на кв. сантим.

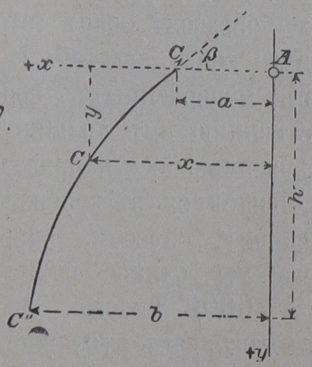
Для опредѣленія средней линіи искомаго меридіональнаго сѣченія, обратимся къ уравненію (24), слѣдующаго вида:

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} \log nat \frac{\cos \psi'}{\cos\left\{\frac{\gamma}{k'}(x - x') + \psi'\right\}}.$$

Принимая начало координатъ въ точкѣ A (чер. 17) и вводя обозначенія показанныя на этомъ чертежѣ, вышеприведенное уравненіе приметъ видъ:

$$y = \frac{k'}{\gamma} \cdot \log nat \frac{\cos \beta}{\cos\left\{\frac{\gamma}{k'}(x - a) + \beta\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Чер. 17.



Въ этомъ уравненіи x и y—соотвѣтственные координаты искомой средней линіи, a, k', γ — данныя величины, неизвѣстенъ только уголъ β, образуемый краевымъ швомъ съ осью купола Для опредѣленія этого угла, воспользуемся условіемъ, что средняя линія должна проходить черезъ точку C'', т. е. что для $x = b$ и y должно $= h$.

Отсюда:

$$h = \frac{k'}{\gamma} \cdot \log \text{nat} \frac{\text{Cos}\ \beta}{\text{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}\ (b-a) + \beta\right\}}$$

или:

$$e^{\frac{h\gamma}{k'}} = \frac{\text{Cos}\ \beta}{\text{Cos}\left\{\frac{\gamma}{k'}\ (b-a) + \beta\right\}}.$$

Полагая:

$$e^{\frac{h\gamma}{k'}} = n\ ; \quad \frac{\gamma}{k'}\ (b-a) = \delta\ .$$

тогда:

$$n = \frac{\text{Cos}\ \beta}{\text{Cos}\ (\delta + \beta)} = \frac{\text{Cos}\ \beta}{\text{Cos}\delta\ \cos\beta - \text{Sin}\ \delta\ \text{Sin}\beta} = \frac{1}{\text{Cos}\ \delta - \text{Sin}\delta.\ \text{tg}\beta}\ .$$

откуда:

$$\text{tg}\ \beta = \text{cotg}\ \delta - \frac{1}{n.\ \text{Sin}\ \delta}\ \ldots\ldots\ldots\ (28).$$

Итакъ уголъ β опредѣленъ. Зная же этотъ уголъ, можно опредѣлить, по уравненію (27), искомую среднюю линію купольнаго сектора.

Для опредѣленія толщины свода c въ произвольной точкѣ x, y средней линіи, замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ горизонтальный распоръ H для всѣхъ клиньевъ одинъ и тотъ же. Въ краевомъ сѣченіи:

$$H = G\ \text{cotg}\ \beta,$$

и, стало быть, давленіе S, испытываемое произвольнымъ пятовымъ швомъ,

$$S = \frac{G\ \text{cotg}\ \beta}{\text{Cos}\ \psi}$$

а давленіе σ_m въ швѣ, образующемъ уголъ ψ съ осью купола:

$$\sigma_m = \frac{S}{cx} = \frac{G\ \text{cotg}\beta}{\text{Cos}\ \psi.\ c.\ x}\ .$$

Но давленіе σ_m, по заданію, величина постоянная и равная k', поэтому:

$$k' = \frac{G\ \text{cotg}\ \beta}{\text{Cos}\ \psi.\ c.\ x},$$

откуда:

$$c = \frac{G.\ \mathrm{cotg}\,\beta}{k'.\ x.\ \cos\psi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (29).$$

Полагая затѣмъ: $G = 20000$ килогр.; $\gamma = 1600$ килогр.; $k' = 2{,}5$ килогр. на квадр. сантим.; $a = 3{,}94$ метр.; $b = 10{,}83$ м.; $h = 9{,}5$ метр., опредѣляютъ по приведеннымъ уравненіямъ, начерченное на черт. 2 таб. V, меридіональное сѣченіе. Въ послѣднемъ толщина въ краевомъ швѣ, именно $c_1 = 0{,}29$ метр., наибольшая. Отсюда начиная, она медленно убываетъ къ низу и, наконецъ, снова слегка увеличивается.

Сравнивая меридіональное сѣченіе, показанное на чертежѣ 2 съ таковымъ—на черт. 1 таб. V, главнымъ образомъ бросается въ глаза рѣзкая разница въ величинѣ площадей ихъ. Изъ этого ясно, на сколько значительно вліяніе краевой нагрузки на форму куцола.

Полученное меридіональное сѣченіе (черт. 2 таб. V) для исполненія, однако, едва ли окажется подходящимъ, такъ какъ форма такого купольнаго свода въ эстетическомъ отношеніи не особенно удачна, что въ монументальныхъ сооруженіяхъ, гдѣ такого рода своды чаще всего примѣняются, не слѣдуетъ упускать изъ виду. Но и съ чисто технической точки зрѣнія, найденное меридіональное сѣченіе требуетъ измѣненія: убывающая толщина свода представляется крайне неудобною при кладкѣ свода.

Принимая же попросту на черт. 2 таб. V толщину свода постоянною $u = c_1$, получилась бы кривая давленія, не совпадающая съ среднею линіею и вызывающая, при извѣстныхъ обстоятельствахъ, слишкомъ большое напряженіе.

Опредѣленіе формы меридіональнаго сѣченія открытаго купольнаго свода, подверженнаго данной краевой нагрузкѣ, постоянной толщины и съ одинаковымъ сжимающемъ пятовымъ напряженіемъ.

Разсмотримъ элементъ купольнаго свода, ограниченнаго двумя пятовыми швами, котораго вѣсъ $= dQ$. Для послѣдняго получается, придерживаясь прежнихъ обозначеній:

$$dQ = c.\,ds.\,x.\,\gamma\,^{*}) = c.\,\gamma.\,x.\,dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = c.\,\gamma.\,x.\,dx\sqrt{1+u^2}$$

Съ другой стороны:

$Q = H.\ tg\,\psi = H.\,u$, а поэтому $dQ = H.\,du$ (H—постоянная величина).

Изъ этого слѣдуетъ:

$$H.\,du = c.\gamma.x.\,dx\sqrt{1+u^2}\,;\quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{c.\gamma}{H}\,.\,x.dx.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$\log\ nat\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2 + C$$

или:

$$u+\sqrt{1+u^2} = e^{C}.\,e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2} = B.\,e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2},$$

гдѣ B произвольная постоянная.

Изъ послѣднаго уравненія получаемъ **):

---

*) Какъ видно изъ чер. 9 (стр. 22):

$$dx = ds\ Cos\,\alpha,$$

откуда:

$$ds = \frac{dx}{Cos\,\alpha};\ \text{но}\ Cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg\,\alpha^2}},$$

а поэтому:

$$ds = dx.\sqrt{1+tg^2\,\alpha} = dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Примѣчаніе переводчика.

**) Полагая $B.\,e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2} = B.\,A$, тогда изъ предъидущаго уравненія получаемъ:

$$u+\sqrt{1+u^2} = B.\,A \text{ или:}$$

$$\sqrt{1+u^2} = B.\,A - u;\ \text{возвышая въ квадратъ—:}$$

$$1+u^2 = B^2.\,A^2 - 2\,u.\,A.B. + u^2$$

откуда, послѣ сокращенія:

$$2\,u = \frac{B^2.\,A^2}{A.B} - \frac{1}{A.B} = B.A - \frac{1}{B.A} \text{ или:}$$

$$2\,u = \frac{2du}{dx} = B.\,e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2} - \frac{1}{B.\,e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2}}$$

Примѣчаніе переводчика.

$$2u = \frac{2dy}{dx} = B.\ e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2} - \frac{1}{B.\ e^{\frac{c\gamma x^2}{2H}}} \quad . \ . \ . \quad (30).$$

Вмѣсто того, чтобы путемъ интегрированія этого уравненія опредѣлить зависимость между x и y, т. е. опредѣлить уравненіе искомой средней линіи, и по вычисленнымъ ординатамъ построить эту линію по точкамъ, можно получить эту кривую еще инымъ способомъ.

Сначала продифференцируемъ уравненіе (30) еще разъ по x, тогда получаемъ *):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c.\gamma.x}{2H}\left\{ B.e^{\frac{c\gamma x^2}{2H}} + \frac{1}{B.e^{\frac{c\gamma x^2}{2H}}} \right\}$$

или:

$$\frac{2H}{c\gamma}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = B.x.e^{\frac{c\gamma x^2}{2H}} + \frac{1}{B}\cdot\frac{x}{e^{\frac{c\gamma x^2}{2H}}} = B.\ q_1 + \frac{1}{B}\cdot q_2 \ . \ (31)$$

---

*) Обозначимъ (въ уравн. 30) $\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2$ — черезъ Z, тогда:

$$\frac{2\ d^2y}{dx^2} = d\left\{ B.\ e^{Z} - \frac{e^{-Z}}{B} \right\} \text{ или:}$$

$$\frac{2\ d^2y}{d^2x} = B.\ e^{Z}\ .dz - \frac{1}{B}\ .\ e^{-Z}d\ (-z) =$$

$$= B.\ e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2}\ .\ \frac{2c\gamma}{2H}\cdot x + \frac{1}{B}\ .\ e^{\frac{-c\gamma}{2H}\cdot x^2}\ .\ \frac{2c\gamma}{2H}\cdot x$$

откуда:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c.\gamma.x}{2H}\left\{ B.\ e^{\frac{c\gamma}{2H}\cdot x^2} + \frac{1}{B.e^{\frac{c\gamma x^2}{2H}}} \right\}$$

Прим. переводчика.

Желая затѣмъ построить среднюю линію, проходящую черезъ точки C_1 и C'' (чер. 3 таб. V), при данной краевой напрузкѣ $G=20000$ килогр. и—равномѣрномъ сжимающемъ напряженіи $k_1=2,5$ килогр. на кв. сантим. (какъ въ случаяхъ, показанныхъ на черт. 1 и 2 таб. V) въ предположеніи, что толщина с купольнаго свода постоянна и равна толщинѣ краеваго сѣченія, задаются сначала угломъ β наклоненія къ горизонту касательной къ верхней точкѣ C_1 искомой линіи и тогда получаютъ:

$$H = G \cot g \beta \text{ и } S_1 = \frac{G}{\sin \beta}.$$

При данныхъ S_1 и напряженіи k_1 толщина свода c_1 въ краевомъ швѣ будетъ извѣстна и, стало быть, вообще и толщина свода с. Извѣстно что:

$$c_1 . a . k_1 = S_1 ,$$

слѣдовательно:

$$c = c_1 = \frac{S_1}{a\, k_1} = \frac{G}{a.\, k_1 \sin \beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

При извѣстномъ β легко вычислить произвольную постоянную В. Уравненіе (30) при $x=a$ и $u=tg\,\beta$, получаетъ слѣдующій видъ:

$$2\, tg\, \beta = B.\, e^{\frac{c.\gamma.a^2}{2H}} - \frac{1}{B.\, e^{\frac{c\gamma.a^2}{2H}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить В. Полагая теперь, что:

$$\frac{2H}{c\gamma} = E \text{ и } Bq_1 + \frac{1}{B} q_2 = M ,$$

гдѣ Е—постоянная величина, а М—функція отъ х, уравненіе (31) получитъ слѣдующій видъ:

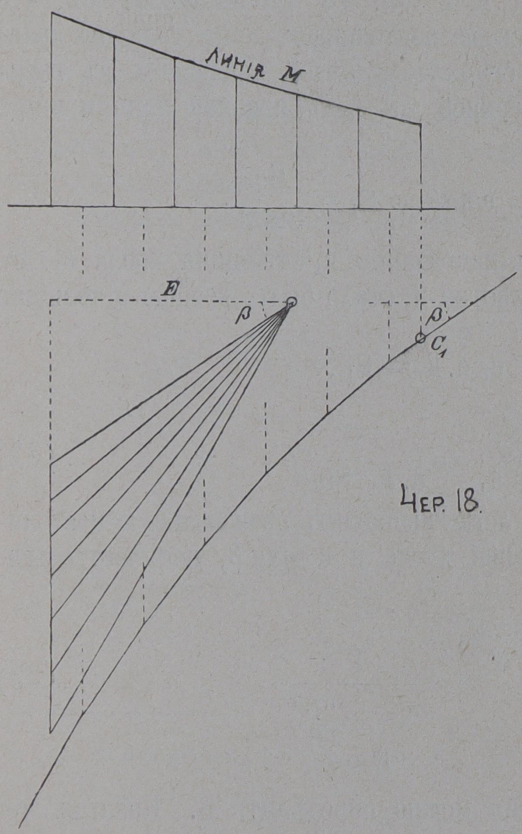
$$E \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M ,$$

уравненіе извѣстнаго вида *).

*) Сравн. дифференціальное уравненіе кривой изгиба оси нагруженнаго бруса и графическое построеніе этой кривой по Мору (Zeitschrift des Architekten und Ingenieurvereins zu Hannover, Jahrgang 1868).

Примѣчаніе автора.

Это уравненіе показываетъ, что искомая кривая тождественна съ веревочной кривой, для которой полюсное разстояніе = E, а грузовая площадь образована послѣдующими, одна за другой, ординатами M. Сообразно съ этимъ, нужно для ряда абсциссъ x, вычислить соотвѣтственныя имъ значенія M, отложить найденныя M въ видѣ ординатъ и соединить конечныя точки ихъ плавною кривою. Этимъ построеніемъ получается линія M-овъ и, слѣдовательно, и грузовая площадь веревочной кривой. Послѣднюю затѣмъ уже не трудно построить, какъ показываетъ чертежъ 18-ый. Средняя линія меридіональнаго сѣченія однако, по заданію должна пройдти черезъ точку C″, что въ построенной веревочной кривой вообще не будетъ имѣть мѣста, а поэтому придется мѣнять уголъ β до тѣхъ поръ, пока не будетъ удовлетворено этому условію. Указаннымъ способомъ была получена на черт. 3 табл. V, веревочная кривая, проходящая черезъ точки C_1 и C″, при $\beta = 34^0\ 59'\ 31''$ ($tg\ \beta = 0,7$), и изъ уравненія (32) опредѣлена постоянная толщина свода:



Чер. 18.

$$c = c_1 = \frac{20000}{3,94\ .\ 25000.\ \sin\beta} = 0,35 \text{ метр.}$$

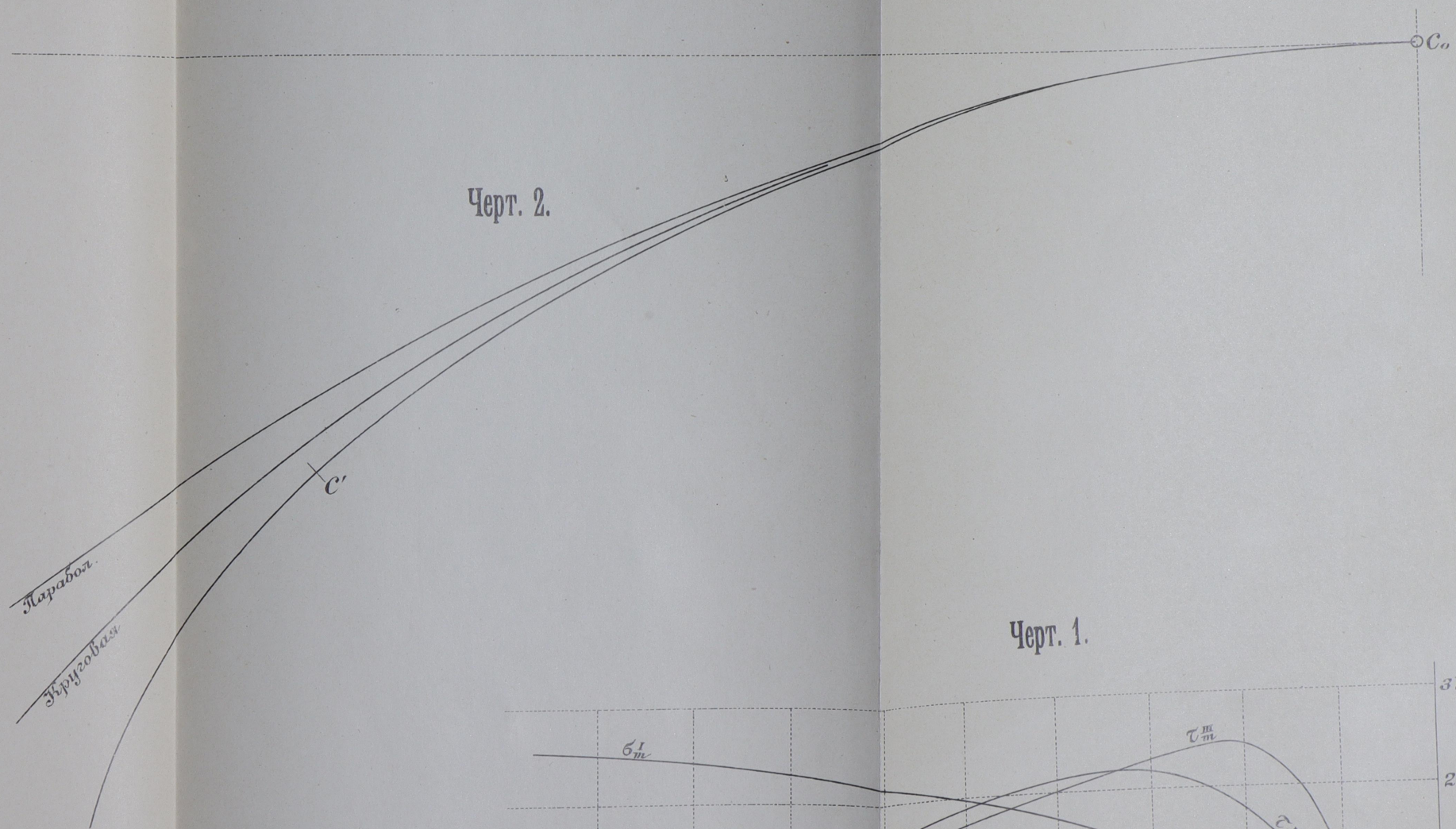
Опредѣленное указаннымъ способомъ, на чертежѣ 3 табл. V, меридіональное сѣченіе купольнаго свода постоянной толщины, по формѣ своей несомнѣнно благообразнѣе, нежели — сѣченіе,

представленное на чертежѣ 2-мъ, но зато и количество матеріала потребнаго на его устройство больше. Такъ какъ послѣдній недостатокъ сглаживается выгодою постоянной толщины свода, и, кромѣ того, какъ показываетъ построенная на чертежѣ 4 табл. V, кривая σ_m-овъ, наибольшее пятовое сжимающее напряженіе не превышаетъ величины, допущенной въ краевомъ сѣченіи, то при составленіи проектовъ купольныхъ покрытій слѣдовало-бы придерживаться, по возможности, той формѣ купола, которая обладаетъ краевою нагрузкою, опредѣленной по только что изложенному способу.

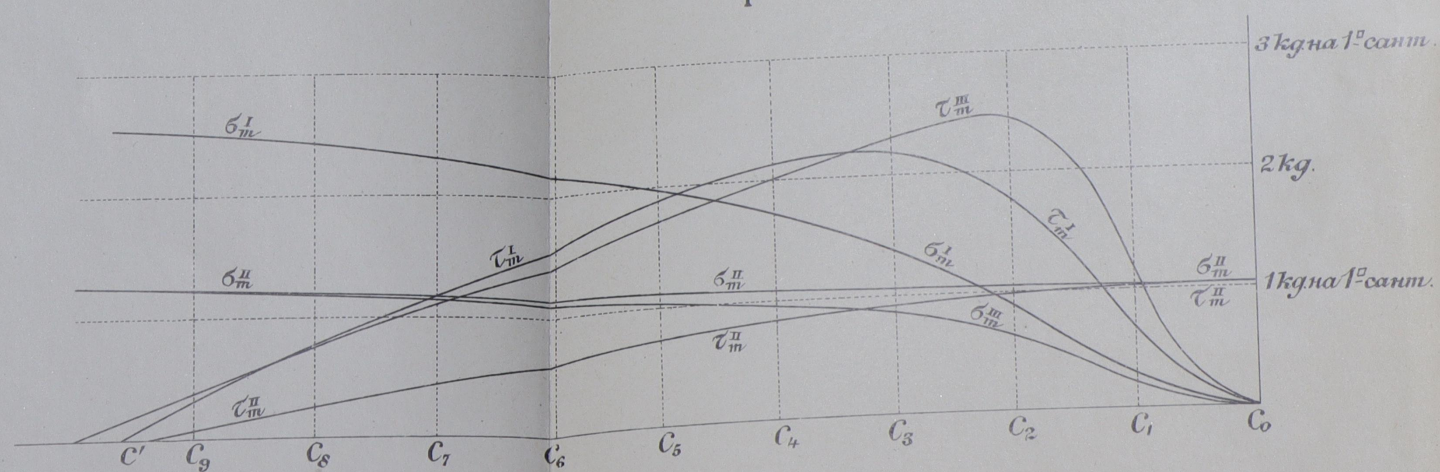
КОНЕЦЪ.

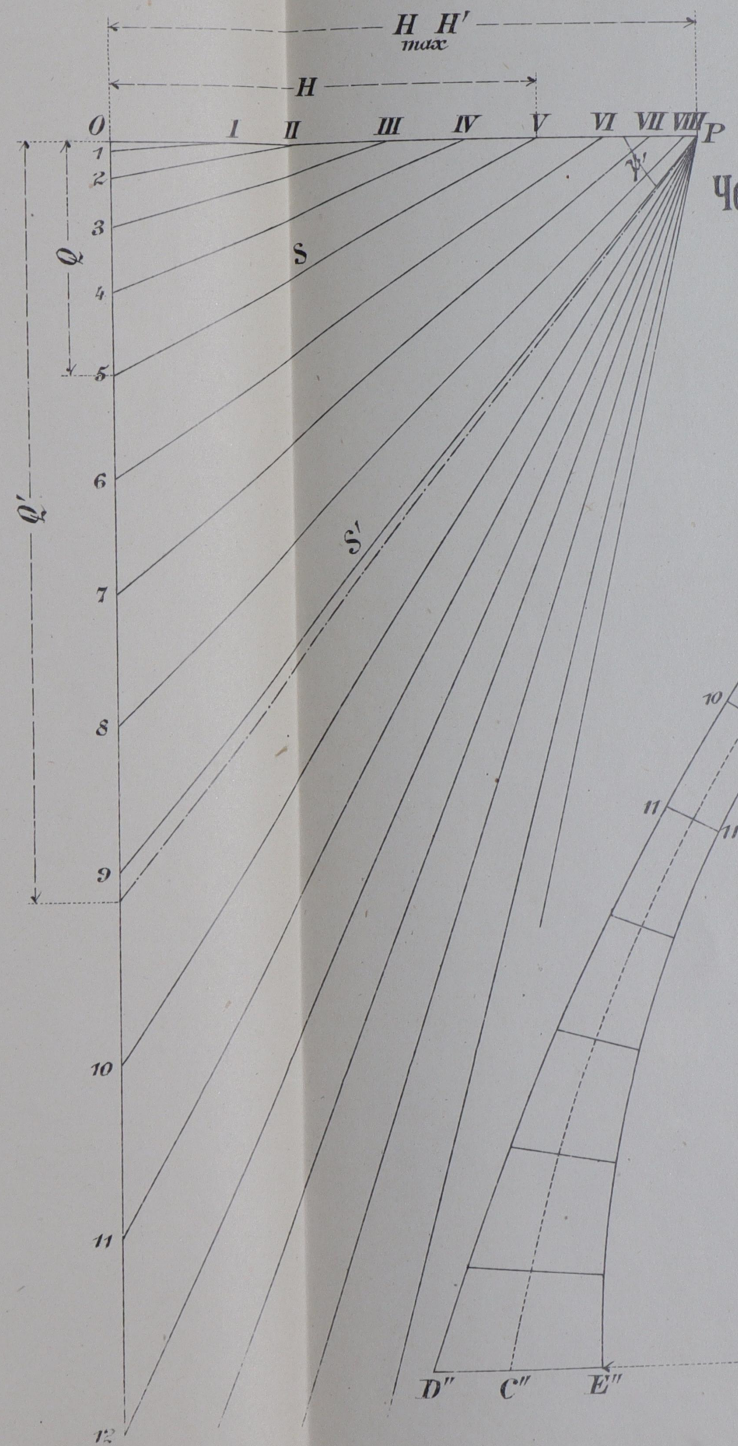
Табл. I.

Черт. 2.

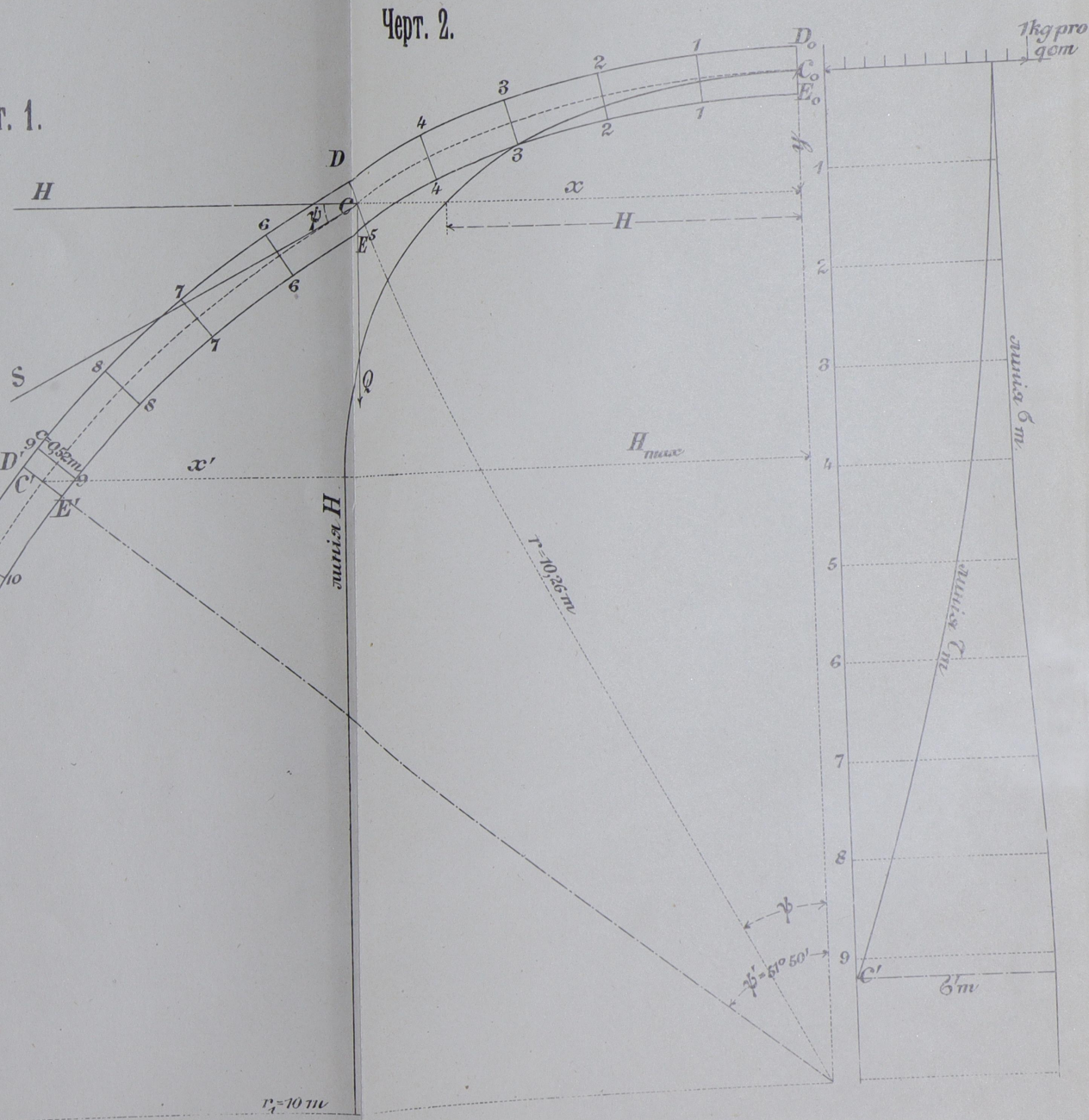


Черт. 1.




H H'
max
H
O
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
P
Q
Q'
S
S'
ψ'
D''
C''
E''

Черт. 1.


H
D
C
E
ψ
S
Q
x
H
D'
C'
E'
x'
C=0,52m
H линіе
r=10,36m
r₁=10m
H max
D₀
C₀
E₀
y
1kg pro qcm
линія б m
линія C m
б m
ψ
ψ'=51° 50'
C'

Черт. 2.

Черт. 1.

Черт. 2.

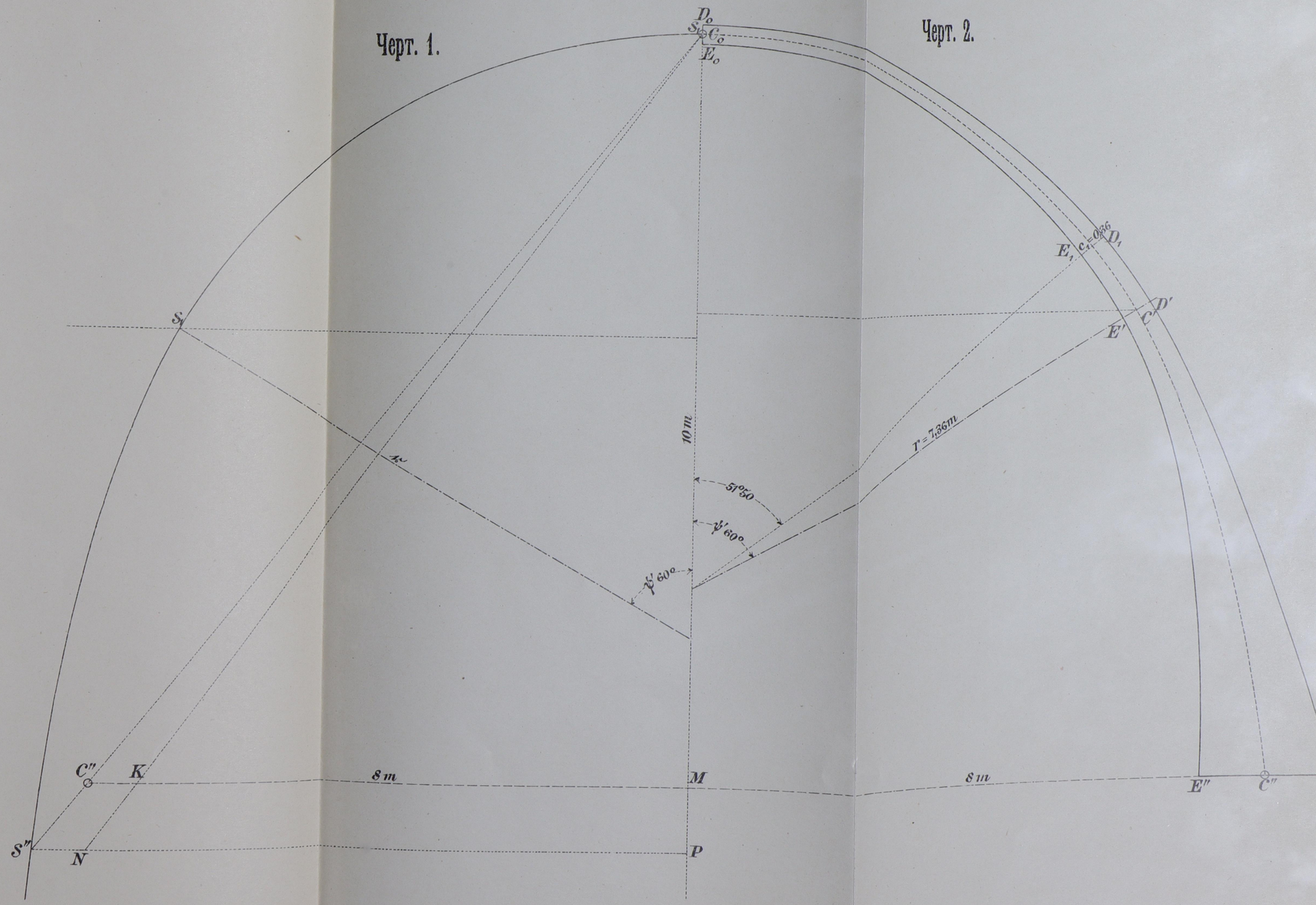
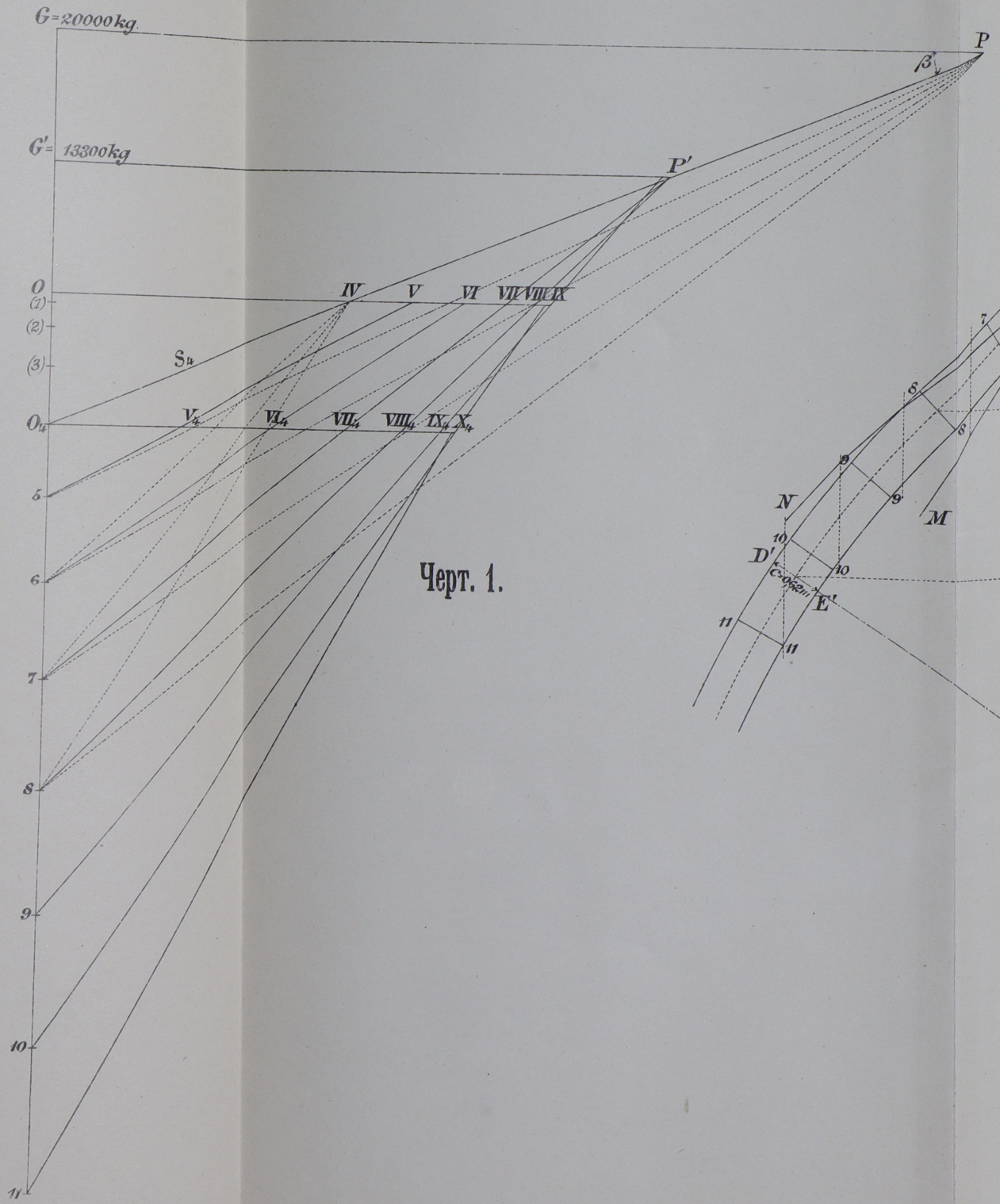

D_0
S_0
C_0
E_0
E_1
C_1
0,36
D_1
D'
C'
E'
S_1
$r = 7,36m$
10m
51°50
$\psi' 60°$
$\psi' 60°$
C''
K
8m
M
8m
E''
C''
S''
N
P

Табл. IV.



Черт. 1.

Черт. 2.

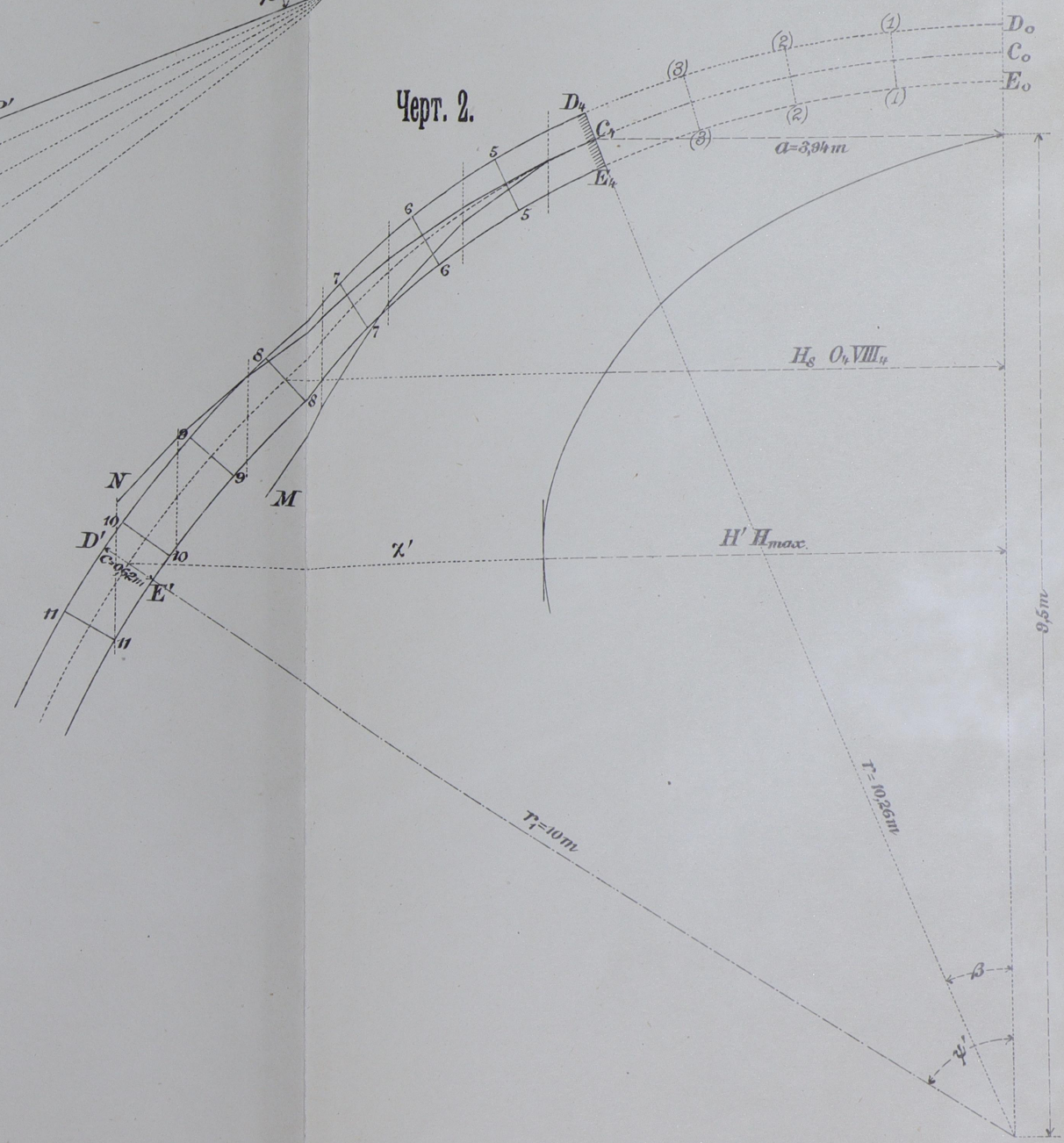
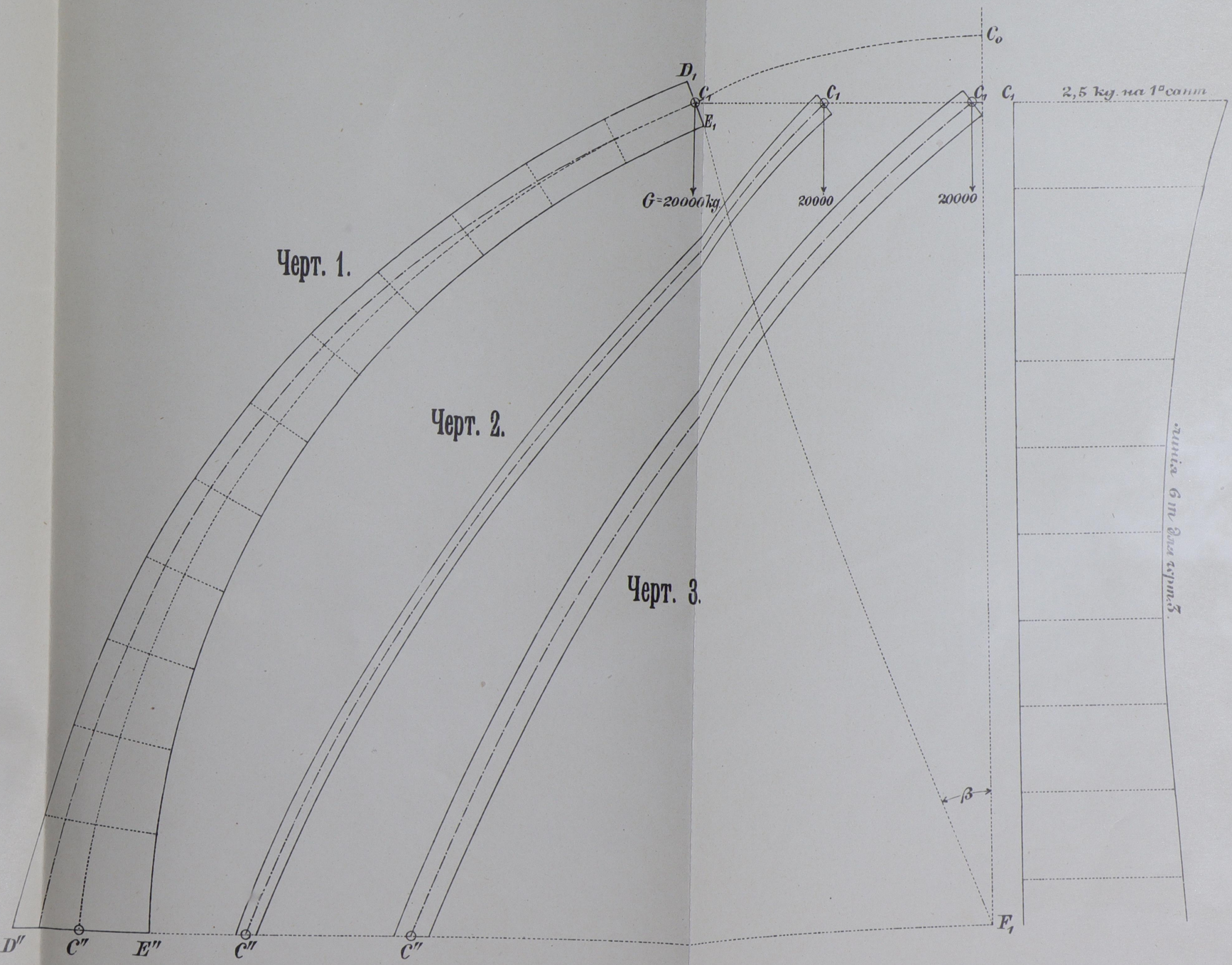


Табл. V.


C_0
D_1
C_1
E_1
C_1
C_1
C_1
2,5 kg. на 1° сант.
G=20000kg
20000
20000
Черт. 1.
Черт. 2.
Черт. 3.
линія 6 m для арт. 3.
β
F_1
D″
C″
E″
C″
C″