УДК 517.977.1

В. И. КОРОБОВ, Т. В. РЕВИНА
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПРУЖИНЕ ПРИ ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ, ЗАДАННОЙ НЕТОЧНО

Рассматривается материальная точка на пружине, движущаяся по поверхности без трения. Предполагается, что управляющее воздействие (управляемая мощность двигателя) прикладывается к материальной точке. В качестве возмущения рассматривается жесткость пружины, которая неизвестна точно, но ее величина соответствует некоторому интервалу. Цель работы – найти такую границу для значения коэффициента жесткости, при которой переход в положение равновесия происходит с тем же самым управлением, что и при постоянной жесткости пружины. Решение основано на методе функции управляемости В. И. Коробова. Установлена связь между величинами границы возмущения и границы времени движения. Решение иллюстрируется случаем конкретной начальной точки.

Ключевые слова: функция управляемости, устойчивость на конечном интервале времени, робастное управление, неизвестное ограниченное возмущение.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по прямой без трения. Жесткость пружины обозначим через k, а массу материальной точки через m. К материальной точке прикладывается управляющее воздействие. Обозначим через z отклонение от положения равновесия материальной точки. В силу второго закона Ньютона движение материальной точки описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{z} = -kz + u, \tag{1}$$

где u – управление, обеспечиваемое регулированием мощности двигателя, которое удовлетворят ограничению $|u| \le 1$.

Примем $m = 1$. Будем считать, что $k = 1 - r(t)$, где $r(t)$ – неизвестная непрерывная ограниченная функция: $|r(t)| \le \Delta < 1$. Механические системы, математические модели которых содержат неопределенности, называют робастными [1]. Модель неизвестных, но ограниченных возмущений (*unknown, but bounded perturbations*) была рассмотрена Schweppe [2].

С помощью замены переменных $x_1 = z,\ x_2 = \dot{z}$ уравнение (1) приводится к системе, которую запишем в матричной форме

$$\dot{x} = (A + R(t))x + Bu, \tag{2}$$

где
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Рассмотрим общий случай при отсутствии возмущений. Пусть матрицы A и B – произвольные и имеют размерности $n \times n$ и $n \times r$. Будем предполагать, что система

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4}$$

является полностью управляемой, т. е. для произвольной начальной точки x^0 существует управление, переводящее эту точку в начало координат за наперед заданное время. Полная управляемость в силу критерия Каллмана означает, что $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$.

В работах [3] и [4] получена управляющая функция $u(x)$, решающая задачу локального синтеза для линейной автономной системы, т. е. переводящая произвольную начальную точку $x^0 \in Q$, где Q – некоторая окрестность начала координат, в точку $x^1 = 0$ в некоторый конечный момент времени. При этом управление удовлетворяет заранее заданным ограничениям. Решение проводится на основе метода функции управляемости В. И. Коробова [3–5]. В работе [5] впервые дан общий подход к решению задачи синтеза допустимых управлений для произвольной нелинейной управляемой системы. Задачу же попадания в заданное место за конечное время из заданной точки для неуправляемой системы впервые рассмотрел Г. В. Каменков [6]. Обзор результатов англоязычных авторов об устойчивости попадания за конечное время (*finite time stability*) можно найти в [7]. В книге [8] излагаются основы и методы многопараметрической теории устойчивости с приложениями к задачам механики. В ней рассматриваются вопросы качественного поведения неуправляемых устойчивых систем.

В работе [9] исследуется управляемая модель «хищник – жертва». Численность популяции описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, содержащим управляющее воздействие. Решение задачи синтеза производится на основе метода функции управляемости В. И. Коробова. Приведена оценка сверху времени попадания в точку равновесия.

В статье [10] изучена задача приведения линейно связанных пружинами маятников в состояние равновесия за конечное время с помощью управляющей силы, приложенной к первой массе. Управление, решающее задачу синтеза, не зависит от возмущений. Также приведена оценка времени движения.

Метод решения задачи позиционного синтеза для робастной канонической системы предложен в [11]. Под канонической понимается система, описываемая уравнением (4), в которой: матрица A размера $n \times n$, элементы главной наддиагонали которой равны 1, а остальные равны нулю; B – n-мерный вектор, последний элемент которого равен 1, а остальные равны 0, n – размерность системы. Такая форма системы называется еще формой Бруновского или *chain of integrators system*. В [11] в качестве примера рассмотрено решение задачи синтеза для движения материальной точки с учетом неизвестного трения. В отличие от статьи [11] в данной работе рассматривается случай произвольной матрицы A.

Перейдем к изложению основной идеи решения задачи синтеза для линейной автономной системы с помощью метода функции управляемости. Будем рассматривать важный случай, когда данная функция является временем движения [3, 4]. Сформулируем соответствующий результат.

Пусть $\nu \geq 1$. Введем в рассмотрение матрицу

$$N(\Theta) = \int_0^{\Theta} \left(1 - \frac{t}{\Theta}\right)^{\nu} e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt,$$

где звездочкой обозначены сопряженно-транспонированные матрицы. Эта матрица является положительно определенной, так как $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$.

Теорема 1 (Коробов В. И., Скляр Г. М. [3, 4]**)**. *Определим функцию управляемости* $\Theta = \Theta(x)$ *как единственное положительное решение уравнения*

$$2a_0\Theta^{\nu} = (N^{-1}(\Theta)x, x), \qquad x \neq 0, \qquad \nu \geq 1.$$

Доопределим функцию управляемости в точке ноль уравнением $\Theta(0) = 0$. *Пусть область решения задачи синтеза имеет вид* $Q = \{x: \Theta(x) \leq c\}$, $c > 0$.

Тогда при достаточно малом значении коэффициента a_0 *управление, задаваемое формулой*

$$u(x) = -B^* N^{-1}(\Theta(x))x / 2\ ,$$

решает для системы (4) *задачу локального синтеза. При этом управление удовлетворяет ограничению* $\| u \| \leq d$. *Более того, функция управляемости является временем движения из произвольной начальной точки* $x^0 \in Q$ *в начало координат.*

В случае системы (4) с матрицами (3) при $\nu = 1$ уравнение функции управляемости $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{2}{3}\left(2\Theta^4 - 2\Theta^2 + \cos(2\Theta) + 2\Theta\sin(2\Theta) - 1\right) = \\ = 4x_1^2(2\Theta^2 - \cos(2\Theta) + 1) + 8x_1x_2(2\Theta - \sin(2\Theta)) + 4x_2^2(2\Theta^2 + \cos(2\Theta) + 1).\end{gathered} \tag{5}$$

Управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$, задается формулой

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \frac{2x_1\Theta(-2\Theta + \sin(2\Theta)) + 2x_2\Theta(-2\Theta^2 - \cos(2\Theta) + 1)}{2\Theta^4 - 2\Theta^2 + \cos(2\Theta) + 2\Theta\sin(2\Theta) - 1}\ , \tag{6}$$

где $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ – единственное положительное решение уравнения (5).

Итак, сформулируем *основные задачи данной работы*:

1 Можно ли использовать управление (6) для решения задачи синтеза для возмущенной системы (2)?

2 Найти ограничение на возмущение Δ: $|r(t)| \leq \Delta < 1$.

3 Найти оценку сверху для времени движения из произвольной начальной точки в точку $x^1 = 0$.

Рассмотрим систему (2) с управлением (6)

$$\dot{x} = (A + R(t))x + Bu(x), \tag{7}$$

Полная производная функции управляемости в силу системы (7) имеет вид

$$\dot{\Theta} = -1 + \frac{(S(\Theta)y, y)}{(\hat{N}(\Theta)y, y)}, \tag{8}$$

где
$$S(\Theta) = R(t)N(\Theta) + N(\Theta)R^*(t),\ \ y = \begin{pmatrix} x_1\Theta^{-\frac{3}{2}} \\ x_2\Theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix};$$

$$\hat{N}(\Theta) = \int_0^\Theta \frac{\nu}{\Theta}\left(1 - \frac{t}{\Theta}\right)^{\nu-1} e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt.$$

Из (8) вытекает следующая оценка [4]:

$$\dot{\Theta} \le -1 + \lambda_{\max}(\hat{N}^{-1}(\Theta)S(\Theta)) \le -1 + \rho(\hat{N}^{-1}(\Theta)S(\Theta)) \le$$
$$\le -1 + \rho\,|\,\hat{N}^{-1}(\Theta)S(\Theta)\,| \le -1 + \Delta\rho\,|\,\hat{N}^{-1}(\Theta)\tilde{S}(\Theta)\,|,$$

где $\lambda_{\max}(\hat{N}^{-1}(\Theta)S(\Theta))$ и $\rho(\hat{N}^{-1}(\Theta)S(\Theta))$ – наибольшее собственное значение и спектральный радиус матрицы $\hat{N}^{-1}(\Theta)S(\Theta)$; матрица с модулем означает матрицу, каждый элемент которой берется по модулю, матрица

$$\tilde{S}(\Theta) = \tilde{R}N(\Theta) + N(\Theta)\tilde{R}^*, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полная производная от функции управляемости должна быть отрицательной [4]. В этом случае траектория заканчивается в начале координат и остается там (не покидает начало координат). Зададим $0 < \gamma < 1$ и потребуем, чтобы $\dot{\Theta} \le -\gamma$. Из данного условия вытекает оценка времени движения [4]

$$T(x^0, r(t)) \le \Theta(x^0)/r. \tag{9}$$

Для завершения доказательства нужно найти оценку спектрального радиуса $\rho\,|\,\hat{N}^{-1}(\Theta)\tilde{S}(\Theta)\,|$. Пусть элементы этой матрицы при $\Theta \le c$ удовлетворяют оценке $m'_{ij} \le |\,\hat{N}^{-1}(\Theta)\tilde{S}(\Theta)\,|_{ij} \le m''_{ij}$. Под интервальной матрицей $[M';\ M'']$ будем понимать матрицу, каждый элемент которой лежит на отрезке $[m';\ m'']$. В работе Rohn [12] доказано, что спектр такой интервальной матрицы лежит на отрезке $[\lambda';\ \lambda'']$, где

$$\lambda' = \lambda_{\min}(M_c) - \rho(M_d),\ \ \lambda'' = \lambda_{\min}(M_c) + \rho(M_d),$$

$$M_c = \frac{1}{2}(A_c + A_c^*),\ M_d = \frac{1}{2}(A_d + A_d^*),\ A_c = \frac{1}{2}(M' + M''),\ A_d = \frac{1}{2}(M' - M'').$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \gamma < 1$, *и функция управляемости* $\Theta(x)$ *есть единственное положительное решение уравнения* (5). *Пусть область решения задачи синтеза имеет вид* $Q = \{x : \Theta(x) \le c\}$. *Пусть величина коэффициента жесткости пружины* $k = 1 - r(t)$, *а*

$$\Delta = \frac{1-\gamma}{0{,}95 + 0{,}0625\sqrt{64c^2 + 96c + 87{,}84}}. \tag{10}$$

Тогда для всех $|r(t)| \le \Delta$ *в области* Q *управление (мощность двигателя) задаваемое формулой* (6)*, решает задачу локального позиционного синтеза для робастной системы* (2)*. Более того, траектория замкнутой системы* (7)*, начинающаяся в произвольной начальной точке* $x^0 \in Q$*, оканчивается в точке* $x^1 = 0$ *(положение равновесия) в конечный момент времени (settling-time function), удовлетворяющий* (9).

Таким образом, хотя коэффициент жесткости пружины $r(t)$ неизвестен точно, управление (6) гасит колебания материальной точки на пружине за конечное время.

Замечание 1. *Значение границы* Δ *монотонно убывает по* γ*. При этом верхняя оценка времени движения* (9) *также монотонно убывает по* γ*. Значение* $\Delta \to \max$ *при* $\gamma \to 0$*, при этом верхняя оценка времени движения вырождается:* $T(x^0, r(t)) \le \infty$.

Замечание 2. *Значение границы* Δ *монотонно убывает по* c*. Поэтому, если начальное отклонение и начальная скорость точки близки к положению равновесия, то* c *близко к нулю и значение* Δ *больше, и наоборот.*

Проиллюстрируем решение для конкретных $r(t)$. На рисунках 1–5 представлены область решения задачи и траектории, отклонение материальной точки от положения равновесия, изменение скорости материальной точки, графики управляющего воздействия (мощности двигателя) для случая $|u| \le 1$, а также производная по времени от функции управляемости.

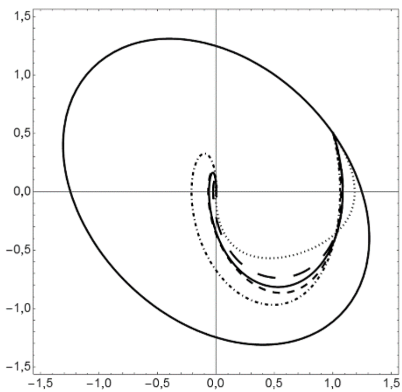

Рисунок 1 – Область решения задачи синтеза и траектории

Выберем начальную точку $x^0 = (1; 0{,}5)$. Здесь первая координата – начальное отклонение материальной точки от положения равновесия, вторая – начальная скорость точки. Тогда единственное положительное решение уравнения (5) равно $\Theta_0 \approx 3{,}21$. Оно соответствует случаю $r(t) \equiv 0$, графики для которого представлены на рисунках сплошной линией. Выберем область $Q = \{x : \Theta(x) \le 3{,}21\}$, то есть $c = 3{,}21$, (см. рисунок 1). Тогда при $\gamma = 0{,}1$ имеем $\Delta \approx 0{,}302$, $|r(t)| \le \Delta$. Оценка времени движения (9) дает $T(x^0, r(t)) \le 10\Theta_0 \approx 32{,}1$.

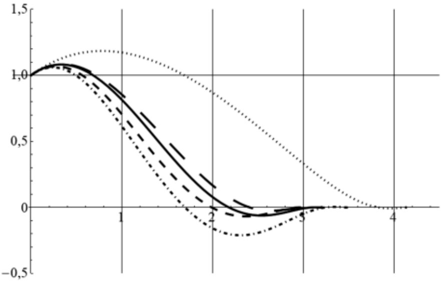

Рисунок 2 – Отклонение материальной точки от положения равновесия

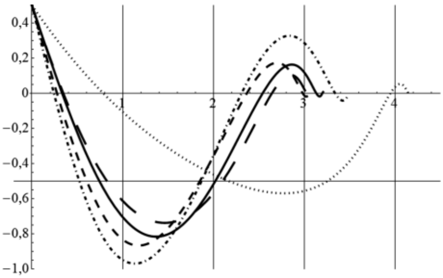

Рисунок 3 – Изменение скорости материальной точки

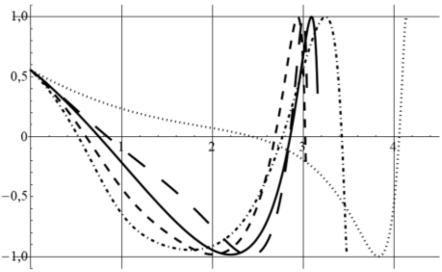

Рисунок 4 – Управляемая мощность двигателя

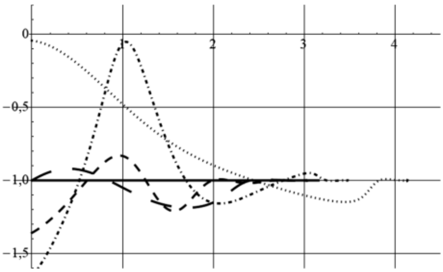

Рисунок 5 – Производная по времени от функции управляемости

Первый рассмотренный случай изменения коэффициента жесткости пружины соответствует выражению $r(t) = 0{,}3\sin(t)$. Он представлен на рисунках широким пунктиром. Для этого случая расчетное время попадания в начало координат $T(x^0, r(t)) \approx 3{,}04$.

Узкому пунктиру соответствует случай $r(t) = -0{,}3\cos(t^2)$. Для него время попадания в начало координат $T(x^0, r(t)) \approx 3{,}03$.

Численные расчеты показали, что возмущение можно брать достаточно большим, а именно $-0{,}55 \le r(t) \le 0{,}8$. Для $r(t) = -0{,}55$ время $T(x^0, r(t)) \approx 3{,}48$. Этот случай представлен на рисунках пунктиром с точкой. При $r(t) = 0{,}8$ время $T(x^0, r(t)) \approx 4{,}14$. Соответствующая линия показана точками.

Таким образом, в работе получено решение задачи управляемости для рассмотренной робастной системы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (проект «Оптимальное управление, устойчивость и стабилизация динамических систем сложной природы», № 0119U002530).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Поляк, Б. Т.** Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.

2 **Schweppe, F. C.** Uncertain dynamic systems / F. C. Schweppe. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall. – 1973. – 563 p.

3 **Коробов, В. И.** Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума / В. И. Коробов, Г. М. Скляр // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914–1924.

4 **Коробов, В. И.** Метод функции управляемости / В. И. Коробов. – М. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". – 2007. – 576 с.

5 **Коробов, В. И.** Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В. И. Коробов // Математический сборник. – 1979. – Т. 109 (151), № 4 (8). – С. 582–606.

6 **Каменков, Г. В.** Об устойчивости движения на конечном интервале времени / Г. В. Каменков // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 17, № 5. – С. 529–540.

7 **Dorato, P.** An Overview of Finite-Time Stability / P. Dorato // Current Trends in Nonlinear Systems and Control. – Boston : Birkhäuser, 2006. – P. 185–194.

8 **Майлыбаев, А. А.** Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике / А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян. – М. : Физматлит, 2009. – 399 с.

9 **Fernando, O. T.** Bounded finite-time stabilization of the prey-predator model via Korobov's controllability function / O. T. Fernando, A. E. Choque-Rivero // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, вып. 1. – С. 76–87.

10 **Ovseevich, A.** Robust feedback control for a linear chain of oscillators / A. Ovseevich, I. Ananievski // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2021. – Vol. 188, no. 1. – P. 307–316.

11 **Korobov, V. I.** On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system / V. I. Korobov, T. V. Revina // IMA Journal of Mathematical Control and Information. – 2021. – Vol. 38, is. 1. – P. 396–416.

12 **Rohn, J.** Bounds on eigenvalues of interval matrices / J. Rohn // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1998. – Vol. 78, is. S3. – P. 1049–1050.

V. I. KOROBOV, T. V. REVINA
V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

OSCILLATIONS DAMPING OF THE MATERIAL POINT ON THE SPRING AT THE INEXACTLY DEFINED SPRING STIFFNESS

There is considered a material point attached to a spring moving on a frictionless surface. The control input (controllable engine power) is supposed to be attached to the material point. As a perturbation the spring stiffness is considered and it is not known exactly, but its value is in the defined range. The purpose of the paper is to find such limit of spring stiffness in which the transfer to the position of equilibrium is carried out in the same control as with the constant stiffness. Our approach is based on the controllability function method proposed by V. I. Korobov. This paper shows the relations between the range of perturbation and the bound of the motion time. The solution is illustrated by a defined initial point.

Keywords: controllability function, stability over a finite time interval, robust control, unknown limited perturbation.

Получено 16.10.2021