

УДК 691-419:539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ЛОКАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ СТУПЕНЧАТОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ

Рассмотрен осесимметричный изгиб круглой упругой сэндвич-пластины ступенчато-переменной толщины под действием локальных нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Аналитические решения получены с использованием системы функций Хевисайда. Проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: круговая сэндвич-пластина, ступенчатая толщина, упругость.

Введение. Все более широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение) находят слоистые элементы конструкций, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Деформирование многослойных конструкций рассмотрено в монографии [1]. Работа [2] посвящена исследованию поведения трехслойных пластин и оболочек при различных физических моделях материала. Свободные колебания трехслойных пластин изучены в [3]. Круглые однослойные пластины переменной толщины рассмотрены в монографии [4] и статьях [5, 6]. Деформирование трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей исследовано в работе [7]. В статье [8] выполнена постановка задачи об изгибе упругой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей с жестким заполнителем. В данной статье получено решение задачи об осесимметричном поперечном изгибе круговой сэндвич-пластины со ступенчато-переменной толщиной при действии равномерно распределенной локальной нагрузки.

Постановка задачи. Пластина состоит из трех слоев. Толщины несущих слоев равны между собой ($h_{11} = h_{21} = h_1$) и могут изменяться вдоль радиуса

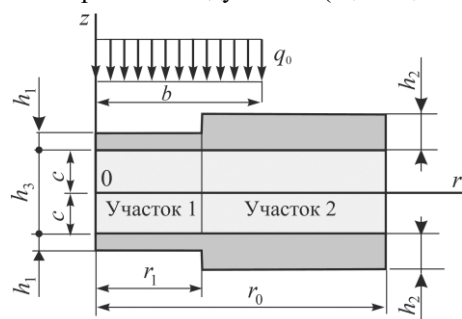


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

пластины ступенчато (рисунок 1). Во внешних несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, во внутреннем заполнителе – гипотеза Тимошенко. В целом для пакета выполняется гипотеза ломаной линии. Заполнитель ($h_3 = 2c$) считаем легким, т. е. при выводе уравнений равновесия пренебрегаем работой напряжений сдвига. На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины

предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Решение задачи строим в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью внутреннего слоя. На внешнюю поверхность первого несущего слоя действуют осесимметричные распределенные поперечные нагрузки $q_1(r), q_2(r)$, приложенные локально. Решение задачи проводим в перемещениях. В качестве неизвестных принимаются прогиб пластины $w_l(r)$ и относительный сдвиг в заполнителе $\psi_l(r)$ на каждом участке l .

В работе [9] получено общее решение задачи об изгибе пластины произвольной нагрузкой $q_1(r), q_2(r)$.

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \psi_1(r) + (\psi_2(r) - \psi_1(r))H_0(r - r_1); \\ w(r) &= w_1(r) + (w_2(r) - w_1(r))H_0(r - r_1),\end{aligned}\quad (1)$$

где $H_0(r)$ – функция Хевисайда [10].

Систему дифференциальных уравнений изгиба пластины на каждом участке запишем в виде

$$\begin{aligned}L_2(b_{1l}\psi_l - b_{2l}w_{l,r}) &= 0; \\ L_3(b_{2l}\psi_l - b_{3l}w_{l,r}) &= -q_l,\end{aligned}\quad (2)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы второго и третьего порядков соответственно [2]; b_{il} – коэффициенты, зависящие от жесткостных характеристик пластины.

Решение системы (2) на каждом участке l принимает вид [11]

$$\begin{aligned}\psi_l &= \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r} + C_{1l}r + C_{2l}/r; \quad w_l = C_{3l} + C_{4l}r^2 + C_{5l}\ln(r) + C_{6l}r^2 \ln(r) + w_l^*; \\ w_l^* &= \frac{1}{D_l} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_l r dr dr dr dr, \quad D_l = b_{3l} - \frac{b_{2l}^2}{b_{1l}},\end{aligned}\quad (3)$$

где C_{il} – константы интегрирования, зависящие от условий закрепления участка l пластины ($i = 1, \dots, 6$).

Задача отыскания функций $\psi_l(r), w_l(r)$ (1), (3) замыкается присоединением к (2) граничных условий. При жесткой заделке контура пластины ($r = r_0$)

$$\psi_2 = w_2 = w_{2,r} = 0. \quad (4)$$

Кроме этого, должны быть удовлетворены условия конечности перемещений в начале координат при $r = 0$ и условия на границе изменения толщин при $r = r_1$:

– кинематические условия

$$w_1(r_1) = w_2(r_1), \quad w_{1,r}(r_1) = w_{2,r}(r_1), \quad \psi_1(r_1) = \psi_2(r_1);$$

– силовые граничные условия

$$M_r^1 = M_r^2, \quad H_r^1 = H_r^2, \quad Q_r^1 = Q_r^2. \quad (5)$$

Выражения обобщённых усилий M_r^l , H_r^l , Q_r^l через перемещения приведены в [9].

Решение задачи. Пусть на пластину действует равномерно распределенная локальная нагрузка с радиусом пятна b и интенсивностью q_0 . Искомые перемещения будут зависеть от расположения нагрузки на разных участках. Возможны два случая:

1. Локальная нагрузка располагается на участке 1, т. е. $b \leq r_1$

$$q_1(r) = q_0 H_0(b-r); \quad q_2(r) = 0.$$

Подставив значения нагрузок в выражения (3), получим перемещения на первом участке

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{b_{21}}{b_{11}} w_{1,r} + C_{11} r + C_{21} / r; \quad w_1 = C_{31} + C_{41} r^2 + C_{51} \ln(r) + C_{61} r^2 \ln(r) + w_1^*; \\ w_1^* &= \frac{1}{D_1} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_0 H_0(b-r) r dr dr dr dr = \\ &= \frac{q_0}{D_1} \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r). \end{aligned} \quad (6)$$

В связи с ограниченностью предполагаемого решения (w_1 , Q_r^1 , ψ_1) в начале координат ($r=0$) необходимо положить

$$C_{51} = \frac{q_0 b^4}{16D_1}; \quad C_{61} = \frac{q_0 b^2}{8D_1}; \quad C_{21} = 0. \quad (7)$$

На втором участке нагрузка отсутствует, система уравнений движения (2) будет однородной, искомые перемещения определяются выражениями

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{b_{22}}{b_{12}} w_{2,r} + C_{12} r + C_{22} / r; \\ w_2 &= C_{32} + C_{42} r^2 + C_{52} \ln(r) + C_{62} r^2 \ln(r). \end{aligned} \quad (8)$$

2. Локальная нагрузка располагается на участке 2, т. е. $r_1 \leq b \leq r_0$. В этом случае нагрузки на участках будут

$$q_1(r) = q_0; \quad q_2(r) = q_0 H_0(b-r).$$

Перемещения на первом участке будут

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{b_{21}}{b_{11}} w_{1,r} + C_{11} r + C_{21} / r; \\ w_1 &= C_{31} + C_{41} r^2 + C_{51} \ln(r) + C_{61} r^2 \ln(r) + w_1^*; \\ w_1^* &= \frac{1}{D_1} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int q_0 r dr dr dr dr = \frac{q_0 r^4}{64D_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

В начале координат ($r = 0$) прогиб w_1 , сдвиг ψ_1 и обобщенная поперечная сила Q_r^1 должны быть определены, поэтому необходимо положить равным нулю следующие константы интегрирования:

$$C_{51} = 0, C_{61} = 0, C_{21} = 0. \quad (10)$$

На втором участке

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{b_{22}}{b_{12}} w_{2,r} + C_{12} r + C_{22} / r; \\ w_2 &= C_{32} + C_{42} r^2 + C_{52} \ln(r) + C_{62} r^2 \ln(r) + w_2^*; \\ w_2^* &= \frac{q_0}{D_2} \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r). \end{aligned} \quad (11)$$

Остальные константы интегрирования для обоих случаев расположения нагрузки определяются из граничных условий (4) и (5). В силу своей громоздкости здесь они не приводятся.

Таким образом, искомые перемещения определяются по формуле (1) с учетом их выражений (6), (8), (9), (11) на участках. Константы интегрирования определяются в соответствии с (7), (10) и из граничных условий (4), (5).

Численное исследование. Численная реализация решения проводилась для сэндвич-пластины с несущими слоями из сплава Д16Т и заполнителем фторопластом-4, упругие константы для которых взяты из [2]. Геометрические параметры пластины приняты в долях к ее радиусу r_0 : $h_1 = 0,03$, $h_2 = 0,04$, $c = 0,15$; интенсивность нагрузки $q_0 = 100$ кПа.

На рисунке 2 показано изменение угла сдвига (a) и прогиба (b) срединного слоя вдоль радиуса пластины при различных величинах первого участка r_1 и радиуса действия нагрузки b : 1 – $r_1 = 0$, $b = 0,5$; 2 – $r_1 = 0$, $b = 1$; 3 – $r_1 = 0,4$, $b = 0,5$; 4 – $r_1 = 0,4$, $b = 1$. Перемещения на кривых 1 и 2 полностью совпадают с перемещениями, посчитанными по формулам из [2] для гладкой пластины. С уменьшением жесткости пластины (кривые 3 и 4) перемещения увеличиваются, максимум угла сдвига ($r_1 = 0,4$) смещается к центру пластины.

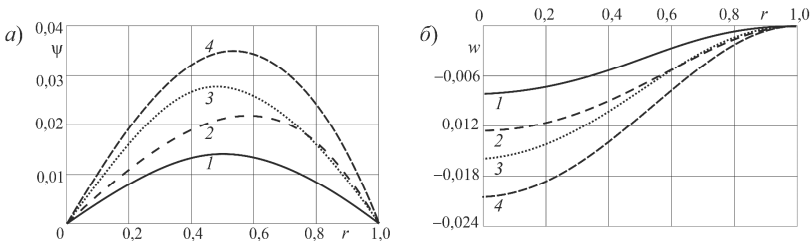


Рисунок 2 – Зависимости угла сдвига (a) и прогиба (b) от координаты r

Заключение. Предложенная методика позволяет анализировать деформирование трехслойных симметричных круговых пластин ступенчато-

переменной толщины при действии локальной равномерно-распределенной нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T20P-047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.

3 **Леоненко, Д. В.** Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 3. – С. 42–47.

4 **Коваленко, А. Д.** Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – М. : Физматгиз, 1959. – 294 с.

5 **Chung, K. C.** Optimal design of stepped circular plates with allowance for the effect of transverse shear deformation / K. C. Chung, C. M. Wang // International Journal of Mechanical Sciences. – 2002. – Vol. 44, is. 6. – P. 1163–1177.

6 **Gallego-Juárez, J. A.** Modal interactions in high-power ultrasonic processing transducers / J. A. Gallego-Juárez, E. Riera, V. M. Acosta-Aparicio // AIP Conference Proceedings. – 2008. – Vol. 1022. – P. 595–604.

7 **Старовойтова, Е. Э.** Напряженное состояние металлополимерного трехслойного стержня прямоугольного сечения со ступенчато-переменной границей / Е. Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 1 (10). – С. 58–62.

8 **Парфенова, В. С.** Деформирование круглой упругой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей / В. С. Парфенова // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 157–163.

9 **Леоненко, Д. В.** Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского государственного университета. Естественные науки. – 2020. – № 6 (123). – С. 151–155.

10 **Корн, Г.** Справочник по математике для инженерных работников / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

11 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука. – 1976. – 576 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

LOCAL LOADING OF A STEPPED CIRCULAR SANDWICH PLATE

An axisymmetric bending of an elastic circular sandwich plate with a step-variable thickness under the action of local loads is considered. To describe the kinematics of a package asymmetric in thickness, the hypotheses of a broken normal are accepted. The filler is light. Analytical solutions are obtained using the Heaviside system of functions. A numerical analysis of the obtained solutions is carried out.

Keywords: circular sandwich plate, stepped thickness, elasticity.

Получено 10.10.2021