

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра физики

Е. И. ДОЦЕНКО, В. А. ЗЫКУНОВ, И. В. ПРИХОДЬКО

Ф И З И К А

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Гомель 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра физики

Е. И. ДОЦЕНКО, В. А. ЗЫКУНОВ, И. В. ПРИХОДЬКО

Ф И З И К А

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

*Одобрено методической комиссией заочного факультета
в качестве учебно-методического пособия
для студентов заочного факультета*

Гомель 2014

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3
Б90

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор *О. В. Холодилов* (УО «БелГУТ»),
канд. физ.-мат. наук, доцент *В. В. Андреев* (УО «ГГУ
им. Ф. Скорины»).

Доценко, Е. И.

Б90 Физика. Механика. Молекулярная физика и термодинамика : учеб.-метод. пособие для студентов заочного факультета / Е. И. Доценко, В. А. Зыкунов И. В. Приходько ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 203 с.
ISBN 978-985-554-293-4

Приведены основные сведения из теории по разделу “Механика. Молекулярная физика и термодинамика” программы курса физики для инженерно-технических специальностей втузов.

Предназначено для методического обеспечения самостоятельной работы по физике студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3

ISBN 978-985-554-293-4

© Доценко Е.И., Зыкунов В.А., Приходько И.В., 2014
© Оформление. УО «БелГУТ», 2014

ВВЕДЕНИЕ

Предмет физики. Физика является одной из наиболее древних научных дисциплин, и первые, дошедшие до нас, работы, относятся к временам Древней Греции. Наиболее известными учеными этого периода развития физики, называемого античным, являются Демокрит и Аристотель. Термин «физика» возник как название одного из сочинений Аристотеля и в переводе с греческого означает «природа». Предметом этой науки, по мнению автора, было выяснение первопричин явлений.

В настоящее время физика – одна из основных областей естествознания, наука о наиболее общих явлениях и свойствах внешнего мира, который определяется такой философской категорией, как «материя». Под *материей* понимается объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания и отображаемая им. *Предметом физики* является материя, её наиболее общие свойства и формы движения. В настоящее время известны два вида материи: вещество и поле. К первому виду относятся атомы, молекулы и все состоящие из них тела. Второй вид материи образуют электромагнитные, гравитационные и другие поля. Два вида материи могут превращаться друг в друга. Например, электрон и позитрон (вещество) могут превращаться в фотоны (электромагнитное поле). Физика изучает наиболее общие формы движения материи, такие как тепловая, механическая, электромагнитная, которые входят в другие, более сложные виды движения, такие как химическая и биологическая. Академиком А. Иоффе дано следующее определение физики: «Физика – это наука, изучающая общие свойства и законы движения вещества и поля».

Метод научного познания включает в себя несколько этапов. Первый из них – это *наблюдение явлений*. *Физическим явлением* называются всевозможные изменения, происходящие с физическими телами и полями. На основе наблюдения явлений формируются *физические понятия* – обобщенные представления о сущности

физического явления или процесса (например, плавление). Для описания свойств физических тел и физических явлений используются *физические величины* – физические понятия, определяемые на основе математического соотношения или которые можно измерить с помощью приборов. В результате наблюдений накапливаются факты, для объяснения которых выдвигается гипотеза.

Гипотеза – это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность высказанной гипотезы проверяется посредством постановки соответствующих опытов, путём выяснения согласия следствий, вытекающих из гипотезы, с результатами опытов и наблюдений.

Опыт – это наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздать его каждый раз при повторении этих условий. Экспериментально могут быть вызваны явления, которые естественно в природе не наблюдаются. Успешно прошедшая такую проверку и доказанная гипотеза превращается в научную теорию или закон.

Физические законы устанавливаются на основе обобщения опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующие в природе. Эти законы обычно формулируются в виде количественных соотношений между различными физическими величинами.

Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы. Физическая теория даёт объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.

Важнейшие этапы истории физики. Физика подразделяется на *классическую* и *квантовую*. Начало классической физики было положено Ньютоном, сформулировавшим основные законы классической механики в современном виде. К основоположникам классической физики, которая как теория была завершена к началу двадцатого столетия, можно также отнести М. Фарадея, У. Гомсона, Дж. Максвелла, Л. Больцмана и др. Однако неудачные попытки создания теории излучения абсолютно черного тела в рамках представлений классической физики привели М. Планка к формулировке основ квантовой теории света, сыгравшей важную роль в создании квантовой механики. Опыты Майкельсона–Морли, в

которых экспериментально было подтверждено отсутствие существования эфира – особой среды, в которой предполагалось распространение световых волн, побудили А. Эйнштейна и других пересмотреть классические представления о пространстве и времени, что привело к созданию теории относительности. Открытие электрона в 1897 г. и неудачные попытки построить теорию строения атомов на основе законов классической физики привели к созданию новой физической теории – квантовой механики.

Связь физики с другими науками. Физика тесно связана с рядом других наук, особенно с теми, которые относятся к области естествознания. Изучаемые физикой формы движения материи, такие как механическая, тепловая, электромагнитная и другие, присутствуют и в более сложных формах движения материи, таких как биологическая, химическая и др. Эти формы движения материи изучаются и другими науками. Вследствие этого произошло образование ряда наук, таких как биофизика, физическая химия, геофизика, радиофизика, астрофизика и др. Особо необходимо сказать о тесной связи физики и математики. Математика – инструмент физики. Физика, в свою очередь, связана с техникой: она вышла из потребностей техники, а современная физика – это база для создания новых отраслей техники. Существует также тесная связь физики и философии.

Роль физики в становлении инженера. Физика относится к тем фундаментальным дисциплинам, которые закладывают основы общетехнической подготовки современного инженера. Она объединяет все достижения научно-технического мышления и является базой для развития самых передовых технологий и производств, таких как ядерные и нанотехнологии, микроэлектроника, лазерная техника. Однако роль физики определяется не только этим. Для становления современного инженера не менее важно овладение навыками физического мышления и техникой физического эксперимента. В свою очередь, овладение физическим мышлением и знание законов физики обеспечивает создание базы для образования современного специалиста.

Система единиц физических величин СИ. Физические величины могут быть как системными (входящими в какую-либо систему, например, СГС, СИ и др.), так и внесистемными (не входящими ни в одну из систем). Системные единицы, в свою очередь, подразделяются на основные (кг, м, с и др.) и производные (м/с, Н, и др.). В данное время

стандартной системой единиц измерения считается система СИ эта система [Международный стандарт, который получил название «Международная система единиц (СИ)»] была принята XI Генеральной конференцией по мерам и весам в 1961 г. Она содержит семь основных единиц измерения (килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела) и две дополнительные (радиан и стерадиан). В рамках СИ считается, что эти единицы имеют независимую размерность, т.е. ни одна из основных единиц не может быть получена из других. Установлены стандартные сокращенные обозначения для основных единиц и правила записи производных единиц. Производные единицы получаются из основных с помощью алгебраических действий, таких как умножение и деление (м/с). Некоторым из производных единиц в СИ присвоены собственные названия (Н, Дж). Математическое выражение для производной единицы измерения вытекает из физического закона, с помощью которого она определяется, или из определения физической величины, для которой она вводится.

Определение единиц измерения:

– метр (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за $1/299\,792\,458$ с;

– килограмм (кг) – масса, равная массе международного прототипа килограмма (платино-иридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа);

– секунда (с) – время, равное $9\,192\,631\,770$ периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133;

– ампер (А) – сила не изменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины;

– моль (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде ^{12}C массой 12 г;

– кельвин (К) – $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды;

– кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $5,4 \cdot 10^{14}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $1/683$

Вт/ср;

– радиан (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу;

– стерadian (ср) – телесный угол в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

1 МЕХАНИКА

1.1 Элементы кинематики

1.1.1 Пространственно-временные представления

Механика – часть физики, изучающая закономерности механического движения и причины изменения этого движения. Механическое движение – изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей. Механика состоит из трех частей: кинематики, динамики и статики. Статика рассматривает законы сложения сил и условия равновесия тел. Динамика изучает влияние взаимодействия между телами на характер их движения. Кинематика изучает и описывает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают. Описать механическое движение вне пространства и времени невозможно. Пространство выражает порядок сосуществования отдельных объектов, время – порядок следования. Пространство и время – это основные формы существования материи.

Исторически сначала сформировалось представление об *абсолютном пространстве и времени*, на котором основана классическая механика, или так называемая механика Галилея – Ньютона. В ней считается, что *пространство однородно и изотропно* во всех своих частях, т.е. его свойства одинаковы во всех точках пространства и не зависят от различных направлений в пространстве. Таким образом, предполагается, что физическое пространство такое же, каким его представляет геометрия Евклида. Время также абсолютно и едино для всех систем отсчета и течёт во всех точках пространства одинаково, т.е. *время однородно*. Любой физический процесс протекает одинаково, независимо от того, в какой момент времени он начинает осуществляться. Для

классической механики, механики малых по сравнению со скоростью света скоростей, это допущение вполне приемлемо. Однако если относительная скорость движения систем отсчета близка к скорости света, то пространственно-временные представления классической механики Ньютона вступают в противоречия с наблюдаемыми явлениями. Это потребовало отказа от классических представлений о пространстве и времени и привело к созданию специальной теории относительности (СТО), называемой также релятивистской теорией. В основу второго представления о пространстве и времени легло представление о том, что пространство и время не являются абсолютными самостоятельными и независимыми физическими сущностями, а связаны с определёнными физическими объектами и происходящими процессами. В релятивистской механике, изучающей законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, понятие времени, как и расстояния между объектами, неотделимо от движения тел относительно друг друга.

Более глубокая связь между материей и пространством-временем устанавливается в общей теории относительности (ОТО). Пространство является евклидовым (кратчайшее расстояние между точками – прямая линия) только в отсутствие масс, приводящих к появлению сил тяготения. Наличие масс приводит к изменению пространства-времени. Пространство приобретает кривизну. Движение тел по инерции в таком пространстве происходит по некоторым кривым. В области действия масс (в поле тяготения) меняется и скорость течения времени. Чем больше поле тяготения, тем медленнее течёт время. Это огромный шаг вперёд по сравнению с представлениями Ньютона, в которых пространство, время и материя разрознены, и свойства материи не сказываются на свойствах пространства и времени.

1.1.2 Скалярные и векторные физические величины

Величины, для характеристики которых достаточно одного численного значения, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин в физике являются путь, время, масса, энергия и др.

Величины, которые кроме численного значения характеризуются и направлением, называются *векторными (векторами)*. Примерами векторных величин в физике являются скорость, ускорение, сила и др. На то, что физическая величина является векторной, обычно указывает стрелка, размещенная над буквой, которой обозначается эта величина, например \vec{a} . Обозначение $|\vec{a}| = a$ соответствует модулю вектора \vec{a} . Модуль вектора – скалярная величина, всегда положительная, равная длине вектора \vec{a} .

Каждый вектор \vec{a} , в соответствии с правилом сложения векторов, может быть заменён несколькими векторами, которые в сумме дают вектор \vec{a} . Операция замены вектора \vec{a} несколькими векторами называют разложением данного вектора на составляющие. Разложим вектор \vec{a} на составляющие (рисунок 1.1), имеющие направления координатных осей в декартовой системе координат. Обозначим эти составляющие через \vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z .

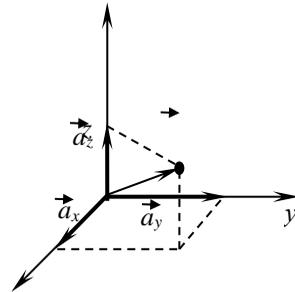


Рисунок 1.1

Математически разложение вектора на составляющие можно записать следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z. \quad (1.1)$$

Модули этих векторов, как следует из рисунка 1.1, являются проекциями вектора на координатные оси: $|\vec{a}_x| = a_x$; $|\vec{a}_y| = a_y$; $|\vec{a}_z| = a_z$ и с точностью до знака равны сторонам прямоугольного параллелепипеда, большей диагональю которого служит вектор \vec{a} . Поэтому имеет место соотношение

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (1.2)$$

Рассмотрим единичные по модулю векторы (орты) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , проведенные из начала координат – точки O в направлении координатных осей x , y , z , соответственно. Эта тройка векторов (ортов) называется базисом координатной системы и полностью

определяет систему координат. Тогда любой вектор \vec{a} в декартовой системе координат можно представить в виде линейной комбинации ортов, т. е. он разложен по базису:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

1.1.3 Основные кинематические характеристики движения частиц и тел. Система отсчета

Все виды механического движения могут быть сведены к совокупности двух основных видов механического движения – поступательному и вращательному.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с телом, остаётся параллельной самой себе, а все точки тела совершают одинаковые перемещения за одинаковые промежутки времени. Поэтому скорости и ускорения всех точек тела одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения тела к изучению движения отдельной точки тела, т.е. к задаче кинематики материальной точки.

Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси) – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения тела.

В механике для описания реальных движущихся тел в зависимости от условий каждой конкретной задачи используются различные упрощенные модели, называемые физическими моделями: материальная точка, абсолютно твердое тело, абсолютно упругое тело, абсолютно неупругое тело и др.

Материальная точка – тело, обладающее массой, размерами которого в данных условиях движения можно пренебречь. Понятие материальной точки – абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Так, например, астрономы, рассматривая движение земного шара по орбите вокруг Солнца, могут считать земной шар за материальную точку.

Абсолютно твердым называется тело, деформацией которого в данных условиях движения можно пренебречь. Расстояние между любыми двумя точками абсолютно твердого тела не изменяется при

любых воздействиях. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Для того чтобы упростить описание движения, систему тел или макроскопическое тело можно мысленно разбить на малые части, взаимодействующие между собой, каждая из которых рассматривается как материальная точка. В таком случае изучение движения произвольной системы сводится к изучению системы материальных точек. В механике вначале изучают материальную точку, а затем систему материальных точек.

Движение материальной точки происходит в пространстве и времени. *Задача кинематики* заключается в том, чтобы определить положение материальной точки в пространстве в любой момент времени. Положение материальной точки определяется относительно другого тела, выбранного произвольно. Это тело называется *телом отсчета*. *Систему отсчета* образуют тело отсчета, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени. С помощью прибора для измерения времени определяют моменты времени, соответствующие различным положениям в пространстве движущихся тел. Рассмотрим прямоугольную декартовую систему координат. Положение произвольной точки А характеризуется радиус-вектором \vec{r} (рисунок 1.2), соединяющим начало координат с точкой А.

Радиус-вектор \vec{r} однозначно определяет положение точки в пространстве. Его проекции на координатные оси равны, как видно из рисунка 1.2, декартовым координатам точки:

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z. \quad (1.3)$$

Радиус-вектор \vec{r} может быть разложен по базису:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.4)$$

Модуль вектора \vec{r} определяется как диагональ прямоугольного параллелепипеда:

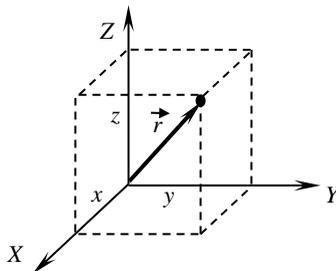


Рисунок 1.2

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.5)$$

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется *числом степеней свободы*. Если материальная точка движется в пространстве, то она обладает тремя степенями свободы, если по некоторой поверхности – двумя, если по прямой – одной.

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются с течением времени. Поэтому для задания закона движения материальной точки необходимо указать либо вид функциональных зависимостей всех трех её координат от времени:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

либо зависимость от времени радиус-вектора:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.7)$$

Исключая из (1.6) и (1.7) время движения, t получим траекторию движения материальной точки. *Траектория* – линия, описываемая материальной точкой в пространстве относительно выбранной системы отсчета. В зависимости от того, по какой траектории движется точка, различают прямолинейное или



Рисунок 1.3

криволинейное движение. Длина участка траектории, пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется *длиной пути*, или *путем*. Вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение её в данный момент времени, называется *перемещением* \vec{r}_{12} (рисунок 1.3).

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольно выбранной криволинейной траектории (рисунок 1.4) так, что в момент времени t она находится в точке M_1 . Этому положению соответствует значение радиус-вектора \vec{r}_1 . В течение следующего

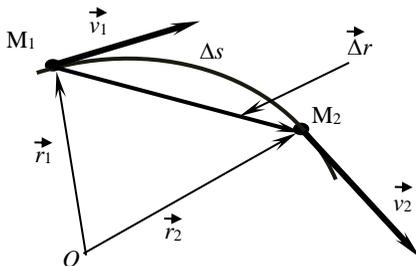


Рисунок 1.4

за моментом t небольшого промежутка времени Δt , называемого элементарным, точка проходит элементарный путь Δs и совершает элементарное перемещение $\Delta \vec{r}$, которое совпадает с

приращением радиус-вектора за время Δt .

Из рисунка 1.4 следует, что $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком пути и модуль перемещения $|\Delta \vec{r}|$ равен пройденному пути Δs .

Характеристикой движения материальной точки является *скорость*. *Скорость* – векторная физическая величина, которая характеризует как быстроту движения, так и направление движения в данный момент времени.

Векторная физическая величина, равная отношению приращения $\Delta \vec{r}$ радиус-вектора точки за некоторый интервал времени Δt к этому интервалу, называется *средней скоростью движения*:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Направление средней скорости совпадает с направлением $\Delta \vec{r}$, т.е. средняя скорость направлена вдоль хорды, стягивающей соответствующий участок траектории точки.

Если уменьшать интервал времени Δt , то соответственно будут также уменьшаться Δs и $\Delta \vec{r}$. По достижении достаточно малых значений Δt вектор $\langle \vec{v} \rangle$ практически перестает изменяться как по величине, так и по направлению. Это означает, что при

стремлении Δt к нулю отношение (1.8) стремится к определенному пределу. Этот предел называется *мгновенной скоростью* \vec{v} движущейся точки в момент времени t :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'. \quad (1.9)$$

Мгновенная скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту и направление движения материальной точки в данный момент времени. Мгновенная скорость определяется как первая производная радиус-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор мгновенной скорости направлен (см. рисунок 1.4) по касательной к траектории в сторону движения точки.

В случае неравномерного движения, когда числовое значение мгновенной скорости с течением времени изменяется, пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ – средней скоростью неравномерного движения на данном участке, или *средней путевой скоростью*

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}; \quad [v] = \frac{[\Delta s]}{[t]} = \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1.10)$$

По мере уменьшения Δt путь Δs все больше приближается к модулю перемещения $|\Delta \vec{r}|$, поэтому модуль скорости равен

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.11)$$

Если выражение $ds = v dt$, полученное из (1.11) проинтегрировать по времени в пределах от t_1 до t_2 то найдем длину пути, пройденного телом или точкой за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.12)$$

В случае равномерного движения, когда числовое значение мгновенной скорости постоянно, то в выражении (1.12) величину v можно вынести из-под знака интеграла:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt = v \int_{t_1}^{t_2} dt = v(t_2 - t_1) = v\Delta t. \quad (1.13)$$

Геометрический смысл формул (1.12), (1.13) следует из рисунка (1.5). По определению интеграла, пройденный путь представляет собой площадь, ограниченную кривой $s = v(t)$ в интервале от t_1 до t_2 .

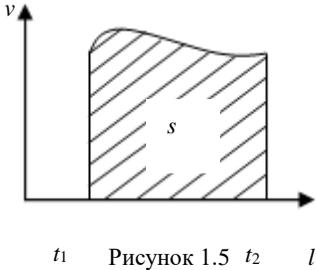


Рисунок 1.5

Вектор скорости, как всякий вектор, можно разложить по базису прямоугольной декартовой системы координат:

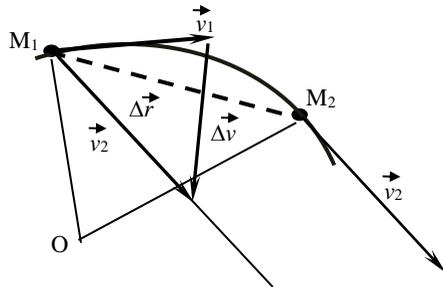
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (1.14)$$

Модуль вектора скорости находят из выражения

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.15)$$

В случае, если движение неравномерное, важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению, называется *ускорением*. Пусть движущаяся точка за время Δt перешла из точки M_1 в точку M_2 (рисунок 1.6).

За этот промежуток времени её скорость изменилась от значения \vec{v}_1 в точке M_1 до значения \vec{v}_2 в точке M_2 , изменившись как по модулю, так и по направлению. В точках M_1 и



М₂ проведём вектора скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , касательные к траектории. Из точки М₁ проведём прямую, параллельную вектору скорости \vec{v}_2 . Отложим на этой прямой отрезок, равный по модулю \vec{v}_2 , и построим вектор изменения скорости

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости как по величине, так и по направлению и равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt , в течение которого это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad [a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{м}{с^2}. \quad (1.16)$$

Если уменьшать промежуток времени Δt , то соответственно будут также уменьшаться $\Delta\vec{v}$. По достижении достаточно малых значений Δt вектор $\langle \vec{a} \rangle$ практически перестает изменяться как по величине, так и по направлению. Это означает, что при стремлении Δt к нулю отношение (1.15) стремится к определенному пределу. Этот предел называется *мгновенным ускорением* \vec{a} движущейся точки в момент времени t :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.17)$$

Таким образом, *мгновенное ускорение* \vec{a} есть векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению и равная первой производной скорости по времени.

Из (1.9) и (1.16) следует:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.18)$$

Вектор ускорения \vec{a} направлен вдоль вектора приращения скорости $\Delta\vec{v}$. Если траектория точки – кривая, то вектор ускорения \vec{a} лежит в соприкасающейся плоскости.

Вектор \vec{a} можно разложить на три составляющие, направленные

вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (1.19)$$

Численное значение ускорения с учетом выражений (1.18), (1.19)

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Проведем дополнительные построения, отложив на линии, проведенной из M_1 параллельно вектору \vec{v}_2 отрезок, равный по длине вектору \vec{v}_1 . Введем дополнительные обозначения на рисунке $\Delta\vec{v}_n$ и $\Delta\vec{v}_\tau$.

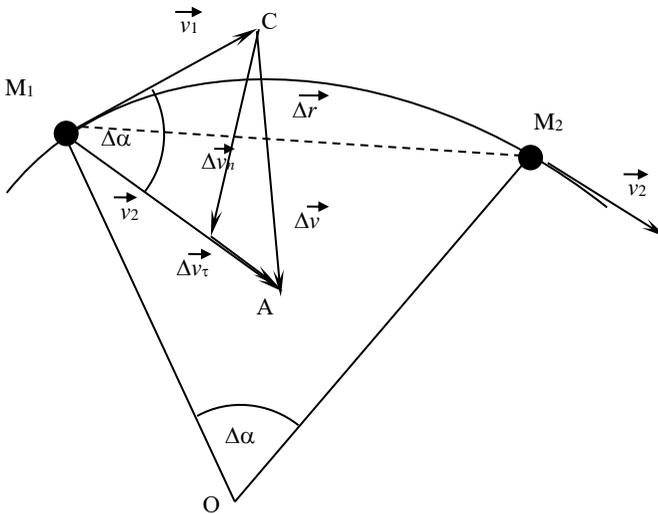


Рисунок 1.7

Из сделанных построений следует

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_n + \Delta \vec{v}_\tau. \quad (1.21)$$

Из уравнений (1.17) (1.21) следует, что

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.22)$$

Вектор \vec{a}_τ называется тангенциальным ускорением (тангенциальная составляющая ускорения). При $\Delta t \rightarrow 0$ угол $\Delta \alpha \rightarrow 0$, направление векторов \vec{v}_2 и $\Delta \vec{v}_\tau$ стремятся к направлению вектора \vec{v}_1 . Поэтому вектор \vec{a}_τ направлен по касательной к траектории. Модуль его, как следует из построения, равен $|\Delta \vec{v}_\tau| = |\vec{v}_2| - |\vec{v}_1| = |\Delta v|$ и характеризует быстроту изменения численного значения скорости материальной точки:

$$\dot{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.23)$$

Вектор \vec{a}_n называется нормальной ускорением (нормальная составляющая ускорения). В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ угол $\Delta \alpha \rightarrow 0$ и вектор $\Delta \vec{v}_n \perp \vec{v}_1$. Следовательно, вектор \vec{a}_n также будет перпендикулярен вектору \vec{v}_1 , т.е. вектору скорости. Вектор \vec{a}_n направлен по нормали к траектории к центру её кривизны и характеризует быстроту изменение скорости по направлению.

Таким образом, полное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad (1.24)$$

причем

$$\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau.$$

Для нахождения нормального ускорения \vec{a}_n восстановим в точках M_1 и M_2 перпендикуляры к траектории (к касательным в данных точках, т.е. к соответствующим скоростям). Эти перпендикуляры называются *нормальными*. Нормали пересекутся в точке O . Так как мы выбрали малый промежуток времени Δt , то отрезок траектории M_1M_2 есть отрезок окружности с центром в точке O и радиусом $R \approx OM_1 \approx OM_2$. Угол между OM_1 и OM_2 равен $\Delta \alpha$.

На рисунке 1.7 имеется два равнобедренных треугольника –

$\Delta M_1 M_2 O$ и $\Delta C M_1$. Из их подобия следует

$$\frac{|\Delta \vec{v}_n|}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{|\vec{v}_1|}{R} \Rightarrow |\Delta \vec{v}_n| = \frac{|\vec{v}_1|}{R} |\Delta \vec{r}|.$$

Отсюда вычислим величину искомого вектора \vec{a}_n :

$$|\vec{a}_n| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{v}_1|}{R} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R}. \quad (1.25)$$

Формула для полного ускорения при криволинейном движении имеет вид

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.26)$$

Соотношения (1.23)–(1.26) справедливы для всякого криволинейного движения. Это связано с тем, что всякий участок криволинейной траектории в достаточно малой окрестности точки можно приближенно заменить дугой окружности. Радиус этой окружности, называемый радиусом кривизны траектории, будет меняться от точки к точке и требует специального вычисления. Касательное ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля ее скорости.

Виды движения можно классифицировать в зависимости от значения составляющих ускорения. Вид траектории определяется значением \vec{a}_n . Если $\vec{a}_n = \text{const}$, то движение осуществляется по окружности. Значению $\vec{a}_n \neq \text{const}$ соответствует случай криволинейного движения, $\vec{a}_n = \mathbf{0}$ – движение осуществляется по прямой. В каждом из этих случаев точка может двигаться равномерно ($\vec{a}_\tau = 0$), равнопеременно ($\vec{a}_\tau = \text{const}$), а в общем случае – неравномерно с переменным во времени касательным ускорением [$\vec{a}_\tau = \vec{f}(t)$].

1.1.4 Кинематика вращательного движения твердого тела

Теория движения твёрдого тела играет важную роль, так как на

практике мы всегда имеем дело с телами, а не с точками. Все реально существующие твердые тела более или менее деформируются под влиянием приложенных к ним сил; отдельные их части могут смещаться относительно друг друга. Однако часто при изучении движения твердых тел можно пренебречь изменением их размеров и формы. В этом случае тело считают абсолютно твердым.

Различают два основных вида движения, в которых может участвовать абсолютно твердое тело: поступательное и вращательное.

При вращательном движении, в отличие от поступательного, скорости движения разных точек тела неодинаковы. Поэтому линейная скорость какой-либо точки вращающегося тела не может служить кинематической характеристикой движения всего тела. Для описания вращательного движения вводят величины *угловой скорости* и *углового ускорения*.

Пусть абсолютно твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси OO' (рисунок 1.8). Рассмотрим произвольную точку M тела, не

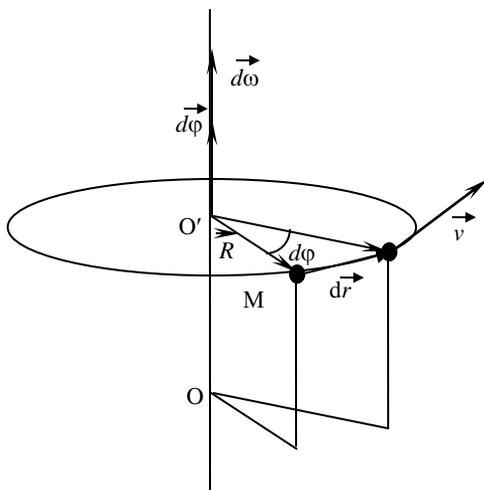


Рисунок 1.8

лежащую на оси вращения. За время Δt точка M совершает перемещение $\Delta \vec{r}$, при этом она совершит поворот на угол $\Delta \phi$. При этом же угле поворота другая точка, отстоящая на меньшее расстояние от оси, совершит другое (меньшее) перемещение. Поэтому использовать для характеристики вращения всего тела перемещение $\Delta \vec{r}$ любой точки твёрдого тела неудобно. На такой же угол

поворота $\Delta \phi$, на который поворачивается за время Δt точка M , повернется радиус-вектор любой другой точки тела, т. к. в противном случае расстояние между этими точками должно было бы измениться. Таким образом, угол поворота $\Delta \phi$ характеризует перемещение всего вращающегося тела за малый промежуток времени. Угол поворота $\Delta \phi$ является векторной величиной (точнее – *аксиальным вектором*). Направление вектора $\Delta \vec{\phi}$ совпадает с направлением поступательного движения острия винта, если рукоятку винта вращать в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу правого винта.

Для характеристики быстроты вращения вводят понятие средней угловой скорости. *Средняя угловая скорость* $\langle \vec{\omega} \rangle$ – векторная физическая величина, которая характеризует направление и быстроту вращения тела вокруг оси, равная отношению приращения $\Delta \vec{\phi}$ угла поворота радиуса-вектора произвольной точки тела к интервалу времени Δt , в течение

которого это приращение произошло:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}, \quad [\omega] = \frac{\text{рад.}}{\text{с}}. \quad (1.27)$$

При стремлении Δt к нулю отношение (1.27) стремится к определенному пределу. Этот предел называется *мгновенной угловой скоростью* вращающейся точки в момент времени t :

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.28)$$

Мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$ называется векторная величина, которая характеризует направление и быстроту вращения тела в данный момент времени, равная первой производной угла поворота по времени. Угловая скорость, как средняя, так и мгновенная, представляет собой вектор (аксиальный), направление которого связано с направлением оси вращения тела (см. рисунок 1.8) по правилу правого винта. Вектор угловой скорости совпадает с поступательным движением острия винта, ручка которого вращается в направлении движения точки по окружности. Таким образом, вектора $\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ направлены в одну сторону.

Если $\vec{\omega} = \text{const}$, то вращение является равномерным. Если вращение является равномерным, то точка на окружности поворачивается на равные углы вокруг оси вращения за любые равные промежутки времени.

Наряду с угловой скоростью, для характеристики равномерного движения по окружности используются понятия периода T и частоты вращения ν .

Период T – это промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот, т.е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$.

Частота ν – это число оборотов за 1 секунду. При вращении с угловой скоростью $\vec{\omega}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Если вращательное движение тела не является равномерным, то для его характеристики вводится угловое ускорение – среднее и мгновенное.

Средним угловым ускорением неравномерного вращательного движения в интервале Δt называется векторная величина,

характеризующая быстроту изменения угловой скорости как по величине, так и по направлению и равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{\omega}$ к интервалу времени Δt , в течение которого это изменение произошло:

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}. \quad (1.29)$$

Если уменьшать промежуток времени Δt , то соответственно будут также уменьшаться и $\Delta\vec{\omega}$. По достижении достаточно малых значений Δt вектор $\langle \vec{\varepsilon} \rangle$ практически перестает изменяться как по величине, так и по направлению. Это означает, что при стремлении Δt к нулю отношение (1.29) стремится к определенному пределу. Этот предел называется *мгновенным угловым ускорением* $\vec{\varepsilon}$ движущейся точки в момент времени t :

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{\varepsilon} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.30)$$

Таким образом, мгновенное угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ есть векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости по модулю и направлению и равная первой производной угловой скорости по времени.

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения и совпадает по направлению с вектором приращения угловой скорости тела. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором $\vec{\omega}$, а при замедленном – ему противоположен.

1.1.5 Связь между линейными и угловыми характеристиками движения

Рассмотрим связь между линейной скоростью \vec{v} точки М и её угловой скоростью $\vec{\omega}$.

За время dt точка М проходит путь, равный дуге окружности, который может быть определен как

$$dS = R d\varphi.$$

Скорость движения точки в соответствии с (1.11)

$$v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$v = \omega R. \quad (1.31)$$

Из рисунка (1.9) видно, что вектора $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ и $\vec{v} \perp \vec{R}$, т. е. вектор \vec{v} есть векторное произведение векторов $\vec{\omega}$ и \vec{R} :

$$v = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (1.32)$$

Выражение (1.32) можно записать в скалярной форме:

$$v = \omega R \sin(\vec{\omega}, \vec{R}).$$

Связь между угловым и линейным ускорениями точки М следует из определения этих величин:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2.$$

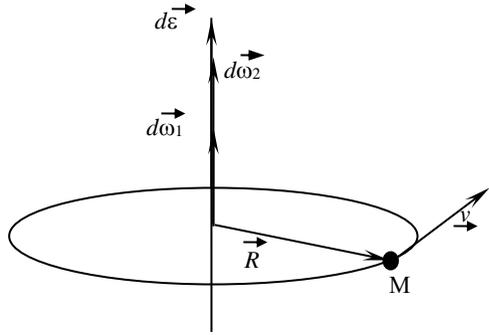


Рисунок 1.9

1.2 Элементы динамики поступательного движения

1.2.1 Основная задача динамики

Динамика – это раздел механики, который изучает движение тел и причины, которые изменяют это движение. В динамике рассматривается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение.

Основная задача динамики состоит в определении положения тела в произвольный момент времени по известному начальному положению, начальной скорости и силам, действующим на тело. При решении *обратной задачи* нужно уметь по закону движения тела определять действующие на него неизвестные силы.

В основе классической (ньютоновской) механики лежат три экспериментальных закона, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. в книге «Математические начала натуральной философии».

1.2.2 Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета

При рассмотрении кинематики использовалась неподвижная система отсчета. Однако в природе не существует абсолютного движения. Всякое движение относительно, и его характер зависит от выбора системы отсчета. В одной системе отсчета тело может покоиться, в другой – двигаться с некоторой скоростью. Возникает вопрос: все ли системы отсчета являются равноправными, а если нет, то какие являются предпочтительными? Единственное и естественное требование к системе отсчета состоит в том, что ее выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел, т.е. законы движения в выбранной системе отсчета должны иметь наиболее простой вид. В частности, в такой системе должны оставаться неизменными свойства пространства и времени: пространство должно быть однородным и изотропным, а время однородным. Однородность пространства и времени означает, что наблюдаемые физические свойства и явления должны быть одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени. Не существует выделенных в каком-либо отношении точек пространства и моментов времени. Изотропность пространства означает, что все направления в пространстве равнозначны. Физические явления в замкнутой системе не должны изменяться при ее повороте в пространстве. Система отсчета, которая использовалась до сих пор, отвечала этим требованиям, но возникает вопрос, как ее реализовать, т.е. с какими объектами, реально существующими в природе, можно ее связать. Если связать неподвижную систему координат с некоторым произвольно движущимся объектом, например вагоном поезда, можно заметить, что в данной системе отсчета, например, груз, подвешенный на нити, будет время от времени отклоняться от вертикали, что связано с наличием ускорения вагона при торможении или ускорении. В результате, для описания этих явлений в данной системе координат необходимо рассматривать взаимодействия, внешние по отношению

к системе. Очевидно, что если неподвижную систему координат связать с некоторым объектом, движущимся без ускорения относительно неподвижной системы координат, то при описании механических явлений нет необходимости рассматривать взаимодействия, внешние по отношению к системе, что сделает описание движения гораздо проще. В таких системах отсчета тела находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на них не действуют другие тела или их действие скомпенсировано. Свойство тела сохранять такое состояние называется *инерцией*, и поэтому такие системы отсчета носят название *инерциальных*. Если наряду с выбранной инерциальной системой, рассмотреть другую, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то свободное движение тела в новой системе будет также происходить с постоянной скоростью. Таким образом, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы законы механики. Не существует никакой абсолютной системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам. В этом состоит *принцип относительности Галилея*. Его можно сформулировать и так: никакими механическими (или иными) опытами невозможно установить, движется ли данная инерциальная система или покоится: оба состояния эквивалентны.

Одной из важных инерциальных систем является система отсчёта, начало которой совмещено с центром Солнца, а оси направлены на неподвижные звёзды. Эта система называется *гелиоцентрической* (Гелиос – по-гречески означает Солнце). Земля движется относительно Солнца по криволинейной траектории; кроме того, она вращается вокруг своей оси. Поэтому система отсчёта, связанная с Землёй, неинерциальная. Однако ускорение, с которым движется Земля, настолько мало, что при решении многих задач систему отсчёта, связанную с Землёй, можно считать практически инерциальной.

Первый закон Ньютона отражает свойство инерции, тел и часто называется законом инерции: *существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело (материальная точка) сохраняет скорость постоянной, если на него не действуют другие тела (или их действие компенсируется)*.

Этот закон, как следует из его формулировки, выполняется

только в инерциальных системах отсчета. Кроме того, из него следует, что изменение состояния покоя или равномерного движения связано с наличием в системе ускорения, которое обусловлено действием на данное тело других тел. Поэтому первый закон Ньютона можно сформулировать также и следующим образом: *всякое тело (материальная точка) находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Это утверждение не является очевидным. Его впервые сформулировал Г. Галилей. До этого в течение 2000 лет господствовала точка зрения Аристотеля о том, что тело движется только под действием силы. Если сила постоянна, то движение происходит с постоянной скоростью. Ньютон придал рассуждением Галилея логическую полноту и ясность.

1.2.3 Второй закон Ньютона как уравнение движения.

Масса и импульс

Из первого закона Ньютона следует, что только воздействие на данное тело других тел вызовет изменение его скорости, т.е. сообщит телу ускорение. Опыт показывает, что при воздействии на тело других тел может изменяться либо скорость тела (тело приобретает ускорение), либо форма и размеры тела (тело деформируется), либо возможно одновременно и то, и другое. Воздействие одного физического тела на другое характеризуется физической величиной, называемой *силой*.

Сила – это векторная физическая величина, измеряющая и описывающая воздействие одного тела на другое.

Основными характеристиками силы, как всякой векторной величины, являются её модуль, точка приложения и направление в пространстве. Прямая, проведенная через точку приложения силы в направлении действия этой силы, называется *линией действия силы*.

На основе обобщения большого числа экспериментальных данных было установлено, что величина ускорения, полученного телом (материальной точкой), пропорциональна приложенной силе. Но при этом разные тела под влиянием одинаковых сил приобретают разные ускорения. Данный опытный факт есть проявление свойства инерции тела. Свойство тел приобретать определенное ускорение при данном воздействии называется *инертностью*. *Инертность состоит в том, что для изменения скорости тела на заданную величину нужно, чтобы на него действовало другое тело и это*

действие длилось некоторое время. Инертность – это свойство, присущее всем телам.

Масса тела – это физическая величина, являющаяся количественной мерой его инерционных и гравитационных свойств. Способность тела препятствовать изменению скорости при воздействии на него других тел характеризуется инертной массой $m_{ин}$, а его способность создавать гравитационное поле характеризуется гравитационной массой $m_{гр}$. Эти величины являются проявлением разных физических свойств тела и поэтому не обязательно должны быть одинаковы. На основании проведенных экспериментов было установлено, что со степенью точности, определяемой соотношением $\frac{m_{гг} - m_{ад}}{m_{гг}} \approx 10^{-12}$, инертная и гравитационная масса равны друг другу.

В механике Ньютона масса рассматривается как аддитивная и неизменная величина. Аддитивность массы заключается в том, что масса сложного объекта равна сумме масс составляющих его частей. Неизменность массы предполагает, что она не зависит от скорости тела. Опытным путем установлено соотношение, которое выражает *второй закон Ньютона*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1.33)$$

Ускорение тела (материальной точки) прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела (материальной точки).

Единицей измерения силы в СИ является ньютон (Н). $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$.

Уравнение (1.33) описывает движение протяженного тела только при условии, что оно не деформируется и движется поступательно. В противном случае ускорение разных точек тела неодинаково и изменение движения одного тела нельзя описать с помощью единого ускорения. Материальная точка по смыслу этого понятия не может ни деформироваться, ни вращаться. Именно для неё это уравнение полностью описывает изменение движения под влиянием силы. Поэтому это уравнение называют *основным уравнением динамики материальной точки*.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько

сил, то их можно заменить одной эквивалентной им силой \vec{F} , равной их геометрической сумме. Эту силу называют *резльтирующей или равнодействующей силой*.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (1.34)$$

Выражение (1.34) называется *принципом сложения сил*. Подставив выражение (1.34) в (1.35) получим

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_i \vec{a}_i, \quad (1.35)$$

где a_i – ускорение материальной точки под действием силы F_i .

Из равенства (1.35) следует *принцип независимости действия сил*: если на материальную точку действуют несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое ускорение, как если бы других сил не было.

Из принципа независимости сил следует более полная формулировка второго закона Ньютона: *ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей всех сил, действующих на тело, обратно пропорционально массе тела и направлено в сторону равнодействующей силы*.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.36)$$

Импульс (количество движения) – векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость. Направление импульса совпадает с направлением скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Единица импульса тела в СИ – $1 \frac{\hat{e}\vec{a} \cdot \hat{i}}{\hat{n}}$.

Используя понятие импульса, можно дать наиболее общую формулировку основному уравнению динамики материальной точки (1.33):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.37)$$

При выводе соотношения (1.37) учтено, что масса материальной точки в классической механике постоянна и её можно внести под

знак производной. Получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.38)$$

Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе. Выражение (1.38) является более общей формулировкой второго закона Ньютона и называется также *уравнением движения материальной точки.*

Можно выражение (1.39) переписать в виде

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \quad (1.39)$$

Произведение $d\vec{F}dt$ называется импульсом силы. Таким образом, из выражения (1.39) следует, что *изменение импульса материальной точки равно импульсу силы.*

1.2.4 Третий закон Ньютона

Характер взаимодействия между телами (материальными точками) определяется **третьим законом Ньютона:**

Всякое действие тел (материальных точек) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.40)$$

Здесь \vec{F}_{12} – сила, действующая на первое тело со стороны второго; \vec{F}_{21} – сила, действующая на второе тело со стороны первого.

Силы \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} приложены к разным телам и не компенсируют друг друга. Силы взаимодействия всегда возникают парами и являются силами одной природы. Законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета.

1.2.5 Силы в природе

Рассмотрим природу взаимодействий и силы, с которыми тела действуют друг на друга. В современной физике различают **четыре**

вида взаимодействий: гравитационное; электромагнитное; сильное, или ядерное (связь частиц в атомном ядре) и слабое (например, в процессах с участием нейтрино).

Гравитационное взаимодействие является универсальным и связывает все массивные тела. Интенсивность его мала по сравнению с другими видами взаимодействий, но радиус действия практически бесконечен, поэтому его эффекты весьма значительны. Это взаимодействие играет существенную роль в мире тел большой массы, в микромире его действие является ничтожно малым. Электромагнитное взаимодействие обуславливает характер взаимодействия между телами, имеющими электрические заряды, и определяет возможность устойчивого существования различных химических элементов и разных веществ. Сильное (ядерное) взаимодействие является наиболее интенсивным из четырех перечисленных взаимодействий. Оно имеет резко ограниченный радиус действия (10^{-13} см) и проявляется только внутри атомных ядер, причем гораздо интенсивнее электромагнитного. Слабое взаимодействие также обладает очень малым радиусом действия, порядка 10^{-18} м, на этих расстояниях оно весьма интенсивно.

Принято считать, что в механических процессах действуют следующие силы: трения, упругости, тяготения. Силы *тяготения* являются по своей природе гравитационными, а силы *упругости* и *трения* – электромагнитными.

1.2.6 Сила всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела

Законы движения планет и их спутников (Н. Коперник, Т. Браге, И. Кеплер), падения тел на Землю, колебаний маятников и т.д. свидетельствуют о существовании сил взаимного притяжения тел друг к другу. В 1687 г. Ньютон на основании уже обнаруженных к тому времени на опыте законов движения планет (законов Кеплера) сформулировал *закон всемирного тяготения*:

Между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1.41)$$

где M, m – массы материальных точек, r – расстояние между ними.

Эта сила называется гравитационной (или силой всемирного тяготения). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной, или постоянной тяготения. Постоянная в уравнении (1.41) была впервые определена экспериментально в 1798 г. английским физиком Г. Кавендишем. Ее численное значение очень мало и равно $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Это значит, что с силой столь малой величины притягиваются друг к другу два точечных тела массой в 1 кг каждое, находящееся на расстоянии 1 м друг от друга. В векторной форме закон (1.41) запишется следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{Mm}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}, \quad (1.42)$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; \vec{e}_{12} – единичный вектор, соединяющий первую точку со второй; r_{12} – расстояние между точками.

Следует отметить, что закон всемирного тяготения в виде (1.42) можно применять не только для тел, принимаемых за материальные точки, но и в следующих случаях:

а) оба тела имеют шарообразную форму, а их плотности зависят только от расстояний до центров этих тел;

б) одно тело имеет ничтожно малые размеры по сравнению со вторым, распределение масс в котором сферически симметрично.

Для нахождения сил взаимного тяготения двух тел произвольной формы мысленно разобьем их на большое число малых частей, чтобы каждую из них можно было считать материальной точкой. Если масса i -й точки первого тела m_i , а k -й точки второго тела m_k , то силу \vec{F}_{ik} тяготения первой точки ко второй можно найти по формуле

$$\vec{F}_{ik} = G \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} \vec{e}_{ik},$$

где \vec{e}_{ik} – единичный вектор, имеющий направление от i -й точки к k -й.

Результирующая сила \vec{F}_i сил притяжения i -й точки первого тела

всеми n материальными точками второго тела равна векторной сумме сил:

$$\vec{F}_i = G m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^2} \vec{e}_{ik}.$$

Сила тяготения всего первого тела ко второму равна векторной сумме сил притяжения \vec{F}_i , действующих со стороны всех n_2 материальных точек второго тела на все n_1 материальные точки первого тела:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n_1} \vec{F}_i = G \sum_{i=1}^{n_1} m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^2} \vec{e}_{ik}. \quad (1.43)$$

Для определения силы тяготения к Земле любого тела на её поверхности будем считать, что Земля имеет форму шара, масса которого распределена сферически симметрично. Поэтому силу тяготения можно рассчитать по формуле

$$F = G \frac{M_3 m}{R^2}, \quad (1.44)$$

где m, M_3 – массы тела и Земли, R – расстояние от тела до центра Земли (размерами любого тела можно пренебречь по сравнению с радиусом Земли). Сила тяготения к Земле каждого находящегося на ней тела направлена к центру Земли.

На основании второго закона Ньютона можно утверждать, что тело под действием этой силы начнет двигаться с ускорением, называемым ускорением свободного падения и обозначаемым

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой m действует сила, называемая *силой тяжести тела*. Обозначим её \vec{P} .

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

где

$$g = G \frac{M_3}{R^2}. \quad (1.45)$$

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси,

то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой. Сила \vec{P} вызывает падение незакрепленного тела на Землю. Движение под действием только одной силы тяжести называют *свободным падением*. Точку приложения силы тяжести тела, т.е. равнодействующей сил тяжести всех частиц тела, называют *центром тяжести тела*. Ускорение свободного падения в данном месте Земли одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от $9,780 \text{ м/с}^2$ на экваторе до $9,832 \text{ м/с}^2$ на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси и сплюснутостью Земли. Если тело расположено на высоте h от поверхности Земли, то

$$g = G \frac{M_{\text{с}}}{(R+h)^2} \quad (1.46)$$

Из формулы (1.46) следует:

– ускорение свободно падающего тела не зависит от массы, размеров и других характеристик тела, поэтому все тела падают в безвоздушном пространстве с одинаковыми ускорениями;

– при удалении от поверхности Земли ускорение свободного падения уменьшается (с подъемом на 1 км уменьшается приблизительно на 0,03 %).

Весом тела называется сила Q , с которой оно действует вследствие тяготения к Земле на опору (или подвес), удерживающие его от свободного падения. Если опора или подвес неподвижны относительно системы отсчета, в которой определяется вес тела, то по третьему закону Ньютона вес тела и сила тяжести равны:

$$\vec{Q} = \vec{P} = m \vec{g}.$$

Эти силы совпадают по величине и направлению только в случае, если опора или подвес неподвижны. Кроме того, они приложены к разным телам и имеют разную природу: сила тяжести – гравитационную, а вес – упругую. Сила тяжести всегда равна $m \vec{g}$, вес тела зависит от ускорения, с которым движется опора и тело (рисунок 1.10). Вес может быть больше, меньше силы тяжести и равен нулю. Это положение можно пояснить на примере. Предположим, что тело и подвес движутся в вертикальном направлении.

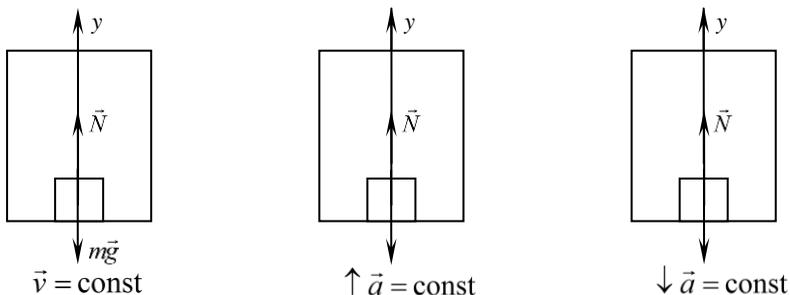


Рисунок 1.10

Запишем уравнение движения тела в векторном виде:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}.$$

По третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{Q}$. Запишем уравнение в проекции на ось координат Oy :

– для первого случая: $mg = N \Rightarrow Q = N = mg$;

– для второго случая:

$$ma = N - mg \Rightarrow N = m(g + a) \Rightarrow Q = N > mg - \text{перегрузка};$$

– для третьего случая:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}; \quad ma = N - mg \Rightarrow N = m(g - a) \Rightarrow Q = N < mg.$$

Если $a = g \Rightarrow Q = N = 0$ – невесомость.

Движение, при котором вес тела равен нулю, называется *состоянием невесомости*. Все свободно падающие тела находятся в состоянии невесомости.

1.2.7 Упругие силы

Сила, действующая со стороны одного тела на другое, может изменять скорость движения тела или приводить к изменению его формы и объема, то есть к деформации тела. Что происходит в действительности при приложении силы – ускорение тела или его деформация – определяется самими свойствами тела. Деформация тела приводит к смещению его частиц из первоначальных положений равновесия в новые. Силы взаимодействия между частицами этому смещению препятствуют. В деформированном теле возникают внутренние *упругие силы*, уравнивающие внешние силы,

вызывающие деформацию. Свойства тела определяют характер деформации, которая может быть упругой и неупругой (пластической или остаточной). *Пластическая деформация* – деформация, которая не исчезает в теле после прекращения действия вызвавших её внешних сил. С неупругой деформацией связано необратимая перестройка внутренней структуры тела. Форма тела не восстанавливается, изменяется внутренняя энергия тела. *Упругая деформация* – деформация, которая исчезает после прекращения действия вызвавших её внешних сил. Тело принимает свои первоначальные размеры и форму, внутренняя энергия тела не меняется.

Выделяют следующие виды упругих деформаций: растяжение или сжатие; изгиб; сдвиг; кручение.

В теории упругости доказывается, что все виды деформации могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига. Рассмотрим деформацию одноосного растяжения-сжатия. Пусть однородный стержень длиной l и площадью поперечного сечения S закреплен одним концом, а к другому приложена сила F , направленная вдоль его оси, в результате чего его длина меняется на величину Δl . Как показывает опыт, для малых деформаций упругая сила пропорциональна созданной в теле деформации. Соответствующий закон называется *законом Гука*:

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l, \quad (1.47)$$

где k (Н/м) – коэффициент пропорциональности (жесткость пружины), $\Delta l = (l - l_0)$ – величина деформации тела (абсолютное удлинение). Если $\Delta l > 0$, то имеет место деформация растяжения тела, $\Delta l < 0$ – сжатия.

Закон Гука можно сформулировать в другом виде. Введем величину напряжения.

Напряжение – скалярная физическая величина, численно равная упругой силе, действующей на единицу площади поперечного сечения тела:

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}. \quad (1.48)$$

Единицей напряжения в системе СИ является паскаль (1 Па = 1 Н/1 м²).

Количественной мерой, характеризующей степень деформации

тела, является относительная деформация (относительное удлинение):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Английский физик Р. Гук экспериментально установил, что для *малых деформаций*, относительное удлинение ε и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.49)$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем Юнга. Модуль Юнга – величина, зависящая от природы материала.

Можно показать связь двух формулировок закона Гука. Подставим в формулу (1.49) выражения для ε и σ :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}; \quad F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l.$$

Получим
$$k = \frac{ES}{l}. \quad (1.50)$$

Используя формулу (1.49), по экспериментальным значениям относительного удлинения ε можно вычислить соответствующие им значения нормального напряжения σ , возникающего в деформированном теле, и построить график зависимости σ от ε . Этот график называют *диаграммой растяжения*. Подобный график

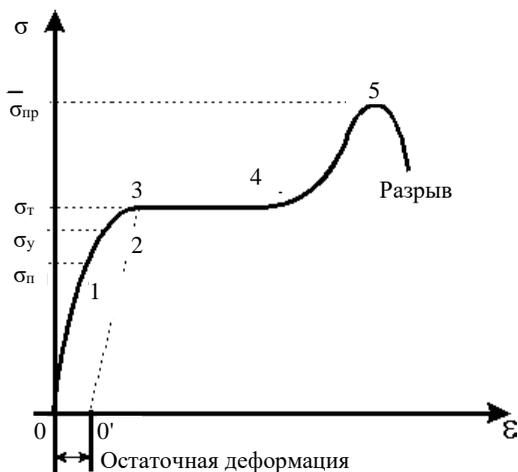


Рисунок 1.11

для металлического образца изображен на рисунке 1.11. На участке 0–1 график имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Это значит, что до определенного значения напряжения деформация является упругой и выполняется закон Гука, т. е. нормальное напряжение пропорционально относительному

удлинению. Максимальное значение нормального напряжения $\sigma_{п}$, при котором еще выполняется закон Гука, называют *пределом пропорциональности*. При дальнейшем увеличении нагрузки зависимость напряжения от относительного удлинения становится нелинейной (участок 1–2), хотя упругие свойства тела еще сохраняются. Максимальное значение $\sigma_{у}$ нормального напряжения, при котором еще не возникает остаточная деформация, называют *пределом упругости*. (Предел упругости лишь на сотые доли процента превышает предел пропорциональности.) Увеличение нагрузки выше предела упругости (участок 2–3) приводит к тому, что деформация становится остаточной. Затем образец начинает удлиняться практически при постоянном напряжении (участок 3–4 графика). Это явление называют текучестью материала. Нормальное напряжение $\sigma_{т}$, при котором остаточная деформация достигает заданного значения, называют *пределом текучести*. При напряжениях, превышающих предел текучести, упругие свойства тела в известной мере восстанавливаются, и оно вновь начинает сопротивляться деформации (участок 4–5 графика). Максимальное значение нормального напряжения $\sigma_{пр}$, при превышении которого происходит разрыв образца, называют *пределом прочности*.

Деформацией сдвига называют такую деформацию твердого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, смещаются параллельно друг другу. При этом не происходит изменения формы и размеров данных слоев. Сдвиг происходит под действием некоторой касательной силы, которая параллельна плоскости сдвига (рисунок 1.12).

Деформация сдвига характеризуется величиной *относительной деформации сдвига*, выраженной в радианах. Относительная деформация сдвига при

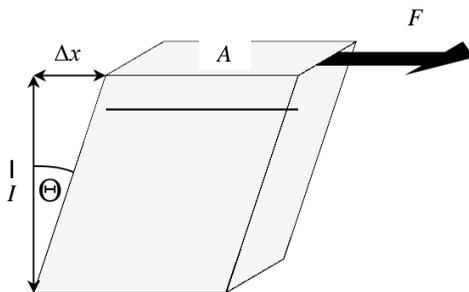


Рисунок 1.12

малом сдвиге (см. рисунок 1.12) определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\theta \approx \theta = \frac{\Delta x}{l}, \quad (1.51)$$

где Δx – абсолютный сдвиг параллельных слоёв тела относительно друг друга; l – расстояние между слоями; θ – угол сдвига, или относительный сдвиг (для малых углов ($\operatorname{tg}\theta \approx \theta$)).

Для деформации сдвига закон Гука формулируется следующим образом: относительный сдвиг пропорционален касательному напряжению

$$\sigma_{\tau} = G\theta, \quad (1.52)$$

где $\sigma_{\tau} = \frac{F}{S}$ – касательное напряжение, S – площадь грани А, G – модуль сдвига. Модуль сдвига равен касательному напряжению, которое возникло бы в теле при относительном сдвиге, равном единице.

Деформацией кручения называется такой вид деформации, который возникает в теле, если к нему прикладывается нагрузка в виде пары сил (момента) в его поперечной плоскости (рисунок 1.13).

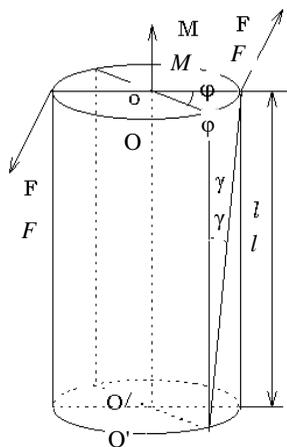


Рисунок 1.13

При кручении отдельные слои тела остаются параллельными, но поворачиваются относительно друг друга на некоторый угол. При этом в поперечных сечениях тела возникает крутящий момент M . Под действием этого крутящего момента все поперечные сечения стержня поворачиваются вокруг оси OO' на некоторый угол ϕ тем больший, чем дальше эти сечения расположены от сечения, закрепленного неподвижно. Этот угол называется углом кручения. В результате деформации кручения возникает сдвиг образующих цилиндрических

поверхностей на угол γ . Таким образом, деформация кручения является частным случаем деформации сдвига – неравномерным сдвигом. Поэтому расчет деформации кручения может быть сведен к

расчету деформации сдвига. Момент сил M закручивающий на угол φ однородный круглый стержень, имеющий длину l и радиус r может быть рассчитан из уравнения закона Гука для случая кручения

$$M = \frac{\pi G}{2} \frac{r^4}{l} \varphi, \quad (1.53)$$

где G – модуль сдвига для материала стержня. Деформация кручения используется в измерительных приборах, например в крутильных весах, зеркальном гальванометре. Деформации кручения возникают при завинчивании гаек, при работе валов машин.

Деформации изгиба
 подвергается балка, закрепленная с одного конца или закрепленная с двух концов, к середине которой подвешен груз. Деформация изгиба характеризуется стрелой прогиба x – смещением середины балки (рисунок 1.14) или его конца.

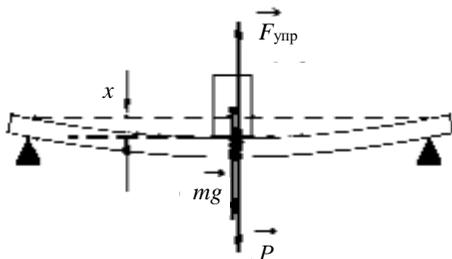


Рисунок 1.14

При изгибе выпуклые части тел испытывают растяжение, а вогнутые – сжатие, средние части тела практически не деформируются. Наличие среднего слоя практически не влияет на сопротивляемость тела изгибу, поэтому детали, подвергающиеся деформации изгиба, выгодно делать полыми (экономия материала и значительное снижение их массы). В современной технике широко используются полые балки, трубки. Закон Гука может быть обобщен и на случай деформации изгиба. В этом случае упругая сила пропорциональна стреле прогиба стержня, концы которого лежат на двух опорах. Деформацию изгиба можно свести к деформации неравномерного растяжения и сжатия, когда одна сторона подвергается растяжению, а другая – сжатию.

1.2.8 Сила трения

Наряду с силами тяготения и упругими силами существуют силы, обусловленные молекулярными взаимодействиями между соприкасающимися поверхностями тел и зависящие от их скоростей.

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. С механической точки зрения, это можно объяснить существованием некоторой силы, которая препятствует движению. Эта сила получила название **силы трения**. Опыт показывает, что сила трения, действующая на тело, направлена в сторону, противоположную его скорости и приложена по касательной к соприкасающимся поверхностям. Сила трения возникает не только между соприкасающимися твердыми телами, но и между твердым телом и жидкостью или твердым телом и газом. Природа этих сил может быть различной, но в результате их действия всегда происходит превращение механической энергии во внутреннюю энергию трущихся тел, т.е. в энергию теплового движения их частиц.

Принято различать внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение.

Внешним (сухим) трением называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны относительно друг друга, то возникает трение покоя (статическое трение), если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения возникает трение скольжения или трение качения (кинематическое трение). Таким образом, различают три вида сухого трения: трение покоя, трение скольжения, трение качения.

Внутренним (жидким или вязким) трением называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. Трение, возникающее между скользящими относительно друг друга телами, разделенными прослойкой вязкой жидкости (смазки) называется *гидродинамическим трением*.

Рассмотрим некоторые закономерности внешнего трения. Оно обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей, а в случае очень гладких поверхностей обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

Если приложить к лежащему на плоскости телу горизонтальную

силу \vec{F} , но тело при этом будет сохранять состояние покоя (неподвижно относительно поверхности, на которой оно находится), то в соответствии со вторым законом Ньютона это означает, что на тело одновременно действует сила, равная по величине и противоположная по направлению приложенной силе. Эта сила, препятствующая началу движения, называется *силой трения покоя*. Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила \vec{F} будет больше силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр. покоя}}$.

Сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению внешней действующей силе:

$$\vec{F}_{\text{тр. покоя}} = -\vec{F}. \quad (1.54)$$

Когда приложенная сила \vec{F} будет больше силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр. покоя}}$, тело придет в движение и возникнет сила трения скольжения. Французские физики Г. Амонтон (1663–1705) и Ш. Кулон (1736–1806) опытным путем установили следующий закон: *Сила трения скольжения*, а также максимальная сила трения покоя пропорциональна силе N нормального давления тела на опору и не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (1.55)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от формы и состояния соприкасающихся поверхностей, а также от скорости движения, μ – безразмерная величина. N может быть обусловлена весом тела или другими причинами. (Понятие коэффициента трения было введено в 1508 году Леонардо да Винчи).

Коэффициент трения зависит от большого числа факторов, характеризующих состояние трущихся поверхностей. В общем случае он состоит из двух составляющих: молекулярной составляющей $\mu_{\text{мол}}$, определяемой силами межмолекулярного притяжения соприкасающихся поверхностей, и деформационной составляющей $\mu_{\text{деф}}$, зависящей от шероховатости поверхности:

$$\mu = \mu_{\text{мол}} + \mu_{\text{деф}}.$$

Для окисленных чистых физико-химических поверхностей (в

реальных условиях на поверхности твёрдых тел всегда присутствуют окислы в виде тонких плёнок) $\mu = 0,4 \dots 0,8$. Для гидродинамического трения (на поверхности имеются молекулы воды или даже различные виды смазки) $\mu = 0,01 \dots 0,2$.

Силы трения играют большую роль в природе и технике. Благодаря наличию силы статического трения возможно движение по поверхности Земли различных видов транспорта, ходьба и бег, а также действие ременных передач, ленточных транспортеров, скрепление деталей с помощью гвоздей и винтов. В ряде случаев роль трения в технике отрицательна, и принимаются меры к тому, чтобы его ослабить. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку, тем самым заменяя внешнее трение твердых тел внутренним трением в жидкости, которое в несколько раз меньше внешнего. Одним из способов уменьшения трения является замена трения скольжения трением качения, которое возникает, например, между шарообразным или цилиндрическим телом, катящимся по плоской или изогнутой поверхности.

Закон для силы трения качения был установлен Ш. Кулоном опытным путем: *сила трения качения* обратно пропорциональна радиусу катящегося тела и определяется по формуле

$$F_{\text{тр.кач}} = \mu_{\text{к}} \frac{N}{r}, \quad (1.56)$$

где r – радиус катящегося тела, $\mu_{\text{к}}$ – коэффициент трения качения. Коэффициент трения качения значительно меньше коэффициента трения скольжения. Единицами измерения $\mu_{\text{к}}$ в системе СИ являются метры (м).

1.2.9 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Законы Ньютона выполняются во всех инерциальных системах отсчёта. В ряде практически важных случаев возникает необходимость описать движение тел в системе отсчёта, которая не является инерциальной. Системы отсчета, которые движутся с ускорением относительно инерциальных систем отсчета, называются **неинерциальными**. Пусть \vec{a}_1 – ускорение тела относительно инерциальной системы отсчёта, \vec{a}_2 – ускорение неинерциальной

системы отсчёта относительно инерциальной системы отсчёта, \vec{a} – ускорение тела относительно инерциальной системы отсчёта. Можно показать:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \quad (1.57)$$

В любой инерциальной системе отсчёта справедлив второй закон Ньютона, следовательно, формулу (1.57) можем записать так:

откуда

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad (1.58)$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_2.$$

Анализ формулы (1.58) показывает, что даже при $\vec{F} = 0$ в неинерциальной системе отсчёта тело движется с ускорением $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, т. е. тело ведёт себя так, как если бы на него действовала некоторая сила. Эта сила называется силой инерции.

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_2. \quad (1.59)$$

Она направлена в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы отсчёта.

Умножим обе части уравнения (1.58) на массу m :

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_2. \quad (1.60)$$

С учетом (1.59), формулу (1.60) можно записать так:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}},$$

где $\vec{F}_{\text{ин}}$ – фиктивная сила, обусловленная выбором системы отсчёта. Фиктивной она называется потому, что отсутствуют тела, взаимодействием данного тела с которыми была бы обусловлена эта сила.

В неинерциальных системах отсчета в общем случае следует рассматривать проявления **сил инерции**:

- 1) при ускоренном поступательном движении системы отсчета;
- 2) действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета;
- 3) действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

Рассмотрим *силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.*

Возьмем тележку с укрепленным на ней кронштейном, к которому подвешен на нити шарик (рисунок 1.15). Пока тележка покоится или движется без ускорения, нить расположена вертикально и сила тяжести \vec{P} равна по модулю и противоположна по направлению силе натяжения нити \vec{T} , их результирующая равна нулю. Если привести тележку в

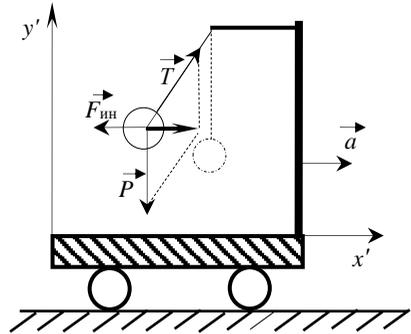


Рисунок 1.15

поступательное движение с ускорением \vec{a} , то нить отклонится от вертикали на такой угол, чтобы результирующая сил \vec{T} и \vec{P} сообщала шарiku ускорение, равное \vec{a} . Относительно системы отсчёта, связанной с тележкой, которая движется с ускорением \vec{a} , шарик покоится, несмотря на то, что результирующая сил \vec{P} и \vec{T} отлична от нуля. Отсутствие ускорения шарика по отношению к этой системе отсчёта можно формально объяснить тем, что кроме сил \vec{T} и \vec{P} , равных в сумме $m\vec{a}$ на шарик действует еще сила,

названная силой инерции, которая противоположна результирующей силе, действующей на шарик, и равна ей по модулю:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}. \quad (1.61)$$

Рассмотрим механизм возникновения *силы инерции, действующей на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета*, на примере движения диска, вращающийся вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω (рисунок 1.16). Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединённый с центром диска пружиной. Центробежное ускорение сообщает шарiku сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, равная произведению массы шарика m на его центробежное (нормальное) ускорение:

$$a_n = \omega^2 R,$$

где R – радиус-вектор, проведённый к шарик из центра диска. Сила упругости направлена по радиус-вектору к центру диска.

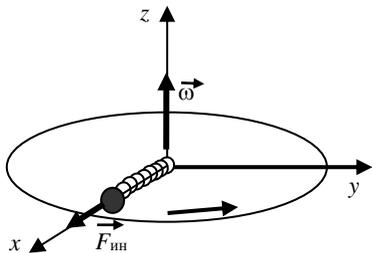


Рисунок 1.16

Проекция силы упругости на ось Ox

$$F_{упр,x} = -m\omega^2 R.$$

Относительно системы отсчёта, связанной с диском, шарик покоится. Это можно формально объяснить тем, что, кроме силы упругости на шарик действует сила

инерции, направленная вдоль радиуса от центра диска.

$$F_{ин,x} = m\omega^2 R.$$

Силу инерции, возникающую во вращающейся (по отношению к инерциальным системам) системе отсчёта, называют центробежной силой инерции:

$$F_{цб} = m\omega^2 R. \quad (1.62)$$

Эта сила действует на тело во вращающейся системе отсчёта, независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно неё с некоторой скоростью.

При движении тела относительно вращающейся системы отсчёта, кроме центробежной силы инерции, появляется ещё одна сила инерции, называемая *силой Кориолиса* или *кориолисовой силой инерции*. Кориолис (1792–1843) – французский математик, механик. Появление кориолисовой силы (рисунок 1.17) можно обнаружить на следующем примере.

Возьмём горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую OA . Запустим в направлении от O к A шарик со скоростью \vec{v}' . Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной прямой. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по штрихованной кривой OB , причём его скорость, относительно диска \vec{v}' будет изменять своё направление. Следовательно, по отношению к

вращающейся системе отсчёта шарик ведёт себя так, как если бы на него действовала сила \vec{F}_K , перпендикулярная к скорости \vec{v}' . Эта сила называется силой Кориолиса.

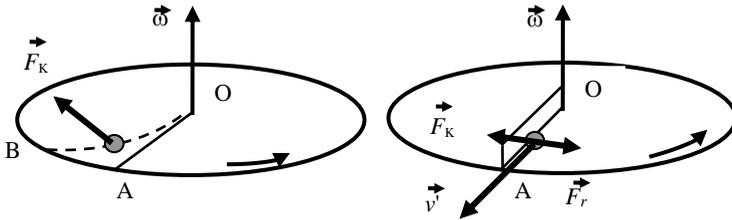


Рисунок 1.17

Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую в виде ребра OA. При движении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой \vec{F}_r . Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно формально объяснить тем, что сила \vec{F}_r уравнивается приложенной к шарикку силой инерции \vec{F}_K , перпендикулярной скорости \vec{v}' .

Силу Кориолиса можно представить с помощью векторного произведения

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]. \quad (1.63)$$

При $\vec{v}' = 0$ эта сила отсутствует. Она действует только на движущиеся тела. Из (1.63) можно получить выражение для определения Кориолисова ускорения:

$$\vec{a}_K = 2[\vec{v}', \vec{\omega}].$$

Примеры проявления силы Кориолиса:

1 При свободном падении тел сила Кориолиса обуславливает их отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

2 При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу – в южном.

При стрельбе вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведён в направлении на запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведён в восточном направлении.

3 Сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся вдоль меридиана в любом направлении (на север или на юг), направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево – в южном полушарии. Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег – в северном полушарии и левый берег в южном полушарии, происходит неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении, проходит движение маятника Фуко.

С учетом вышесказанного, основной закон динамики для неинерциальных систем отсчёта можно записать в следующем виде:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_к. \quad (1.64)$$

Особенности сил инерции:

1 Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойством самих неинерциальных систем, их ускоренным движением. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется.

2 Силы инерции существуют только в неинерциальных системах отсчёта. В инерциальных системах отсчёта сил инерции вообще нет, и понятие «сила» в этих системах применяется только в ньютоновском смысле как мера взаимодействия тел.

3 Для любого из тел, находящегося в неинерциальных системах отсчёта, силы инерции являются внешними; следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах отсчёта не выполняются законы сохранения количества движения, энергии и момента количества движения.

4 Все силы инерции подобны силам тяготения. Они пропорциональны массе тел. Поэтому в однородном поле сил инерции *все тела* движутся с одним и тем же ускорением независимо от массы. В связи с этим существует *принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции*: все физические явления в однородном поле тяготения происходят так же, как и в однородном поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих

точках пространства совпадают, а другие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой для *общей теории относительности*.

Вторая формулировка принципа эквивалентности сил тяготения и сил инерции: движение тела по отношению к неинерциальной системе отсчета эквивалентно его движению относительно инерциальной системы, совершающемуся под влиянием всех реально взаимодействующих с ним тел, а также некоторого дополнительного поля тяготения.

Введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. В принципе любое движение можно всегда рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчёта. Однако практически часто представляет интерес как раз движение тел по отношению к неинерциальным системам отсчёта, например по отношению к земной поверхности. Использование сил инерции даёт возможность решить соответствующую задачу непосредственно по отношению к такой системе отсчёта, что часто оказывается значительно проще, чем рассмотрение движения в инерциальной системе отсчёта.

Рассмотрим действие этой силы на примере вращения Земли и покажем, что сила тяжести $P = mg$ и сила притяжения к Земле F_g тела массой m – это не одно и то же.

Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, т.е. движется с ускорением, то, следовательно, система отсчёта связанная с Землёй, неинерциальная, и в ней должны действовать силы инерции (центробежные силы инерции). Рассмотрим, как центробежная сила инерции влияет на величину ускорения силы тяжести g , т.е. на силу тяжести на разных широтах. Пусть m – масса тела; R – радиус, расстояние от тела до оси вращения Земли; R_3 – радиус Земли; φ – широта местности; ω – угловая скорость вращения Земли.

$$R = R_3 \cos\varphi$$

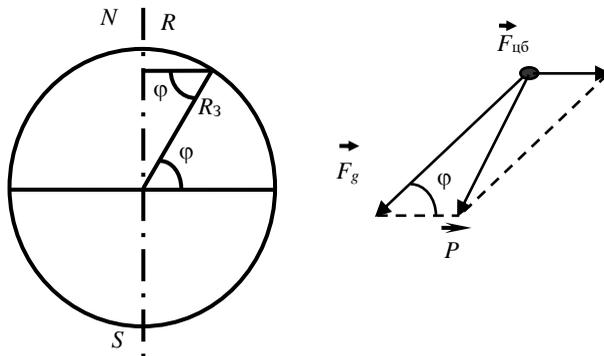


Рисунок 1.18

В неинерциальной системе отсчёта на тело действует центробежная сила инерции

$$F_{цб} = m\omega^2 R_3 \cos \varphi.$$

Сила тяжести определяется действием двух сил: центробежной силой инерции и гравитационной силой:

$$F_g = G \frac{mM_3}{R_3^2}.$$

Результирующая сила

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб}. \quad (1.65)$$

Таким образом, величина ускорения силы тяжести зависит от

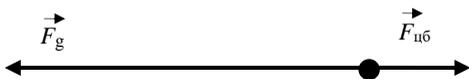


Рисунок 1.19

широты местности. Вектор \vec{g} направлен к центру Земли лишь на полюсах и на экваторе.

На экваторе направления сил F_g и $F_{цб}$ противоположны. С учетом направления сил векторное уравнение (1.65) запишется так:

$$P = F_g - F_{цб}.$$

Оценим отличие на экваторе веса тела P от силы F_g притяжения для тела массой 1 кг:

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R = 1 \text{ кг} \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \right)^2 \cdot 6,410 \cdot 10^6 \text{ м} = 0,035 \text{ Н}.$$

Значение силы тяжести $P = mg = 9,81 \text{ Н}$. В процентном отношении разность между P и F_g составляет

$$\frac{F_{\text{цб}}}{F_g} = \frac{0,035 \text{ Н}}{9,8} \approx 0,0036 = 0,36 \text{ \%}.$$

Направление силы P совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса, или вертикальным направлением. Сила F_g направлена к центру Земли. Следовательно, вертикаль направлена к центру Земли только на полюсах и на экваторе, отклоняясь на промежуточных широтах на некоторый угол. Разность $F_g - P$ равна нулю на полюсах и достигает максимума, равного 0,36 % силы F_g , на экваторе.

1.3 Закон сохранения импульса

1.3.1 Закон сохранения импульса как фундаментальный закон природы

Закон сохранения импульса, в отличие от законов Ньютона, справедлив не только в рамках классической механики. Он принадлежит к числу фундаментальных физических законов, т.к. связан с определенным свойством симметрии пространства – его однородностью. Однородность пространства проявляется в том, что физические свойства замкнутой системы и законы её движения не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета, т.е. не изменяются при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы как целого.

Согласно современным представлениям импульсом могут обладать не только частицы и тела, но также и поля. Например, свет оказывает давление на поверхность отражающего или поглощающего его тела именно потому, что электромагнитное поле световой волны обладает импульсом. Применительно к системам, описываемым классической механикой, закон сохранения импульса можно рассматривать как следствие законов Ньютона. Для вывода этого закона введем несколько понятий.

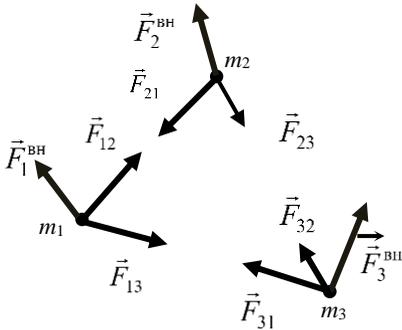


Рисунок 1.20

Механической системой называют совокупность материальных точек, рассматриваемых как единое целое (рисунок 1.20). Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются *внутренними*. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются

внешними. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для i -й материальной точки системы, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i. \quad (1.66)$$

Здесь m_i и v_i – масса и скорость i -й точки, \vec{F}_i – сумма всех действующих на нее сил,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik}, \quad (1.67)$$

где $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на i -ю точку системы; \vec{F}_{ik} – внутренняя сила, действующая на эту точку со стороны k -й.

Для каждой точки системы можно записать уравнения по второму закону Ньютона:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{F}_1^{\text{âí âø}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}; \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{F}_2^{\text{âí âø}} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) &= \vec{F}_n^{\text{âí âø}} + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n,n-1}, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik}. \quad (1.68)$$

Суммируя левые и правые части уравнений (1.68), записанных для всех n материальных точек системы и группируя попарно действующие взаимно силы, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}} + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots + (\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}); \\ \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n (\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki}). \end{aligned} \quad (1.69)$$

По третьему закону Ньютона, силы взаимодействия i -й и k -й точек системы равны по модулю и противоположны по направлению: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, так что $\Rightarrow \vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$ и сумма всех внутренних сил в системе

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik} = 0. \quad (1.70)$$

С учетом равенства уравнение (1.69) примет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}. \quad (1.71)$$

Геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему,

$$\vec{F}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}} \quad (1.72)$$

называется *главным вектором внешних сил*.

Используя свойство производной, левую часть формулы (1.71) запишем как

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.73)$$

где

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{p} \quad (1.74)$$

есть полный импульс механической системы.

Подставляя в равенство (1.71) полученные выражения (1.72), (1.73), получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}. \quad (1.75)$$

Таким образом, второй закон Ньютона для механической системы можно сформулировать следующим образом: *производная по времени от импульса механической системы равна сумме внешних сил, действующих на систему*, или: *скорость изменения импульса механической системы тел равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.*

Рассматривая замкнутую систему, т.е. $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$, выражение (1.75) можем записать так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \quad (1.76)$$

С учетом равенства (1.73) выражение (1.76) запишем в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i) = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v} = \text{const}. \quad (1.77)$$

Это выражение является *законом сохранения импульса: импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.*

1.3.2 Центр масс (центр инерции) механической системы и закон его движения. Система центра масс

В классической механике Галилея – Ньютона импульс системы материальных точек может быть выражен в системе её центра масс.

Центром масс (или центром инерции) системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует распределение масс этой системы. Ее радиус-вектор

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (1.78)$$

где m_i и \vec{r}_i – масса и радиус-вектор i -й материальной точки; n – число материальных точек системы;

$m = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса системы.

Скорость центра масс определим следующим образом:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}. \quad (1.79)$$

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad - \text{импульс системы,}$$

можно написать

$$\vec{p}_c = m \vec{v}_c, \quad (1.80)$$

т. е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (1.80) в уравнение (1.75), получим

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_c)}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} \quad (1.81)$$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внеш}}, \quad (1.82)$$

где a_c – ускорение центра масс (центра инерции) системы.

Таким образом, центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, действующих на систему. Уравнение (1.82) представляет собой *закон движения центра масс* системы, которое позволяет описать движение центра

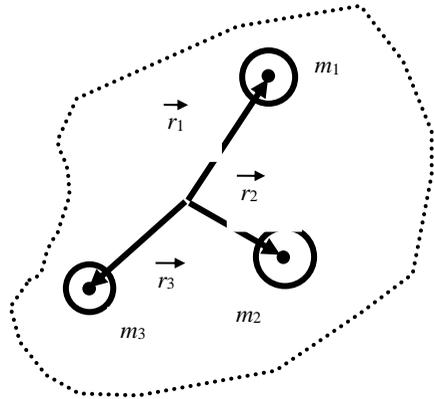


Рисунок 1.21

масс любой сложной системы при наличии любого количества сил.

Это уравнение называют еще *основным уравнением динамики поступательного движения твёрдого тела*, т.к. поступательное движение любого твердого тела можно рассматривать как поступательное движение его центра масс со скоростью v_c .

Если главный вектор внешних сил, приложенных к системе, равен нулю, т.е. система является замкнутой, то из (1.82) следует, что её центр масс либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным ($a_c = 0$).

Уравнение (1.82) означает также, что внутренние силы не могут изменить импульса системы тел, или, если на систему не действуют внешние силы, то её импульс остаётся постоянным:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = \text{const.} \quad (1.83)$$

1.3.3 Реактивное движение

В ньютоновской механике считается, что масса тела не зависит от его скорости. Однако не всегда при движении тела его масса остается постоянной. Она может изменяться за счет обмена веществом между телом и внешней средой, т. е. вследствие изменения состава движущегося тела. Например, масса вращающейся катушки с кабелем увеличивается или уменьшается в зависимости от того, наматывается на нее кабель или сматывается. Типичным примером движения тела переменной массы может служить полет ракеты на активном участке ее траектории, т. е. в процессе работы установленного на ней двигателя. Если система выбрасывает часть своей массы в каком-то определенном направлении, то она получает количество движения в противоположном направлении. В этом заключается *физическая сущность принципа реактивного движения, который лежит в основе ракетной техники*. Продукты сгорания запасенного в ракете топлива выбрасываются через сопло двигателя, и масса ракеты постепенно уменьшается. Основное уравнение динамики материальной точки (а также поступательно движущегося тела) переменной массы впервые было получено профессором Петербургского университета И. В. Мещерским (1897).

Опишем движение тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени t масса ракеты m , а её скорость \vec{v} , то через промежуток времени dt вследствие истечения газов масса ракеты уменьшится и станет равной $m - dm$, а скорость станет $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение массы и скорости ракеты произошло вследствие истечения газа массой dm со скоростью \vec{u} относительно ракеты. Тогда изменение импульса ракеты можно найти:

$$d\vec{p} = [((m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u}))] - m\vec{v}. \quad (1.84)$$

Выполнив ряд преобразований, получим

$$d\vec{p} = (m\vec{v} - \vec{v}dm + md\vec{v} - dmd\vec{v} + \vec{v}dm + \vec{u}dm) - m\vec{v}. \quad (1.85)$$

Приведя подобные и пренебрегая четвертым слагаемым в правой части этого уравнения ввиду того, что он является малым высшего порядка малости по сравнению с остальными членами, получим

$$d\vec{p} = md\vec{v} + \vec{u}dm. \quad (1.86)$$

Учитывая соотношение (1.75), уравнение (1.81) запишем в виде

$$md\vec{v} = \vec{F}^{\text{внеш}} dt - \vec{u}dm, \quad (1.87)$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} - \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (1.88)$$

Уравнение (1.88) описывает поступательное движение тела переменной массы и получило название *уравнения Мещерского*.

Величину $-\vec{u} \frac{dm}{dt}$, входящую в уравнение (1.88), называют реактивной силой и обозначают \vec{F}_p . *Реактивная сила* характеризует механическое действие на тело отделяющихся от него или присоединяющихся к нему частиц (например, действие на ракету вытекающей из нее струи газов). С учетом этого обозначения уравнение (1.88) в общем случае может быть записано так:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{F}_p, \text{ или } m\vec{a} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{F}_p. \quad (1.89)$$

Если вектора \vec{v} и \vec{u} совпадают по направлению, то ракета тормозится, а если противоположны, то ускоряется.

Идеи И. В. Мещерского в дальнейшем были развиты Н. И. Кибальчицем и К. Э. Циолковским и касались использования реактивной силы для создания летательных аппаратов и легли в основу реактивного движения.

Для запуска искусственных спутников Земли и космических кораблей применяют специальные ракеты-носители. На их борту находятся топливо и окислитель, которые необходимы для работы жидкостного реактивного двигателя. По мере работы двигателя масса ракеты уменьшается. Если не учитывать действия на ракету гравитационного поля и силы сопротивления воздуха, т.е. если на тело не действуют никакие внешние силы ($\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$) из соотношений (1.89) получим

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u} \frac{dm}{dt}.$$

Полагая, что начальная скорость ракеты равна нулю и ракета движется прямолинейно в направлении, противоположном относительной скорости \vec{u} струи газа на выходе из сопла двигателя, запишем:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}. \quad (1.90)$$

При постоянном режиме работы двигателя ракеты $u = \text{const}$, зависимость скорости ракеты от её массы имеет вид

$$v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C. \quad (1.91)$$

Значение постоянной интегрирования определим из начальных условий. Если в начальный момент скорость ракеты была равна нулю, а её масса m_0 , то $C = u \ln m_0$. Формула (1.91) окончательно запишется в виде

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (1.92)$$

Формула (1.92) называется формулой Циолковского. Она показывает, что чем больше:

– полезная нагрузка, тем больше должна быть начальная масса ракеты;

– скорость истечения газов, тем больше может быть полезная нагрузка при данной массе ракеты.

Для того чтобы стать спутником Земли, ракета должна развить первую космическую скорость – 7,9 км/с, а чтобы стать спутником Солнца – вторую космическую скорость – 11,2 км/с.

Из равенства (1.92) следует, что максимальная скорость, развиваемая ракетой в отсутствии силового воздействия, равна её скорости в момент окончания работы двигателя из-за использования всего запаса топлива и окислителя:

$$v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_m} = u \ln \frac{1}{1 - \frac{m_T}{m_0}},$$

или

$$v_{\max} = -u \ln \left(1 - \frac{m_T}{m_0} \right), \quad (1.93)$$

где m_0 – стартовая масса всей ракеты; m_T – начальная масса топлива и окислителя; v_{\max} – характеристическая скорость. Для увеличения характеристической скорости надо увеличивать относительную скорость истечения продуктов сгорания u и относительную массу

топлива и окислителя $\frac{m_T}{m_0}$. Максимальное значение u для

реактивных двигателей, работающих на жидких топливах, не более

3,5–5 км/с. Отношение $\frac{m_T}{m_0} = 1 - \frac{m_k}{m_0} - \frac{m_{\text{п}}}{m_0} < 1 - \frac{m_k}{m_0}$, где m_k –

масса конструкции; $m_{\text{п}}$ – масса полезного груза (спутника или корабля); $\frac{m_k}{m_0}$ – лимитируется прочностью и плотностью имеющихся

материалов.

Расчеты показывают, что на современном уровне техники ракета не может развить даже первую космическую скорость. Выход был найден К. Э. Циолковским, предложившим идею многоступенчатой ракеты. Многоступенчатая ракета состоит из нескольких соединенных между собой ракет (ступеней), каждая из которых имеет свой двигатель и несет в себе запас топлива и окислителя.

После выгорания всего топлива, имеющегося в первой ступени, происходит автоматическое включение двигателя второй ступени и отделение первой ступени от составной ракеты. Так продолжается до последней ступени составной ракеты, несущей на себе полезный груз. Увеличение характеристической скорости многоступенчатой ракеты по сравнению с одноступенчатой, которая имеет ту же стартовую массу и запас топлива и окислителя, связано с уменьшением массы конструкции ракеты по мере выгорания топлива.

В настоящее время ведутся работы по созданию новых типов ракетных двигателей, которые отличаются от жидкостных реактивных двигателей, использующих химическую энергию топлива. Рассматриваются два возможных направления разработки. Одно из них связано с возможностью использования атомных ракетных двигателей. В таком двигателе рабочее вещество нагревается в ядерном реакторе, а затем вытекает через сопло ракеты, что значительно повышает скорость истечения u . Вторым направлением разработки является создание ракетного двигателя на основе использования реактивной силы тяги, созданной в результате выбрасывания из двигателя заряженных частиц – ионов, которые разгоняются в электрическом поле. Эти ракетные двигатели получили название ионных.

1.4 Работа и энергия

1.4.1 Работа. Энергия. Мощность

Единой мерой различных форм движения служит физическая величина, называемая **энергией**. Различными формами движения материи соответствуют различные формы энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и др. Формы движения материи в реальных процессах и явлениях могут либо меняться, переходя из одной формы в другую (механическая в тепловую), либо оставаться неизменными. Энергия – универсальная количественная мера взаимодействия и движения всех видов материи.

Энергия механической системы количественно характеризует эту систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений механического движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы как между

собой, так и с внешними (по отношению к системе) телами. Для количественного описания этого процесса между взаимодействующими телами в механике пользуются понятием работы, совершаемой силой.

Работа силы – количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Если тело движется прямолинейно под действием постоянной силы, составляющей некоторый угол α с направлением перемещения

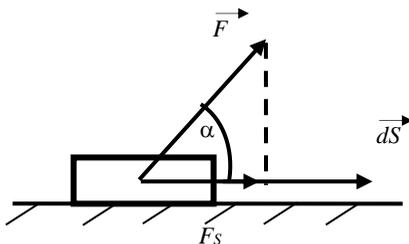


Рисунок 1.22

(рисунок 1.22), то *работой этой силы* называется скалярная величина, определяемая по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \vec{r} \equiv \vec{F} \vec{r} = Fr \cos \alpha = F_r r, \quad (1.94)$$

где $F_r = F \cos \alpha$ – проекция вектора силы \vec{F} на направление вектора перемещения \vec{r} точки приложения силы. В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению. Чтобы найти работу переменной силы, разобьем пройденный путь на большое количество достаточно малых элементов, чтобы их можно было считать прямолинейными, а действующую силу в любой точке данного элемента – постоянной. Введем понятие элементарной работы: элементарной работой силы \vec{F} при перемещении тела $d\vec{r}$ называется скалярная величина

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha = F_r dr.$$

В общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом какой-либо функции координат, поэтому математически верно будет применить для элементарной работы символ δA

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha = F_r dr. \quad (1.95)$$

В зависимости от направления приложенной к телу силы и направления перемещения тела работа силы может быть

положительна, отрицательна или равна нулю:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta A > 0; \alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta A < 0; \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow dA = 0.$$

Единица работы в СИ – джоуль (Дж). 1 Дж – работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м (1 Дж = 1 Н·м)

Если на тело действует одновременно несколько сил, результирующая которых $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, то работа, совершаемая

результирующей силой на пути ds , может быть найдена из формулы (1.95) с учетом дистрибутивности скалярного произведения векторов (произведение вектора на сумму нескольких векторов равно сумме произведений вектора на каждый из складываемых векторов, взятых в отдельности):

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \delta A_i. \quad (1.96)$$

Это означает, что работа главного вектора внешних сил равна алгебраической сумме работ, совершаемой каждой из сил в отдельности, или, иначе, равна работе, совершаемой на том же перемещении результирующей силой

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r},$$

где \vec{F} – главный вектор внешних сил, приложенных к телу.

Если в процессе движения тела при его конечном перемещении сила изменялась, то работа переменной силы на всем пути АВ равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу:

$$A = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F dr \cos \alpha = \int_A^B F_r dr. \quad (1.97)$$

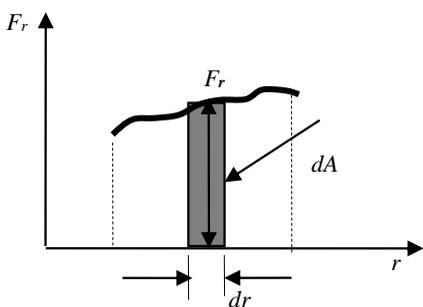


Рисунок 1.23

составляющая некоторый угол α с направлением перемещения, т.е. $F = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$. Работа силы в этом случае может быть определена по формуле

$$A = \int_A^B F dr \cos \alpha = F \cos \alpha \int_A^B dr = Fr \cos \alpha = F_r r. \quad (1.98)$$

Элементарное перемещение в случае равномерного прямолинейного движения можно представить в виде

$$d\vec{r} = \vec{v} dt.$$

Тогда выражение для элементарной работы будет иметь вид

$$\delta A = \vec{F} \vec{v} dt.$$

Работа, совершаемая за промежуток времени от t_1 до t_2 , может быть вычислена по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt. \quad (1.99)$$

Для характеристики работы, совершаемой силой за единицу времени, в механике вводится понятие мощности.

Мощность есть скалярная физическая величина, равная отношению работы δA , к промежутку времени dt , за который она совершена:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (1.100)$$

Для вычисления интеграла (1.97) надо знать зависимость F_r от dr вдоль траектории. Если эта зависимость представлена графически, то искомая работа определяется заштрихованной на графике площадью (рисунок 1.23).

Если тело движется прямолинейно на участке траектории АВ и на него действует постоянная сила F ,

Если тело движется с постоянной скоростью \vec{v} под действием постоянной силы \vec{F} , то мощность

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F_r dr}{dt} = F_r v = \vec{F}\vec{v}.$$

Единица мощности – ватт (Вт). 1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

1.4.2 Консервативные силы

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других сил, то говорят, что она находится в поле сил.

Силу, действующую на материальную точку, называют *консервативной*, если работа, совершаемая этой силой при перемещении материальной точки из одной точки пространства в другую, не зависит от формы траектории, а только от начального и конечного положений точки.

Силу, действующую на материальную точку, называют *неконсервативной (диссипативной)*, если работа, совершаемая этой силой при перемещении материальной точки из одной точки пространства в другую, зависит от траектории перемещения тела.

Рассмотрим некоторую криволинейную траекторию (рисунок 1.24) по которой тело движется под действием консервативной силы. По свойству консервативных сил

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{12}.$$

Изменение направления движения точки вдоль траектории на противоположное вызывает изменение знака работы консервативной силы:

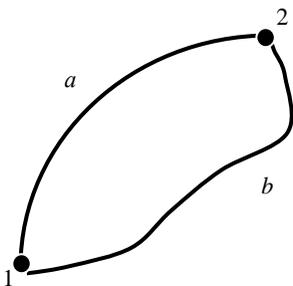


Рисунок 1.24

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}; \quad A_{21} = \int_2^1 \vec{F} (-d\vec{r}) = -\int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -A_{12}.$$

Отсюда следует, что работа по перемещению по замкнутому контуру равна нулю:

$$A = \oint_l \vec{F} d\vec{r} = A_{12} + A_{21} = 0.$$

$$(1.101)$$

Таким образом, можно сказать, что при перемещении материальной точки вдоль замкнутой траектории 1-a-2-b-1, работа консервативной силы тождественно равна нулю.

К консервативным силам относятся сила тяжести и электростатическая сила. Типичным примером неконсервативных сил является сила трения. Её работа всегда отрицательна и зависит от пути:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt = -Fv dt = -Fdr < 0.$$

На основании определения полного дифференциала и установленного свойства консервативных сил (1.101) можно утверждать, что элементарная работа консервативных сил является полным дифференциалом функции координат.

1.4.3 Кинетическая энергия

В механике различают два вида энергии: кинетическую и потенциальную. **Кинетической энергией** тела называют энергию, которая является мерой его механического движения.

Найдем выражение для кинетической энергии. Рассмотрим простейшую систему, состоящую из одной частицы (материальной точки). Запишем уравнение движения частицы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Преобразуем это выражение, умножив скалярно уравнение слева и справа на вектор скорости. Получим

$$\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (1.102)$$

Рассмотрим левую часть этого уравнения:

$$\begin{aligned}\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} &= m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) = \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{dv_x^2}{dt} + \frac{dv_y^2}{dt} + \frac{dv_z^2}{dt} \right) = \frac{m}{2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right). \quad (1.103)$$

Выражение в правой части равенства (1.102) можно записать как

$$\vec{F} \vec{v} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.104)$$

Уравнение (1.102) с учетом выражений (1.103, 1.104) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.105)$$

Если система является замкнутой, то $\vec{F} = 0$. Тогда $\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0$,

и можно утверждать, что величина $W_k = \frac{mv^2}{2}$ является постоянной.

Она называется кинетической энергией частицы. *Кинетическая энергия не может быть отрицательной.*

В отсутствие внешних сил, т. е. в замкнутой системе, сохраняется кинетическая энергия как в случае одного тела, так и для системы тел. Таким образом, кинетическая энергия является интегралом движения. *Интегралами движения* в физике называют функции координат и скоростей образующих систему частиц, которые сохраняют при движении постоянные значения.

Когда на частицу действует внешняя сила \vec{F} , её кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае уравнение (1.105) приращение кинетической энергии за время dt равно скалярному

произведению $\vec{F}d\vec{r}$. Величина $\vec{F}d\vec{r}$ – это элементарная работа, совершаемая силой \vec{F} на пути $d\vec{r}$. Выражение (1.105) примет вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r} \Rightarrow dW_k = \delta A. \quad (1.106)$$

Проинтегрируем соотношение (1.4.14) вдоль некоторой траектории от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}. \quad (1.107)$$

Левая часть представляет собой приращение кинетической энергии на пути между точками 1 и 2, а правая – величину работы силы на этом пути:

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}. \quad (1.108)$$

Таким образом, работа сил, действующих на частицу, расходуется на изменение ее кинетической энергии:

$$A = W_{k2} - W_{k1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow A = \Delta W_k. \quad (1.109)$$

Соответственно, изменение кинетической энергии частицы служит мерой работы, произведенной над частицей.

Кинетической энергией тела называют энергию W_k , являющуюся мерой его механического движения и измеряемую той работой, которую может совершить тело при его торможении до полной остановки.

Единицей измерения энергии является джоуль (Дж).

Любую механическую систему можно рассматривать как систему материальных точек. Поэтому кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, образующих эту систему:

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (1.110)$$

где m_i , v_i – масса и скорость i -й материальной точки. Кинетическая энергия системы полностью определяется величинами масс и скоростей движения входящих в неё материальных точек и не

зависит от того, каким образом части рассматриваемой системы приобрели данное значение скоростей, т.е. *кинетическая энергия системы есть функция состояния её движения*.

Значение скорости зависит от выбора системы отсчета. При выводе формулы для кинетической энергии предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета. Но в других инерциальных системах отсчета, движущихся относительно выбранной системы отсчета, значение скорости, а следовательно, и кинетической энергии точки неодинаковы. *Кинетическая энергия системы зависит от выбора системы отсчета, т.е. является величиной относительной*.

1.4.4 Потенциальная энергия

Если на систему материальных точек или тел действуют консервативные силы, то эта система обладает потенциальной энергией. **Потенциальная энергия** – это часть общей механической энергии системы, определяемая взаимным расположением тел и характером сил взаимодействия между ними. Если на систему действуют *консервативные силы*, то работа, совершаемая этими силами при изменении конфигурации системы, т.е. расположение всех её частей по отношению к системе отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение при переводе системы из начальной конфигурации в конечную. Таким образом, работа полностью определяется начальной и конечной конфигурациями системы и её можно выразить через некоторую функцию состояния системы, зависящую только от координат всех материальных точек системы и называемую потенциальной энергией системы W_{Π} :

$$A = W_{\Pi_1} - W_{\Pi_2}.$$

При бесконечно малом изменении конфигурации системы работа консервативных сил является полным дифференциалом функции W_{Π} ,

$$dA = \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = -dW_{\Pi}. \quad (1.111)$$

Полная работа определяется начальной и конечной конфигурациями системы и её можно представить как изменение потенциальной энергией системы:

$$A = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = W_{п1} - W_{п2} = -\Delta W_{п}. \quad (1.112)$$

Потенциальная энергия системы определена с точностью до постоянной величины. Действительно, так как определена только разность потенциальной энергии, то к выражению $W_{п}$ можно добавить или из него вычесть любую величину, от этого значение выражения (1.112) не изменится. Значение потенциальной энергии зависит от выбора так называемой нулевой конфигурации системы, для которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю, т.е. она является *величиной относительной*. Так, например, потенциальную энергию тела можно вычислять относительно любого этажа здания, уровня Земли или относительно её центра. Потенциальная энергия системы не зависит от того, каким образом был осуществлен перевод системы из начальной конфигурации в конечную, т.е. потенциальная энергия системы есть *функция состояния системы*.

Знак «минус» в формулах указывает на то, что сила, которая производит работу за счет убыли потенциальной энергии направлена в сторону, в которую потенциальная энергия уменьшается. Конкретный вид функции $W_{п}$ зависит от характера силового поля.

Потенциальную энергию упруго деформированного тела можно найти, используя закон Гука:

$$F_{\text{упр}} = -kx$$

Найдем работу, совершаемую силой, при переводе его из деформированного состояния (x_1) в деформированное состояние (x_2):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{упр}} dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right) = -(W_{п2} - W_{п1}) = -\Delta W_{п},$$

где $W_{п} = \frac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия упругодеформированного тела. Потенциальная энергия тела, обусловленная действием на него силы тяжести, определяется работой, которая совершается силой тяжести при падении тела по вертикали с высоты h до поверхности Земли:

$$A = -(W_{п2} - W_{п1}) = -\Delta W_{п}.$$

Полагаем, что потенциальная энергия тела на поверхности Земли равна нулю, а высота подъема тела над поверхностью Земли во много раз меньше радиуса Земли:

$$A = W_{п1} = mgh.$$

Таким образом, потенциальная энергия тела в этом случае $W_{п} = mgh$. Можно показать, что в случае движения тела по наклонной плоскости или по произвольной криволинейной траектории работа силы тяжести зависит только от разности высот начальной и конечной точек пути. Следовательно, работа силы тяжести вдоль замкнутой траектории равна нулю, т.е. сила тяжести является консервативной.

Потенциальной энергией обладают тела, составляющие замкнутую систему, если взаимодействие тел системы обусловлено консервативными силами. Если система тел незамкнута, но на неё действуют внешние силы, которые являются консервативными, то тела системы тоже обладают потенциальной энергией (внешней). Примером внешней потенциальной энергии может служить энергия тела в поле силы тяжести, а внутренней – энергия упругодеформированного тела.

Потенциальная энергия системы подобно кинетической энергии, является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и её положения по отношению к внешним телам.

1.4.5 Связь между силой и потенциальной энергией

Исходя из формулы (1.111), определяющей связь элементарной работы консервативной силы и потенциальной энергии и с учетом $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ получим

$$-dW_{п} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (1.113)$$

Следовательно, при перемещении вдоль оси x , когда $dy = dz = 0$, находим:

$$-dW_{п} = A_x dx \Rightarrow F_x = -\left. \frac{dW_{п}}{dx} \right|_{y,z=\text{const}} = \frac{\partial W_{п}}{\partial x}.$$

Таким образом, проекция консервативной силы на ось x равна *частной производной* от потенциальной энергии по координате x .

(Частная производная берется по одной переменной в предположении, что все остальные переменные не изменяются). Аналогично можно показать, что

$$F_y = - \left. \frac{dW_{\Pi}}{dy} \right|_{x, z = \text{const}} \equiv \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y};$$

$$F_z = - \left. \frac{dW_{\Pi}}{dz} \right|_{x, y = \text{const}} \equiv \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}.$$

Следовательно, консервативную силу можно выразить через потенциальную энергию следующим образом:

$$\vec{F}_{\text{конс}} = - \left(\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.114)$$

Введем обозначение:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где ∇ (читается: набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона или набла-оператором. Он численно равен производной функции, взятой в направлении наиболее быстрого возрастания функции (производная по направлению). Им можно действовать на любую скалярную функцию $f(x, y, z)$. В результате получается вектор, который называется *градиентом* функции $f(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \equiv \text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) f(x, y, z).$$

Знак « \rightarrow » в формуле (1.114) указывает на то, что сила, которая производит работу за счет убыли потенциальной энергии, направлена в сторону, в которую потенциальная энергия уменьшается. т.е. вектор консервативной силы направлен в сторону убывания (уменьшения) потенциальной энергии. Таким образом, зная потенциальную энергию частицы, можно дифференцированием найти действующую на неё консервативную силу:

$$\vec{F}_{\text{конс}} = -\vec{\nabla} W_{\Pi} \equiv -\text{grad } W_{\Pi}. \quad (1.115)$$

Наоборот, по выражению для силы можно интегрированием найти потенциальную энергию частицы:

$$-\Delta W_i = \int_1^2 \vec{F}_{\text{эф.и.н}} d\vec{r}. \quad (1.116)$$

1.5 Закон сохранения механической энергии

1.5.1 Закон сохранения энергии в механике и его связь с однородностью времени

Полная механическая энергия системы – это энергия механического движения и взаимодействия системы, которая равна сумме кинетической и потенциальной энергий системы:

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{к}}.$$

Полная механическая энергия системы является функцией состояния системы, так как она, как было показано ранее, зависит только от координат, скоростей и масс всех составляющих систему тел (материальных точек).

Полная механическая энергия является величиной *сохраняющейся*. Впервые идея этого закона была предложена М. В. Ломоносовым, а количественная формулировка закона сохранения и превращения энергии была дана спустя сто лет Ю. Майером и Г. Гельмгольцем.

Рассмотрим случай, когда на тело действуют как консервативные, так и неконсервативные силы. Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{конс}} + \sum \vec{F}_{\text{неконс}}. \quad (1.117)$$

Умножим скалярно на $d\vec{r}$ обе части уравнения (1.117):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \sum \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} + \sum \vec{F}_{\text{неконс}} d\vec{r}. \quad (1.118)$$

С учетом выражений (1.106) и (1.111) выражение (1.118) можно записать так:

$$dW_{\text{к}} = -dW_{\text{п}} + dA_{\text{неконс}}$$

или

$$dW = d(W_{\text{п}} + W_{\text{к}}) = dA_{\text{эф.и.н}}. \quad (1.119)$$

Таким образом, из равенства (1.119) следует, что *изменение полной механической энергии системы тел равно работе действующих на неё неконсервативных сил.*

Рассмотрим *консервативную систему тел*, т.е. систему тел (материальных точек), между которыми действуют только внутренние консервативные силы, а внешние силы стационарны и консервативны. Для такой системы (1.119) запишем

$$d(W_{\text{п}} + W_{\text{к}}) = dW = 0,$$

откуда

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{к}} = \text{const.} \quad (1.120)$$

Выражение (1.120) является **законом сохранения механической энергии**: *полная механическая энергия консервативной системы не меняется с течением времени, т.е. сохраняется.*

Этот закон справедлив, в частности, для замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, а внешние силы вообще не действуют, полная механическая энергия сохраняется, то есть не изменяется со временем.

Это *фундаментальный закон природы*. Он является следствием однородности времени, т.е. равнозначности всех моментов времени. Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена моментов времени t_1 на t_2 без изменения координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы, т.е. физические законы инвариантны относительно выбора отсчёта времени. При движении тела в замкнутой консервативной системе происходит непрерывное превращение его кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Поэтому это не просто закон количественного сохранения энергии, а *закон сохранения и превращения энергии*, который выражает качественную сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга.

Закон сохранения и превращения энергии справедлив как для систем макроскопических тел, так и микроскопических.

1.5.2 Общефизический закон сохранения энергии

В замкнутой системе, в которой действуют неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы

при её движении убывает. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив, т.е.

$$dW = dA_{\text{неконс}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{неконс}} d\vec{r}. \quad (1.121)$$

Из выражения (1.121) следует, что если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то *полная механическая энергия не сохраняется*, она частично переходит в другие виды энергии, т.е. при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, **энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой**. В этом заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии – сущность *неуничтожимости материи и её движения*.

Законы сохранения физических величин являются более общими, чем законы Ньютона. Они справедливы и тогда, когда законы Ньютона нарушаются. На сегодняшний день нет примеров нарушения законов сохранения.

1.5.3 Абсолютно упругий и неупругий удары

Ударом называется кратковременное взаимодействие соприкасающихся тел, приводящее к значительному изменению состояния их движения.

Линия удара – общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения при ударе. Удар называется прямым, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара. В противном случае удар называется косым. Центральным называется удар, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

Процесс удара обычно разделяют на две фазы. *Первая* фаза – с момента соприкосновения тел до момента, когда их относительная скорость становится равной нулю, *вторая* фаза – от этого последнего момента до момента, когда соприкосновение тел прекращается. При ударе тела деформируются, и в местах их соприкосновения возникают кратковременные, но весьма значительные силы, называемые *ударными*. Эти силы являются внутренними для системы соударяющихся тел. Внешние силы, действующие на систему (например, силы тяжести) очень малы по сравнению с ударными

силами, что позволяет рассматривать систему соударяющихся тел как замкнутую и применять к ней законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.

При взаимодействии тел друг с другом в рамках законов сохранения изменяются их энергия и импульс. Это изменение, однако, может происходить по-разному. Когда речь идет о взаимодействии массивных тел, которые состоят из большого числа частиц, атомов или молекул, наряду с кинетической и потенциальной энергией говорят о так называемой внутренней энергии тела. *Внутренняя энергия* – это энергия всех частиц, составляющих тело, при определенных значениях температуры и объема. Так как вне момента удара тела не взаимодействуют, то их потенциальная энергия относительно друг друга равна нулю, следовательно, взаимодействие при столкновении состоит в передаче от одного тела другому импульса и кинетической энергии. При соударении тел кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, может частично или полностью переходить в потенциальную энергию упругой деформации или во внутреннюю энергию тел. Если в результате взаимодействия тела с другими телами может измениться его температура, а также (необратимым образом) его объем, т.е. меняется его внутренняя энергия, то такое взаимодействие является неупругим. Напротив, если в результате взаимодействия внутреннее состояние тела не меняется, взаимодействие является упругим. В процессе упругого взаимодействия выполняется закон сохранения механической энергии. При неупругом взаимодействии выполняется лишь закон сохранения импульса f , а закон сохранения механической энергии не выполняется, хотя имеет место закон сохранения суммарной энергии – механической и внутренней.

В зависимости от видов взаимодействия тел принято выделять два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

Абсолютно упругим называется такой удар, при котором механическая энергия соударяющихся тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации, затем тела возвращаются к первоначальной форме,

отталкивая друг друга. В результате потенциальная энергия упругой деформации тел полностью переходит в их кинетическую энергию и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяется законами сохранения импульса и полной механической энергии.

Абсолютно неупругим называется прямой центральный удар, если после удара тела движутся как одно целое, т. е. с одной и той же скоростью. При неупругом ударе происходят различного рода процессы в соударяющихся телах (их пластические деформации, трение и др.), в результате чего кинетическая энергия системы частично преобразуется в ее внутреннюю энергию, т. е. происходит диссипация (рассеяние) механической энергии системы.

Рассмотрим **абсолютно упругий удар** двух однородных шаров, центры которых движутся вдоль одной прямой, т. е. центральный удар. Пусть массы шаров m_1 и m_2 , скорости до удара v_1 и v_2 , после удара u_1 и u_2 . Для определенности возьмем случай движения шаров, изображенный на рисунке 1.25.

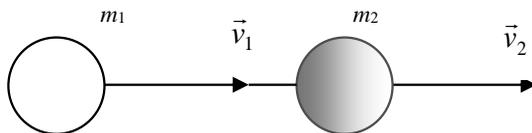


Рисунок 1.25

Уравнения законов закон сохранения импульса и энергии имеют вид

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2; \quad (1.122)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (1.123)$$

Преобразуем формулы (1.122), (1.123), перенося члены, относящиеся к первому шару, влево, а ко второму шару – вправо:

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2);$$

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2).$$

Разделив второе из полученных уравнений на первое, находим

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

Решая полученную систему из трех уравнений совместно, получаем

$$u_1 = [(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2]/(m_1 + m_2); \quad (1.124)$$

$$u_2 = [(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1]/(m_1 + m_2). \quad (1.125)$$

Рассмотрим полученный результат в частных случаях:

- $m_1 = m_2$ (соударение одинаковых шаров). Тогда $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, т.е. при упругом центральном ударе двух тел одинаковой массы они просто обмениваются скоростями. Если, в частности, до удара второй шар покоился ($v_2 = 0$), то после удара остановится первый шар ($u_1 = 0$), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался до удара первый шар ($u_2 = v_1$);

- $m_1 > m_2$ – первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($u_1 < v_1$). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого шара после удара ($u_2 > u_1$);

- $m_1 < m_2$. Направление движения изменяется – первый шар отскакивает обратно. Второй движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью;

- $m_2 \gg m_1$ (удар шара о массивную стенку). В этом случае и приближенно будем иметь

$$u_1 = 2v_2 - v_1; \quad u_2 = v_2 - 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx v_2.$$

Как видно из полученных формул, скорость массивного тела после удара меняется незначительно. В результате удара стенке передается значительный импульс, но передача энергии при ударе сравнительно мала:

$$\Delta p = m_2u_2 + m_2v_2 = 2m_1v_1.$$

Если стенка была первоначально неподвижна ($v_2 = 0$), то упруго ударившийся о нее шарик малой массы отскочит обратно практически с теми же скоростью ($u_1 = -v_1$) и энергией. При ударе о движущуюся стенку происходит обмен энергией между стенкой и шариком, тем больший, чем больше скорость стенки. В зависимости от направления движения стенки (v_2 больше или меньше 0) шарик

отскакивает от стенки с большими или меньшими, чем до столкновения, кинетической энергией и импульсом.

Абсолютно неупругим называется такой удар, в результате которого тела движутся как одно целое. При абсолютно неупругом ударе часть механической энергии системы расходуется на изменение её внутренней энергии. Закон сохранения механической энергии не выполняется, выполняется только закон сохранения импульса. Для двух тел разной массы, движущихся в одном направлении с разными скоростями (см. рисунок 1.25) в случае их неупругого соударения, можно записать:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u, \quad (1.126)$$

откуда

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.127)$$

Часть механической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию шаров, равна разности энергий до и после удара:

$$\Delta E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \quad (1.128)$$

Подставляя уравнения (1.127) в (1.128), находим

$$\Delta E = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \quad (1.129)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1. \quad (1.130)$$

$$\Delta E = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1v_1^2}{2}. \quad (1.131)$$

Когда неподвижное тело имеет большую массу ($m_2 > m_1$), то почти вся кинетическая энергия переходит при ударе во внутреннюю энергию. Напротив, при $m_1 \gg m_2$ изменение внутренней энергии мало, и большая часть кинетической энергии идет на сообщение движения ударяемому телу.

Практическое использование этих выводов: если необходимо получить в результате удара тел большую деформацию (молот и

наковальня), то наковальня должна быть значительно массивнее молотка. Для забивания гвоздя масса молотка должна быть значительно больше.

1.6 Динамика вращательного движения твёрдого тела

1.6.1 Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной точки. Момент импульса. Момент силы

Твердое тело – это система материальных точек, расстояние между которыми остается неизменным при взаимодействии системы с другими телами. Любое движение твердого тела можно представить как наложение двух видов движения – поступательного и вращательного. *Поступательным движением* твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно своему первоначальному направлению. *Вращательное движение* твердого тела – такое движение, при котором все его точки описывают окружности, лежащие в параллельных плоскостях. Центры этих окружностей находятся на одной прямой, называемой *осью вращения*. Движение твердого тела, закрепленного в одной неподвижной точке, называют вращением тела вокруг неподвижной точки – *центра вращения*. Такое движение можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через центр вращения и называемой *мгновенной осью вращения тела*.

Любое твёрдое тело можно представить в виде системы из N материальных точек (частиц) массами m_1, m_2, \dots, m_N . Рассмотрим произвольную незамкнутую систему, состоящую из N материальных точек. Опишем движение точек, входящих в эту систему, относительно неподвижной инерциальной системы отсчета с центром в точке O . Пусть \vec{F}_{ik} – сила, действующая со стороны k -й точки на i -ю точку, $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – внешняя сила, действующая на i -ю точку, \vec{r}_i – радиус-вектор i -й точки, проведённый в неё из начала координат O неподвижной инерциальной системы отсчёта.

В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения для каждой из N материальных точек системы будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i \neq k}^N \vec{F}_{ik}. \quad (1.132)$$

Умножим векторное это уравнение на вектор \vec{r}_i . После умножения получим

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right] = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{внеш}} \right] + \left[\vec{r}_i, \sum_{i \neq k}^N \vec{F}_{ik} \right]. \quad (1.133)$$

Вынесем в левой части знак производной за знак векторного произведения. По свойству производной имеем

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i \vec{v}_i \right] + \left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right]. \quad (1.134)$$

Первое векторное произведение в сумме равно нулю, так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. Действительно,

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \Rightarrow \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i \vec{v}_i \right] = 0. \quad (1.135)$$

Тогда на основании равенств (1.134) и (1.135) уравнение (1.133) можно записать так:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{внеш}} \right] + \left[\vec{r}_i, \sum_{k \neq i}^N \vec{F}_{ik} \right]. \quad (1.136)$$

Дальнейшее описание движения связано с величинами, называемыми моментом импульса и моментом силы материальной точки. Различают моменты силы и моменты импульса относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.

Моментом импульса материальной точки относительно неподвижной точки O (полюса) называется векторная физическая величина \vec{L} , равная векторному произведению радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в место нахождения материальной точки, на её импульс $m\vec{v}$:

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (1.137)$$

Для любой материальной точки из рассматриваемой системы по свойству векторного произведения

$$\vec{L} \perp \vec{r}, \quad \vec{L} \perp m\vec{v}.$$

Направление \vec{L} таково, что последовательность векторов $\vec{r}, m\vec{v}, \vec{L}$ образует праввинтовую систему, т.е. из конца вектора \vec{L} совершаемый по кратчайшему пути поворот от первого сомножителя ко второму происходит против часовой стрелки (рисунок 1.26).

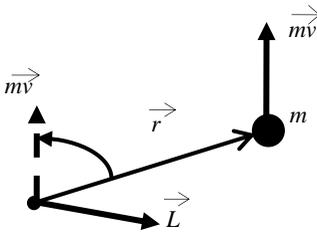


Рисунок 1.26

Моментом силы \vec{M} материальной точки относительно неподвижной точки О (полюса) называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора \vec{r} , проведенного из полюса О в точку приложения силы, на вектор силы \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (1.138)$$

Для любой материальной точки из рассматриваемой системы по свойству векторного произведения

$$\vec{M} \perp \vec{r}, \quad \vec{M} \perp \vec{F}.$$

Направление \vec{M} таково, что последовательность векторов $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ образует праввинтовую систему, т.е. из конца вектора \vec{M} совершаемый по кратчайшему пути поворот от первого сомножителя ко второму происходит против часовой стрелки (рисунок 1.27).

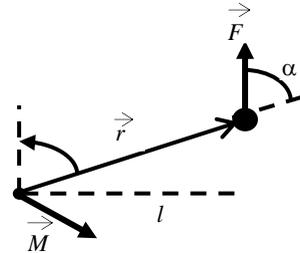


Рисунок 1.27

Запишем выражение для определения численного значения момента силы:

$$M = rF \sin \alpha = Fl, \quad \text{где } l = r \sin \alpha.$$

Величина l называется плечом силы. Из рисунка 1.27 видно, что плечо силы – это расстояние от точки О (полюса) до линии действия силы. Если линия действия силы проходит через точку О, то момент силы относительно точки О равен нулю. Для каждой i -й материальной точки системы, с учетом введенных величин, выражение (1.136) можно записать так:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k \neq i}^N \vec{M}_{ik}.$$

Если сложить почленно все уравнения, записанные для каждой из N материальных точек, входящих в систему, получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N \vec{M}_{ik}. \quad (1.139)$$

Рассмотрим выражения, входящие в уравнение (1.139). Векторная сумма моментов внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы, называется результирующим, или *главным моментом внешних сил* относительно точки O :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{внеш}}. \quad (1.140)$$

Главный момент (результирующий момент) сил \vec{M} относительно неподвижной точки O (полюса) – это векторная физическая величина, равная геометрической сумме моментов сил относительно точки O всех материальных точек системы. По свойству производной можно записать:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i. \quad (1.141)$$

Векторную сумму моментов импульса всех материальных точек системы называют *моментом импульса (количества движения) системы* относительно точки O :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i. \quad (1.142)$$

Момент импульса системы относительно неподвижной точки O – векторная физическая величина \vec{L} , равная геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки O всех материальных точек системы. С учетом (1.142) выражение (1.141) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (1.143)$$

Можно показать, что векторная сумма моментов сил относительно точки O всех внутренних сил взаимодействия между материальными точками системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N \vec{M}_{ik} = 0. \quad (1.144)$$

Следовательно, для любого числа N материальных точек незамкнутой системы уравнение (1.139) с учетом выражения (1.140), (1.141) (1.144) будет иметь вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.145)$$

Скорость изменения момента импульса системы материальных точек относительно любой неподвижной точки O равна главному моменту относительно той же точки всех внешних сил, приложенных к системе. Соотношение (1.145) справедливо и для твердого тела, закрепленного в точке O , поэтому оно выражает закон динамики вращательного движения твердого тела для случая вращения относительно неподвижной точки.

1.6.2 Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой системы, в отсутствии внешних сил

$$\vec{M} = 0.$$

Уравнение (1.145) для данной системы будет иметь вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}. \quad (1.146)$$

Таким образом, в отсутствии внешних сил (для замкнутой системы) \vec{L} – величина сохраняющаяся:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const}. \quad (1.147)$$

Уравнение (1.147) является математической формулировкой **закона сохранения момента импульса**: *момент импульса замкнутой системы материальных точек (тел) относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени, т.е. является величиной сохраняющейся.* Наряду с законами сохранения энергии и

импульса это один из фундаментальных законов природы, т.к. связан с определенным свойством симметрии пространства – его изотропностью. Изотропность пространства проявляется в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не зависят от выбора направления осей координат инерциальной системы отсчета, т.е. не изменяются при повороте в пространстве замкнутой системы как целого.

Согласно современным представлениям, моментом импульса могут обладать не только частицы и тела, но также и поля, причем элементарные частицы и построенные на них системы (например, атомные ядра) могут иметь момент импульса, не связанный с движением этих частиц в пространстве и называемый их собственным моментом или *спином*.

1.6.3 Уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси

В природе чаще встречается вращательное движение не относительно точки, а относительно оси. Пусть твердое тело закреплено в двух неподвижных точках O и O_1 так, что оно может вращаться вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через эти точки (рисунок 1.128).

Можно показать, что составляющие момента \vec{M} относительно точки O , направленные вдоль осей Ox и Oy , компенсируются соответствующими моментами сил реакции закрепления в точке O_1 .

Поэтому вращение тела вокруг оси Oz происходит под действием составляющей \vec{M}_g – момента внешних сил относительно точки O .

Запишем уравнение (1.145) в проекции на ось z . Если вектора равны, следовательно, равны и их проекции на любое направление:

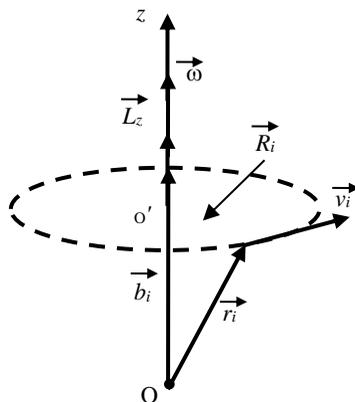


Рисунок 1.28

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z, \quad (1.148)$$

где \vec{L}_z, \vec{M}_z – составляющие векторов результирующего момента импульса тела и результирующего момента внешних сил относительно точки O , направленные вдоль неподвижной оси z вращения тела и называемые соответственно *моментом импульса тела относительно оси z* и результирующим моментом внешних сил относительно оси z :

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{iz}; \quad \vec{M}_z = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{iz}. \quad (1.149)$$

Уравнение (1.148) выражает основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: *скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.*

Определим момент импульса \vec{L}_i тела, вращающегося с угловой скоростью. Радиус вектор i -й материальной точки, как видно из рисунка, можно представить в виде суммы векторов:

$$\vec{r}_i = \vec{b}_i + \vec{R}_i, \quad (1.150)$$

где \vec{b}_i – вектор, проведенный из точки O в точку O' , лежащую на оси вращения z и являющуюся центром окружности радиусом R_i , по которой движется рассматриваемая i -я материальная точка тела. С учетом (1.150) выражение для момента импульса i -й материальной точки может быть записано так:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{b}_i, m_i \vec{v}_i] + [\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (1.151)$$

По свойству векторного произведения векторов, можно утверждать, что первое слагаемое в правой части уравнения (1.151) – вектор $[\vec{b}_i, m_i \vec{v}_i]$ перпендикулярен вектору \vec{b}_i , и, следовательно, его составляющая на ось z равна нулю. Второе слагаемое – вектор $[\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i]$ параллелен оси z и направлен в ту же сторону, что и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. Тогда проекция вектора момента импульса на эту ось

$$\vec{L}_{iz} = [\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (1.152)$$

Из уравнения (1.152) следует, что модуль вектора

$$|\vec{L}_{iz}| = R_i m_i v_i = m_i \omega R_i^2.$$

Так как вектор \vec{L}_{iz} направлен вдоль оси вращения z тела в ту же сторону, что и вектор $\vec{\omega}$, то можно записать

$$\vec{L}_{iz} = m_i R_i^2 \vec{\omega}. \quad (1.153)$$

Тогда на основании (1.149) и (1.153) момент импульса тела относительно оси Oz

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{iz} = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \vec{\omega} J_z, \quad (1.154)$$

где $J_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$ – величина, равная сумме произведений массы каждой материальной точки тела на квадрат её расстояния до оси вращения называют *моментом инерции тела относительно оси z* . Выражение (1.154) примет вид

$$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega}. \quad (1.155)$$

Таким образом, момент импульса тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения вокруг этой оси.

Рассмотрим снова основное уравнение вращательного движения твёрдого тела. Запишем уравнение (1.148) с учетом выражения (1.154):

$$\frac{d}{dt} (J_z \vec{\omega}) = \vec{M}_z.$$

Для абсолютно твёрдого тела $J_z = \text{const}$, следовательно,

$$J_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_z \Rightarrow J_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}_z. \quad (1.156)$$

Это *основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси*: момент импульса тела относительно неподвижной оси равен произведению момента инерции тела той же оси на угловую скорость вращения тела вокруг

этой оси. Это уравнение похоже на уравнение для динамики поступательного движения (второй закон Ньютона), а величина J_z является аналогом массы тела, т.е. мерой его инертности при вращательном движении.

1.6.4 Момент инерции

Момент инерции – скалярная физическая величина, которая характеризует во *вращательном движении* инертные свойства твердого тела. Момент инерции определяется для материальной точки, системы материальных точек, твердого тела.

Моментом инерции материальной точки массой m относительно неподвижной оси z , находящейся на некотором расстоянии r от оси вращения, называется физическая скалярная величина, численно равная произведению массы точки на квадрат расстояния её до оси вращения:

$$J_z = mr^2. \quad (1.157)$$

Моментом инерции системы материальных точек относительно неподвижной оси z , называется физическая скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех N материальных точек системы на квадраты их расстояния до оси вращения:

$$J_z = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (1.158)$$

Моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси z называется физическая скалярная величина, численно равная сумме элементарных произведений элементарных Δm_i масс твердого тела на квадраты их расстояния до оси вращения:

$$J_z = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2. \quad (1.159)$$

Из уравнения (1.159) видно, что момент инерции тела есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей. При вычислении момента инерции тела его мысленно разбивают на бесконечно большое число

бесконечно малых элементов с массами Δm_i . Поэтому в формуле (1.159) сумму заменяют интегралом:

$$J_z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \int_0^m r^2 dm = \int_0^V r^2 \rho dV. \quad (1.160)$$

Величины r, ρ являются функциями координат. Если тело однородно, т.е. его плотность везде одинакова, то

$$J_z = \rho \int_V r^2 dV. \quad (1.161)$$

1.6.5 Момент инерции некоторых тел правильной формы

В качестве примера найдём момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (рисунок 1.29).

Разобьём диск на кольцевые слои шириной dr . Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном r . Объём одного слоя

$$dV = 2\pi r b dr, \quad (1.162)$$

где b – толщина диска. Подставим выражение (1.162) в (1.161) и учтем, что диск однородный и его плотность во всех точках одинакова. Получим

$$J_0 = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}, \quad (1.163)$$

где R – радиус диска.

Приведем без вывода формулы для определения моментов инерции некоторых тел простейшей формы (тела предполагаются однородными, а их масса равна m) относительно центра инерции (центра масс) этих тел:

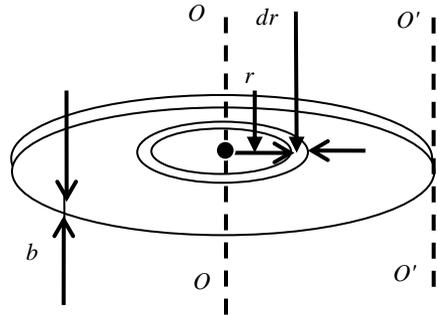


Рисунок 1.29

1 Тонкий длинный стержень с сечением любой формы. Максимальный поперечный размер стержня много меньше его длины ($b \ll l$). Момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину,

$$J_0 = \frac{1}{12} ml^2.$$

2 Диск или цилиндр при любом отношении радиуса R к длине. Момент инерции относительно оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра,

$$J_0 = \frac{1}{2} mR^2.$$

3 Момент инерции шара радиуса R относительно оси, проходящей через его центр,

$$J_0 = \frac{2}{5} mR^2.$$

Нахождение момента инерции тел относительно произвольной оси, проходящей вне центра инерции тела, значительно сложнее. В таких случаях для нахождения момента инерции необходимо воспользоваться *теоремой Штейнера*. Теорема формулируется следующим образом: *момент инерции J тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_0 тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:*

$$J = J_0 + ma^2.$$

В соответствии с теоремой Штейнера найдём момент инерции диска относительно оси $O'O'$ (см. рисунок 1.29):

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2. \quad (1.164)$$

1.6.6 Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, образующих эту систему, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося

произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех N материальных точек (частиц), из которых состоит это тело:

$$W_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω , то линейная скорость i -й точки связана с её угловой скоростью соотношением $v = \omega R_i$, где R_i – расстояние до оси вращения. Тогда получим выражение для определения кинетической энергии вращающегося тела:

$$W_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (1.165)$$

Здесь J_z – момент инерции тела.

В общем случае движение твёрдого тела можно представить в виде суммы двух движений – поступательного со скоростью v_c центра инерции тела, и вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью центра инерции тела и энергии вращения, проходящей через центр инерции тела:

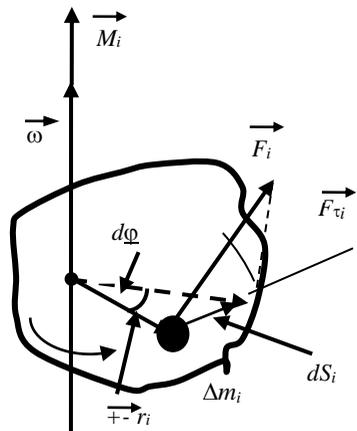
$$W_k = W_{\text{пост}} + W_{\text{вр}} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}, \quad (1.166)$$

где J_c – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через его центр инерции.

1.6.7 Работа внешних сил при вращении твёрдого тела

Найдём работу, которую совершают внешние силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси (рисунок 1.30).

Мысленно разобьём тело на N материальных точек элементарной массой Δm_i каждая. Любая из этих



точек может находиться под действием внешних сил. Рассмотрим i -ю точку тела, на которую действует F_i – внешняя произвольно направленная сила. За время dt элементарная масса Δm_i , совершая поворот на элементарный угол $d\varphi$, проходит путь dS_i , который может быть найден как дуга окружности радиусом r_i :

$$dS_i = r_i d\varphi.$$

Рисунок 1.30

Работа силы F_i на этом пути dS_i произведению проекции силы на направление перемещения $F_i \cos \alpha$ на величину перемещения dS_i :

$$dA_i = F_i dS_i \cos \alpha = F_i \sin \alpha r_i d\varphi = M_{iz} d\varphi,$$

где $F_i \sin \alpha r_i = F_i l_i = M_{iz}$ – момент силы F_i относительно оси z . Работа всех сил, приложенных к телу, равна сумме работ совершёнными отдельными силами:

$$dA = \sum_{i=1}^N dA_i = \sum_{i=1}^N M_{iz} d\varphi = M_z d\varphi. \quad (1.167)$$

Вектор \vec{M}_z направлен вдоль оси вращения z , так же, как и $\vec{\omega}$. Если направления векторов \vec{M}_z , $\vec{\omega}$ совпадают, то $dA > 0$, если противоположны, то $dA < 0$. С учетом этого выражение (1.167) будет иметь вид

$$dA = \vec{M}_z d\vec{\varphi},$$

где $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$.

Тогда полная работа, совершаемая внешними силами, при вращении твердого тела может быть найдена из выражения

$$A = \int dA = \int_0^{\varphi} \vec{M}_z d\vec{\varphi} = \int_0^t \vec{M}_z \vec{\omega} dt.$$

Если проекция результирующего момента сил M_z на направление $\vec{\omega}$ остаётся постоянной, то работа определяется из следующего выражения:

$$A = \vec{M}_z \int_0^\varphi d\vec{\varphi} = \vec{M}_z \vec{\varphi}, \quad (1.168)$$

где φ – угол, на который повернётся тело за время t . Как и в случае поступательного движения, работа сил, приложенных к телу при вращательном движении, равна изменению кинетической энергии тела. Подставив выражение для M_z в уравнение (1.167), получим

$$dA = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{\omega} dt = J \vec{\omega} d\vec{\omega} = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = dW_{\text{вр}}.$$

1.7 Элементы механики сплошных сред

1.7.1 Кинематическое описание движения

Кроме механики материальной точки и механики твёрдого тела существует **механика сплошных сред**. Она включает гидродинамику, газовую динамику, гидроаэромеханику и ряд других дисциплин, рассматривающих вещество как непрерывную движущуюся среду. Несмотря на различие в строении и свойствах жидкостей и газов, в ряде механических явлений их поведение описывается одинаковыми параметрами и подобными уравнениями, что дало возможность выделить раздел физики, называемый гидроаэромеханикой, в котором изучается равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твёрдыми телами. В гидроаэромеханике используется единый подход к изучению жидкостей и газов. Жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, т.е. среды, которые непрерывно распределены в занятой ими части пространства.

Рассмотрим описание движения сплошных сред на примере несжимаемой жидкости (газа), т.е. такой, плотность которой всюду одинакова и не меняется с течением времени.

Чтобы описать движение жидкости или газа, можно задать траекторию и скорость как функцию от времени для каждой частицы жидкости (метод Лагранжа). Можно поступить по-другому: следить не за частицами жидкости, а за отдельными точками пространства, фиксируя скорость, с которой жидкость или газ проходит через

данную точку (метод Эйлера).

Движение жидкости называется *течением*, а совокупность частиц движущейся жидкости – *потоком*. Графически движение жидкостей изображается с помощью *линий тока* (рисунок 1.31). Это линии, касательные к которым совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства. Густота линий (отношение числа линий к площади, перпендикулярной им площадке, через которую они проходят) больше там, где скорость течения жидкости больше, и наоборот.



Рисунок 1.31

Указав для каждой точки пространства вектор скорости, можно провести линию движения (траекторию частиц) жидкости или газа так, чтобы касательная к этой линии совпадала с направлением вектора скорости. Эти линии называются *линиями тока*.

Так как величина и направление вектора скорости могут меняться, то и картина линий тока может непрерывно меняться. Если вектор скорости в каждой точке пространства остаётся постоянным, то течение называется установившимся, или *стационарным*. При этом любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением скорости. Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока*. Частицы жидкости при своём движении не пересекают стенок тока.

Так как величина и направление вектора скорости могут меняться, то и картина линий тока может непрерывно меняться. Если вектор скорости в каждой точке

1.7.2 Динамические уравнения. Интегралы движения

Возьмём трубку тока настолько тонкую, что в каждом её сечении скорость можно считать постоянной (рисунок 1.32).

Предположим, что жидкость несжимаема, т.е. её плотность ρ всюду одинакова и не изменяется (не зависит от давления). В этом случае количество жидкости между сечениями S_1 и S_2 будет

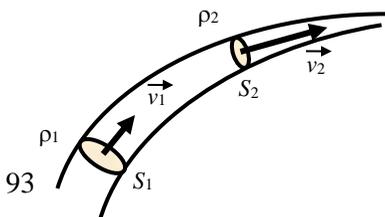


Рисунок 1.32

всегда неизменным:

$$\Delta m = \rho S v \Delta t.$$

Тогда получим

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2.$$

Отсюда следует, что объёмы жидкости (газа), протекающие за единицу времени через сечения S_1 и S_2 , должны быть одинаковыми:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

При стационарном течении не только жидкостей, но и газов, изменениями плотности часто можно пренебречь и даже газы рассматривать как несжимаемые жидкости. Для жидкости это верно в большинстве случаев. К течению газов это представление применимо, пока скорости течения и искусственно создаваемые разности давлений невелики. Например, при течении газа под давлением, близким к атмосферному, и при скоростях порядка десятков метров в секунду разность давлений в различных местах потока может изменяться только на сотые доли атмосферного давления. Эти разности давлений весьма существенны для всей картины в потоке, и ими нельзя пренебречь. Но относительно атмосферного давления, под которым находится газ, эти изменения давлений малы, и связанными с ними изменениями плотности газа вполне можно пренебречь. Поэтому во всех случаях, когда рассматривается стационарное течение жидкостей или газов, пренебрегают сжимаемостью не только жидкостей, но и газов.

Полученный результат применим к любой паре сечений. Следовательно, для несжимаемой жидкости в любом сечении одной и той же трубки тока *величина* Sv всегда будет одинакова:

$$Sv = \text{const.} \quad (1.169)$$

Это и есть *уравнение или теорема о неразрывности струи*. Из последнего выражения следует, что там, где сечение трубки уменьшается, скорость потока возрастает. При переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением.

Рассматривая движение жидкостей, во многих случаях можно считать, что перемешивание одних частей жидкости относительно других не связано с возникновением сил трения.

Жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствуют, называется идеальной жидкостью.

Выделим в стационарно текущей жидкости трубку тока малого сечения (рисунок 1.33). Рассмотрим объём жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями S_1 и S_2 . За время Δt этот объём переместится вдоль трубки, причём сечение S_1 переместится в положение S_1' , пройдя путь Δl_1 , а сечение S_2 переместится в положение S_2' , пройдя путь Δl_2 . В силу неразрывности струи, выделенные объёмы будут иметь одинаковую величину: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

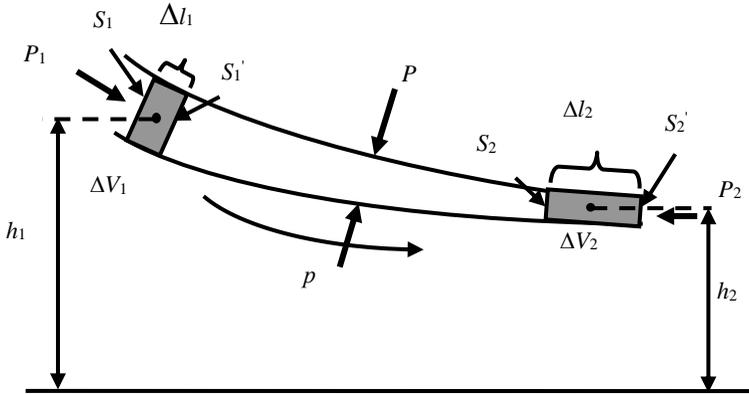


Рисунок 1.33

Энергия каждой частицы жидкости складывается из её кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения. Вследствие стационарности течения частица, находящаяся спустя время Δt в любой из точек выделенной части рассматриваемого объёма имеет ту же скорость (а следовательно, и кинетическую энергию), какую имела бы частица, находящаяся в этой точке в начальный момент времени. Приращение энергии ΔE всего рассматриваемого объёма можно вычислить как разность энергий выделенных объёмов ΔV_1 и ΔV_2 .

Возьмём трубку тока и отрезки Δl настолько малыми, чтобы всем точкам каждого выделенного объёма можно было приписать одно и то же значение скорости v , давления P и высоты h . Тогда приращение энергии запишется так:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} - \rho \Delta V g h_1 \right), \quad (1.170)$$

где ρ – плотность жидкости.

В идеальной жидкости силы трения отсутствуют. Поэтому приращение энергии ΔE должно равняться работе, совершаемой над выделенным объёмом силами давления. Силы давления на боковую поверхность трубки тока перпендикулярны в каждой точке направлению перемещения частиц, к которым они приложены, и работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2 :

$$A = P_1 S_1 \Delta l_1 P_2 S_2 \Delta l_2 = (P_{12}) \Delta V. \quad (1.171)$$

Приравняем выражения (1.170) и (1.171), сократим на ΔV и перепишем:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2. \quad (1.172)$$

Так как сечения S_1 и S_2 взяты произвольно, то можно утверждать, что в любом сечении трубки тока будет справедливо следующее выражение:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}. \quad (1.173)$$

Таким образом, в стационарно текущей жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие (1.173), называемое *уравнением Бернулли*. Данное уравнение получено швейцарским математиком и физиком Д. Бернулли в 1738 году. Оно достаточно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, вязкость которых не очень велика.

Следствия, вытекающие из уравнения Бернулли:

1 Если жидкость течёт так, что её скорость во всех точках одинакова, то из уравнения (1.172) следует:

$$P_1 - P_2 = \rho g (h_1 - h_2). \quad (1.174)$$

Следовательно, распределение давления в жидкости, которая течёт с постоянной скоростью, будет таким же, как и в покоящейся жидкости.

2 Для горизонтальной линии тока ($h_1 = h_2$) уравнение (1.172) примет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2. \quad (1.175)$$

То есть давление оказывается меньше в тех точках текущей жидкости, где скорость её течения больше. Уменьшение давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу устройства водоструйного насоса.

1.7.3 Сжимаемость жидкостей и газов

Давление в жидкости и газе зависит от степени их сжатия. Упругие свойства жидкостей и газов характеризуются *объёмной упругостью*, т.е. зависимостью изменения давления в них от изменения объёма. Если объём жидкости при некотором давлении, принятом за нормальное, равен V , а при изменении давления на ΔP объём изменяется на ΔV , то связь между ними будет выглядеть следующим образом:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta P, \quad (1.176)$$

где α – коэффициент *объёмной упругости*, или коэффициент *сжимаемости*. Наряду коэффициентом упругости для характеристики сжимаемости жидкостей и газов вводится величина, называемая *модулем сжатия* k .

$$k = \frac{1}{\alpha} = V \frac{\Delta P}{\Delta V}. \quad (1.177)$$

Коэффициент сжимаемости жидкостей очень мал и его измерение требует специальных методов. Коэффициент сжатия и модуль сжатия при обычных давлениях постоянны для данной жидкости, но зависят от температуры. При больших давлениях сказывается зависимость этих коэффициентов от величины давления. Малая сжимаемость жидкостей позволяет считать их в случае движения со скоростями, меньшими скорости звука в них, практически не сжимаемыми.

Для газов зависимость давления от объёма (для малых изменений объёма) подчиняется закону Бойля-Мариотта:

$$PV = \text{const.}$$

Если давления газа увеличилось на ΔP , то объём газа уменьшился соответственно на ΔV . Используя закон Бойля-Мариотта, запишем

$$(P + \Delta P)(V - \Delta V) = PV.$$

Далее, раскрывая скобки, получим

$$PV - P\Delta V + V\Delta P - \Delta P\Delta V = PV. \quad (1.178)$$

Отбросим величину второго порядка малости (произведение $\Delta P\Delta V$) поделим на PV :

$$-\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta P}{P} = 0. \quad (1.179)$$

После простых преобразований получим

$$-\frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta P} = \frac{1}{P} \Rightarrow -\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{P} \Delta P. \quad (1.180)$$

Сравнивая последнее выражение с (1.176) для коэффициента сжимаемости газов получим следующее соотношение:

$$\alpha = \frac{1}{P}. \quad (1.181)$$

Таким образом, сжимаемость газов уменьшается с ростом давления. При давлении 1 МПа коэффициент сжимаемости для воздуха $\alpha = 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{Н}$. Для воды коэффициент сжимаемости при том же давлении $\alpha = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$, т.е. сжимаемость воды примерно в 20000 раз меньше сжимаемости воздуха.

1.8 Элементы релятивистской механики

1.8.1 Механический принцип относительности.

Преобразования Галилея

До сих пор механическое движение рассматривалось относительно тел отсчёта, жестко связанных с Землёй, которую в большинстве случаев считали неподвижной. Но будут ли законы динамики, полученные для систем отсчёта, связанных с неподвижными телами, справедливы для систем отсчёта, связанных с движущимися телами?

Рассмотрим две системы отсчёта – K и K' , движущиеся относительно друг друга со скоростью v так, что оси x и x' совпадают, а оси y' и z' параллельны соответствующим осям y и z . Считаем систему K неподвижной, а систему K' – движущейся относительно неё со скоростью v . Найдем связь между координатами

точки M и временем в обеих системах отсчёта. Отсчёт времени начнём с момента, когда начала координат совпадали. Преобразования координат и времени, применяемые в ньютоновской механике при переходе от одной инерциальной системы отсчёта $K(x, y, z, t)$ к другой $K'(x', y', z', t')$, которая движется относительно K поступательно с постоянной скоростью, называются преобразованиями Галилея. Преобразования Галилея основываются на *аксиомах об абсолютности промежутков времени и длин*. Первая аксиома утверждает, что ход времени (соответственно и промежуток времени между какими-либо двумя событиями) одинаков во всех инерциальных системах отсчёта. Согласно второй аксиоме размеры тела не зависят от скорости его движения относительно системы отсчёта. Преобразования Галилея для рассматриваемого случая (рисунок 1.34) представляют систему четырех уравнений:

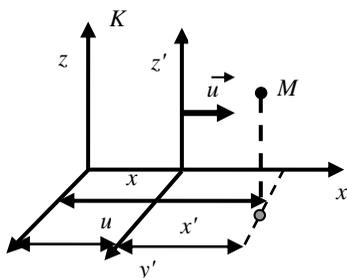


Рисунок 1.34

$$\begin{aligned} x &= x' + u; \\ y &= y'; \\ z &= z'; \\ t &= t'. \end{aligned} \quad (1.182)$$

Дифференцируя по времени уравнения (1.182), можно найти связь между скоростями в точке M по отношению к системам отсчёта K и K' :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt} + u \Rightarrow v_x = v'_x + u; \\ v_y &= v'_y; \\ v_z &= v'_z, \end{aligned} \quad (1.183)$$

или в векторном виде:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (1.184)$$

Чтобы записать уравнения динамики, необходимо найти ускорение. Дифференцируя выражение (1.8.3) по времени и учитывая, что $u = \text{const}$, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'. \quad (1.185)$$

Следовательно, во всех системах отсчёта, движущихся относительно друг друга ускорение тела равномерно и прямолинейно, одинаково. Поэтому, *если одна система отсчёта инерциальна ($a = 0$), то и любая другая, движущаяся относительно неё равномерно и прямолинейно, тоже является инерциальной ($a' = 0$).*

Согласно второму закону Ньютона, из выражения (1.185) следует, что силы, действующие на тело в инерциальных системах отсчета, также будут одинаковы. Следовательно, *уравнения динамики Ньютона не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, или, иначе говоря, уравнения динамики Ньютона инвариантны по отношению к инерциальным системам отсчёта.* (Инвариантность – неизменность вида выражения при переходе из одной системы отсчёта в другую). Это утверждение получило название *механического принципа относительности, или принципа относительности Галилея.* Его можно сформулировать и следующим образом: все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом, вследствие чего никакими механическими опытами невозможно установить, покоится ли данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно.

1.8.2 Постулаты специальной теории относительности

Справедливость преобразований Галилея, а также основ классической механики, изложенных И.Ньютоном в фундаментальной работе "Математические начала натуральной философии", не вызывали сомнений вплоть до конца XIX столетия. Появление **теории относительности – нового учения о пространстве и времени**, которое пришло на смену классическому ньютоновскому представлению, связано с развитием электродинамики. После того как Дж. Максвелл во второй половине XIX в. сформулировал основные законы электродинамики, встал вопрос о применимости механического принципа относительности к электромагнитным и оптическим явлениям. Для этого нужно было

выяснить, изменяются ли основные законы электродинамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой или, как и законы Ньютона, остаются неизменными.

Согласно классическому закону сложения скоростей, скорости света в вакууме в подвижной и неподвижной инерциальных системах отсчета должны быть разными. Однако из уравнений Максвелла следовало, что скорость света в вакууме (скорость распространения электромагнитных волн) одинакова по всем направлениям. Многие ученые считали, что принцип относительности неприменим к электромагнитным и оптическим явлениям и что электромагнитные процессы происходят в особой неподвижной среде – эфире, заполняющей все пространство. Инерциальная система отсчета, покоящаяся относительно эфира, является приоритетной по сравнению с другими инерциальными системами, и только в этой системе скорость одинакова по всем направлениям. Однако эксперименты, поставленные в 1881 г. А. Майкельсоном и Э. Морли, не подтвердили этого.

В 1905 г. А.Эйнштейн пришел к выводу, что противоречия между теорией и экспериментом, возникающие при применении механического принципа относительности к электромагнитным явлениям, можно преодолеть, если считать и принцип относительности, и уравнения Максвелла справедливыми, а преобразования Галилея неточными. Он предложил заменить их другими преобразованиями, относительно которых инвариантными являются любые уравнения, описывающие физические законы. Эйнштейн показал, что преобразования Галилея верны лишь в том случае, когда скорости движения тел и систем отсчета много меньше скорости света в вакууме. Если же эти скорости близки к скорости света, то законы классической механики должны быть заменены. Эйнштейн впервые пришел к выводу о зависимости свойств времени и пространства от движения материальных объектов, с которыми связываются инерциальные системы отсчета. Пересмотр классических представлений позволил Эйнштейну создать новое учение о пространстве, времени и движении – **специальную теорию относительности (СТО)**. В 1905 году А. Эйнштейн опубликовал научную статью "К электродинамике движущихся тел", в которой были изложены основные положения СТО.

В основе СТО лежат два постулата. Первый постулат называется *принципом относительности Эйнштейна*. Это

обобщение механического принципа относительности Галилея на все физические явления: *все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта*. Это значит, что никакими экспериментами (механическими, электромагнитными, оптическими и др.), поставленными внутри инерциальной системы, невозможно установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. Из данного постулата следует, что *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к любым инерциальным системам отсчёта*.

Второй постулат называется *принципом постоянства скорости света*. Скорость света в пустоте (вакууме) одинакова во всех инерциальных системах отсчёта и не зависит от движения источников и приёмников света. Необходимо отметить, что световые сигналы, вообще говоря, не требуются при обосновании СТО, т.е. второй постулат можно сформулировать и по-другому: как существование предельной (максимальной) скорости. По своей сути она должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчёта хотя бы потому, что в противном случае различные ИСО не будут равноправны, что противоречит принципу относительности (первому постулату).

Принципиальное отличие подхода Эйнштейна состоит в том, что он не объяснял с помощью классической физики отрицательный результат опыта Майкельсона-Морли, а принял его за постулат (аксиому), подвергнув пересмотру саму классическую физику, в частности, представления об абсолютном пространстве и времени. Преобразования Галилея не согласуются с постулатами СТО. Так, согласно преобразованиям Галилея, могут быть скорости больше, чем скорость света.

1.8.3 Преобразования Лоренца и их следствия

В 1904 году голландский физик Х.Лоренц ещё до появления теории относительности вывел формулы, связывающие между собой пространственные координаты и моменты времени одного и того же события в двух различных инерциальных системах отсчёта. Это преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны. В преобразованиях Лоренца изменяются не только координаты, но и время, которое не считается текущим одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. В простейшем случае,

изображённом на рисунке 1.35, когда система K' движется равномерно и прямолинейно вдоль оси x , преобразования Лоренца для координат и времени имеют вид

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; y' = y; z' = z; t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.186)$$

В системе K :

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; y = y'; z = z'; t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.187)$$

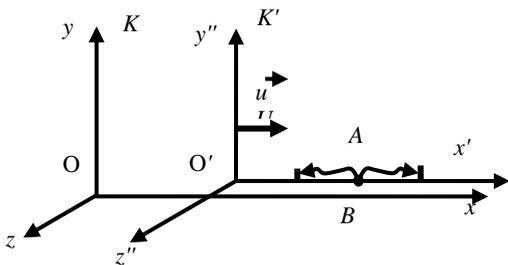


Рисунок 1.35

При движении тел и систем отсчета со скоростями, намного меньшими скорости света преобразования Лоренца, переходят в преобразования Галилея. Действительно, если $u \ll c$, то $u/c \ll 1$.

Если $u > c$, то выражения (1.186), (1.187) теряют физический смысл, что согласуется со вторым постулатом теории относительности.

Из постулатов СТО вытекает несколько основных следствий:

1 *Относительность одновременности событий в разных системах отсчёта.* Пусть система K' движется относительно системы K в направлении оси x . В системе K' точки B и C равноудалены от точки A ($AB = AC$). Из точки A отправляются световые сигналы. Очевидно, что сигналы достигают точек A и C одновременно по часам системы K' . Однако для наблюдателя в системе K эти два события не будут одновременными. Скорость света в системе K равна c по всем направлениям. Но точка B движется навстречу сигналу, а точка C – от сигнала. Поэтому с точки зрения наблюдателя в системе K сигнал в точку B придёт раньше,

чем в точку C . А это означает, что не имеет смысла говорить об одновременности протекания пространственно разделённых событий без указания системы отсчёта.

То же самое касается пространственных и временных промежутков. Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = t$. Будут ли эти события одновременными в системе K' ? Согласно преобразованиям Лоренца (1.186), в системе K' , движущимся относительно K со скоростью u , этим событиям будут соответствовать координаты

$$x'_1 = \frac{x - ux}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x'_2 = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где $\beta = \frac{u}{c}$.

Так же этим событиям будут соответствовать моменты времени

$$t'_1 = \frac{t - \frac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t'_2 = \frac{t - \frac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Из этих выражений видно, что в случае, если одновременные в системе K события происходят в одном месте пространства ($x_1 = x_2$), то они будут в системе K' совпадать и в пространстве ($x'_1 = x'_2$), и во времени ($t'_1 = t'_2$). Если события в системе K пространственно разделены ($x_1 \neq x_2$), то в системе K' они также пространственно

разделены ($x'_1 \neq x'_2$)

и, кроме того, они не будут в системе K' одновременными

($t'_1 \neq t'_2$). Но в силу принципа относительности системы K и K' совершенно

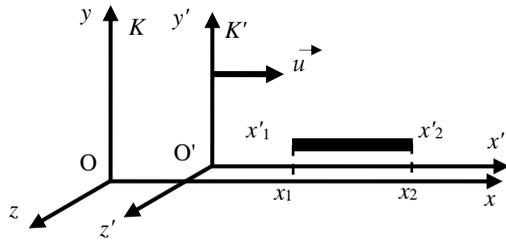


Рисунок 1.36

равноправны. Поэтому можно утверждать, что *одновременность пространственно разделенных событий относительна*.

2 *Относительность длин.* Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x (x') и покоящийся относительно подвижной системы отсчёта K' . Длина его в этой системе равна $l_0 = x'_2 - x'_1$. Относительно системы K стержень движется со скоростью u . Для определения его длины в системе K необходимо отметить концы стержня в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = t$. Разность этих координат даёт величину длины стержня в системе K $l = x_2 - x_1$.

Запишем преобразования Лоренца, связывающие x, x', t .

В системе K'

$$x'_1 = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x'_2 = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Тогда
$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ или } l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

В системе K

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{1.188}$$

Таким образом, наблюдается сокращение размеров тел в направлении движения (лоренцево сокращение): *длина стержня, измеренного в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l_0 , измеренной в системе, относительно которой он покоится*. Сокращение длины тела наблюдается только в направлении его движения, а поперечные размеры тела остаются неизменными. Сокращение длины тела не связано с действием каких-либо сил, «сдавливающих» стержень вдоль его длины; это кинематический эффект, вытекающий из преобразований Лоренца.

3 *Длительность событий в разных системах отсчёта.* Пусть в точке, неподвижной относительно движущейся системы отсчёта K' , происходит событие, длящееся время $\Delta t'_0 = t'_2 - t'_1$. Началу события соответствует координата $x'_1 = x'$ и момент времени t'_1 . Концу события

соответствует координата $x'_2 = x'$ (та же самая точка) и момент времени t'_2 . Относительно неподвижной системы K эта точка перемещается со скоростью u . Согласно преобразованиям Лоренца, началу и концу события в системе K соответствуют следующие моменты времени:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тогда длительность события в системе K

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.189)$$

где Δt_0 – длительность события, измеренная по часам системы, относительно которой тело покоится (K'); Δt – длительность события, измеренная по часам системы, относительно которой тело движется со скоростью u (система K). Промежуток времени, измеренный по часам неподвижного наблюдателя, т.е. по собственным часам, оказывается меньше, чем промежуток времени, измеренный по часам, относительно которых тело движется ($\Delta t_0 < \Delta t$). С точки зрения наблюдателя в системе K , идентичные по устройству движущиеся часы (в системе K') идут медленнее, чем его собственные. Наблюдается эффект *замедления времени*.

Этот вывод получил экспериментальное подтверждение: μ -мезоны, имеющие собственное время жизни, равное $2 \cdot 10^{-6}$ с, двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, могут пройти расстояние не более 600 м. Однако, образуясь в космических лучах на высоте 20 – 30 км от поверхности Земли, они успевают достичь её поверхности (за время $\tau \sim 10^{-4}$ с). Это связано с тем, что время, отсчитанное по часам экспериментатора, находящегося на Земле, оказывается *больше* собственного времени жизни μ -мезона. С другой стороны, наблюдатель, неподвижный относительно μ -мезона, измерил бы расстояние до Земли, равным примерно 600 м.

1.8.4 Интервал между событиями

Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значения которых в различных системах отсчета разные. Но относительный характер этих величин в теории Эйнштейна означает относительность компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т.е. являющейся инвариантной по отношению к преобразованию координат. Такой физической величиной является интервал между двумя событиями. Каждое событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло, определяемое координатами x, y, z и временем t , когда это событие произошло. Если в ньютоновской механике пространственно-временные характеристики, определяющие событие, не зависят друг от друга, то в СТО для описания события вводится воображаемое четырехмерное пространство, на координатных осях которого откладываются пространственные координаты и время. В этом пространстве каждое событие характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, t) и изобразится точкой, которую принято называть *мировой точкой*. Всякой частице, даже неподвижной, соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая *мировой линией*. Для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной оси t .

Если одно событие имеет координаты x_1, y_1, z_1, t_1 , а другое — x_2, y_2, z_2, t_2 , то интервалом между этими событиями называют величину s_{12} , определяемую формулой

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.190)$$

Запишем расстояние между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события:

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Тогда выражение (1.190) с учетом введенного обозначения l_{12} можно записать так:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2}. \quad (1.191)$$

Интервал между теми же событиями в системе K' можно записать аналогично:

$$s'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (1.192)$$

Можно показать, что величина интервала между двумя данными событиями оказывается одной и той же во всех инерциальных системах отсчета:

$$s_{12} = s'_{12}.$$

Таким образом, интервал является инвариантом по отношению к переходу от одной инерциальной системе отсчета к другой.

Пусть первое событие заключается в том, что из точки с координатами x_1, y_1, z_1 отправлен световой сигнал в момент времени t_1 , а второе событие – прием этого сигнала в точке x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2 . Скорость распространения сигнала равна c , следовательно, расстояние между точками l_{12} равно $c(t_2 - t_1)$. Как следует из (1.191), интервал между событиями $s_{12} = 0$. Такой интервал называется *светоподобным*.

Если расстояние между точками, в которых произошли события $l_{12} > c(t_2 - t_1)$, то эти события не могут оказать влияние друг на друга (в природе нет воздействий, распространяющихся со скоростью большей c), т.е. события не могут быть причинно связаны друг с другом. В этом случае интервал s_{12} будет мнимым. Мнимые интервалы называются *пространственноподобными*. События, разделенные такими интервалами, ни в какой системе отсчета не могут оказаться пространственно совмещенными. Действительно, при $l_{12} = 0$ интервал s_{12} будет вещественным, а в силу инвариантности он во всех системах отсчета должен оставаться мнимым. Но для событий, разделенных *пространственноподобными* интервалами всегда можно найти такую систему отсчета, в которой они происходят одновременно. При условии $c(t_2 - t_1) = 0$ интервал s_{12} будет мнимым. Понятие одновременности для этих событий, как и их последовательность могут меняться в различных системах отсчета. В одних системах отсчета первое событие происходит раньше, в других – второе.

Если расстояние между точками, в которых произошли события $l_{12} < c(t_2 - t_1)$, то интервал между событиями будет являться вещественным. Такие интервалы называются *временноподобными*. События, разделенные *временноподобными* интервалами, могут быть причинно связаны друг с другом. Для таких событий не существует

системы отсчета, в которой они происходили бы одновременно. При условии $c(t_2 - t_1) = 0$ интервал s_{12} будет мнимым, но имеется система отсчета, в которой они происходят в одной и той же точке пространства. Если события связаны времениподобным интервалом, последовательность событий сохраняется в различных системах отсчета, т.е. во всех системах событие, являющееся причиной, будет предшествовать следствию. Светоподобный интервал обладает теми же свойствами, что и времениподобный интервал.

1.8.5 Релятивистская кинематика. Сложение скоростей

Пусть космический корабль движется относительно неподвижного наблюдателя со скоростью u , предмет внутри корабля движется в ту же сторону со скоростью v' относительно корабля. Определим скорость v , с которой будет перемещаться предмет относительно неподвижного наблюдателя. Выберем ось x в направлении движения корабля. Внутри корабля перемещение предмета будет $x' = v't'$. Координата и время перемещения тела относительно неподвижного наблюдателя могут быть найдены в соответствии с уравнением (1.187) преобразованиями Лоренца:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1.193)$$

Подставив значение x' в выражение (1.193), получим

$$x = \frac{v_1 t' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad t = \frac{t' + \frac{uv_1 t'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1.194)$$

Для неподвижного наблюдателя (в K -системе) скорость v тела может быть найдена из уравнения

$$v = \frac{x}{t} = \frac{v't' + ut'}{t' + \frac{v'ut'}{c^2}} = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}}. \quad (1.195)$$

В системе K'

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}}. \quad (1.196)$$

Формулы (1.195), (1.196) применимы только в том случае, если все три вектора \vec{v} ; \vec{v}' ; \vec{u} направлены вдоль одной прямой. В общем случае закон имеет более сложный вид. Однако при любой форме записи закона его сущность заключается в том, что скорость света в вакууме является предельной скоростью передачи сигналов. Действительно, пусть $u = c$, $v' = c$. Найдем скорость v в системе K в соответствии с формулой (1.195):

$$v = \frac{c + c}{1 + \frac{cc}{c^2}} = c.$$

С точки зрения стороннего наблюдателя (в неподвижной системе K), скорость света внутри корабля, движущегося с любой скоростью u , равна скорости света:

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{cu}{c^2}} = \frac{(c + u)c^2}{c^2 + cu} = \frac{(c + u)c^2}{(c + u)c} = c.$$

Если $u \ll c$, $v' \ll c$, то членом $\frac{v'u}{c^2}$ в знаменателе формулы (1.195) можно пренебречь, и тогда получим классический закон сложения скоростей. Это согласуется с принципом соответствия, согласно которому новая физическая теория не отвергает целиком предшествующую теорию, а указывает предел применимости старой теории.

1.8.6 Релятивистская динамика

Уравнения Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея. Однако по отношению к преобразованиям Лоренца они оказываются неинвариантными. В частности, неинвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца, вытекающий из законов Ньютона, закон сохранения импульса. Рассмотрим в системах K и K' прямой центральный абсолютно неупругий удар (рисунок 1.37) двух одинаковых шаров массой m .

Пусть в системе K шары движутся навстречу друг другу вдоль оси x с одинаковыми по модулю скоростями $v_{1x} = v$ и $v_{2x} = -v$. Запишем закон сохранения импульса для случая неупругого удара в системе K :

$$mv_{1x} + mv_{2x} = 2mv_{ox}, \quad (1.197)$$

где v_{ox} – проекция на ось x вектора общей скорости шаров после удара. Подставив значения проекций скоростей в уравнение (1.197), получим, что полный импульс системы шаров в системе отсчёта K до и после столкновения равен нулю:

$$mv - mv = 0 \Rightarrow 2mv_{ox} = 0 \Rightarrow v_o = 0,$$

т.е. в системе K после столкновения шары будут покоиться.

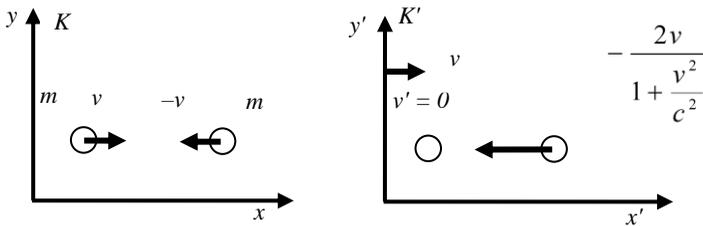


Рисунок 1.37

Рассмотрим этот же процесс в системе K' . Система K' движется относительно K со скоростью v . Скорости шаров в системе K' до столкновения могут быть найдены в соответствии с формулой (1.196):

$$v'_{1x} = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{vu}{c^2}} = \frac{v - v}{1 + \frac{vu}{c^2}} = 0;$$

$$v'_{2x} = \frac{v_2 - u}{1 - \frac{vu}{c^2}} = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Следовательно, суммарный импульс до столкновения

$$mv'_{1x} + mv'_{2x} = \frac{-2mv}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Скорость шаров после столкновения в системе K' в соответствии с формулой (1.196)

$$v'_0 = \frac{v_0 - u}{1 - \frac{v_0 u}{c^2}} = \frac{0 - v}{1 - \frac{0}{c^2}} = -v.$$

Суммарный импульс после столкновения

$$2mv_{0x} = -2mv.$$

Таким образом, импульс системы до столкновения отличается от импульса системы после столкновения, т.е. из выражения ньютоновской механики для импульса следует, что в системе K' импульс не сохраняется. Это означает, что закон сохранения импульса в ньютоновской формулировке неинвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца.

Можно показать, что условию инвариантности закона сохранения импульса удовлетворяет следующее выражение для импульса:

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \quad (1.198)$$

где $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ – промежуток времени, измеренного по часам,

движущимся вместе с частицей, dt – промежуток времени в той системе отсчета, относительно которой наблюдается движение тела.

Отсюда следует

$$\vec{P} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.199)$$

При $v \ll c$ выражение (1.199) переходит в ньютоновское выражение для импульса тела. Если предположить, что масса не является постоянной инвариантной величиной, а зависит от скорости по закону

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.200)$$

где m_r – релятивистская масса, m_0 – масса покоя (эта терминология в настоящий момент считается устаревшей, принято считать инвариантом именно массу), то выражение (1.199) для импульса будет иметь привычный (классический) вид

$$\vec{P} = m_r \vec{v}. \quad (1.201)$$

В классической механике масса тела является мерой его инертных свойств и мерой гравитационного взаимодействия. Инертность и способность к гравитационным взаимодействиям представляют собой различные проявления свойств материи, но эти свойства всегда существуют совместно и всегда друг другу пропорциональны. Многочисленные экспериментальные факты доказывают, что инертная и гравитационная массы равны. В классической механике масса рассматривается и как мера количества вещества: чем больше отдельных частиц (атомов) содержит физическая система, тем больше её масса.

В СТО масса тела напрямую не является мерой количества вещества, так как в релятивистской теории в понятие материи включается не только вещество (например, протоны, нейтроны, электроны), но и излучение (например, фотоны). Здесь учитывается, что энергия отдельных частиц очень велика, и поэтому масса будет определяться не столько числом частиц, сколько их энергиями и взаимной ориентацией импульсов.

Из постулатов теории относительности вытекает, что скорость частицы может быть либо равна скорости света во всех инерциальных системах, либо меньше скорости света. Соответственно рассматриваются два класса частиц. Частицы, движущиеся с абсолютной скоростью, отличаются предельной инертностью: они всегда движутся только по инерции и не могут быть ни замедлены, ни ускорены. На основании этого предположили, что масса таких частиц равна нулю. Эти частицы называют безмассовыми (например, фотоны).

Уравнение второго закона Ньютона оказывается инвариантным относительно преобразований Лоренца, если под импульсом понимать величину (1.20). Релятивистское выражение второго закона Ньютона имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.202)$$

Если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то под силой \vec{F} следует понимать равнодействующую силу.

Уравнение (1.202) – *основной закон релятивистской динамики материальной точки*. При $v \ll c$ выражение (1.202) переходит в основной закон классической механики. Таким образом, можно утверждать, что классическая механика – это механика макротел, движущихся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света в вакууме).

1.8.7 Энергия в релятивистской механике.

Закон взаимосвязи массы и энергии

Умножим уравнение (1.202) на перемещение частицы $d\vec{s} = \vec{v} dt$:

$$\vec{F}d\vec{s} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \vec{v} dt. \quad (1.203)$$

Правая часть этого соотношения равна работе dA , совершаемой над частицей за время dt . При рассмотрении классической механики было показано, что работа результирующей всех сил равна изменению кинетической энергии частицы. Следовательно, левая часть соотношения (1.203) должна быть равна приращению кинетической энергии W_k за время dt .

$$dW_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \vec{v} dt = \vec{v} d \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.204)$$

Интегрируя (1.204) (например, по частям), получим

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.205)$$

В случае малых скоростей ($v \ll c$) формулу (1.205) можно преобразовать, разлагая в ряд и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости. В результате во втором слагаемом получим ньютоновское выражение для кинетической энергии частицы. Если скорость частицы равна нулю, то из выражения (1.205) следует, что энергия частицы принимает значение

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (1.206)$$

Эта энергия называется энергией покоя частицы и представляет собой внутреннюю энергию частицы, не связанную с её движением как целого. В энергию покоя не входит энергия тела во внешнем силовом поле. В классической механике энергия покоя не учитывается, полагается, что энергия покоящегося тела равна нулю.

Выражение

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.207)$$

определяет полную энергию свободной частицы. В полную энергию не входит потенциальная энергия во внешнем силовом поле. Тогда из (1.205) и (1.206) следует

$$E = W_k + E_0 = W_k + m_0 c^2. \quad (1.208)$$

Если выразить *полную* энергию частицы через её импульс p , исключив из уравнения (1.207) скорость, а скорость выразить из уравнения (1.201), записав его в скалярном виде, то получим следующее выражение:

$$v^2 = \frac{c^2 p^2}{p^2 + m_0 c^2}.$$

Подставив это выражение в уравнение (1.207), получим

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (1.209)$$

Итак, свободной частице следует приписывать полную энергию, а не только кинетическую. Энергия по своему смыслу должна быть сохраняющейся величиной. Невозможно удовлетворить требование сохранения энергии во всех инерциальных системах отсчёта, если не учитывать энергию покоя (1.206) в составе полной энергии. Кроме того, из выражения (1.207) удаётся образовать инвариант, т.е. величину, не изменяющуюся при преобразованиях Лоренца. Действительно из формулы (1.207) вытекает:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2. \quad (1.210)$$

Масса (покоя) и скорость света не изменяются при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, т.е. являются инвариантными величинами. Следовательно, инвариантной является величина, стоящая в левой части равенства (1.210):

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = inv. \quad (1.211)$$

Эксперименты над быстрыми частицами подтверждают инвариантность величины (1.211). Если же под E в уравнении (1.211) понимать кинетическую энергию (1.204), то это выражение оказывается неинвариантным.

1.8.8 Взаимосвязь массы и энергии

Выражение (1.207) для полной энергии можно записать так:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_r c^2, \quad (1.212)$$

где m_r – релятивистская масса. Согласно формуле (1.212), полная энергия тела и его релятивистская масса пропорциональны друг другу. Всякое изменение энергии тела сопровождается изменением релятивистской массы тела и, наоборот, всякое изменение релятивистской массы сопровождается изменением полной энергии тела:

$$\Delta E = \Delta m_r c^2 \Rightarrow \Delta m_r = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (1.213)$$

Формула (1.213) выражает закон взаимосвязи релятивистской массы и полной энергии. Из сохранения полной энергии следует сохранение релятивистской массы. В противоположность релятивистской массе суммарная масса покоя частиц не сохраняется.

Из выражения (1.213) следует, что любое изменение энергии тела приводит к изменению его массы. Так, при нагревании тела его энергия возрастает, следовательно, возрастает и его масса. При нагревании 1 кг воды на 100 К её масса возрастает на $4,67 \cdot 10^{-12}$ кг. Наиболее полное практическое применение закон взаимосвязи массы и энергии нашел в атомной энергетике.

1.8.9 Понятие об общей теории относительности

В специальной теории относительности (СТО) утверждён частный принцип относительности – равноправие всех инерциальных систем в природе, иными словами, единство законов природы во всех инерциальных материальных системах, во всей Вселенной. Но кроме этого, необходимо было обобщить эти результаты на случай ускоренного движения наблюдателя и события относительно друг друга, т.к. движения такого рода широко распространены. Эти вопросы и рассматривает **общая теория относительности (ОТО)**. В ОТО устанавливается более глубокая связь, чем в СТО, между материей и пространством-временем и рассматривается теория гравитации. Теория гравитации Эйнштейна исходит из одной особенности сил тяготения, выделяющих эти силы из всех известных в природе сил. Эта особенность состоит в том, что силы тяготения всегда пропорциональны массе тела, на которое они действуют. Таким образом, все тела, вне зависимости от величины их массы или заряда, движутся в гравитационном поле совершенно одинаково, ускорение не зависит от их массы. Т.е. их траектории определяются только свойствами гравитационного поля и не зависят от свойств движущегося тела. Этот факт позволил Эйнштейну учесть влияние гравитационных полей, действующих в некоторой области пространства, введением *локальной кривизны четырёхмерного пространства*. Таким образом, пространство является Эвклидовым (кратчайшее расстояние между точками – прямая линия) только в отсутствие масс, приводящих к появлению сил тяготения. *Наличие масс приводит к изменению пространства-времени. Пространство приобретает кривизну. Движение тел по инерции в таком пространстве происходит по некоторым кривым. Движение в поле тяготения не есть собственно движение под действием сил, а есть движение по инерции в пространстве с кривизной, обусловленной наличием тяготеющих масс. Отсюда следует тождественность инерционной и гравитационной масс.* В области действия масс (в

поле тяготения) меняется и *скорость течения времени*. Чем больше поле тяготения, тем медленнее течёт время.

Распространение принципа относительности для любых реальных, т.е. находящихся в поле тяготения и ускоренных, тел является величайшим достижением теории Эйнштейна. Столь же важным является установление связи между основными характеристиками материальных тел – их массой и свойствами пространства и времени. Это огромный шаг вперёд по сравнению с представлениями Ньютона, в которых пространство, время и материя разрознены, и свойства материи не сказываются на свойствах пространства и времени. Имеются опытные факты, подтверждающие положения общей теории относительности.

Из общей теории относительности следует, что должно наблюдаться отклонение лучей света в поле тяготения. Наблюдения, произведённые над звёздами, свет от которых проходит вблизи поверхности Солнца (такие наблюдения удаётся проводить лишь в моменты полных солнечных затмений), подтвердили правильность предсказаний Эйнштейна. Согласно ОТО, время в полях тяготения течёт медленнее. Это означает, что медленнее движутся электроны в атомах, меньше частоты испускаемого излучения. Весь спектр излучения смещается в область больших длин волн, в "красную сторону". Это явление получило название "красного" гравитационного смещения. Для спектров излучения звезд, называемых "белыми карликами", "красное" гравитационное смещение не только обнаружено, но и хорошо измерено, находится в полном соответствии с теорией и служит одним из способов определения масс таких звёзд.

2 ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1 Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

2.1.1 Статистический и термодинамический методы

В отличие от механики, которая изучает движение отдельных частиц или тел под действием различных сил, молекулярная физика и термодинамика имеют дело со свойствами вещества. Как показывает опыт, всякое вещество состоит из большого числа отдельных микроскопических частиц – атомов и молекул, которые взаимодействуют между собой и находятся в непрерывном движении. Такая система частиц называется *макроскопической*.

Молекулярная физика и термодинамика изучают одни и те же явления, а именно *макроскопические процессы* в телах, т.е. явления, которые связаны с колоссальным количеством содержащихся в телах атомов и молекул, но не зависящие от свойств отдельных частиц, образующих это тело. Эти разделы физики, взаимно дополняя друг друга, отличаются различными подходами (методами) к изучаемым явлениям, которые получили названия *статистического* и *термодинамического методов*. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй – термодинамики.

Молекулярная физика – это раздел физики, изучающий макроскопические свойства тел исходя из представлений об атомно-молекулярном строении вещества и рассматривающий теплоту как беспорядочное движение атомов и молекул. Молекулярную физику называют *молекулярно-кинетической теорией* (МКТ) строения вещества. Согласно молекулярно-кинетическим представлениям любое тело состоит из атомов и молекул. Эти частицы находятся в беспорядочном, хаотическом движении, называемым тепловым, интенсивность которого зависит от температуры тела. Частицы взаимодействуют друг с другом, как силами притяжения, так и силами отталкивания. Опытным подтверждением МКТ являются броуновское движение, диффузия и другие явления. МКТ позволяет единым образом подойти к изучению разнообразных физических явлений, таких как теплопроводность, расширение твердых тел при нагревании, объяснить механизм давления газа на стенки сосуда и многое другое, основываясь на представлении о дискретности строения вещества и тепловом движении и взаимодействии его молекул.

Простейшее взаимодействие между частицами – обычное механическое столкновение, но взаимодействия могут быть и более сложными. Для описания взаимодействий между

отдельными частицами можно было бы воспользоваться законами классической механики. Но практически невозможно написать и решить систему дифференциальных уравнений движения такого множества частиц. Кроме того, система большого числа частиц, образующая макроскопическое тело, благодаря взаимодействию между частицами обнаруживает качественно новые свойства по сравнению с механической системой конечного числа частиц. В совокупном движении огромного числа частиц, координаты и скорости которых в любой момент времени случайны, проявляются определённые статистические закономерности. Макроскопические свойства тела определяются суммарными и усредненными по большому числу частиц величинами. Например, в газах можно определить средние значения скоростей молекул и их энергий, однозначно связанных с температурой. Поэтому для описания движения молекул используется *статистический* метод, основанный на законах теории вероятности и математической статистики. Таким образом, молекулярно-кинетическая теория объясняет макроскопические свойства тел, которые непосредственно наблюдаются на опыте (давление, температура и т.п.) как суммарный результат действия молекул. При этом она пользуется статистическим методом, описывая не движение отдельных молекул, а оперируя такими средними величинами, которые характеризуют движение огромной совокупности частиц. Отсюда другое название МКТ – *статистическая физика*.

Термодинамика является аксиоматической наукой, основанной на положениях, принимаемых без доказательства, которые вытекают из опыта. Она не вводит никаких специальных гипотез и конкретных представлений о строении вещества и физической природе теплоты. Её выводы основаны на общих *принципах*, или *началах*, являющихся обобщением опытных фактов. Термодинамика изучает общие свойства макроскопических систем, которые находятся в состоянии термодинамического равновесия и процессы перехода к этим состояниям. В термодинамике физические свойства макроскопических систем изучаются с помощью термодинамического метода. *Термодинамический метод* исследования поведения большого числа молекул не рассматривает внутреннее строение изучаемых тел, а основан на

анализе условий и количественных соотношений при различных превращениях энергии, происходящих в системе.

Термодинамика изучает только *термодинамически равновесные состояния* тел или систем. Равновесной называется такая система, параметры состояния которой одинаковы во всех точках системы и не изменяются со временем (при неизменных внешних условиях). Переход из одного равновесного состояния в другое называется *процессом*. Если систему предоставить самой себе, то она обязательно перейдет в равновесное состояние. Такой процесс называется *релаксацией*. Время, которое требуется для установления равновесия по какому-либо параметру, называют *временем релаксации*. Строго говоря, равновесных процессов в природе не бывает. Для получения строго равновесного процесса изменения должны происходить бесконечно медленно. *Термодинамика изучает медленные процессы (квазистатические), которые могут рассматриваться как множество равновесных состояний, следующих друг за другом.*

В основе термодинамики лежат четыре закона (начала), являющиеся обобщением огромного количества опытных данных: I начало – «принцип энергии», II – «принцип энтропии», III – «постулат Нернста», а также «нулевое» начало термодинамики, называемое «принцип температуры», которое формулируется следующим образом: *для каждой термодинамической системы существует состояние термодинамического равновесия, которое она, при фиксированных внешних условиях, достигает.* Такое название обусловлено тем, что только лишь после того, как были открыты первое и второе начала термодинамики, стало ясно, что этот практически очевидный постулат нужно поставить впереди. По существу, «нулевое» начало термодинамики постулирует *существование температуры.*

Термодинамика и молекулярно-кинетическая теория, подходя к рассмотрению изменений состояний вещества с различных точек зрения, взаимно дополняют друг друга, образуя, по существу, одно целое.

2.1.2 Макроскопические параметры

Совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами,

называют *термодинамической системой*. Система может состоять из одного тела (только вода или вода и пар над ней) или из нескольких тел (взвешенные мелкие частицы в воде). Поведение макроскопических тел, в частности газов, можно охарактеризовать немногим числом физических величин, относящихся не к отдельным молекулам, составляющим тела, а ко всем молекулам в целом. Величины, характеризующие состояние макроскопических тел без учета молекулярного строения тел, называют *макроскопическими параметрами* (*термодинамическими параметрами*, или параметрами состояния). К ним относятся объем, давление, температура. Свойства термодинамической системы определяются макроскопическими параметрами и не зависят от того, каким путем система была приведена в данное состояние.

2.1.3 Уравнение состояния идеального газа. (уравнение Менделеева-Клапейрона)

Для определения и описания некоторых свойств газов используется физическая модель идеального газа. **Идеальный газ** – это наиболее простая и идеализированная модель, обладающая следующими свойствами:

- 1) собственный объем молекул газа пренебрежительно мал по сравнению с объемом сосуда;
- 2) между молекулами идеального газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновение молекул газа между собой и со стенками сосуда происходит по закону абсолютно упругого удара.

Наиболее близки по своим свойствам к идеальному газу разреженные газы, $P < 13,3 \text{ Па}$ (10^{-1} мм рт. ст.) Многие газы (азот, водород, гелий, кислород, воздух) при *нормальных условиях*, т.е. давлении $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $T_0 = 273,15 \text{ К}$ с хорошим приближением можно считать идеальными. Практическое применение молекулярно-кинетическая теория идеального газа нашла при разработке газодинамической теории плазмы. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действие молекулярной силы теорию идеального газа, можно уточнить, т.е. перейти к теории реальных газов.

Состояние данной массы газа определяется значением трех макроскопических параметров: давления p , объема V , температуры T . (Температура T называется *абсолютной* и измеряется в кельвинах). Между параметрами системы есть связи, которые установлены теоретическим или опытным путем. Математические выражения для этих связей называются *уравнениями состояния*. Уравнения состояния для термодинамической системы есть функция вида

$$f(p, V, T) = 0, \quad (2.1)$$

где каждая из переменных является функцией двух других. Благодаря наличию уравнений состояния, значения одних параметров могут быть найдены, если известны значения других. Некоторые параметры (экстенсивные) относятся ко всей системе в целом, они обычно обладают свойствами аддитивности (объем). Другие параметры (интенсивные) могут быть отнесены к данной малой области системы (давление, температура). Эти параметры в разных местах системы могут быть различны. Они представляют собой функции координат точек системы. Если значение какого-либо из параметров во всех точках системы со временем не изменяется, то в системе по этому параметру установлено равновесие. Если равновесие установлено по всем параметрам, то систему, как уже говорилось выше, называют *равновесной*.

На основе экспериментов с достаточно разреженными газами был установлен ряд законов, справедливых для идеальных газов. Это законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Уравнение, описывающее все три закона, носит название уравнения Менделеева–Клапейрона. Оно имеет вид

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (2.2)$$

где m – масса газа, кг; M – молярная масса газа, кг/моль; $\nu = \frac{m}{M}$ –

количество вещества, моль; $R = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная

газовая постоянная. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует:

1 При одинаковых давлениях и температуре в равных объемах любого газа содержится одинаковое число молекул (закон Авогадро).

$$pV = \frac{m_1}{M_1} RT; \quad pV = \frac{m_2}{M_2} RT. \quad (2.3)$$

Отсюда получаем

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow N_1 = N_2.$$

2 Разные газы, содержащие одинаковое число молекул, будут при одинаковых давлениях и температуре занимать равные объёмы. При *нормальных условиях* $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1 \text{ атм}$ один моль любого газа будет занимать объём

$$V_0 = \frac{RT}{p} = \frac{8,31 \cdot 273}{1,01 \cdot 10^5} = 22,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}. \quad (2.4)$$

Число молекул газа в единице объёма при нормальных условиях (число Лошмидта)

$$N_0 = \frac{N_A}{V_0} = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4 \cdot 10^{-3}} \cong 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – постоянная Авогадро. Она численно равна числу молекул, содержащихся в моле любого вещества.

3 *Закон Дальтона* устанавливает связь между парциальными давлениями газов, входящих в смесь и полным давлением газа: *полное давление газа равно сумме парциальных давлений всех газов, входящих в смесь. Парциальным* называется давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объём.

Рассмотрим смесь газов, находящихся в объёме V при температуре T . Пусть M_1, M_2, \dots, M_n ; m_1, m_2, \dots, m_n – молярные массы и массы газов, заполняющих объём. Запишем выражение для парциальных давлений газов, входящих в смесь в соответствии с уравнением (2.2). Тогда давление смеси

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n} \right) \frac{RT}{V}. \quad (2.5)$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона для смеси газов имеет вид

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n} \right) RT. \quad (2.6)$$

2.1.4 Давление с точки зрения молекулярно-кинетической теории (МКТ). Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Одной из основных задач молекулярно-кинетической теории является объяснение природы макроскопических параметров идеального газа на основе молекулярно-кинетических представлений. Ещё в XVIII веке Даниил Бернулли предположил, что давление газа – есть следствие столкновения газовых молекул со стенками сосуда. В соответствии с основными положениями МКТ, молекулы газа участвуют в тепловом движении, сталкиваясь

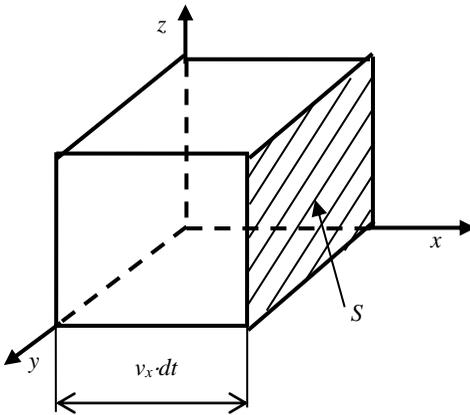


Рисунок 2.1

друг с другом значительно чаще, чем со стенками сосуда. Однако, как показал Дж. Максвелл, для идеального газа взаимные столкновения молекул не влияют на величину давления газа на стенки сосуда. Поэтому при расчете давления газа на основе молекулярно-кинетических представлений будем предполагать, что молекулы не испытывают взаимных столкновений и изменяют скорость своего движения только при

соударении со стенками сосуда. Для вывода основного уравнения МКТ рассмотрим одноатомный идеальный газ, находящийся в термодинамическом равновесии. По определению, давлением называют физическую величину p , численно равную силе, действующей на единицу площади поверхности тела по направлению нормали к этой поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Рассмотрим сосуд в виде куба с длиной ребра l (рисунок 2.1), в котором находятся N молекул массой m_0 , участвующих в тепловом движении. Вычислим давление p , оказываемое газом на одну из граней куба, расположенную перпендикулярно оси Ox , площадью S . Обозначим через \vec{v}_i вектор скорости произвольной молекулы газа, имеющей массу m_0 . Вектор \vec{v}_i можно разложить на три составляющие вдоль координатных осей:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{ix} + \vec{v}_{iy} + \vec{v}_{iz}. \quad (2.7)$$

При абсолютно упругом ударе молекулы о данную грань куба составляющие скорости \vec{v}_{iy} ; \vec{v}_{iz} не изменяются, а составляющая скорости \vec{v}_{ix} меняет свое направление на противоположное. Полное изменение импульса молекулы при ударе

$$\Delta\vec{p} = \Delta(m_0\vec{v}_{ix}) = -2m_0\vec{v}_{ix}.$$

Долетев до противоположной стенки, молекула отразится от нее и снова ударится о первую стенку. Время между ударами составит $\Delta t = 2l/v_x$, а число ударов за 1 с будет

$$n_x = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v_x}{2l}.$$

За 1 с молекула сообщит стенке импульс с компонентой вдоль оси x , модуль которого

$$n_x \Delta p = 2m_0 v_x \frac{v_x}{2l} = \frac{m_0 v_x^2}{l}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона, импульс силы, действующий со стороны стенки на молекулу, численно равен изменению импульса молекулы. По третьему закону Ньютона такая же по модулю, но противоположная по направлению сила будет действовать на стенку. Следовательно, импульс, передаваемый за единицу времени стенке, равен силе, с которой данная молекула действует на стенку. Таким образом, i -я молекула действует на стенку с силой, компонента которой в направлении оси x

$$F_{ix} = \frac{m_0 v_x^2}{l}.$$

Компонента силы, действующей вдоль оси x со стороны всех частиц, находящихся в сосуде, составит

$$F_x = \sum_{i=1}^N F_{ix} = \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_{ix}^2}{l}.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$F_x = \frac{m_0 N}{l} \sum_{i=1}^N \frac{v_{ix}^2}{N}. \quad (2.8)$$

Величина $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2$ есть средний квадрат компоненты скорости молекулы в направлении оси x , а величина $\langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2}$ называется средней квадратичной скоростью молекулы. С учетом принятых обозначений формула (2.8) будет иметь вид

$$F_x = \frac{m_0 N \langle v_x^2 \rangle}{l}. \quad (2.9)$$

Если разделить правую и левую часть равенства (2.9) на площадь стенки S , то получим величину давления на стенку:

$$P = \frac{F_x}{S} = \frac{m_0 N \langle v_x^2 \rangle}{lS}.$$

Но lS есть объем сосуда V . Следовательно,

$$P = \frac{F_x}{S} = \frac{m_0 N \langle v_x^2 \rangle}{V} = m_0 n \langle v_x^2 \rangle, \quad (2.10)$$

где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул. Таким образом, давление газа на стенку оказалось связанным со средним квадратом скорости смещения частиц в направлении нормали к стенке.

Воспользуемся теперь соотношением $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$. Усредняя его по всем частицам, получим $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$. Движение молекул газа в сосуде по всем направлениям равновероятно ввиду хаотичности теплового движения и все направления в пространстве равноправны, поэтому $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ и, следовательно, $\langle v_x^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3$. Тогда выражение для давления (2.10) принимает вид

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle. \quad (2.11)$$

Учтем, что величина $m_0 \langle v^2 \rangle / 2$ равна средней кинетической энергии поступательного движения молекулы $\langle W_k \rangle$. Окончательно получим

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_k \rangle. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.11) и эквивалентное ему уравнение (2.12) называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов*. Оно связывает макропараметр p с микропараметрами $\langle v^2 \rangle$, $\langle W_k \rangle$ и показывает, что понятие давления имеет смысл средней величины и неприменимо к отдельной молекуле.

2.1.5 Молекулярно-кинетическое толкование термодинамической температуры

Понятие температуры тесно связано с понятием теплового равновесия. Если два тела разной температуры привести в соприкосновение, то, как показывает опыт, между ними будет происходить теплообмен – процесс передачи энергии от более нагретого тела к менее нагретому, сопровождающийся изменением ряда физических параметров. Через некоторое время изменение макроскопических параметров тел прекращается, т.е. тела приходят в состояние термодинамического равновесия. Во всех частях системы тел, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, макроскопические параметры сколь угодно долго остаются

неизменными. Во всех частях такой системы температура одинакова и имеет строго определенное значение, а давление и объем могут быть различны (но постоянны).

Следовательно, температура как макроскопический параметр характеризует состояние теплового равновесия термодинамической системы, а также определяет возможность и направление теплопередачи от одного тела к другому. Рассмотрим понятие температуры с точки зрения МКТ. Учитывая, что $n = N / V = N_A(m / M) / V$, где V – объем газа, перепишем выражение (2.12) в виде

$$pV = \frac{2}{3} N_A \frac{m}{M} \langle W_k \rangle. \quad (2.13)$$

С другой стороны, с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона, выражение (2.13) можно записать следующим образом

$$\frac{2}{3} N_A \frac{m}{M} \langle W_k \rangle = \frac{m}{M} RT.$$

После преобразований получим:

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (2.14)$$

где $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

На основании уравнения (2.14) можно утверждать, что *абсолютная температура T есть мера средней кинетической энергии поступательного движения молекулы. Это и является молекулярно-кинетическим толкованием термодинамической температуры.* Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, является величиной статистической. Нет смысла говорить о температуре одной молекулы. Абсолютная температура T не может быть отрицательной, т.к. кинетическая энергия – величина положительная.

Учитывая зависимость (2.14), основное уравнение МКТ (2.12) для идеального газа можно записать в виде

$$p = nkT. \quad (2.15)$$

Принимая в расчет, что $\langle W_k \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}$, теперь из формулы (2.14)

можно найти выражение для определения средней квадратичной скорости движения молекул:

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (2.16)$$

Как следует из выражения (2.14), средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы пропорциональна температуре и зависит только от нее. Из последнего выражения и из уравнения (2.14) следует физический смысл абсолютного нуля: *абсолютный ноль – это температура, при которой должно прекратиться тепловое поступательное движение молекул газа*. Из уравнения (2.15) следует, что при абсолютном нуле давление газа при фиксированном объеме равно нулю, или объем газа стремится к нулю при неизменном давлении.

Скорости молекул в газах близки к скорости звука в этих газа. Это объясняется тем, что звуковые волны в газах переносятся движущимися молекулами. Скорость звука в газе

$$v_{\text{зв}} \approx \sqrt{\frac{p}{\rho}}, \quad (2.17)$$

где ρ – плотность газа.

Для измерения температуры пользуются тем, что при изменении температуры тела изменяют свои свойства. Поэтому для измерения температуры выбирают какое-то *термометрическое вещество* (например, ртуть) и определяют величину, характеризующую свойство вещества, – *термометрическую величину* (например, длина столбика ртути). Устройство большинства термометров основано на предположении, что положенное в основу измерения физическое свойство термометрического тела линейно непрерывно зависит от температуры. Для построения шкалы выбирают две реперные точки, которым приписываются произвольные значения температуры. В метрической системе для практического применения принята шкала Цельсия (Международная практическая шкала температур). При построении этой шкалы принимают, что при нормальном атмосферном давлении

температура плавления льда равна 0 °С, а температура кипения воды 100 °С. Этот интервал разбили на 100 частей и 1/100 назвали градусом.

В международной системе единиц (СИ) используют термодинамическую шкалу температур. Так как температура играет важную роль в физике, она входит в число основных единиц системы СИ (1 К – Кельвин). За нулевую температуру по абсолютной термодинамической шкале температур принят абсолютный ноль. В качестве второй реперной точки принята температура, при которой находятся в термодинамическом равновесии вода, лед и насыщенный пар (по шкале Цельсия температура этой т.н. *тройной точки* равна 0,01 °С). Каждая единица абсолютной температуры равна градусу Цельсия. Термодинамическая температура и температура по Международной практической шкале связаны соотношением $T = t + 273,15$.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа (термометрическое тело). В качестве термометрической величины используется давление. Газовый термометр – это закрытый сосуд, наполненный идеальным газом (водород), и снабжённый манометром. При измерениях используется линейная зависимость давления идеального газа от температуры (2.15). Шкала газового термометра является абсолютной, так, например, при $T = 0$ $p = 0$.

2.2 Основы термодинамики

2.2.1 Внутренняя энергия идеального газа

Важной характеристикой термодинамической системы является ее внутренняя энергия. **Внутренняя энергия (U)** складывается из энергии хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т.д.) и энергии взаимодействия этих частиц. Во внутреннюю энергию входят кинетическая энергия поступательного, вращательного и колебательного движений молекул и атомов, потенциальная энергия их взаимодействия, а также внутримолекулярная энергия (энергия электронных оболочек и внутроядерная энергии). К внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия тела определяет его тепловое состояние и изменяется при переходе из одного состояния в другое. В данном состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией.

Приращение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в конечном и начальном состояниях независимо от пути, по которому совершался переход, т.е. независимо от характера процесса, приведшего к переходу системы из одного состояния в другое. Поэтому внутренняя энергия является *функцией состояния системы*.

Рассчитать внутреннюю энергию можно только для идеального газа. Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (т.е. молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия идеального газа U равна сумме кинетических энергий отдельных молекул:

$$U = \sum_i W_i, \quad (2.18)$$

где W_i – кинетическая энергия отдельной молекулы. Так как в результате теплового движения молекулы могут участвовать в трех видах движения: поступательном, вращательном и колебательном, то энергия молекул, состоящих из некоторого числа атомов, не жестко связанных друг с другом, будет складываться из энергии поступательного и вращательного движений молекул и энергии колебательного движения атомов в молекуле:

$$W_i = W_{\text{поступ}} + W_{\text{вращ}} + W_{\text{колеб}}.$$

Средняя энергия колебательного движения в два раза больше, чем энергия поступательного или вращательного движения, т.к. складывается из средней кинетической энергии и равной ей средней потенциальной энергии молекулы.

2.2.2 Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы

Число степеней свободы i – это число независимых координат, полностью определяющих положение тела (материальной точки, системы материальных точек) в пространстве. *Число степеней свободы молекулы*

$$i = i_{\text{поступ}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью атомов, для них $i_{\text{колеб}} = 0$. Таким образом, имеем $i = i_{\text{поступ}} + i_{\text{вращ}}$.

Число степеней свободы молекулы определяется её строением. Молекулу одноатомного газа рассматривают как материальную точку на том основании, что масса такой частицы (атома) сосредоточена в ядре, размеры которого очень малы. Она имеет три степени свободы, все три поступательные. Двухатомная молекула рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью. Она имеет пять степеней свободы: три поступательные и две вращательные. Трехатомная и многоатомная молекула имеет шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные. Для реальных молекул абсолютно жесткой связи между атомами не существует и поэтому необходимо каким-то образом учитывать степени свободы колебательного движения.

Итак, у любой молекулы три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из них не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $1/3$ значения $\langle W_i \rangle$. Таким образом, на основании выражения (2.14) можно найти энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения:

$$\frac{1}{3} \langle W_i \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Поступательное движение не является в какой-то мере выделенным по сравнению с вращательным или колебательным. При взаимных столкновениях молекул возможен обмен их энергиями и превращение энергии вращательного движения в энергию поступательного движения и обратно. Таким путём устанавливается равновесие между значениями средних энергий поступательного и вращательного движений молекул. Поэтому следует считать, что на каждую степень свободы молекулы приходится энергия, равная $kT / 2$.

Важнейший закон классической статистической физики – закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы утверждает: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую

поступательную и вращательную степени свободы молекулы в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – энергия, равная kT . Следовательно, средняя кинетическая энергия молекулы, имеющей i степеней свободы,

$$\langle W_i \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (2.19)$$

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (т.е. молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия U идеального газа представляет собой кинетическую энергию его молекул.

Для одного моля

$$U = \langle W_i \rangle N_A = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} RT. \quad (2.20)$$

для произвольной массы m газа (произвольного числа молекул N)

$$U = \langle W_i \rangle N_A = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} k T \frac{m}{M} N_A = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} \nu RT ,$$

т.е.

$$U = \frac{i}{2} \nu RT, \quad (2.21)$$

где M – молярная масса газа, $\nu = m/M$ – число молей.

Таким образом, внутренняя энергия идеального газа пропорциональна температуре газа и зависит от числа степеней свободы его молекул. В случае реального газа внутренняя энергия включает в себя еще потенциальную энергию молекул, обусловленную существованием сил межмолекулярного взаимодействия. Эту энергию можно найти, если известен характер взаимодействия между молекулами. В случае реального газа закон равномерного распределения по степеням свободы не позволяет найти его внутреннюю энергию.

2.2.3 Работа и теплота. Первое начало термодинамики (ПНТ)

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энергия замкнутой системы (т.е. системы, которая не обменивается веществом с внешней средой)

может изменяться при её взаимодействии с внешними телами двумя способами: путем совершения работы и путем теплообмена.

Первый способ передачи энергии осуществляется при силовом взаимодействии системы с внешними телами. Для совершения работы над макроскопически неподвижной системой необходимо, чтобы перемещались взаимодействующие с ней внешние тела, при этом изменялись объем и форма системы. Например, при вдвигании поршня, закрывающего сосуд с газом, поршень (внешнее тело), перемещаясь, совершает работу над газом. Газ сжимается, изменяется расстояние между частицами, а также меняется скорость их движения и, следовательно, изменяется (увеличивается) его внутренняя энергия. Количество энергии переданной системе в форме работы называется **работой A'** , совершенной над системой. Газ при этом также совершает работу над поршнем. Работу, совершаемую данным телом (системой) над внешними телами обозначают буквой A . Для одного и того же процесса, как вытекает из третьего закона Ньютона, $A = -A'$. Изменение внутренней энергии термодинамической системы путем теплообмена обусловлено различием значения температур между телами или частями одного и того же тела, термодинамической системы. Теплообмен может осуществляться не только между соприкасающимися друг с другом телами, т.е. путем теплопроводности и конвективного теплообмена, но и между удаленными телами посредством теплообмена излучением. Количество энергии, переданное системе внешними телами в форме теплоты, называется *количеством теплоты*, или **теплотой**, сообщенной системе.

В отличие от внутренней энергии, которая является функцией состояния системы, понятия работы и теплоты имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками этого процесса и зависят от способа перехода системы из начального состояния в конечное. Таким образом, теплоту и работу нельзя рассматривать как различные виды энергии системы, а следовательно, нельзя говорить ни о «запасе работы», ни о «запасе теплоты» в системе. В системе СИ теплота и работа измеряются джоулями.

В реальных условиях оба способа передачи энергии системе как в форме работы, так и в форме теплоты, сопутствуют друг другу. При

этом энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения и наоборот. Например, при нагревании тела расширяются и совершают работу против сил внешнего давления. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии. Применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных. Допустим, что некоторая термодинамическая система (например, газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией U_1 , получила некоторое количество теплоты Q и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией U_2 , совершила работу A над внешней средой, т.е. против внешних сил. В этом случае $Q = U_2 - U_1 + A$ или

$$Q = \Delta U + A. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) выражает **первое начало термодинамики**: *теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил.* Для бесконечно малых процессов выражение (2.22) записывают в дифференциальной форме

$$dQ = dU + dA$$

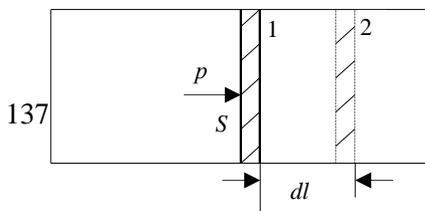
или в более корректной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2.23)$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты; dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; δA – элементарная работа. Различие в записи обусловлено тем, что только dU является полным дифференциалом, ибо является функцией состояния системы, а δQ и δA полными дифференциалами не являются.

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии $\Delta U = 0$. Тогда, согласно выражению (2.22) $A = Q$, т.е. вечный двигатель первого рода – *периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, невозможен.* Это одна из формулировок первого начала термодинамики.

Найдем работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуда (рисунки 2.1).



Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние dl , то производит над ним работу

$$\delta A = Fdl = pSdl = pdV,$$

где S – площадь поршня, $Sdl = dV$ – изменение объема газа. Тогда

$$\delta A = pdV. \quad (2.24)$$

Полная работа при расширении газа от объема V_1 до объема V_2 находится интегрированием выражение (2.24):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (2.25)$$

Графически работа определяется площадью фигуры, лежащей под кривой $p(V)$ (рисунок 2.3).

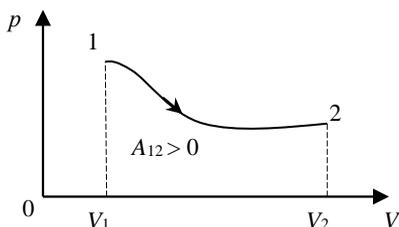


Рисунок 2.3

Для характеристики тепловых процессов рассмотрим величину теплоемкости. Теплоёмкость тела характеризует количество теплоты, необходимым для нагревания этого тела на 1 градус:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow \delta Q = CdT. \quad (2.26)$$

Единицей теплоемкости в СИ является Дж/К.

Удельная теплоёмкость c – это количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы вещества на 1 градус:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT} = \frac{C}{m} \Rightarrow \delta Q = cmdT. \quad (2.27)$$

Единицей удельной теплоемкости в СИ является Дж/кг·К.

Для газов удобно пользоваться молярной теплоёмкостью (C_m). Это количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля газа на 1 градус:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT} = cM \Rightarrow \delta Q = C_m \nu dT. \quad (2.28)$$

Единицей молярной теплоемкости в СИ является Дж/моль·К.

2.2.4 Применение ПНТ к изопроцессам

Изохорный процесс ($V = \text{const}$). Диаграмма этого процесса (изохора) изображена на рисунке 2.4.

Изохорный процесс практически осуществляется при нагревании или охлаждении газа в толстостенном сосуде постоянного объема. Процесс 1–2 соответствует нагреванию, а процесс 2–1 – охлаждению газа. При изохорном процессе газ не совершает работы:

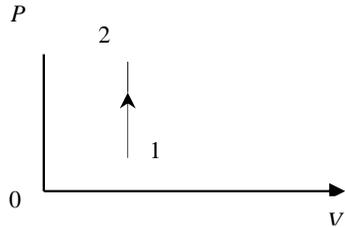


Рисунок 2.4

$$\delta A = p dV = 0 \Rightarrow \delta Q = dU, \quad (2.29)$$

т.е. вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии. Согласно уравнению (2.21) для произвольной массы газа можно записать:

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT = \nu \frac{i}{2} R dT. \quad (2.30)$$

Тогда, на основании выражения (2.28), значение молярной теплоемкости при постоянном объеме

$$C_{v,м} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{i}{2} R. \quad (2.31)$$

Таким образом, первое начало термодинамики для изохорного процесса будет иметь вид

$$\delta Q = dU = \nu C_{v,м} dT. \quad (2.32)$$

Изобарный процесс ($p = \text{const}$). Диаграмма этого процесса (изобара) изображена на рисунке 2.5.

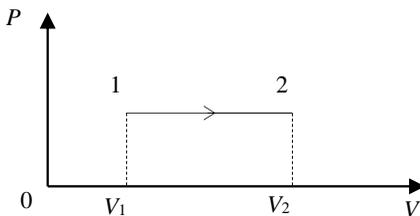


Рисунок 2.5

Практически изобарный процесс осуществляется при нагревании (процесс 1–2) или охлаждении (процесс 2–1) газа, находящегося в цилиндре с подвижным поршнем, на который

действует постоянное внешнее давление. Учитывая, что для произвольной массы газа $pV = \nu RT$, запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме для изобарного процесса:

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2} \nu R dT + \nu R dT. \quad (2.33)$$

Из полученного выражения следует, что молярная теплоемкость при постоянном давлении определяется соотношением

$$C_{p,m} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{i}{2} R + R = C_{V,m} + R. \quad (2.34)$$

Выражение

$$C_{p,m} = C_{V,m} + R \quad (2.35)$$

называется *уравнением Майера*. Оно показывает, что $C_{p,m}$ всегда больше $C_{V,m}$ на величину универсальной газовой постоянной R . Это объясняется тем, что для нагревания газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа.

Таким образом, можно определить *физический смысл универсальной газовой постоянной R* : она численно равна работе, совершаемой одним молем идеального газа при его изобарном нагревании на 1 К .

С учетом равенства (2.35) первое начало термодинамики для изобарного процесса можно также записать в виде

$$\delta Q = \nu C_{p,m} dT. \quad (2.36)$$

Изотермический процесс ($T = \text{const}$). Диаграмма изотермического процесса (изотерма) изображена на рисунке 2.6.

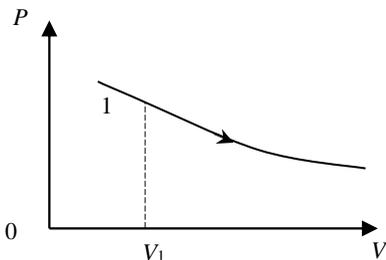


Рисунок 2.6

Практически процесс расширения или сжатия газа можно считать изотермическим, если он осуществляется сравнительно медленно, а теплоемкость внешней среды столь велика, что теплообмен между газом и внешней средой не

вызывает изменения её температуры. Примерами изотермических процессов могут служить процессы кипения, конденсации, плавления и кристаллизации химически чистых веществ, которые происходят при постоянной температуре, если внешнее давление постоянно. Внутренняя энергия идеального газа в изотермическом процессе не изменяется, так как $T = \text{const}$ и $dT = 0$, то

$$dU = \nu C_V dT = 0. \quad (2.37)$$

Тогда, из выражений (2.23) и (2.37) следует, что вся теплота, сообщаемая газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил, и первое начало термодинамики для изотермического процесса имеет вид

$$\delta Q = \delta A. \quad (2.38)$$

Полное количество теплоты, сообщенное газу, можно найти интегрированием выражения (2.38), учитывая равенство (2.24) и используя уравнение Менделеева-Клапейрона для определения p :

$$Q_{12} = A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.39)$$

Для процесса 1–2 (см. рисунок 2.6), соответствующего изотермическому расширению газа, $Q_{12} > 0$ и $A_{12} > 0$. Для обратного процесса 2–1, соответствующего изотермическому сжатию газа, $Q_{12} < 0$ и $A_{12} < 0$.

Теплоёмкость газа при изотермическом процессе ($dT = 0$) в соответствии с выражением (2.26) $C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta Q}{0} \rightarrow \infty$. Бесконечная теплоёмкость не является физическим абсурдом. Она означает, что подводимое к газу тепло не приводит к изменению его температуры, т.к. всё тепло тратится на совершение работы.

Адиабатный процесс ($\delta Q = 0$). Это процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой. К адиабатным можно отнести все быстропотекающие процессы. Практически адиабатный процесс осуществляется при достаточно быстром расширении или сжатии газа. Его широко применяют в циклах двигателей внутреннего сгорания, холодильных установках.

В соответствии с выражением (2.23) первое начало термодинамики для адиабатного процесса имеет вид

$$\delta A = -dU, \quad (2.40)$$

т.е. внешняя работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии системы. При расширении газ совершает работу, а внутренняя энергия уменьшается, так как уменьшается температура. Учитывая выражение (2.32) для dU , найдем работу адиабатного расширения газа от объема V_1 до V_2 (при этом температура газа уменьшается от T_1 до T_2):

$$A_{12} = -\nu C_{V, M} \int_{T_1}^{T_2} dT = \nu C_{V, M} (T_1 - T_2). \quad (2.41)$$

Можно показать, что для адиабатного процесса имеют место следующие соотношения

$$pV^\gamma = \text{const}, \text{ где } \gamma = \frac{C_{p, M}}{C_{V, M}} = \frac{i+2}{i}, \quad (2.42)$$

где γ называется показателем адиабаты (или коэффициентом Пуассона), i – число степеней свободы молекулы газа.

Уравнение (2.42) называют уравнением Пуассона, или уравнением адиабаты. Диаграмма этого процесса (адиабата) изображена на рисунке 2.7. Так как $\gamma > 1$, то адиабата идет круче, чем изотерма, уравнение которой $pV = \text{const}$.

Процесс 1–2 соответствует адиабатическому расширению газа. В

этом случае $\delta A > 0$, $dU < 0$.

Обратный процесс 2–1 соответствует адиабатическому сжатию газа.

В этом случае $\delta A < 0$, $dU < 0$.

Выразим из уравнения (2.42) значение $C_{V, M}$:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_{p, M}}{C_{V, M}} = \frac{C_{V, M} + R}{C_{V, M}} = 1 + \frac{R}{C_{V, M}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_{V, M} = \frac{R}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

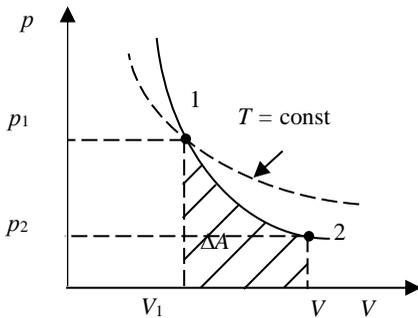


Рисунок 2.7

Подставляя найденное выражение в (2.41), окончательно имеем

$$A = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (2.43)$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, можно получить и другие уравнения адиабаты

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}; T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (2.44)$$

В соответствии с полученными соотношениями (2.44) можно записать:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Тогда выражение (2.43) представляется в виде

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) \quad (2.45)$$

или

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right). \quad (2.46)$$

2.2.5 Теплоемкость многоатомных газов.

Недостатки классической теории теплоёмкости

Теплоёмкость термодинамической системы зависит от того, как изменяется состояние системы при нагревании. Если газ нагревать при постоянном объёме, то всё подводимое к газу тепло идёт на нагревание газа, т.е. на изменение его внутренней энергии. Если нагревать газ при постоянном давлении, то подводимое тепло затрачивается и на нагревание газа, и на совершение работы. Таким образом, подводимое тепло и теплоёмкость зависят от того, каким путём осуществляется передача тепла. Следовательно, и теплота Q , и теплоёмкость C не являются функциями состояния. *Молярная теплоёмкость одного моля идеального газа* при постоянном объёме и при постоянном давлении определяются только числом степеней свободы молекул газа и не зависят от температуры. Для одноатомных газов $C_{V,M} \approx 12,5$ Дж/(моль·К), двухатомных – $C_{V,M} \approx 20,8$ Дж/(моль·К),

многоатомных – $C_V \approx 25$ Дж/(моль·К). Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с измеренными при нормальных условиях значениями теплоемкостей ряда газов: инертными газами и парами одноатомных металлов, азотом (N_2), кислородом (O_2) и другими двухатомными газами, а также с трехатомными газами. Для одноатомного газа это выполняется в очень широком интервале температур, а для двухатомного – только в интервале примерно от 100 до 1000 К (рисунок 2.8). Значительное расхождение между теорией и опытом наблюдалось для сложных молекул типа C_6H_6 , C_2H_5O . Классическая теория теплоемкости плохо согласуется с экспериментальными значениями теплоемкостей многоатомных газов при средних и высоких температурах. Экспериментальные данные показывают также, что для всех веществ, в том числе и для газов, теплоемкость растет с ростом температуры. При достаточно низких температурах теплоемкость быстро убывает с понижением температуры и стремится к нулю при $T \rightarrow 0$.

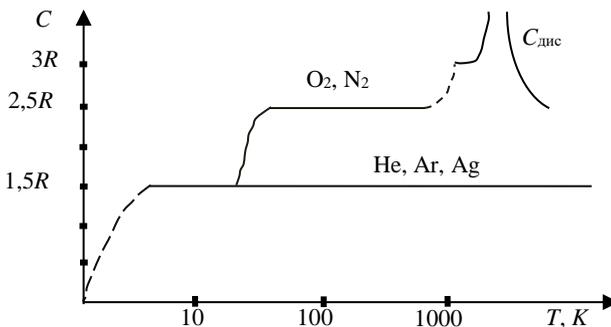


Рисунок 2.8

Причина этих трудностей заключается в том, что закон о равномерном распределении энергии между всеми степенями свободы молекул справедлив лишь для простейших газов, находящихся при не слишком низких температурах. Правильное качественное и количественное объяснение результатов опытов по измерению теплоемкости в широком интервале температур было получено на основе квантовой теории теплоемкости, развитой в начале XX в. По классическим представлениям энергия,

приходящаяся на одну степень свободы, может изменяться в результате внешнего воздействия (нагревания) непрерывно, т.е. на любую величину. По квантовой теории таким свойством обладает только энергия поступательного движения, а энергия вращательного и колебательного движений молекул может изменяться лишь дискретно, т.е. скачками на конечную величину, называемую *квантом энергии*. При низких температурах вращательное движение как бы "замерзает" и двухатомные молекулы движутся поступательно, как и одноатомные. Равны и их теплоёмкости. При увеличении температуры свыше 1000 К начинают сказываться колебания атомов в молекуле относительно друг друга. При температуре выше 2500 К молекулы диссоциируют (распадаются на отдельные атомы). На диссоциацию молекул тратится энергия, в 10 раз превышающая среднюю энергию их поступательного движения при этих температурах. Это обстоятельство является причиной сравнительно низкой температуры пламени. Кроме того, следует учитывать, что и сам атом – сложная система. При очень больших температурах начинает сказываться движение электронов внутри атомов и ионизация атомов.

2.3 Статистические распределения

2.3.1 Вероятность

Рассмотрим понятия теории вероятности, необходимые для вывода основных законов статистической физики. **Теория вероятности изучает явления, которые имеют случайный характер.** *Случайным называется событие, которое нельзя предсказать с определенностью.* Этим оно отличается от достоверного и невозможного событий.

Случайное событие, в частности, может состоять в том, что какая-либо физическая величина имеет определенное, но произвольное значение. Такие величины также называются случайными, например, это приход определенной молекулы в заданную точку в результате беспорядочного теплового движения в газе частиц. Пример достоверного события – приход той же молекулы в заданную точку в результате движения по траектории с заданной скоростью без столкновений. В первом случае появления «меченой» молекулы в заданной точке можно ожидать с некоторой

вероятностью. Случайные величины могут принимать как дискретные, так и непрерывные значения.

Вероятностью P некоторого события называется частота появления данного события в общем числе событий. Ясно, что вероятность есть положительная величина. Из ее определения следует, что $0 \leq P \leq 1$. Если событие достоверно, то $P = 1$. Если событие невозможно, то $P = 0$.

Вероятность какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев при бесконечном увеличении последних:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}, \quad (2.47)$$

где n' – число раз, когда событие произошло, n – общее число событий.

Если случайная величина принимает ряд значений x_1, x_2, \dots, x_N , с вероятностями P_1, P_2, \dots, P_n , то ее среднее значение

$$\langle x \rangle = \sum_1^N P_i x_i. \quad (2.48)$$

Если случайная физическая величина принимает непрерывный ряд значений x , то вероятность dP того, что величина x находится в бесконечно малом промежутке между x и $x + dx$, определяется некоторой функцией $W(x)$, которая называется *плотностью вероятности*. Связь плотности вероятности и вероятности определяется из выражения $dP = W(x)dx$. Очевидно, что

$$\int dP = \int W(x)dx = 1.$$

Интегрирование производится по всему интервалу возможных значений величины x . Зная плотность вероятности $W(x)$, можно найти среднее значение непрерывно изменяющейся величины

$$\langle x \rangle = \int xW(x)dx. \quad (2.49)$$

Аналогично можно определить средние значения и других величин: среднего квадратичного значения случайной величины

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2W(x)dx. \quad (2.50)$$

и среднего значения произвольной функции случайной величины

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)W(x)dx. \quad (2.51)$$

2.3.2 Распределение Максвелла

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории полагали, что молекулы идеального газа имеют различные скорости. Средняя квадратичная скорость является одной из характеристик движения всей совокупности молекул и не имеет смысла применительно к одной какой-нибудь молекуле или небольшому числу молекул. Вследствие теплового движения все направления движения молекул в газе предполагались равновероятными. Несмотря на случайный характер столкновений и вызываемых ими изменений скорости молекул, распределение молекул по скоростям оказывается не случайным, а вполне определённым. Об этом свидетельствуют как опытные данные, так и теоретические расчеты. Закон, количественно описывающий распределение молекул по значениям скорости был теоретически выведен Максвеллом в 1859 г. При выводе этого закона Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что внешние поля на газ не действуют. Определение распределения молекул по скоростям не означает, что можно определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоростью. Число различных значений скорости бесконечно, а число молекул конечно. Поэтому число молекул, приходящихся на долю произвольно заданного значения скорости, может быть равно нулю. Вопрос должен формулироваться следующим образом: сколько молекул, или какая их часть обладает скоростями, лежащими в некотором интервале вблизи заданной скорости?

Определим число частиц Δn в единице объёма, скорости которых лежат в определённом интервале значений скорости Δv (от v до $v + \Delta v$). Очевидно, что Δn должно быть пропорционально n – концентрации молекул. Также очевидно, что Δn молекул в единице объёма, скорости которых лежат в интервале от v до $v + \Delta v$, тем

больше, чем больше интервал Δv . Δn зависит и от самой скорости, так как в одинаковых по величине интервалах, но при различных абсолютных значениях скорости, число молекул будет разным. Таким образом, можно записать:

$$\Delta n = nf(v)\Delta v \Rightarrow f(v) = \frac{\Delta n}{n\Delta v}.$$

Переходя к пределу, получим

$$dn = nf(v)dv, \quad (2.52)$$

где $f(v)$ – функция распределения молекул газа по скоростям. Она показывает, какова вероятность того, что любая молекула газа в единице объёма имеет скорость в единичном интервале, включающем скорость v , и по смыслу является *плотностью вероятности*.

Скорость – величина векторная. Рассмотрим сначала распределение для составляющей скорости по оси x :

$$dn_x = nf(v_x)dv_x. \quad (2.53)$$

Форма функции распределения молекул идеального газа по скоростям, полученная Максвеллом с помощью методов теории вероятностей, имеет следующий вид:

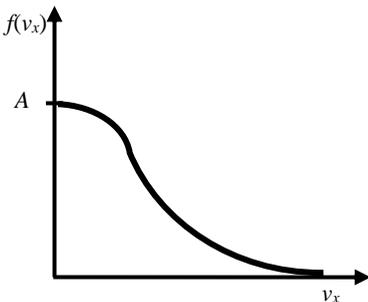
$$f(v_x) = \frac{dn_x}{ndv_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}, \quad (2.54)$$

где m_0 – масса молекулы газа. Введем следующее обозначение:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{1/2}. \quad (2.55)$$

Тогда с учетом равенства (2.55) выражение (2.54) будет иметь вид

$$f(v_x) = Ae^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}. \quad (2.56)$$



Графическое изображение функции распределения по одной координате приведено на рисунке 2.9. Из рисунка

видно, что доля молекул с $v_x = 0$ неравна нулю. При $v_x = 0, f(v_x) = A$. В этом и заключается физический смысл этой постоянной.

Для других компонент можно записать

$$f(v_y) = Ae^{-\frac{m_0 v_y^2}{2kT}}, f(v_z) = Ae^{-\frac{m_0 v_z^2}{2kT}}. \quad (2.57)$$

Максвелл предположил, что события, заключающиеся в том, что компонента скорости v_x некоторой молекулы лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$, компонента v_y той же молекулы – в интервале от v_y до $v_y + dv_y$, а компонента v_z – в интервале от v_z до $v_z + dv_z$ являются статистически независимыми. Поэтому вероятность того, что компоненты скорости некоторой молекулы имеют значения, лежащие в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$, будет равна, в соответствии с теоремой об умножении вероятностей, произведению вероятностей каждого из условий (событий) в отдельности.

Если ввести обозначение: dn_{xyz} – число молекул в единице объёма газа, у которых составляющие скоростей лежат в указанных выше пределах, то с учетом зависимости (2.53) получим

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_x dv_y dv_z. \quad (2.58)$$

Подставив выражения (2.56), (2.57) в формулу (2.58), получим

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z, \quad (2.59)$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Выражение (2.59) с учетом (2.55) можно переписать в следующем виде:

$$dn_{xyz} = n \left(\frac{m_0}{\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z. \quad (2.60)$$

У этой формулы есть наглядное геометрическое толкование – это число молекул находящихся в параллелепипеде со сторонами dv_x , dv_y , dv_z , т.е. в объёме $dU = dv_x dv_y dv_z$, который расположен на расстоянии v от начала координат в пространстве скоростей (рисунок 2.10).

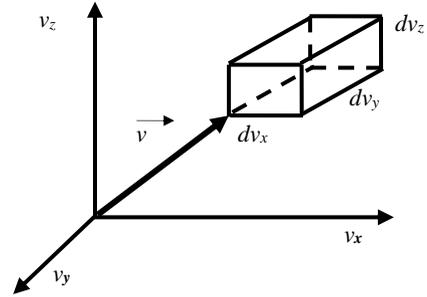


Рисунок 2.10

Число этих молекул не зависит от направления скорости v . Поэтому можно получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления. Очевидно, что все молекулы единицы объёма, скорости которых заключены в интервале от v до $v + dv$ по всем направлениям, расположены в шаровом слое толщиной dv и радиусом v (рисунок 2.11).

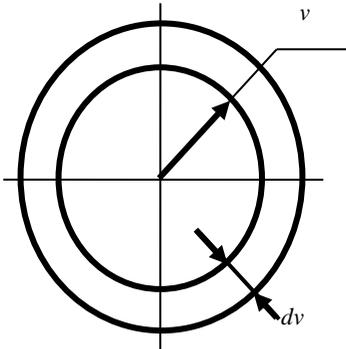


Рисунок 2.11

Чтобы найти число молекул во всём шаровом слое, надо умножить число молекул в единице объёма этого слоя на объём всего шарового слоя ($d\Omega$). Число молекул в единице объёма в пространстве скоростей в соответствии с формулой (2.60) может быть вычислено из выражения

$$\frac{dn_{xyz}}{dU} = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (2.61)$$

Тогда общее число молекул в шаровом слое

$$dn = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} d\Omega. \quad (2.62)$$

Подставив значение объёма шарового слоя $d\Omega = 4\pi v^2 dv$ в формулу (2.62), получим следующее выражение для числа всех молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$:

$$dn = 4\pi n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv. \quad (2.63)$$

Относительное число всех молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, будет

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (2.64)$$

Из равенства (2.64) можно найти плотность вероятности:

$$f(v) = \frac{dn}{n dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (2.65)$$

Как видно из распределения Максвелла в виде (2.65), плотность вероятности (функции распределения) для каждого газа зависит от рода газа и температуры, а давление и объём газа на распределение молекул по скоростям не влияют.

Из графика (рисунок 2.12) функции распределения (2.65) видно, что число молекул с очень маленькими и очень большими скоростями невелико. Анализ графика показывает, что функция $f(v)$, начинаясь от нуля, достигает максимума при значении v_b . Затем асимптотически

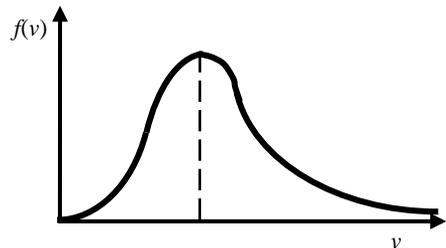


Рисунок 2.12

стремится к нулю. Скорость v_b , при которой функция распределения максимальна, называется наиболее вероятной скоростью, причем этой скоростью и близкой к ней обладает наибольшее число молекул. Кривая распределения Максвелла не симметрична относительно v_b . Относительное число молекул $\frac{dn}{n}$, скорости которых лежат в интервале скоростей от v до $v + dv$, можно найти как площадь

фигуры под графиком функцией распределения $f(v)$ в заданном интервале скоростей. Площадь ограниченная кривой распределения и осью абсцисс всегда будет равна единице. Это означает, что функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

Исходя из полученного распределения молекул по скоростям (2.65), можно найти распределение молекул газа по кинетическим энергиям поступательного движения молекул $W_k = mv^2 / 2$. Это распределение характеризуется функцией $f(W_k)$, которая вводится аналогично $f(v)$ и имеет вид

$$f(W_k) = \frac{dn}{ndW_k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} W_k^{1/2} e^{-\frac{W_k}{kT}} \quad (2.66)$$

Распределение Максвелла в виде (2.66) характеризует распределение частиц по значениям кинетической энергии, т.е. определяет долю из общего числа молекул, которые имеют кинетические энергии в интервале от W_k до $W_k + dW_k$. Анализ функции распределения (2.66) показывает, что в показателе степени у экспоненты стоит отношение безразмерной величины, характеризующей отношение кинетической энергии, соответствующей данной скорости v , к величине kT , характеризующей среднюю энергию молекул при данной температуре.

Значение наиболее вероятной скорости можно найти, исследуя функцию распределения Максвелла (2.65) на экстремум по аргументу v . Получим

$$v_b = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (2.67)$$

Из этой формулы следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям будет смещаться вправо (рисунок 2.13). При этом площади всех фигур, ограниченные кривыми, будут одинаковыми, т.к. общее число молекул газа не зависит от температуры. Следовательно, кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

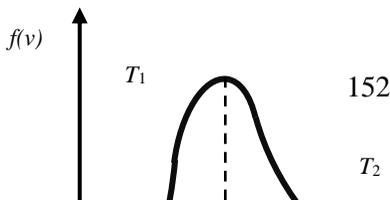


Рисунок 2.13

Найдем из распределения Максвелла с учетом выражения (2.49) среднюю арифметическую скорость движения молекул газа:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^3 dv.$$

Введя v под знак дифференциала и интегрируя по частям, получим

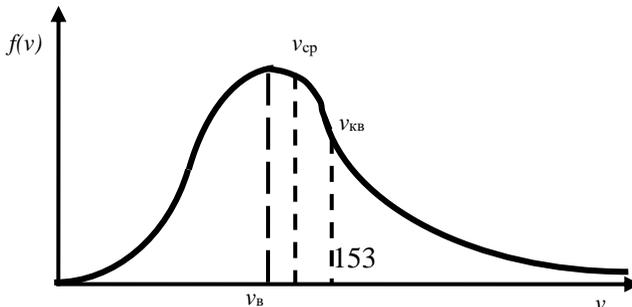
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Сравнивая полученное значение средней арифметической скорости с ранее полученными значениями наиболее вероятной скорости

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

и средней квадратичной скорости

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} =$$



можно
получи
ть
следую
щие

Рисунок 2.14

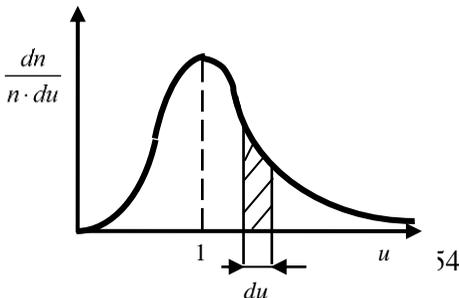
соотношения между этими величинами: $\langle v \rangle = 1,13v_B$; $\langle v_{кв} \rangle = 1,22v_B$. Рисунок 2.14 иллюстрирует эти соотношения.

Удобно использовать для вычислений приведенную формулу распределения Максвелла, учитывающую относительную скорость, равную $u = \frac{v}{v_B}$. Для относительной скорости u распределение Максвелла (2.68) можно записать в следующем виде:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} ne^{-u^2} u^2 du. \quad (2.68)$$

Это уравнение универсальное. В таком виде функция распределения не зависит ни от температуры, ни от рода газа. Рассмотрим графическую зависимость $\frac{dn}{n \cdot du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$.

Доля молекул газа dn/n , скорости которых лежат в интервале от v/v_B до $v/v_B + dv/v_B$ или, что то же самое, от u до $u + du$, численно равна площади dS заштрихованной криволинейной трапеции на рисунке 2.15. Площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс на рисунке (2.15), равна единице.



Экспериментальным доказательством справедливости распределения Д. Максвелла является опыт, проведенный в 1920 г. Штерном. Он взял два

Рисунок 2.15

связанных между собой коаксиальных цилиндра, которые вращались с угловой скоростью ω вокруг общей оси (рисунок 2.16).

Внутренний цилиндр имел узкую щель, параллельную оси цилиндра. По оси была натянута платиновая проволока, покрытая серебром. Всё устройство находилось в вакууме. Платиновая проволока нагревалась. Серебро испарялось, и атомы серебра летели во все стороны. Пока атомы серебра пролетали расстояние l , цилиндры успевали повернуться на некоторый угол φ .

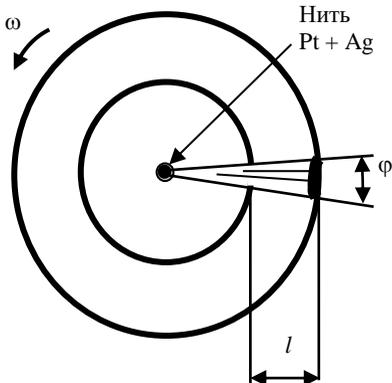


Рисунок 2.16

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{v}.$$

Измеряя угол φ , можно определить скорость:

$$v = \frac{\omega l}{\varphi}.$$

В опыте Штерна было обнаружено, что ширина полоски на поверхности вращающегося цилиндра гораздо больше геометрического изображения щели, кроме того толщина полоски

в разных местах неодинакова. Это объясняется тем, что атомы серебра движутся с различными скоростями. Каждой точке на цилиндре соответствует определенная скорость, которую можно определить из опыта. Этим и объясняется, что толщина слоя атомов серебра, осевших на поверхности внешнего цилиндра, не везде одинакова. Изучение формы сечения полоски осевшего серебра с помощью микроскопа показало, что оно имеет вид, соответствующий функции распределения Максвелла.

2.3.3 Распределения Больцмана

При выводе уравнения состояния идеального газа предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по объему. Однако реально молекулы газа находятся в поле внешней по отношению

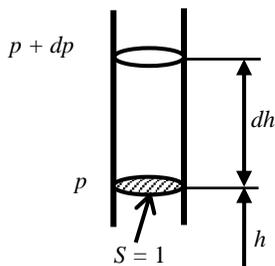


Рисунок 2.17

к рассматриваемой системе силы, которой является сила тяжести. В соответствии с основным законом динамики, под действием внешней силы механическая система частиц приобретает импульс и перемещается как целое поступательно в направлении силы, приобретая соответствующую потенциальную энергию. Однако в газе наряду с упорядоченным *движением* в направлении действия силы существует хаотическое тепловое движение. Тепловое движение стремится привести газ в состояние неупорядоченности и распределить молекулы газа равномерно по всему пространству. В результате возникает неравномерное распределение макроскопических параметров: плотности частиц, давления, температуры по объему, занимаемому газом. Получим закон, описывающий изменение давления газа с высотой, используя для упрощения решения следующие предположения:

- 1) ускорение свободного падения одинаково для всех высот;
- 2) свойства атмосферы аналогичны свойствам идеального газа;
- 3) массу молекул газа, образующих атмосферу, считаем равной

m_0 ;

- 4) температура воздуха с высотой не меняется.

Рассмотрим изотермический столб воздуха с площадью основания 1 м^2 .

Атмосферное давление на высоте h обусловлено весом вышележащих слоёв газа. Пусть p – давление на высоте h ; $p + dp$ – давление на высоте $h + dh$. Причём при $dh > 0$ $dp < 0$, так как с увеличением высоты давление уменьшается. Давление газа, заключённого в объёме цилиндра с площадью основания S и высотой dh , определяется весом газа:

$$\frac{mg}{S} = \frac{\rho dVg}{S} = \frac{\rho S dh g}{S} = \rho g dh.$$

Тогда

$$p - (p + dp) = \rho g dh \Rightarrow dp = -\rho g dh, \quad (2.69)$$

где ρ – плотность газа на высоте h .

Значение плотности найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставив в зависимость (2.64) найденное значение плотности, получим

$$dp = -\frac{pgM}{RT}dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh. \quad (2.70)$$

С учетом принятого допущения о постоянстве температуры, интегрируем выражение (2.70) по высоте от h_1 до h_2 и давлению, которое изменяется в пределах от p_1 до p_2 :

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\int_{h_1}^{h_2} \frac{Mgdn}{RT}.$$

Получим

$$\ln p_2 - \ln p_1 = -\frac{Mg(h_2 - h_1)}{RT}.$$

Потенцируем:

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{Mg(h_2 - h_1)}{RT}}. \quad (2.71)$$

Обычно высоты определяют относительно уровня моря, полагая $h_1 = 0$. Тогда последняя формула будет иметь вид

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (2.72)$$

где p – давление на высоте h ; p_0 – давление на высоте $h = 0$.

Из формулы (2.72) получим выражения для определения высоты:

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (2.73)$$

Формула (2.73) позволяет определять высоту с помощью барометра. Формулу (2.73), так же как и (2.72), называют *барометрической формулой*. Прибор, созданный на основе зависимости давления от высоты, определяемой формулой (2.73), называется *альтиметром*. Он представляет барометр, который проградуирован для непосредственного отсчета высоты над уровнем моря. Такие приборы используются в авиации, альпинизме.

Анализ барометрической формулы показывает, что чем больше молярная масса газа и чем ниже температура, тем быстрее его давление убывает с высотой. Поэтому атмосфера по мере увеличения высоты все более обогащается легкими газами.

Подставляя в выражение уравнения (2.72) выражение для давления $p = nkT$, получим:

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (2.74)$$

где n_0 – концентрация молекул на высоте $h = 0$; n – концентрация молекул на высоте, равной h . Умножим числитель и знаменатель показателя степени в формуле (2.74) на постоянную Авогадро:

$$\frac{MN_A gh}{RN_A T} = \frac{m_0 gh}{kT},$$

где m_0 – масса молекулы газа.

Выражение (2.74) с учетом сделанных преобразований можно записать так:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}. \quad (2.75)$$

Анализ формулы (2.75) показывает, что с уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля, уменьшается. При температуре $T = 0$ все молекулы расположились бы на земной поверхности. При высоких температурах T , наоборот, молекулы оказываются распределёнными по высоте почти равномерно (т.к. $n \rightarrow n_0$). Существование атмосферы в её природном виде объясняется тепловым движением частиц воздуха.

Учтем, что $m_0 gh = W_n$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения Земли. Следовательно, выражение (2.75) характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 e^{-\frac{W_n}{kT}}, \quad (2.76)$$

где n_0 – число молекул в единице объёма, где потенциальная энергия $W_n = 0$.

Больцман доказал, что выражение (2.76) справедливо не только в потенциальном поле сил гравитации, но и в любом потенциальном поле и называется *распределением Больцмана*.

Отношение n/n_0 показывает долю молекул, обладающих именно таким значением потенциальной энергии W_n при данной температуре. Из распределения Больцмана следует:

1) при $T = \text{const}$ концентрация газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул;

2) число частиц, обладающих определенными значениями потенциальной энергии, определяется отношением величины потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ к тепловой энергии частицы kT . Чем больше энергия теплового движения, тем более разупорядочена система частиц, значит, тем более однородно распределены частицы в пространстве. Действительно, если $kT \gg W_{\text{п}}$, то из формулы (2.76) следует, что $n = n_0$ при любом значении $W_{\text{п}}$. В случае $kT \ll W_{\text{п}}$ распределение частиц максимально упорядочено: концентрация частиц максимальная в состоянии с минимальной потенциальной энергией $W_{\text{п min}}$, в то время как концентрация частиц в других состояниях равна нулю.

2.4 Второе начало термодинамики

2.4.1 Обратимые и необратимые тепловые процессы

Обратимым называется такой процесс, который, будучи проведён в обратном направлении, возвращает систему в исходное состояние так, что система проходит через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, а состояние тел вне системы остаётся неизменным. Всякий процесс, не удовлетворяющий эти условиям, называется *необратимым*.

Особенностью термодинамических систем по сравнению с чисто механическими системами является необратимый характер термодинамических процессов. Если рассматривать движение тела как механический процесс, в результате которого происходит изменение его координат и скоростей, то очевидно, что в механике без учета сил трения все процессы обратимы. Обратимость механического процесса означает, что если изменить направление процесса на обратное, то тело, состояние которого характеризуется определенными значениями координат и скорости в конечном состоянии, будет проходить последовательно те же состояния, которые оно проходило при первоначальном направлении процесса, но в обратном порядке. В конце процесса система окажется опять в состоянии с начальными значениями координат и скорости. Примером такого процесса может служить упругое столкновение шаров, которое может происходить как в прямом, так и в обратном направлениях.

Иная ситуация возникает в термодинамических системах, состоящих из большого числа частиц. Каждая частица в отдельности, конечно, по-прежнему подчиняется уравнениям движения в форме второго закона Ньютона. Отличие состоит в том, что в системе большого числа частиц каждая отдельная частица испытывает большое число последовательных столкновений с другими частицами. Поскольку столкновения имеют случайный характер и изменяют координаты и скорости данной частицы непредсказуемым образом, то информацию о состоянии данной частицы в системе большого числа частиц можно определить не с достоверностью, как в механике, а только с некоторой вероятностью. Поскольку всякий термодинамический процесс включает в себя множество независимых случайных событий, то для того, чтобы он мог происходить в обратном направлении, необходимо, чтобы реализовалась вся эта случайная последовательность событий в обратном порядке. Поскольку вероятность нескольких независимых событий есть произведение вероятностей каждого из событий, то суммарная вероятность обратного процесса оказывается ничтожно малой, практически равной нулю. Примером такого процесса является процесс передачи тепла от более нагретого тела менее нагретому. Обратный процесс, как известно, сам по себе никогда не реализуется на практике.

Реальный термодинамический процесс всегда необратим. Тем не менее, в термодинамике говорят об обратимом процессе как о некоторой идеализированной схеме процесса. В термодинамике доказано, что необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.

Однако термодинамический процесс всегда связан с нарушением равновесия системы. Например, при вдвигании поршня в сосуд с газом меняются термодинамические параметры, определяющие состояние системы, а следовательно, нарушается равновесие данной системы. Нарушение равновесия будет тем значительнее, чем быстрее перемещается поршень. Однако при бесконечно медленном процессе сжатия термодинамические параметры системы в каждый момент времени будут мало отличаться от равновесного значения, отвечающего данному объему газа. В пределе при бесконечно медленном сжатии термодинамические параметры системы в каждый момент времени будут иметь определенное значение. Следовательно, состояние газа все время будет равновесным. Такие процессы

называются *квазистатическими*. Квазистатические процессы являются обратимыми, так как при изменении направления равновесного процесса (замена сжатия расширением) система будет проходить через те же равновесные состояния, что и при прямом ходе, но в обратной последовательности. Обратимые процессы – это идеальные процессы, но они помогают выяснить важные закономерности. Только равновесные квазистатические состояния могут изображаться в виде кривой, например $P = f(V)$. Если же состояние неравновесное, то хотя бы один из параметров, определяющий состояние системы, не будет иметь определенного значения. Только в обратимых процессах теплота используется по назначению. Если процесс неравновесный, то будет наблюдаться необратимый переход энергии из системы.

2.4.2 Круговые процессы (циклы)

Процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние, называется *круговым процессом*, или *циклом*. На диаграмме процессов цикл изображается замкнутой кривой (рисунок 2.18).

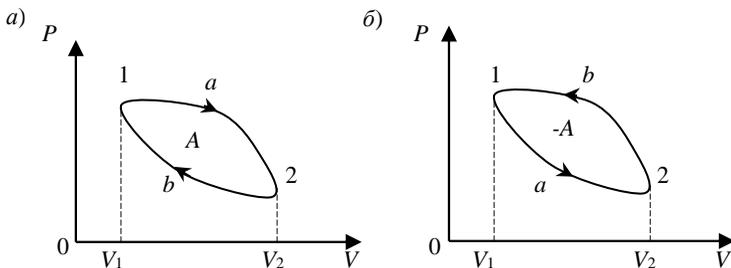


Рисунок 2.18

Цикл можно разбить на процесс расширения 1–2 и сжатия 2–1. Работа расширения, которая определяется площадью фигуры $1a2V_2V_11$, положительна, т.к. $dV > 0$. Работа сжатия, которая определяется площадью фигуры $2b1V_1V_22$, отрицательна, т.к. $dV < 0$. Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

Если за цикл совершается положительная работа (цикл протекает по ходу часовой стрелки), то он называется *прямым* (рисунок 2.18, а). Если за цикл совершается отрицательная работа (цикл протекает против хода

часовой стрелки), то он называется *обратным* (рисунок 2.18, б). Внутренняя энергия тела зависит только от его состояния, поэтому полное изменение энергии газа в результате кругового процесса равно нулю. Следовательно, по первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A = A. \quad (2.77)$$

В прямом цикле $A > 0$ и $Q > 0$, т.е. газ совершает работу за счет сообщенной ему теплоты. В обратном цикле $A < 0$ и $Q < 0$, т.е. над газом совершается работа внешними телами и от него отводится эквивалентное ей количество теплоты.

2.4.3 Тепловые машины

Прямой цикл используется в тепловых машинах – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет получения извне теплоты. *Обратный цикл* используется в холодильных машинах – периодически действующих двигателях, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

Термодинамика как наука развилась в начале XIX века из необходимости объяснить работу тепловых машин. Термодинамические расчеты необходимы при конструировании любых машин, способных производить работу. Всякий двигатель представляет собой систему, совершающую многократно некий круговой процесс (цикл). Рассмотрим цикл тепловой машины (см. рисунок 2.17, а). Пусть в ходе цикла рабочее вещество (газ) сначала расширяется до объема V_2 , а затем сжимается до первоначального объема V_1 . Чтобы работа, совершенная за цикл, была больше нуля, давление в процессе расширения должно быть больше, чем при сжатии (рисунок 2.18). Для этого рабочему телу нужно в ходе расширения сообщать теплоту, а в ходе сжатия – отнимать. Так как передача тепла происходит сама собой только от более горячего тела к более холодному, то, следовательно, должны существовать более горячее тело, передающее веществу количество тепла Q_1 (*нагреватель*), и более холодное тело, которому вещество отдает количество тепла Q_2 (*холодильник*).

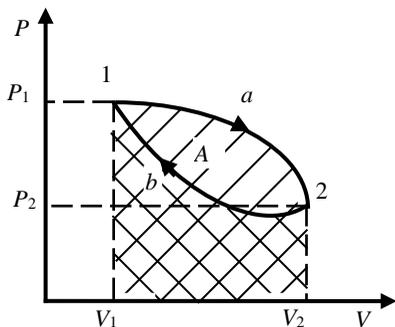


Рисунок 2.18

–теплота, отдаваемая рабочим телом при сжатии; A – работа, совершаемая рабочим телом за цикл.

Эффективность работы тепловой машины принято характеризуют коэффициентом полезного действия (КПД), который определяется как отношение совершаемой за цикл работы к получаемой за цикл теплоте:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (2.79)$$

Холодильная машина работает по обратному циклу (2.17, б). Такая машина отбирает за цикл от тела с более низкой температурой количество теплоты Q_2 и отдает телу с более высокой температурой количество теплоты Q_1 . Эффективность работы холодильной машины характеризуется холодильным коэффициентом (ХК)

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}, \quad (2.80)$$

где Q_2 – количество теплоты, отнятое за цикл у тела с более низкой температурой; Q_1 – количество теплоты, отданное телу с более высокой температурой; A' – работа, которая затрачивается на приведение машины в действие.

Чтобы КПД был максимален ($\eta = 1$), должно выполняться условие $Q_2 = 0$, т.е. тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, что было бы очень выгодно, ибо вся теплота, полученная рабочим телом, была бы превращена в работу. Первое начало термодинамики не противоречит этому случаю (изотермический процесс). Идея о том, что для работы теплового двигателя

Итак, обязательными частями тепловой машины являются: *нагреватель* (источник энергии), *холодильник* и *рабочее тело* (газ, пар).

Работа, совершенная за цикл, равна площади, охватываемой замкнутой кривой, и с учетом (2.77) определяется выражением

$$A = Q_1 - Q_2, \quad (2.78)$$

где Q_1 – теплота, получаемая рабочим телом при расширении; Q_2

необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами, была впервые изложена в 1824 г. С. Карно в работе «Размышление о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу». Невозможность создания теплового двигателя, работающего с одним источником теплоты (так называемый вечный двигатель второго рода, т.е. периодически действующего двигателя, который давал бы работу за счет охлаждения одного источника количества тепла), составляет содержание *второго начала термодинамики*. Существует несколько формулировок этого закона. Формулировка Клаузиуса гласит: невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от холодного тела к горячему. В формулировке Кельвина–Планка второе начало выглядит так: невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу. В этой формулировке видна невозможность вечного двигателя второго рода, который целиком превращал бы в работу теплоту, извлекаемую из окружающих тел (океана, атмосферного воздуха и др.).

2.4.4 Цикл Карно. Максимальный КПД тепловой машины

Рассмотрим обратимый круговой процесс, при помощи которого тепло можно превратить в работу, притом наилучшим образом, т.е. чтобы полезная работа была максимальной. Такой круговой процесс был впервые введен в рассмотрение С. Карно и носит название **цикла Карно** (рисунок 2.19). Карно доказал, что для того чтобы осуществить этот процесс, необходимо, как минимум, три тела: нагреватель, холодильник и рабочее тело (газ). Обратимый цикл, совершаемый в тепловой машине

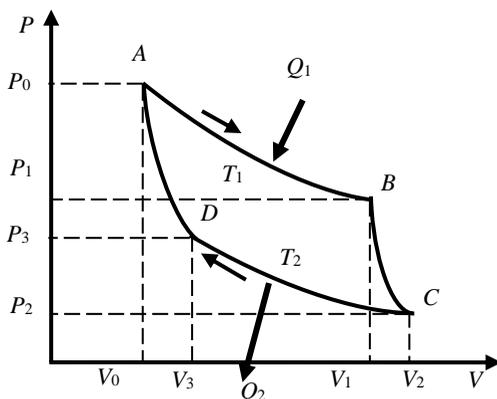


Рисунок 2.19

рабочим телом, вступающим в теплообмен с двумя резервуарами бесконечно большой теплоемкости (нагревателем и холодильником), может состоять только из двух изотерм (при температурах резервуаров) и двух адиабат.

Рассмотрим процесс, начиная из точки A . Газ сжат до давления P_0 и находится в контакте с нагревателем при температуре T_1 . В соответствии с первым началом термодинамики, максимальная работа будет совершаться газом при его изотермическом расширении ($dT = 0$). Тогда первое начало термодинамики запишется так: $dQ = dA$. Так как участок AB – изотермическое расширение газа при температуре T_1 , то передачи тепла (без совершения работы) не происходит, так как нет разности температур. Этот процесс будет обратимым. Полученное рабочим телом тепло нужно передать холодильнику. Но если просто привести рабочее тело в соприкосновение с холодильником, то будет передача тепла без совершения работы, т.е. необратимый процесс. Поэтому нужно сначала рабочее тело охладить до температуры T_2 , а затем уже присоединить к холодильнику. Охладить рабочее тело необходимо без затрат тепла, а это возможно при адиабатическом расширении. Участок BC – адиабатическое расширение. Адиабатическим расширением заканчивается первая половина цикла – совершение полезной работы. Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние, т.е. сжать газ до давления P_0 . Возвращение в точку A происходит в два этапа. Сначала рабочее тело сжимают изотермически, не прерывая контакта с холодильником. При этом холодильнику отдаётся тепло Q_2 . Затем, изолировав рабочее тело от холодильника, его адиабатически сжимают. При этом температура рабочего тела повышается до температуры T_1 (точка A). При адиабатическом сжатии рабочее тело нагревается за счёт внешней работы, совершаемой над рабочим телом. На всех стадиях кругового процесса нигде не допускалось соприкосновения тел с разной температурой, т.е. нет необратимого процесса теплопроводности. Весь цикл проводится обратимо (бесконечно медленно).

На первый взгляд, кажется, что работа, произведённая рабочим телом при расширении, полностью компенсируется работой внешних сил при сжатии, так что полезная работа, в конечном счете, равна нулю. В действительности, положительная работа, совершаемая телом при расширении, больше отрицательной работы, совершаемой над телом при сжатии, и, следовательно, часть тепла, полученного

телом от нагревателя (Q_1), превращается в механическую работу. Покажем это. В качестве рабочего тела возьмём 1 моль идеального газа. Работа, совершаемая газом при изотермическом расширении на участке AB , в соответствии с формулой:

$$A_1 = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_0} = Q_1, \quad (2.81)$$

где Q_1 – тепло, полученное газом от нагревателя. На участке BC адиабатического расширения работа в соответствии с выражением формулы:

$$A_2 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2), \quad (2.82)$$

где γ – показатель адиабаты. На CD участке газ изотермического сжатия совершаемая над газом работа

$$A_3 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -T_2 \ln \frac{V_2}{V_3} = Q_2, \quad (2.83)$$

где Q_2 – тепло, отданное холодильнику. На участке DA работа, совершаемая при адиабатном сжатии газа,

$$A_4 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2). \quad (2.84)$$

Общая работа будет равна сумме работ на каждом участке:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \quad (2.85)$$

Подставим в формулу (2.85) значения (2.81)–(2.84), получим

$$A = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} - \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2). \quad (2.86)$$

После преобразования

$$A = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_0} - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} = Q_1 - Q_2. \quad (2.87)$$

Таким образом,

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Покажем, что работа, совершаемая газом в цикле Карно, положительна. Рассмотрим участок BC адиабатического расширения. Для него верно соотношение

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}. \quad (2.88)$$

Для участка DA адиабатического сжатия верно соотношение

$$T_2 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_0^{\gamma-1} \left(\frac{V_3}{V_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (2.89)$$

Из уравнения (2.88) и (2.89) следует

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_0} \Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_0}. \quad (2.90)$$

Тогда получаем

$$\ln \frac{V_2}{V_3} = \ln \frac{V_1}{V_0} = \ln r. \quad (2.91)$$

Так как $V_2 > V_1$ и $V_3 > V_0$, то $\ln r > 0$. Учтем, что $T_1 > T_2$. Тогда записав уравнение (2.87) и используя выражения (2.91), получим

$$A = R(T_1 - T_2) \ln r = Q_1 - Q_2 > 0. \quad (2.92)$$

Это означает, что работа, совершаемая газом при расширении больше работы внешних сил. Полезная работа равна площади, ограниченной кривой $ABCD$.

Следует отметить, что механическая работа может быть полностью превращена в тепло, а вот тепло в механическую работу превращается не полностью.

Равенства (2.81) и (2.83) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{Q_1}{T_1} = R \ln \frac{V_1}{V_0}; \quad -\frac{Q_2}{T_2} = R \ln \frac{V_2}{V_3}.$$

Так как правые части равны, то равны и левые:

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}. \quad (2.93)$$

Коэффициент полезного действия цикла с учетом равенства (2.93) будет:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.94)$$

При выводе уравнения (2.94) не делалось никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Кроме того, цикл Карно, на всех стадиях был проведен так, что не было необратимых процессов, не было соприкосновения тел с различными температурами. Поэтому получить в круговом процессе более высокий КПД принципиально невозможно. Это дает основание для утверждения, получившего название теоремы Карно: *из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), наибольшим КПД обладают обратимые машины.* При этом КПД обратимых машин, работающих при одной и той же температуре нагревателя и холодильника, одинаков и не зависит от конструкции машины и рода рабочего тела.

Таким образом, **КПД идеального теплового двигателя**, работающего по обратимому циклу,

$$\eta_{\text{ид}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.95)$$

2.4.5 Энтропия и её связь с термодинамической вероятностью

Из рассмотрения обратимого цикла Карно следует, что $Q_1 \neq Q_2$. Это служит подтверждением того, что теплота не является функцией состояния. Однако из равенства (2.93) следует, что равны между собой отношения теплоты к температурам, при которых они были получены или отданы:

$$\left| \frac{Q_1}{T_1} \right| = \left| \frac{Q_2}{T_2} \right|.$$

Отношение теплоты Q , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре, при которой происходила передача теплоты, называется *приведённой теплотой* Q^* ,

$$Q^* = \frac{Q}{T}. \quad (2.96)$$

Для подсчёта приведённой теплоты в произвольном процессе необходимо разбить этот процесс на бесконечно малые участки, где температуру T можно считать постоянной. Тогда приведённая теплота на каждом участке

$$\delta Q^* = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.97)$$

Значение приведённого количества теплоты на всех участках произвольного процесса находится интегрированием:

$$Q_{1-2}^* = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.98)$$

Найдем приведённую теплоту Q^* в обратимом цикле Карно:

$$Q_{\text{Карно}}^* = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} + \int_B^C \frac{\delta Q}{T} + \int_C^D \frac{\delta Q}{T} + \int_D^A \frac{\delta Q}{T}.$$

Учтем характер процессов в цикле Карно: второй и четвёртый члены равны нулю, так как в адиабатическом процессе $dQ = 0$, на изотермических участках цикла температура постоянна и её можно вынести за знак интеграла. Тогда с учетом выражений (2.98) и (2.93) получим

$$Q_{\text{Карно}}^* = \frac{1}{T_1} \int_A^B dQ + \frac{1}{T_2} \int_C^D dQ = \frac{Q_1}{T_1} + \left(-\frac{Q_2}{T_2} \right) = 0. \quad (2.99)$$

Строгий теоретический анализ показывает, что приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \quad (2.100)$$

Из математики известно, что если справедливо такое равенство вида, то подынтегральное выражение есть полный дифференциал некоторой функции. В свою очередь, если полный дифференциал функции равен нулю, то эта функция есть функция состояния. Функция состояния, дифференциалом которой является выражение $\frac{\delta Q}{T}$, называется **энтропией** и обозначается S :

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (2.101)$$

Понятие энтропии (по гречески – превращение) в физику чисто теоретически ввел немецкий учёный Клаузиус в 1865 году.

Согласно определению (2.100), значение энтропии S определяется с точностью до постоянной интегрирования. На практике обычно нужно знать не абсолютное значение энтропии S , а её изменение при переходе из одного состояния в другое:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.102)$$

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то, согласно равенству (2.102), изменение энтропии может быть найдено из выражения

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}, \quad (2.103)$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования надо выразить через величины, характеризующие исследуемый процесс. Исходя из выражения (2.102), найдем изменение энтропии в процессах идеального газа. Так как

$$dU = \frac{m}{M} C_{V,M} dT, \quad \delta A = p dV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V},$$

то, подставив в выражение (2.102) значения dU и δA , получим

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_{V,M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя в заданных пределах, найдем изменение энтропии:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left(C_{V,M} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (2.104)$$

Найдем изменение энтропии в изопроцессах. При изотермическом процессе ($T_1 = T_2$) из формулы (2.104) следует

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (2.105)$$

при изохорном процессе $V_1 = V_2$

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_{V,M} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.106)$$

Из формул (2.105), (2.106) следует, что для обратимых процессов изменение энтропии равно нулю:

$$\Delta S = 0. \quad (2.107)$$

Так как для адиабатического процесса $\delta Q = 0$, то в соответствии с (2.102) $\Delta S = 0$ и, следовательно, $S = \text{const}$, т. е. адиабатический обратимый процесс протекает при постоянной энтропии. Поэтому его часто называют *изоэнтропийным процессом*.

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей необратимый цикл, возрастает:

$$\Delta S > 0. \quad (2.108)$$

Выражения (2.107) и (2.108) относятся только к замкнутым системам, если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (2.107) и (2.108) можно представить в виде *неравенства Клаузиуса*

$$\Delta S \geq 0, \quad (2.109)$$

или

$$dS \geq 0, \quad (2.110)$$

т. е. энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов). Возрастание энтропии системы при необратимом процессе выражает тот факт, что тепло само по себе не может переходить от менее нагретых к более нагретым телам. Таким образом, последнее утверждение можно рассматривать как ещё одну формулировку *второго начала термодинамики*. Таким образом, неравенство Клаузиуса в виде (2.109) или (2.110) является математической формулировкой *второго начала термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых, происходящих в ней процессах, не может убывать, она или увеличивается или остаётся постоянной*.

Понятие энтропии имеет глубокий физический смысл, едва ли не больший, чем понятие энергии. Поскольку, энтропия остается постоянной при обратимом характере процесса и возрастает при необратимых процессах, энтропию рассматривают как меру необратимости термодинамического процесса. В состоянии **термодинамического равновесия** энтропия системы максимальна.

Рассмотрим, что представляет собой состояние термодинамического равновесия с точки зрения статистической физики. В состоянии равновесия система однородна: все средние характеристики системы, такие, как концентрация, давление, температура, одинаковы во всех ее макроскопических частях. Равновесная система изотропна: в системе не существует направленного движения частиц или потока какой-либо другой физической величины. Иными словами, все направления движения равновероятны, и частицы совершают полностью хаотическое тепловое движение. Таким образом, состояние равновесия, с точки зрения статистической физики, представляет собой состояние полного беспорядка, в то время как состояние, отличное от равновесного, характеризуется существованием в системе направленного, т. е. упорядоченного движения. Указанное отличие равновесного состояния от неравновесного дает возможность рассматривать энтропию как количественную меру беспорядка, существующего в системе.

Когда мы охлаждаем систему (например, газ) при постоянном объеме, мы непрерывно извлекаем из нее тепло и, следовательно, энтропию т.е. $\delta Q < 0$ и $dS < 0$. При этом тепловое движение, которое создает неупорядоченность, становится все менее интенсивным, и упорядоченность системы повышается. Когда газ конденсируется в жидкость, молекулы занимают более определенные положения относительно друг друга, в отличие от их положения в газовой фазе.

Причем скачкообразное уменьшение беспорядка соответствует скачкообразному уменьшению энтропии. При дальнейшем понижении температуры жидкости тепловое движение, которое создает неупорядоченность, становится все менее интенсивным, и происходит дальнейшее уменьшение энтропии.

Когда жидкость отвердевает, молекулы в кристалле занимают вполне определенные положения одна относительно другой, так что неупорядоченность скачком уменьшается. Соответственно при отвердевании выделяется тепло, и энтропия также убывает скачком. При абсолютном нуле тепловое движение полностью прекращается, следовательно, неупорядоченность будет также равна нулю. В связи с этим энтропию всех веществ при $T = 0$ принимают равной нулю.

Утверждение, что энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина называют *третьим началом термодинамики, или теоремой Нернста–Планка (1906 г.)*:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (2.111)$$

Беспорядочное либо упорядоченное расположение молекул в заданном объеме можно характеризовать количеством способов, которым можно расположить молекулы в этом объеме, не изменяя состояния системы. Ясно, что беспорядочно можно расположить молекулы значительно большим количеством способов.

Состояние макроскопического тела, заданное с помощью макроскопических величин, характеризующих все тело в целом (объем, давление, температура, внутренняя энергия и др.), называется *макросостоянием*. Состояние макроскопического тела, характеризованное настолько подробно, что оказываются заданными состояния всех образующих тело молекул, называется *микросостоянием*. Всякое макросостояние может быть осуществлено различными способами, каждому из которых соответствует некоторое микросостояние тела. Число различных микросостояний, соответствующих данному макросостоянию, называется *статистическим весом*, или *термодинамической вероятностью* макросостояния и обозначается через W . Таким образом, статистический вес представляет собой число микроскопических способов, которыми может быть осуществлено данное макросостояние.

Для пояснения понятия статистического веса рассмотрим способы, которыми молекулы газа могут распределяться между двумя половинами сосуда, в котором заключен газ (рисунок 2.20).

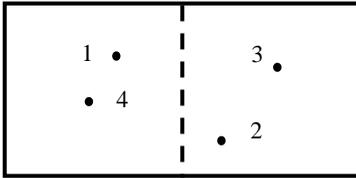


Рисунок 2.20

Представим себе, что сосуд разделён на две части и содержит четыре частицы. Подсчитаем все возможные микросостояния четырёх частиц в данном сосуде. Как видно из таблицы 2.1, всего таких микросостояний (способов размещения четырех частиц в сосуде) будет 16. Но

наибольшее число способов размещения даёт такое состояние, при котором слева и справа окажется одинаковое число частиц. Такое состояние является наиболее вероятным, его вероятность равна $6/16$. Наименьшей вероятностью обладает случаи, когда все частицы соберутся в какой-то одной половине сосуда, вероятность этого состояния равна $2/16$.

Таблица 2.1

Состояние		Способы реализации состояния		Число способов реализации данного состояния (W)
Число частиц слева	Число частиц справа	Номера частиц слева	Номера частиц справа	
0	4	–	1, 2, 3, 4	1
1	3	1 2 3 4	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	4
2	2	1, 2 1, 3 1, 4 2, 3 2, 4 3, 4	3, 4 2, 4 2, 3 1, 4 1, 3 1, 2	6
3	1	1, 2, 3 1, 2, 4 1, 3, 4 2, 3, 4	4 3 2 1	4
4	0	1, 2, 3, 4	–	1
<i>Всего способов</i>				$2^4 = 16$

Термодинамическая вероятность численно равна числителю дроби, обозначающей обычную вероятность. В таблице 2.2 приведены способы реализации различных состояний для 10

молекул. Наибольшей вероятностью обладают случаи, когда в обеих частях сосуда будет равное или почти равное количество частиц.

Таблица 2.2

Число частиц		Число способов реализации данного состояния W	Число частиц		Число способов реализации данного состояния W
слева	справа		слева	справа	
0	10	1	6	4	210
1	9	10	7	3	120
2	8	45	8	2	45
3	7	120	9	1	10
4	6	210	10	0	1
5	5	252	<i>Всего</i>		$2^{10} = 1024$

Если число частиц будет большим, например порядка 10^{19} , то термодинамическая вероятность того, что частицы распределятся примерно поровну, будет намного больше вероятности того, что почти все они соберутся в одной половине сосуда. Можно показать, что все микросостояния данной системы равновероятны. Утверждение о равновероятности всех микросостояний лежит в основе статистической физики и носит название *эргодической гипотезы*. Вследствие этого статистический вес оказывается пропорциональным вероятности (обычной) макросостояния. Согласно таблице 2.1 в случае четырех молекул имеется большая вероятность (равная $1/8$) того, что все молекулы соберутся в одной из половин сосуда (левой или правой). Однако с увеличением числа молекул вероятность такого распределения существенно уменьшается. Например, для случая, когда в сосуде находятся 24 частицы, вероятность того, что все эти молекулы соберутся в одной из половин сосуда, равна 10^{-7} . С ростом числа молекул вероятность такого события становится настолько мала, что практически ее можно считать равной нулю.

Из рассмотренного выше примера следует, что термодинамическая система стремится к состоянию с **максимальной термодинамической вероятностью**. Но мы знаем, система стремится и к состоянию с максимальной энтропией, которое соответствует состоянию термодинамического равновесия. Равновесное состояние как раз будет при равенстве молекул в обеих частях сосуда и соответствует максимуму термодинамической вероятности. Следовательно, между энтропией и термодинамической вероятностью должна существовать связь. Из теории вероятности известно, что вероятность того, что два

независимых события произойдут одновременно, равна произведению вероятностей этих событий. Можно показать, что этим свойством обладает и термодинамическая вероятность

$$W = W_1 W_2. \quad (2.112)$$

Энтропия – аддитивная величина и поэтому связывать её напрямую со статистическим весом нельзя. Аддитивной величиной является логарифм статистического веса. Действительно, взяв логарифм от (2.112), получим

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2. \quad (2.113)$$

Больцман предложил следующую формулу для энтропии:

$$S = k \ln W, \quad (2.114)$$

где k – уже встречавшаяся нам *постоянная Больцмана*.

Состояние, осуществляемое малым числом способов, называется *упорядоченным*, или *неслучайным*. Состояние, осуществляемое многими различными способами, называется *беспорядочным*, или *случайным*. С этой точки зрения *энтропия* выступает как *мера беспорядочности, хаотичности термодинамической системы*.

2.4.6 Статистический смысл второго начала термодинамики

Связь между энтропией и термодинамической вероятностью (статистическим весом) позволяет несколько иначе трактовать второе начало термодинамики. Действительно, на основании вышеизложенного, можно утверждать, что всякая изолированная система переходит из менее вероятных состояний в более вероятные состояния, что сопровождается ростом её термодинамической вероятности, а следовательно, в соответствии с уравнением (2.114) и энтропии. Состояние системы с наибольшей термодинамической вероятностью является равновесным, и ему соответствует максимальное значение энтропии. Учитывая статистический смысл энтропии **второе начало термодинамики** можно сформулировать следующим образом: *во всех имеющихся в природе замкнутых системах наиболее вероятным изменением энтропии является её возрастание*.

Энтропия – вероятностная, статистическая величина. Её увеличение наиболее вероятно, но не исключает *флуктуаций*, т.е. наличия процессов, пусть маловероятных, где энтропия может

уменьшаться. Вероятностное толкование закона возрастания энтропии было дано Больцманом (1870). Больцман писал: "...всегда имеются флуктуационные состояния, соответствующие уменьшению энтропии, и поэтому чрезвычайно маловероятные. Вероятность их настолько мала, что для макроскопических тел эти флуктуации не наблюдаются". Как и любые вероятностные законы, второе начало термодинамики справедливо с точностью до флуктуаций. В случае систем, содержащих небольшое число частиц, вероятность отклонения становится заметной.

Основываясь на понятии энтропии и втором начале термодинамики, Клаузиус в 1867 году сделал вывод о *тепловой смерти Вселенной*. Энтропия Вселенной возрастает и приближается к максимуму, по достижении которого во Вселенной прекратятся какие бы то ни было процессы. Должно наступить абсолютно равновесное состояние, в котором никакие процессы уже невозможны. В связи с этой концепцией Больцманом и была высказана так называемая *флуктуационная гипотеза*. Больцман не отрицал применимость принципа возрастания энтропии ко всей Вселенной в целом (а такие сомнения высказывались), но он обратил внимание на статистическую природу этого закона. Поэтому отступления от термодинамического равновесия Вселенной – флуктуации – не только возможны, но и неизбежны. Он утверждал, что мы имеем дело с гигантской флуктуацией. Она должна исчезнуть. Тогда наступит тепловая смерть Вселенной. Однако через некоторое время снова возникает гигантская флуктуация, и Вселенная выйдет из состояния тепловой смерти. Затем опять всё повторится, и так без конца. В настоящее время установлено, что вывод о тепловой смерти Вселенной и первоначальные попытки его опровержения являются несостоятельными, поскольку в них не учитывалось влияние тяготения. Выяснилось, что из-за тяготения однородное изотермическое распределение вещества во Вселенной не соответствуют максимуму энтропии, поскольку такое состояние не является наиболее вероятным. Вселенная нестационарна – она расширяется, и первоначально однородное вещество распадается под действием сил тяготения, образуя скопления галактик, сами галактики, звёзды и т.д. Эти процессы происходят с ростом энтропии – в соответствии со вторым началом термодинамики. И

ниоткуда не следует, что эти процессы приведут к однородному изотермическому состоянию Вселенной, т.е. к тепловой смерти.

2.4.7 Статистический смысл третьего начала термодинамики

Как было показано выше, при $T = 0$ молекулы перестают участвовать в хаотическом тепловом движении. Это состояние полной упорядоченности, никакого перемешивания, никакой хаотичности. Термодинамическая вероятность такого состояния $W = 1$. Тогда, в соответствии с уравнением (2.114), можно записать

$$S_{T=0} = k \ln 1 = 0.$$

Энтропия системы при температуре абсолютного нуля равна нулю. Из того факта, что при $T = 0$ и $S = 0$ следует, что абсолютный нуль недостижим. Из третьего начала термодинамики следует, что при $T \rightarrow 0$ теплоёмкость также стремится к нулю, что подтверждается экспериментально. Квантовая теория приводит к выводу, что при абсолютном нуле частицы обладают некоторой энергией, тем большей, чем меньше масса частицы. Эта энергия (т.н. нулевая энергия, или нулевые колебания) не может быть отнята у частицы, т.к. не является тепловой. Она не связана с хаотическим тепловым движением, а имеет квантовый характер.

2.5 Реальные газы

2.5.1 Уравнение Ван-дер-Ваальса

Модель идеального газа позволяет довольно хорошо описывать поведение реальных газов только при малых плотностях и достаточно высоких температурах. Многие газы (азот, водород, гелий, кислород, воздух и др.) можно считать идеальными при обычном атмосферном давлении и температуре. При высоких давлениях и низких температурах поведение реальных газов отличается от свойств идеальных газов, подчиняющихся уравнению Менделеева–Клапейрона. Для одного моля

$$pV_m = RT. \quad (2.115)$$

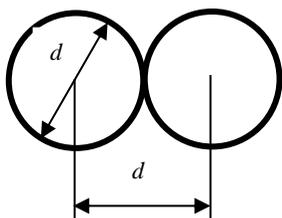
где $V_m = \frac{V}{\nu}$ – молярный объем газа. Экспериментальные

исследования удельной теплоемкости, вязкости и других свойств газов показали, что эти свойства тоже отличаются от соответствующих свойств идеальных газов. Основная причина этого отличия заключается в том, что в модели идеального газа не учитывалось ни взаимодействие молекул, ни конечный размер самих молекул. Силы взаимодействия между молекулами имеют электромагнитную природу, хотя в целом молекулы электрически нейтральны. На больших расстояниях молекулы притягиваются друг к другу, а на малых – отталкиваются. Силы притяжения между молекулами быстро убывают с увеличением расстояния между ними, и поэтому при малой плотности газ ведет себя как идеальный. При увеличении плотности газа начинают играть всё возрастающую роль объём молекул и взаимодействию между ними на расстоянии. Поэтому модель идеального газа и уравнение Менделеева – Клапейрона становятся неприемлемыми. Так, например, из уравнения Менделеева – Клапейрона (2.115) следует, что отношение $\frac{pV_m}{RT}$, называемое *коэффициентом сжимаемости для идеальных газов*, равно единице. Однако опыты показывают, что при достаточно высоких давлениях все реальные газы, независимо от их температуры, менее сжимаемы, чем идеальные, т.е. $\frac{pV_m}{RT} > 1$.

Взаимодействие между молекулами реального газа носит настолько сложный характер, что невозможно получить уравнение состояния, которое количественно правильно описывало бы поведение реального газа во всей области возможных изменений его температуры и плотности. Можно, однако, написать приближенное уравнение состояния реального газа, учитывающее основные качественные особенности межмолекулярного взаимодействия.

В научной литературе существуют более 150 отличающихся друг от друга уравнений состояния реального газа. Самым простым из них и дающим достаточно хорошие результаты является **уравнение Ван-дер-Ваальса** (1873 г.). Это уравнение получено путем внесения двух поправок в уравнение Менделеева – Клапейрона (2.115) для одного моля идеального газа.

Первая поправка связана с действием сил отталкивания между молекулами. Она учитывает собственный объём молекулы



V_0 , и поэтому объем сосуда V заменяют свободным объемом $V-b$. Поправка b к объёму характеризует ту часть объёма сосуда, которая недоступна для движения молекул. Она получена из следующих соображений. Центр любой молекулы не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние меньше диаметра молекулы d (рисунок 2.24). Следовательно, для центров двух молекул недоступен сферический объём радиуса d , т.е. объём, равный восьми объёмам молекулы. В расчёте на одну молекулу недоступным оказывается объём, равный учетверённому объёму молекулы. Так как наиболее вероятным является столкновение двух молекул, то в расчёте на одну молекулу недоступным будет объём, равный четырём объёмам одной молекулы, а для всех молекул – объём b , равный учетверённому суммарному объёму молекул газа, т.е. $b = 4V_0N_A$. Полученный результат следует рассматривать лишь как оценочный. В итоге получаем следующее уравнение для одного моля газа. Оно получило название **уравнения Клаузиуса**:

$$p = \frac{RT}{V_m - b}, \quad (2.116)$$

где b – постоянная Ван-дер-Ваальса, имеющая для разных газов различное значение. Постоянная b измеряется в $\text{м}^3/\text{моль}$.

Вторая поправка связана с действием сил притяжения между молекулами. Если молекула находится внутри объема газа, то силы притяжения её остальными частицами взаимно уравниваются и никак не влияют на характер движения этой молекулы. Но если молекулы находятся у стенки сосуда, то притяжение между ними должно приводить к уменьшению оказываемого газом давления на стенки сосуда, так как на каждую находящуюся вблизи стенки сосуда молекулу будет действовать сила притяжения со стороны остальных молекул газа, направленная внутрь сосуда. Поэтому давление на стенки будет меньше. Оценка поправки к давлению, обусловленная взаимным притяжением молекул, имеет вид $\Delta p = \frac{a}{V_m^2}$, где a –

постоянная Ван-дер-Ваальса, имеющая для разных газов различные значения. Постоянная a измеряется в $\text{Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2$. В результате из уравнения (2.116) имеем

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}. \quad (2.117)$$

Преобразуя выражение (2.117), получим уравнение (2.118), которое называют уравнением Ван-дер-Ваальса для одного моля газа:

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = RT. \quad (2.118)$$

Чтобы получить уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа, умножим выражение (2.118) на число молей $\nu = \frac{m}{M}$ и

учтем, что $V = \frac{m}{M} V_M$. В результате получим

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT. \quad (2.119)$$

Поправки учитывают тот факт, что молекулы реального газа имеют собственный объем и между ними действуют силы взаимного притяжения.

Введём обозначения: $a' = \nu^2 a$, $b' = \nu b$.

В результате придём к ещё одной форме записи уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{a'}{V^2} \right) (V - b') = \nu RT. \quad (2.120)$$

Постоянная a' измеряется в Па·м⁶, постоянная b' – в м³.

Уравнения (2.118) и (2.120) лучше согласуются с экспериментом, чем уравнение Менделеева – Клапейрона. Однако для сильно сжатых газов уравнение Ван-дер-Ваальса тоже оказывается недостаточно точным. В случае разреженных газов уравнение Ван-дер-Ваальса по существу не отличается от уравнения состояния идеальных газов. Вынесем в уравнении (2.120) p и V за скобки. Получим

$$pV \left(1 + \frac{a'}{pV^2} \right) \left(1 - \frac{b'}{V} \right) = \nu RT.$$

При стремлении объема к бесконечности уравнение Ван-дер-Ваальса в пределе переходит в уравнение Менделеева – Клапейрона, что находится в соответствии с тем фактом, что все реальные газы с уменьшением плотности приближаются по своим свойствам к идеальному газу. Таким образом, реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближённо. Воображаемый газ, строго подчиняющийся уравнениям (2.118) и (2.120), называется *ван-дер-ваальсовским*.

Исследуем уравнение (2.118). Раскрыв скобки и умножив получившиеся соотношение на V^2 , уравнение Ван-дер-Ваальса можно привести к следующему виду:

$$pV_M^3 - (b'p + RT)V_M^2 + a'V_M - a'b' = 0. \quad (2.121)$$

Получилось кубическое уравнение относительно V_M , коэффициенты которого зависят от параметров p и T . Это уравнение имеет три решения (в дальнейшем индекс «м» для простоты опускаем). В зависимости от значений коэффициентов либо все три решения являются вещественными, либо одно решение является вещественным, а два других – комплексными. Объём может определяться только вещественным числом, поэтому комплексные решения не имеют физического смысла и должны быть отброшены.

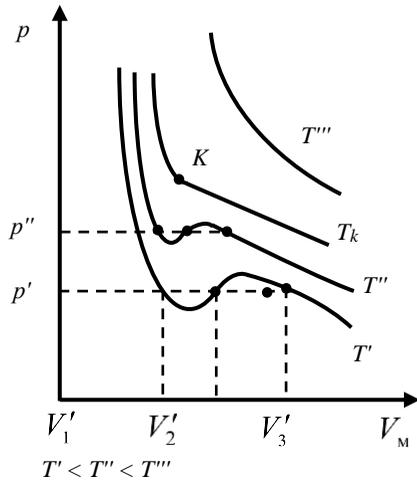


Рисунок 2.25

2.5.2 Изотермы Ван-дер-Ваальса

На рисунке 2.25 изображены **изотермы Ван-дер-Ваальса** – кривые зависимости p от V_m для нескольких значений температуры. При температуре T' и значениях молярного объёма от V_1' до V_3' коэффициенты уравнения таковы, что все три решения уравнения оказываются вещественными, т.е. одному значению давления отвечают три значения объёма. При давлениях вне указанного промежутка вещественным оказывается только одно решение. С повышением температуры различие между тремя вещественными решениями уменьшается (изотермы для температур T' и T''). Начиная с некоторой, своей для каждого газа, температуры T_k , при любом давлении вещественным оказывается только одно решение. Эта температура называется *критической*. Изотерма, соответствующая ей, называется *критической изотермой*.

При повышении температуры точки, соответствующие значениям объёма V_1' , V_2' , и V_3' всё больше сближаются и, в конце концов, сливаются при критической температуре в одну точку K , называемую *критической точкой*. Для критической изотермы точка K является точкой перегиба. Ей соответствуют три совпадающих решения (p_k, V_k, T_k) уравнения (2.121). Давление p_k и объём V_k называются критическими. Состояние газа, определяемое критическими параметрами, называется *критическим*.

Касательная к изотерме в точке K является пределом, к которому стремятся секущие p' , p'' и т.д. при приближении температуры к критической. Следовательно, эта касательная, как и все секущие, параллельна оси V , так что производная dp/dV в точке равна нулю. Кроме того, в точке перегиба должна быть равна нулю вторая производная $d^2p/dV^2 = 0$.

Продифференцируем уравнение (2.117) по V_m :

$$\frac{dp}{dV_m} = -\frac{RT}{(V_m - b)^2} + \frac{2a}{V_m^3}.$$

Вторая производная будет иметь вид

$$\frac{d^2P}{dV_m^2} = \frac{2RT}{(V_m - b)^3} - \frac{6a}{V_m^4}.$$

Положим $T = T_k$ и $V_m = V_{mk}$. Значение производных в критической точке должны быть равны нулю:

$$\frac{RT_{\text{к}}}{(V_{\text{МК}} - b)^2} + \frac{2a}{V_{\text{МК}}^3} = 0; \quad \frac{2RT_{\text{к}}}{(V_{\text{МК}} - b)^3} - \frac{6a}{V_{\text{МК}}^4} = 0. \quad (2.122)$$

В дополнение к этим уравнениям запишем уравнение (2.117) для критической точки:

$$p_{\text{к}} = \frac{RT_{\text{к}}}{V_{\text{МК}} - b} - \frac{a}{V_{\text{МК}}^2}. \quad (2.123)$$

Решение системы уравнений (2.122) и (2.123) даёт значение параметров в критической точке.

$$V_{\text{МК}} = 3b; \quad P_{\text{к}} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{\text{к}} = \frac{8a}{27bR}. \quad (2.124)$$

Таким образом, зная постоянные Ван-дер-Ваальса a и b , можно найти критические параметры $V_{\text{МК}}$, $P_{\text{к}}$ и $T_{\text{к}}$. И, наоборот, по известным значениям критических параметров могут быть найдены значения постоянных Ван-дер-Ваальса.

2.5.3 Экспериментальные изотермы Ван-дер-Ваальса

У изотерм Ван-дер-Ваальса, соответствующих температурам ниже критической, (рисунок 2.26) имеется область, в которой вещество ведёт себя противоестественным образом. В области от "дна" впадины до "вершины" горба, увеличение объёма сопровождается ростом давления. Однородного вещества с такими свойствами быть не может. Поэтому можно заключить, что в указанной области вещество становится неоднородным, т.е. расслаивается на две фазы. В термодинамике *фазой называют совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам, частей системы*. Например, если в закрытом сосуде находится вода, в которой плавают кусочки льда, то жидкая вода составляет одну фазу, все кусочки льда – вторую, а смесь паров воды и воздуха над жидкостью – третью фазу термодинамической системы. Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса не только описывает газообразное состояние вещества, но охватывает также переход вещества в жидкое состояние и процесс сжатия жидкости.

Экспериментальные изотермы были получены в опытах ирландского ученого Т. Эндрюса, исследовавшего зависимость молярного объема углекислого газа от давления при изотермическом сжатии. Они хорошо совпадают с теоретическими на участках, соответствующих однородным состояниям вещества, но в области расслоения на две фазы вместо волнообразного участка изотермы имеется прямолинейный горизонтальный участок. Основываясь на законах

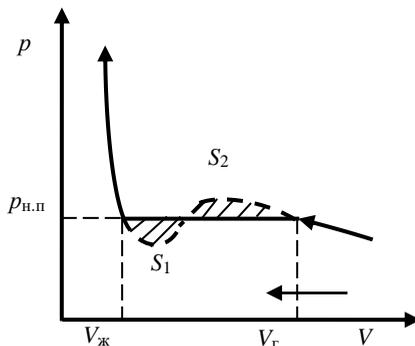


Рисунок 2.26

термодинамики, можно доказать, что охватываемые впадиной и горбом площади одинаковы ($S_1 = S_2$). В состоянии, соответствующем горизонтальному участку экспериментальной изотермы, наблюдается равновесие между жидкой и газообразной фазами вещества. Газ, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным паром*. Давление $p_{н.п.}$, при котором осуществляется равновесие при данной температуре, называется *давлением насыщенного пара*. Это давление растёт с ростом температуры.

На рисунке (2.27) изображены экспериментальные изотермы для ряда значений температуры. Видно, что с увеличением

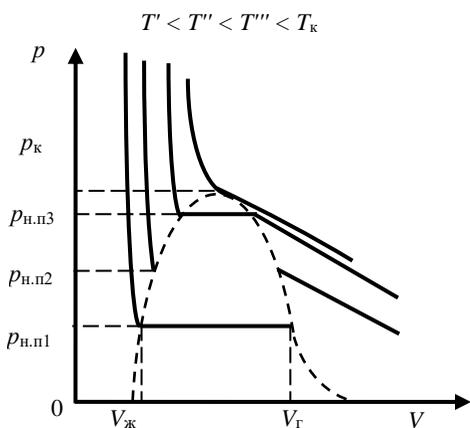


Рисунок 2.27

температуры горизонтальный участок изотермы сокращается и стягивается в точку *K* при критической температуре. Соответственно уменьшается различие в плотностях жидкости и насыщенного пара. При критической температуре это различие полностью исчезает, и вещество становится однородным. То

есть насыщенный пар может существовать при температурах ниже критической.

Проведённая на рисунке через крайние точки горизонтальных участков колоколообразная штриховая кривая ограничивает область двухфазных состояний вещества. При давлениях, больших критического, отсутствует область двухфазных состояний. Вещество находится либо в жидком состоянии, либо в газообразном. Границей между ними служит критическая изотерма. Следовательно, газ не может быть переведен в жидкое состояние изотермическим сжатием при температурах выше критической.

Понятие критической температуры ввел в 1860 году Д. И. Менделеев. Он рассматривал эту температуру как температуру, при которой исчезают силы сцепления между молекулами и жидкость превращается в пар, независимо от давления и занимаемого ею объёма.

Колоколообразная кривая и участок критической изотермы, лежащий слева от точки K , делят диаграмму P, V на три области (рисунок 2.28). Слева находится жидкое состояние вещества. Под колоколообразной кривой находится область двухфазных состояний.

Справа над критической изотермой располагается область однородных газообразных состояний. В ней иногда выделяют обозначенную буквой "П" часть, называемую областью пара. Любое состояние в этой области отличается от состояний, лежащих в области "Г", тем, что при изотермическом сжатии вещество, находившееся первоначально в таком состоянии, претерпевает процесс ожидения.

При температурах выше критической вещество не может быть приведено в жидкое состояние никаким сжатием.

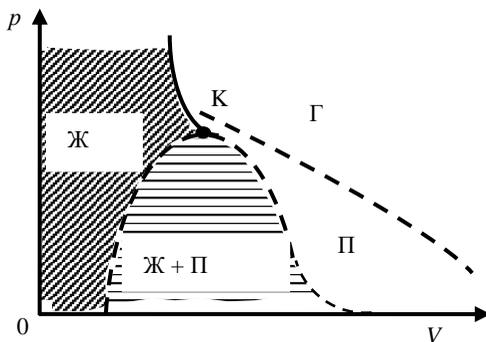


Рисунок 2.28

2.5.4 Фазовые превращения

Разные фазы одного и того же вещества могут находиться в

равновесии, соприкасаясь друг с другом. Такое равновесие наблюдается лишь в ограниченном интервале температур, каждому значению температуры T соответствует своё значение давления p , при котором возможно равновесие. Совокупность состояний равновесия двух фаз изображается на диаграмме p, T соответствующей линией.

$$p = f(T).$$

На диаграмме p, V совокупность равновесных состояний изображается отрезком горизонтальной прямой, причём каждой паре значений p и T соответствует свой отрезок (см. рисунок 2.26). Состояния, отвечающие различным точкам отрезка, отличаются распределением вещества между фазами. Концам отрезка соответствуют однофазные состояния. При переходе вещества из одной фазы в другую точка, изображающая состояние на диаграмме p, V , перемещается вдоль горизонтального отрезка. Вся совокупность состояний, изображаемая на диаграмме горизонтальным отрезком прямой, на диаграмме p, V изображается одной точкой, отделяющей значения p и T , при которых осуществляется переход. Переход вещества из одной фазы в другую обычно сопровождается поглощением или выделением некоторого количества теплоты, которая называется *теплотой фазового превращения*. Например, при таянии льда поглощается теплота плавления, а при замерзании воды выделяется такое же количество теплоты. Переходы, сопровождающиеся поглощением или выделением теплоты, называются *фазовыми превращениями первого рода*. Существуют превращения одной кристаллической модификации (разновидности) вещества в другую, которые не связаны с поглощением или выделением теплоты. Их называют *фазовыми превращениями второго рода*. При фазовых превращениях второго рода плотность вещества не изменяется. Претерпевают скачкообразное изменение удельная теплоёмкость и некоторые другие величины. Примером превращения второго рода может служить переход железа из ферромагнитного состояния в парамагнитное, которое происходит при температуре, называемой *точкой Кюри*. Три фазы одного и того же вещества (твёрдая, жидкая и газообразная, или жидкая и две твёрдые, или, наконец, три твёрдые) могут находиться в равновесии только при единственных значениях температуры и давления, которым на диаграмме p, T соответствует точка, называемая *тройной*

(рисунок 2.29). В термодинамике доказывается, что равновесие более чем трёх фаз одного и того же вещества невозможно. Это утверждение подтверждается опытом. В тройной точке сходятся три кривые равновесия фаз, взятые попарно. Кривая испарения заканчивается в точке К и выделяет условия равновесия между жидкостью и газом. Кривая плавления определяет условия между твёрдой и жидкой фазами вещества (например, между жидкой водой и льдом). Эта кривая уходит в бесконечность. *Сублимацией* (или *возгонкой*) называется непосредственный (без плавления) переход из кристаллического состояния в газообразное. Кривая сублимации определяет условия равновесия между твёрдой (кристаллической) и газообразной фазами вещества. Диаграммы, изображённые на рисунке 2.29, называются *диаграммами состояния* вещества. Они определяют

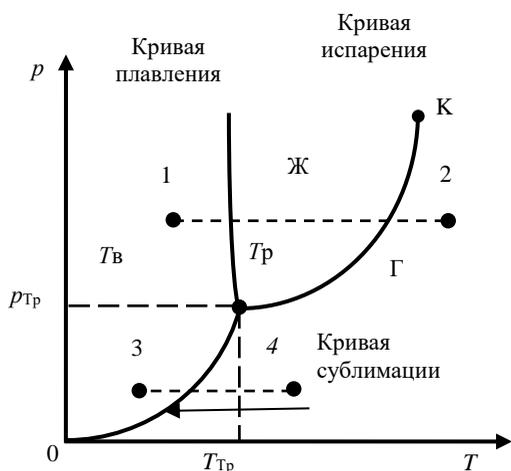


Рисунок 2.29

равновесные состояния, т.е. такие состояния, в которых вещество при неизменных внешних условиях пребывает сколь угодно долго. Строятся диаграммы состояния на основе экспериментальных данных. Кривые плавления, испарения и сублимации разбивают координатную плоскость p, T на три области. Слева от кривых сублимации и плавления лежит область твёрдой фазы. Между кривыми плавления и

испарения заключена область жидких состояний. Справа от кривых испарения и сублимации простирается область газообразных состояний. Всякая точка в одной из этих областей изображает соответствующее однофазное состояние вещества. Любая точка, лежащая на одной из разграничивающих области кривых, определяет условия равновесия двух соответствующих фаз вещества. Тройная точка изображает состояние равновесия всех трёх фаз.

Диаграмма состояния позволяет определить, какие превращения будет претерпевать вещество при различных процессах. Например, если подвергнуть вещество изобарическому нагреванию (переход 1 – 2 на рисунке 2.29), то будет наблюдаться следующая последовательность превращений: кристаллы – жидкость – газ. Если рассмотреть переход при более низком давлении (переход 3 – 4), то последовательность состояний будет иной: кристаллы превращаются непосредственно в газ, минуя жидкую фазу.

Из рисунка 2.29 следует, что жидкая фаза может находиться в равновесии только при давлениях не меньших, чем давление в тройной точке $p_{\text{Тр}}$. У большинства обычных веществ давление в тройной точке значительно меньше атмосферного, вследствие чего переход этих веществ из твёрдого состояния в газообразное осуществляется через жидкую фазу. Например, тройной точке воды соответствует давление 4,58 мм рт. ст. и температура 0,0075 °С. У твёрдой углекислоты (её называют сухим льдом) давление в тройной точке выше атмосферного и составляет 5,11 атм, а температура тройной точки –56,6 °С. Поэтому при атмосферном давлении углекислота может существовать только в твердом и газообразном состояниях. Твердая углекислота при атмосферном давлении превращается непосредственно в пар, т.е. сублимируется. Температура её сублимации при атмосферном давлении равна –78 °С.

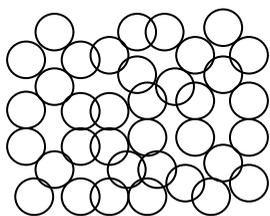
2.6 Особенности жидкого и твердого состояний вещества

2.6.1 Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение.

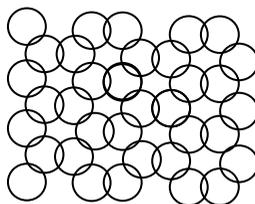
Жидкость является агрегатным состоянием вещества, промежуточным между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. *Жидкости (подобно твердым телам) малосжимаемы, т.е. обладают определенным объемом.* Молекулы жидкостей расположены практически вплотную друг к другу, как и в твердых телах, поэтому силы притяжения между молекулами существенны и удерживают молекулы на определенном расстоянии друг от друга. Средняя потенциальная энергия, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия, значительно больше средней кинетической энергии их теплового движения, Кинетической

энергии недостаточно для преодоления сил притяжения. Поэтому жидкости подобно твердым телам имеют определенный объем. Они способны сопротивляться не только сжатию, но и растяжению. *Жидкости, подобно газам*, принимают форму сосуда, в котором они находятся. В расположении частиц жидкости наблюдается ближний порядок, т.е. упорядоченность в их расположении, повторяющаяся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Молекулы жидкости, подобно частицам твердого тела, расположены вплотную друг к другу и совершают колебания у положения равновесия. В отличие от твердых тел, эти положения равновесия каждой молекулы непостоянны. По истечении некоторого времени «оседлой жизни», называемого временем релаксации, они смещаются на расстояние порядка 10^{-8} см, и время от времени любая молекула может переместиться в соседнее вакантное место. Такие скачки молекул жидкости происходят довольно часто: можно сказать, что молекулы не привязаны к определенным центрам, как в кристаллах, а могут перемещаться по всему объему жидкости. Этим и объясняется текучесть жидкостей. Из-за сильного взаимодействия между близко расположенными молекулами они могут образовывать локальные (неустойчивые) упорядоченные группы, содержащие несколько молекул. Это явление называется *ближним порядком* (рисунок 2.30). Для твердых тел характерен *дальний порядок* в расположениях частиц, т.е. упорядоченное расположение молекул сохраняются на расстояниях, сравнимых с межатомными. На рисунке 2.30. приведен пример ближнего порядка молекул жидкости и дальнего порядка молекул кристаллического вещества: 1 – вода; 2 – лед.



(1)



(2)

Рисунок 2.30

Промежуточное положение жидкостей по строению и свойствам обусловило то обстоятельство, что до настоящего времени теория жидкости разработана неполностью. Большой вклад в разработку ряда проблем теории жидкого состояния принадлежит Я. Френкелю. Он объяснил тепловое движение в жидкости, особенности диффузии и уменьшение вязкости с ростом температуры.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием. Следовательно, начиная с некоторого расстояния, силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка 10^{-9} м) называется радиусом молекулярного действия r , а сфера радиуса r – сферой молекулярного действия.

На молекулы жидкости, находящиеся в поверхностном слое, действуют нескомпенсированные, направленные внутрь, силы притяжения со стороны остальной части жидкости. В результате этого поверхностный слой оказывает на всю жидкость большое внутреннее давление, называемое также *молекулярным*. Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости, направлено внутрь жидкости, нормально к её поверхности. Поэтому оно не действует на стенки сосуда и телá, погруженные в жидкость.

Частицы поверхностного слоя жидкости имеют бóльшую потенциальную энергию, чем частицы, которые находятся внутри жидкости. Это связано с тем, что для изотермического перехода молекул изнутри жидкости на её поверхность они должны совершить работу по преодолению направленных внутрь сил внутреннего

давления. Эта работа увеличивает потенциальную энергию молекул, переходящих на поверхность. Поверхностный слой в целом обладает дополнительной потенциальной энергией, которая входит составной частью во внутреннюю энергию жидкости. Если молекула переместится с поверхности внутрь жидкости, силы межмолекулярного взаимодействия совершат положительную работу. Наоборот, чтобы переместить некоторое количество молекул из глубины жидкости на поверхность (т. е. увеличить площадь поверхности жидкости), внешние силы должны совершить положительную работу $A_{\text{внеш}}$, пропорциональную изменению ΔS площади поверхности:

$$A_{\text{внеш}} = \sigma \Delta S. \quad (2.125)$$

Коэффициент σ называется *коэффициентом поверхностного натяжения* ($\sigma > 0$). *Коэффициент поверхностного натяжения равен работе, необходимой для увеличения площади поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу.* В СИ коэффициент поверхностного натяжения измеряется в джоулях на метр квадратный ($\text{Дж}/\text{м}^2$) или в ньютонах на метр ($\text{Н}/\text{м}$) ($1 \text{ Н}/\text{м} = 1 \text{ Дж}/\text{м}^2$). Следовательно, молекулы поверхностного слоя жидкости обладают избыточной по сравнению с молекулами внутри жидкости *потенциальной энергией*. Потенциальная энергия E_p поверхности жидкости пропорциональна ее площади:

$$\Delta E_p = A_{\text{внеш}} = \sigma \Delta S. \quad (2.126)$$

Равновесным состояниям системы соответствует минимальное значение ее потенциальной энергии. Отсюда следует, что свободная поверхность жидкости стремится сократить свою площадь. По этой причине свободная капля жидкости принимает шарообразную форму. Жидкость ведет себя так, как будто по касательной к ее поверхности действуют силы, сокращающие (стягивающие) эту поверхность. Эти силы называются *силами поверхностного натяжения*. Наличие сил поверхностного натяжения делает поверхность жидкости похожей на упругую растянутую пленку. Однако между поверхностным слоем жидкости и упругой пленкой имеется существенное различие. Натяжение обычной упругой пленки прямо пропорционально её деформации и равно нулю при некоторой конечной площади поверхности пленки. Поверхностное

натяжение в жидкостях не зависит от размеров свободной поверхности, т.е. стремится сократить её до нуля. Это своеобразие жидких пленок объясняется тем, что при изотермическом растяжении или сжатии жидких пленок изменяется число молекул, содержащихся в них, а среднее расстояние между молекулами не изменяется. Поэтому не изменяются и силы межмолекулярного взаимодействия, определяющие величину поверхностного натяжения.

Рассмотрим *горизонтальный* прямоугольный проволочный каркас и подвижную перекладину, которые полностью затянуты пленкой мыльной воды. Пленка представляет собой тонкий плоский объем жидкости, ограниченный с двух сторон поверхностным слоем. Под действием сокращающейся поверхности пленки мыльной воды перекладина начнет перемещаться. Работа, совершаемая силой со стороны каждого поверхностного слоя, при перемещении перекладины на расстояние Δx определяется по формуле

$$A = 2F\Delta x. \quad (2.127)$$

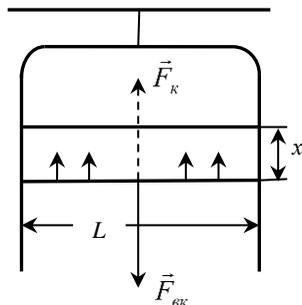
С другой стороны, эта работа может быть определена по формуле (2.124), которая после преобразования выглядит так:

$$A = \sigma\Delta S = \sigma 2L\Delta x. \quad (2.128)$$

Сравнивая формулы (2.136) и (2.137), получим

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (2.129)$$

Из равенства (2.129) следует, что коэффициент поверхностного натяжения также численно равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости. Сила поверхностного натяжения направлена по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно контуру. Коэффициент поверхностного натяжения зависит от химического состава жидкости и её температуры. С возрастанием температуры σ уменьшается и обращается в нуль при



критической температуре.

Опыты показывают, что свободная поверхность жидкости около стенок сосуда искривлена и имеет вид, показанный на рисунке 2.32. Искривленную свободную поверхность жидкости называют *мениском*. Для характеристики мениска вводят *краевой угол* θ между поверхностью стенки и мениском в точках их пересечения.

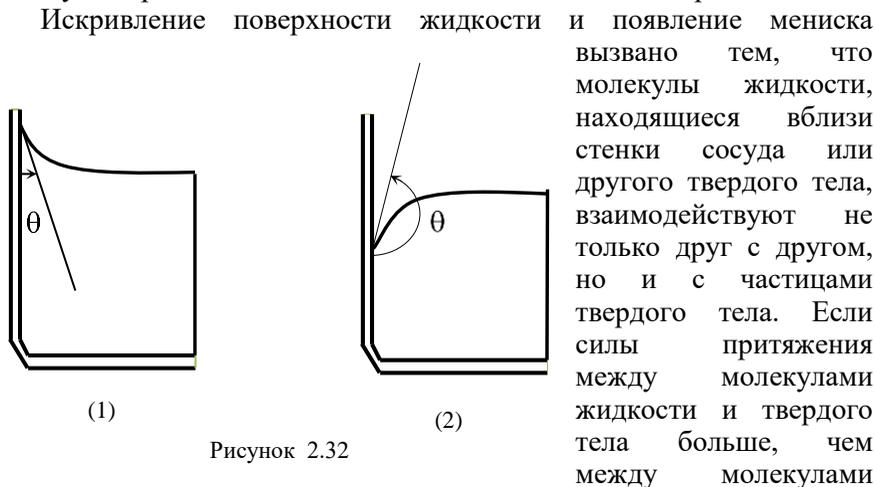


Рисунок 2.32

вызвано тем, что молекулы жидкости, находящиеся вблизи стенки сосуда или другого твердого тела, взаимодействуют не только друг с другом, но и с частицами твердого тела. Если силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, то жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом (рисунок 2.31). В этом случае говорят, что жидкость смачивает твердую поверхность, она имеет вогнутый мениск и краевой угол $\theta > 90^\circ$. При $\theta = 0^\circ$ говорят о полном смачивании жидкостью твердого тела. Если силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами самой жидкости, то жидкость стремится уменьшить поверхность соприкосновения с твердым телом (рисунок 2.32). В этом случае говорят, что жидкость не смачивает твердую поверхность, она имеет выпуклый мениск и краевой угол $\theta < 90^\circ$. При $\theta > 180^\circ$ говорят о полном несмачивании жидкостью твердого тела.

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными, т.е. жидкость смачивает одну твердую поверхность, но не смачивает другую. Вода смачивает стекло, но не смачивает парафин. Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике. Их используют для обогащения руды,

при механической обработке металлов, при бурении скважин.

Если поверхность жидкости неплоская, то стремление к её сокращению приведет к возникновению давления, дополнительного к тому, которое испытывает жидкость с плоской поверхностью. В случае выпуклой поверхности это дополнительное давление положительно, в случае вогнутой поверхности – отрицательно. Можно показать, что дополнительное давление, производимое на жидкость поверхностным слоем произвольной формы, вычисляется по формуле Лапласа:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.130)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости; R_1, R_2 – радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. Радиус считается положительным, если центр кривизны соответствующего сечения лежит внутри жидкости. В противном случае радиус кривизны считается отрицательным. Следовательно, $\Delta p < 0$, если мениск вогнутый, $\Delta p > 0$, если мениск выпуклый. Для сферической поверхности жидкости, например сферической капли ($R_1 = R_2 = R$),

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (2.131)$$

Такое избыточное давление существует, например, внутри пузырька газа радиусом R , находящегося внутри жидкости вблизи её поверхности. Избыточное давление внутри мыльного пузыря радиусом R обусловлено действием двух поверхностных слоев пленки мыльной воды:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R}. \quad (2.132)$$

Избыточное давление внутри мыльного пузыря (2.141) в два раза больше, так как пленка имеет две поверхности.

2.6.2 Капиллярные явления

Особыми оказываются условия равновесия на линии раздела жидкость – газ – твердая стенка в тонких пленках и в узких сосудах-капиллярах. Наблюдающиеся в этих случаях явления получили общее название *капиллярных*. Существование краевого угла приводит к тому, что вблизи стенок сосуда наблюдается

искривление поверхности жидкости. В узкой трубке, капилляре или в узком зазоре между двумя стенками искривленной оказывается вся поверхность. Если жидкость смачивает стенки, поверхность имеет вогнутую форму, если не смачивает, – выпуклую.

Если капилляр погрузить одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то под искривленной поверхностью в капилляре давление будет отличаться от давления под плоской поверхностью в широком сосуде на величину Δp . При смачивании капилляра уровень жидкости в нем будет выше, при несмачивании – ниже, чем в сосуде. Изменение высоты уровня жидкости в узких трубках или зазорах получило название *капиллярности*. В широком смысле под капиллярными явлениями понимают все явления, обусловленные существованием поверхностного натяжения.

Между жидкостью в капилляре и широком сосуде устанавливается такая разность уровней h , чтобы гидростатическое давление ρgh уравновешивало капиллярное давление Δp :

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R}, \quad (2.133)$$

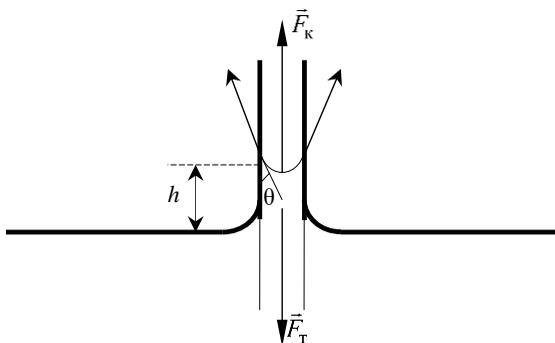


Рисунок 2.33

где σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость – газ; R – радиус кривизны мениска. Радиус кривизны мениска можно выразить через краевой угол θ и радиус капилляра r . Из рисунка 2.33 видно, что

$$R = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Подставим это значение в

равенство (2.133) и, выразив h , получим

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (2.134)$$

2.6.3 Кристаллические и аморфные тела

Твердыми телами называют тела, которые обладают постоянством формы и объема. Различают *кристаллические и аморфные твердые тела*.

Кристаллы имеют внешне правильную геометрическую форму и периодически повторяющееся в трех измерениях на протяжении всего кристалла расположение составляющих его частиц – кристаллическую решетку. В этом смысле говорят *о дальнем порядке в кристаллах*. Точки, в которых расположены частицы, вернее, точки, относительно которых частицы совершают тепловые колебания, называются *узлами кристаллической решетки*. Каждая частица в кристаллической решетке испытывает силы межмолекулярного взаимодействия. Равновесное расположение всех частиц в узлах кристаллической решетки соответствует минимуму свободной энергии кристалла и наиболее устойчивому его состоянию. При этом частицы в узлах решетки располагаются на некоторых равновесных расстояниях друг от друга, называемых *периодом кристаллической решетки*.

Подавляющее большинство твердых тел в природе имеет кристаллическое строение. Простейшими свойствами твердых тел является постоянство формы и объема. Внешне правильная геометрическая форма многих твердых тел была обнаружена давно и связана с закономерным размещением частиц, образующих кристалл. Кристаллы ограничены плоскими, упорядоченно расположенными относительно друг друга гранями, сходящимися в ребрах и вершинах. Кристаллы поваренной соли имеют кубическую форму, кварца – шестигранные призмы, заканчивающиеся шестигранными пирамидами. Раскалывание кристаллов происходит легче по определенным плоскостям, называемым плоскостями спайности.

Еще одним важным свойством кристаллов, которое является следствием упорядоченного расположения атомов или молекул, из которых они построены, является анизотропия, т.е. зависимость свойств (механических, тепловых, электрических, оптических) от направления.

Правильность геометрической формы и анизотропия кристаллов обычно не проявляются по той причине, что кристаллические тела встречаются в виде *поликристаллов*, т.е. множеств сросшихся мелких кристалликов, расположенных хаотично по отношению друг к другу.

Создав специальные условия кристаллизации из расплава или раствора, можно получить большие одиночные кристаллы – монокристаллы любого вещества.

Монокристаллы – твердые тела, имеющие единую кристаллическую решетку по всему объему.

Существуют **два признака для классификации кристаллов:**

1) кристаллографический обусловленный пространственной периодичностью в расположении частиц. Каждая пространственная решетка может быть составлена повторением в трех различных направлениях одного и того же структурного элемента – *элементарной ячейки*. В результате этого повторения образуется *трехмерная периодическая структура* – *пространственная решетка*, или решетка Браве. Всего существует 14 типов решеток Браве, различающихся по видам переносной симметрии (параллельные переносы, повороты, отражения или их комбинации). Они распределяются по семи кристаллографическим системам, или сингониям (триклинная, моноклинная, ромбическая, тетрагональная, ромбоэдрическая, гексагональная, кубическая);

2) физический обусловленный характером сил взаимодействия между частицами и видом частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки. По этому признаку классифицируются:

– *ионные кристаллы* (NaCl, углекислый кальций и др. соли). В узлах кристаллической решетки расположены правильно чередующиеся положительные и отрицательные ионы, между которыми осуществляется гетерополярная связь;

– *валентные (атомные) кристаллы* (C, Te и др.). В узлах кристаллической решетки расположены нейтральные атомы, между которыми осуществляется гомеополярная связь. Этот тип имеют полупроводники;

– *молекулярные кристаллы* (Ar, CH₄ и др.). В узлах – молекулы, связь между которыми осуществляется ван-дер-ваальсовыми силами;

– *металлы* (Cu, Na, Al и др.). В узлах – положительные ионы, образовавшиеся после отщепления от атомов внешних валентных электронов, образующих электронный газ, коллективизированных свободных частиц. Особая металлическая связь является специфическим видом химической связи и возникает между ионами кристаллической решетки и электронным газом. Электроны

«стягивают» положительные ионы электростатическими силами и уравнивают отталкивание между ионами. При расстояниях между ионами, равных периоду кристаллической решетки, образуется устойчивое состояние металлического кристалла.

Аморфные тела – твердые тела (стекло, смолы, полимерные материалы), обладающие рядом свойств, которые позволяют рассматривать их как *переохлажденные жидкости*.

Свойства аморфных тел: они изотропны, т.е. их свойства во всех направлениях одинаковы; для них, как и для жидкостей характерен ближний порядок в расположении частиц; в них, в отличие от жидкостей, подвижность частиц довольно мала. Особенностью аморфных тел является отсутствие у них точки плавления, т.е. невозможно указать определенную температуру, выше которой можно было бы констатировать жидкое состояние, а ниже – твердое. Переход от аморфного твердого тела к жидкости при нагревании осуществляется непрерывно, в то время как переход от кристалла к жидкости совершается скачком. Все это дает основания рассматривать аморфные твердые тела как переохлажденные жидкости, частицы которых вследствие сильно возросшей вязкости имеют ограниченную подвижность.

2.7 Явления переноса

2.7.1 Понятие о физической кинетике

Статистическая физика имеет дело с равновесными состояниями и с обратимыми процессами. Физическая кинетика (от греческого «приводящий в движение») – теория процессов в статистически неравновесных системах. При нарушении равновесия система стремится вернуться в равновесное состояние. Этот процесс сопровождается возрастанием энтропии и, следовательно, необратим. Таким образом, физическая кинетика имеет дело с неравновесными состояниями и необратимыми процессами.

Нарушение равновесия в системе возникает вследствие наличия пространственной неоднородности плотности, температуры, скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев в жидкостях и газах. Это приводит к возникновению потоков вещества, энергии, импульса упорядоченного движения молекул, в результате которых происходит самопроизвольное выравнивание

неоднородностей. Эти потоки, характерные для неравновесных состояний газа, являются физической основой особых процессов, объединенных общим названием "явления переноса". К этим явлениям относятся диффузия, теплопроводность и внутреннее трение.

Можно сказать, что физическая кинетика изучает явления переноса в различных физических системах (газах, жидкостях, твердых телах), а также влияние на эти системы внешних полей. Физическая кинетика исходит из представлений о молекулярном строении рассматриваемых сред и силах взаимодействия между их частицами.

2.7.2 Число столкновений. Средняя длина свободного пробега. Эффективный диаметр молекул

В молекулярных системах при хаотичном движении молекулы могут сталкиваться друг с другом. Термин «столкновение» применительно к молекулам не следует представлять подобным соударению твердых шаров. Под столкновением молекул подразумевают процесс взаимодействия между молекулами, в результате которого молекулы изменяют направление.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром* d молекулы. Он зависит от скоростей (энергий) сталкивающихся молекул, а следовательно, и от температуры газа. С повышением температуры эффективный диаметр молекул уменьшается. Эффективный диаметр всегда больше реального и проявляется только при взаимодействии.

Путь, который проходят молекулы между двумя последовательными столкновениями молекул, называется *длиной свободного пробега* λ . Длина пути между столкновениями молекул различна, но так как мы имеем дело с огромным числом молекул, которые находятся в хаотичном движении, то можно говорить о средней длине свободного пробега $\langle \lambda \rangle$. За 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. Если взять $\langle z \rangle$ – число столкновений, испытываемых молекулой за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}. \quad (2.135)$$

Среднее число столкновений

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n \pi d^2 \langle v \rangle, \quad (2.136)$$

средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}, \quad (2.137)$$

где n – концентрация молекул.

Представление о среднем пробеге, о частоте ударов молекул играет большую роль при молекулярно-кинетическом объяснении явлений переноса.

2.7.3 Диффузия (стационарная и нестационарная)

Диффузия – это процесс взаимного проникновения и перемешивания частиц двух или нескольких соприкасающихся газов, жидкостей или твердых тел, обусловленный тепловым движением молекул. В химически чистых газах диффузия возникает вследствие неодинаковой плотности в различных частях объема газа. Диффузию можно наблюдать и в одном газе – самодиффузия (это диффузное распространение газа в самом себе). *Самодиффузия* происходит тогда, когда плотность (концентрация) газа в различных местах его объема различна. В результате диффузии или самодиффузии происходит самопроизвольное выравнивание концентраций или в смеси нескольких различных веществ, или в одном веществе, которое заключается в переносе массы газа из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией.

Для простоты рассмотрения ограничимся одномерными явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса (рисунок 2.21).

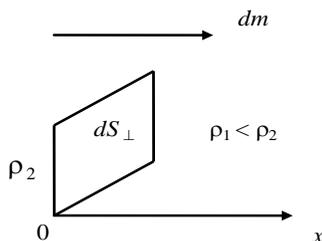


Рисунок 2.21

А. Фик (1855 г.) установил, что перенесенная масса dm через расположенную

перпендикулярно направлению переноса вещества площадку dS_{\perp} за время dt (Закон Фика)

$$dm = -D \frac{d\rho}{dx} S_{\perp} dt, \quad (2.138)$$

где $d\rho / dx$ – градиент плотности; D – коэффициент диффузии, он измеряется в m^2 / c .

Градиент плотности $d\rho/dx$ характеризует скорость изменения плотности ρ на единицу длины x вдоль нормали, проведенной между областями равной плотности. *Коэффициент диффузии* D численно равен массе вещества, которая диффундирует за единицу времени через плоскую поверхность единичной площади, проведенную в газе перпендикулярно направлению переноса. Он зависит от рода газа, его температуры. Знак минус в уравнении (2.119) указывает, что перенос массы при диффузии происходит в направлении убывания плотности, т. е. вдоль оси Ox , если $\rho_2 > \rho_1$ ($d\rho / dx < 0$), и в обратном направлении, если $d\rho / dx > 0$. Можно показать, что для газов

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle. \quad (2.139)$$

Рассмотрим смесь газов. Процесс диффузии заключается в том, что каждая из компонентов смеси переходит из тех частей объема газа, где ее концентрация больше, туда, где концентрация меньше, то есть в направлении падения концентрации. Перемещение той или иной компоненты под действием разности концентрации называется диффузным потоком этой компоненты. Диффузный поток измеряется количеством диффундирующей компоненты, проходящей за единицу времени через единицу площади перпендикулярно направлению диффузии, то есть в направлении падения концентрации. В результате диффузии в смеси газа происходит постепенное выравнивание концентрации всех компонентов. Диффузия, которая приводит к выравниванию концентрации, то есть изменению концентрации, называется *нестационарной диффузией*. Стационарная диффузия – диффузия, при которой тем или иным путем разность компонентов поддерживается неизменной. Например, если в одну часть сосуда непрерывно добавлять определенную компоненту газа, а из другой части ее отбирать, то мы

реализуем *стационарную диффузию*. При стационарной диффузии остается неизменным градиент концентрации $\frac{d\rho}{dx} = \text{const}$, если $\frac{d\rho}{dx} \neq \text{const}$, то диффузия будет нестационарной.

2.7.4 Внутреннее трение (вязкость)

Внутреннее трение возникает между слоями жидкости или газа, движущимися упорядоченно с различными по величине скоростями u . Из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а движущегося медленнее – увеличивается. Это приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Перенос количества движения от одного слоя к другому приводит к изменению скоростей движения слоев и воспринимается как сила трения, действующая на данный слой со стороны соседних слоев. Согласно *закону Ньютона* сила внутреннего трения между слоями газа (жидкости)

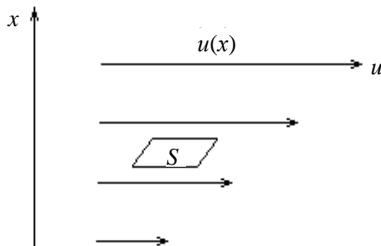
$$F = -\eta \frac{du}{dx} S. \quad (2.140)$$

Или, согласно второму закону Ньютона, уравнение (2.140) можно записать

$$dp = -\eta \frac{du}{dx} S dt, \quad (2.141)$$

где du / dx – градиент скорости; η – коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость), измеряется в Па·с или в кг/(м·с).

Градиент скорости (du / dx) характеризует быстроту изменения скорости u на единицу длины x в направлении, перпендикулярном направлению движения слоев (рисунок 2.22). *Коэффициент внутреннего трения* (динамическая вязкость) численно равен силе внутреннего трения, которая



действует на единицу площади поверхности, проведенную в газе перпендикулярно скорости течения слоев при единичном градиенте скорости. Знак минус в уравнении (2.141) указывает, что при внутреннем трении перенос импульса происходит в направлении убывания скорости слоев, т.е. вдоль оси x (см. рисунок 2.22), если $du/dx < 0$, и в обратном направлении, если $du/dx > 0$. Можно показать, что

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho. \quad (2.142)$$

Часто пользуются кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = \frac{\eta}{\rho}$,

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 МЕХАНИКА	7
1.1 Элементы кинематики.....	7
1.1.1 Пространственно-временные представления.....	7
1.1.2 Скалярные и векторные физические величины.....	8
1.1.3 Основные кинематические характеристики движения частиц и тел. Система отсчета.....	9
1.1.4 Кинематика вращательного движения твердого тела.....	19
1.1.5 Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.....	22
1.2 Элементы динамики поступательного движения	23
1.2.1 Основные задачи динамики.....	23
1.2.2 Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета.....	23
1.2.3 Второй закон Ньютона как уравнение движения. Масса и импульс.....	26
1.2.4 Третий закон Ньютона.....	29
1.2.5 Силы в природе.....	29
1.2.6 Сила всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела.....	30
1.2.7 Упругие силы.....	34
1.2.8 Сила трения.....	39
1.2.9 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.....	42
1.3 Закон сохранения импульса.....	49
1.3.1 Закон сохранения импульса как фундаментальный закон природы.....	49
1.3.2 Центр масс (центр инерции) механической системы и закон его движения. Система центра масс.....	52
1.3.3 Реактивное движение.....	54
1.4 Работа и энергия.....	58

1.4.1	Работа. Энергия. Мощность.....	58
1.4.2	Консервативные силы.....	61
1.4.3	Кинетическая энергия.....	63
1.4.4	Потенциальная энергия.....	65
1.4.5	Связь между силой и потенциальной энергией.....	68
1.5	Закон сохранения механической энергии.....	69
1.5.1	Закон сохранения энергии в механике и его связь с однородностью времени.....	69
1.5.2	Общезначимый закон сохранения энергии.....	71
1.5.3	Абсолютно упругий и неупругий удары.....	71
1.6	Динамика вращательного движения твердого тела.....	76
1.6.1	Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной точки. Момент импульса. Момент силы.....	76
1.6.2	Закон сохранения момента импульса.....	80
1.6.3	Уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси.....	81
1.6.4	Момент инерции.....	84
1.6.5	Момент инерции некоторых тел правильной формы.....	85
1.6.6	Кинетическая энергия вращательного тела.....	86
1.6.7	Работа внешних сил при вращении твердого тела.....	87
1.7	Элементы механики сплошных сред.....	89
1.7.1	Кинематическое описание движения.....	89
1.7.2	Динамические уравнения. Интегралы движения.....	90
1.7.3	Сжимаемость жидкостей и газов.....	93
1.8	Элементы релятивистской механики.....	95
1.8.1	Механический принцип относительности. Преобразование Галилея.....	95
1.8.2	Постулаты специальной теории относительности.....	97
1.8.3	Преобразования Лоренца и их следствия.....	99
1.8.4	Интервал между событиями.....	103
1.8.5	Релятивистская кинематика. Сложение скоростей.....	105
1.8.6	Релятивистская динамика.....	107
1.8.7	Энергия в релятивистской механике. Закон взаимосвязи массы и энергии.....	111
1.8.8	Взаимосвязь массы и энергии.....	113
1.8.9	Понятие об общей теории относительности.....	114
2	ОСНОВЫ МАЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ.....	116
2.1	Молекулярно-кинетическая теория идеального газа.....	116
2.1.1	Статистический и термодинамический методы.....	116
2.1.2	Макроскопические параметры.....	119
2.1.3	Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона).....	119
2.1.4	Давление с точки зрения молекулярно-кинетической теории (МКТ). Основное уравнение молекулярно-кинетической энергии.....	122
2.1.5	Молекулярно-кинетическое толкование термодинамической температуры.....	125
2.2	Основы термодинамики.....	128
2.2.1	Внутренняя энергия идеального газа.....	128
2.2.2	Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.....	129

2.2.3 Работа и теплота. Первое начало термодинамики (ПНТ).....	131
2.2.4 Применение ПНТ к изопроцессам.....	134
2.2.5 Теплоемкость многоатомных газов. Недостатки классической теории теплоемкости.....	139
.....	
2.3 Статистические распределения.....	141
2.3.1 Вероятность.....	141
2.3.2 Распределение Максвелла.....	142
2.3.3 Распределение Больцмана.....	151
2.4 Второе начало термодинамики.....	154
2.4.1 Обратимые и необратимые тепловые процессы.....	154
2.4.2 Круговые процессы (циклы).....	156
2.4.3 Тепловые машины.....	157
2.4.4 Цикл Карно. Максимальный КПД тепловой машины.....	159
2.4.5 Энтропия и ее связь с термодинамической вероятностью.....	163
2.4.6 Статистический смысл второго начала термодинамики.....	171
2.4.7 Статистический смысл третьего начала термодинамики.....	172
2.5 Реальные газы.....	173
2.5.1 Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	173
2.5.2 Изотермы Ван-дер-Ваальса.....	177
2.5.3 Экспериментальные изотермы Ван-дер-Ваальса.....	179
2.5.4 Фазовые превращения.....	181
2.6 Особенности жидкого и твердого состояний вещества.....	183
2.6.1 Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение.....	183
2.6.2 Капиллярные явления.....	189
2.6.3 Кристаллические и аморфные тела.....	190
2.7 Явления переноса.....	193
2.7.1 Понятие о физической кинетике.....	193
2.7.2 Число столкновений. Средняя длина свободного пробега. Эффективный диаметр молекул.....	194
2.7.3 Диффузия (стационарная и нестационарная).....	195
2.7.4 Внутреннее трение (вязкость).....	196
2.7.5 Теплопроводность.....	198
Список литературы.....	201

Учебное издание

ДОЦЕНКО Елена Иосифовна
ЗЫКУНОВ Владимир Александрович
ПРИХОДЬКО Иван Васильевич

Ф И З И К А

МЕХАНИКА.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов заочного факультета

Редактор **И. И. Э в е н т о в**
Технический редактор **В. Н. К у ч е р о в а**

Подписано в печать 25.11.2014 г. Формат 60x84^{1/16}.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 10,92. Тираж 90 экз.
Зак. № 3236. Изд. № 130.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель

Список литературы

1. **Трофимова, Т. И.** Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 14-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.
2. **Детлаф, А. А.** Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 1989. – 608 с.
3. **Савельев, И. В.** Курс общей физики : учеб. : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989.
4. Физика для втузов : в 2 т. / И. И. Наркевич и [др.]. – Мн. : Выш. шк. 1994.
5. **Волькенштейн, В. С.** Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. – М. : Наука, 1985. – 381 с.
6. **Чертов, А. Г.** Физические величины (Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) / А. Г. Чертов. – М. : Высш. шк., 1990. – 334 с.
7. **Трофимова, Т. И.** Сборник задач по курсу физики для втузов : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 3-е изд. – М.: ОНИКС-21 век; Мир и Образование, 2005. – 383 с.
8. **Сивухин, Д. В.** Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977–1990.
9. **Яворский, Б. М.** Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – 3-е изд., испр. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 624 с.
10. **Савельев, И. В.** Сборник задач и вопросов по общей физике / И. В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
11. **Иродов, И. Е.** Задачи по общей физике : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 416 с.