УДК 624.072

О. В. КОЗУНОВА, К. А. СИРОШ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

Разрабатывается методика расчета вариационно-разностным методом регулярной системы железобетонных балок на однослойном изотропном искусственном основании в виде упругого слоя, ограниченного по толщине. Алгоритм нелинейного расчета основан на использовании итерационного метода упругих решений. Физическая нелинейность материала железобетонных балок учитывается через асимптотическую зависимость «момент – кривизна». Численная апробация осуществлена с использованием программного пакета MATHEMATICA.

Ключевые слова: крестообразно пересеченные балки, вариационно-разностный метод, контактная зона, прогибы балки, осадки основания, контактные напряжения, функционал полной энергии.

Введение. На начальных этапах развития теории балок на упругом полупространстве было принято, что существенного различия в результатах расчета в условиях пространственной и плоской задач быть не должно (подобно расчету по гипотезе Винклера) [1]. Однако дальнейшие исследования [2] показали, что разница очень велика, и при расчете ленточных фундаментов в условиях плоской задачи получаются недопустимые запасы прочности [1, см. рисунки 115, 126, 131]. Методов решения задачи о балках в пространственных условиях предложено меньше в виду сложности задачи.

Вихгард в работе [3], используя формулу Буссинеска, выявил, что если искомый закон реактивных давлений $p(x, y)$ зависит от координат мест приложений этих давлений, то он связан с осадками грунта под балкой $W(x, y)$ [1, формула (32)]. Для упрощения решения Вихгард предложил считать, что в поперечном направлении реактивные давления распределяются равномерно, и брать в тождестве осадок грунта и прогибов балки осадки, осредненные в поперечном направлении.

Проктор [4], так же как и Вихгард, исходил из предположения, что реактивные давления распределены в поперечном направлении равномерно, и в качестве значений осадок в уравнении тождества прогибов балки и осадки грунта принимал их величину вдоль средней оси балки [1, уравнения (32), (33)]. Балка настолько жестка в поперечном направлении, что изгибом ее в этом направлении можно пренебречь. Но, кроме предположений и гипотез, ни Вихгард, ни Проктор не смогли предоставить окончательного решения задачи расчета бесконечной балки для пространственных условий.

Исследования продолжил В. И. Кузнецов, который в работе [5] предложил новый вариант решения, приняв за неизвестную функцию реактивные давления, а не осадки, как у Проктора. Решение Кузнецова весьма трудоемко и значительного распространения не получило.

Более простым, но не менее точным оказался метод Б. Н. Жемочкина [6], который аналогичен его же методу расчета для плоской задачи полос. Разница лишь в том, что здесь вместо формулы Фламана для плоской задачи используется формула Буссинеска для пространственной. Балка разбивается в продольном направлении на ряд прямоугольников, в границах которых давления, передаваемые подошвой балки грунту, считаются постоянными. Неизвестными считаются интенсивности напряжений в каждой ступени эпюры. Так же как и Проктор, Жемочкин пренебрёг тем, что при равномерном распределении давлений в поперечном направлении образуется «лунка», и поэтому прогибы балки и осадки грунта под ней вдоль продольной оси и вне ее совпадать не будут.

Эта неточность отсутствует в решениях задач о балках конечной длины на упругом полупространстве [1, 2], в которых М. И. Горбуновым-Посадо-вым был использован тот же метод, который он использовал для расчета полос в плоской задаче [7, 8]. Однако в случае пространственной задачи о контактном взаимодействии бесконечных полос, лент, балок и упругого основания в качестве исходного уравнения для реактивных давлений $p(x, y)$ он использовал двойной степенной ряд с неизвестными коэффициентами, как и в выражении для осадки грунта $W(x, y)$. Неизвестные коэффициенты степенного ряда для осадки грунта $A_{2i,2k}$ являются линейными функциями коэффициентов степенного ряда для реактивных давлений $a_{2i,2k}$.

Решение задач контактного взаимодействия для изгибаемых конструкций на упругом основании методами теории упругости [9] и строительной механики [10] получило свое дальнейшее развитие в работах С. В. Босакова, С. Д. Семенюка, О. В. Козуновой [11–15], в которых учитывалась неоднородность (слоистость) упругого основания, его физическая нелинейность, ползучесть бетона и другие особенности деформирования контактирующих тел.

Научная литература по применению вариационных методов для решения контактных задач теории упругости, особенно для изгибаемых конструкций, весьма скудна из-за их сложности. При расчетах регулярной системы железобетонных балок на упругом основании авторами принимается, что такая система представляет собой совокупность соединенных жестко между собой ортогональных стержней, расположенных на упругом основании, с осями в одной плоскости, совпадающей с одной из главных осей инерции балок.

Физическая нелинейность материала балок учитывается через асимптотическую зависимость «момент – кривизна». Эта зависимость при нелинейном расчете железобетонных балок, работающих в условиях плоского изгиба, комплексно учитывает нелинейные свойства бетона и арматуры, анизотропность и неоднородность, трещинообразование материала балки. Данную зависимость в теории железобетона предложил использовать В. Н. Мурашов

[16]. В работах В. И. Соломина и его учеников [17] она применена для расчета железобетонных конструкций на упругом основании.

Гипотезы и допущения. При решении пространственной задачи о деформировании регулярной системы железобетонных балок на упругом основании вводятся гипотезы и допущения:

– на расчетную область упругого основания распространяются гипотезы и допущения линейной теории упругости, а при учете физической нелинейности материала балок – малых упругопластических деформаций Ильюшина [9, 10, 16];

– в контактной зоне между железобетонными балками и основанием могут возникать сжимающие и растягивающие напряжения, а также отсутствуют силы трения;

– распределение нормальных реактивных давлений по ширине каждой балки считается постоянным [1];

– для балки справедливы гипотезы и допущения плоского изгиба [10].

Постановка задачи. Рассматривается регулярная система железобетонных балок на упругом основании постоянной изгибной жесткости EJ_x, EJ_y под действием симметричной нагрузки. В силу симметрии эта система разбивается на ряд базовых фрагментов, представляющих крестообразные соединения балок. Так регулярная система заменяется на свободно опирающуюся на упругое основание совокупность двух пересекающихся балок, имеющих длины l_x, l_y (рисунок 1). Поперечные сечения балок принимаются постоянными. Внешняя симметричная нагрузка действует перпендикулярно плоскости, образуемой осями железобетонных балок.

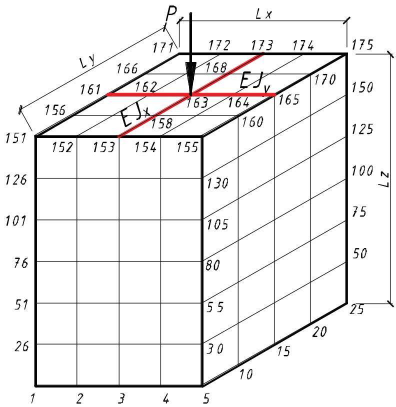

Рисунок 1 – Расчетная область пространственной задачи

Граничные условия задачи. На границах принятой в задаче расчетной области основания горизонтальные перемещения равняются нулю $u = 0$, $v = 0$. В свою очередь для контактной зоны справедливо условие равенства осадок основания прогибам балок. Для крайних точек балок (точки 153, 161, 165, 173) вводятся смешанные граничные условия

$$Q_z\Big|_{x=\pm\frac{l_x}{2}} = -EJ_y\frac{d^3w}{dx^3} = 0\,, \qquad Q_z\Big|_{y=\pm\frac{l_y}{2}} = -EJ_x\frac{d^3w}{dy^3} = 0\,,$$

$$\varphi_x\Bigg|_{y=\pm\frac{l_y}{2}} = \frac{dw}{dy} = 0, \qquad \varphi_y\Bigg|_{x=\pm\frac{l_x}{2}} = \frac{dw}{dx} = 0.$$

Алгоритм линейного расчета. При линейном (упругом) расчете упругое основание для решения пространственной задачи заменяется расчетной областью (см. рисунок 1). Основание аппроксимируется симметричной объемной разбивочной сеткой с постоянными шагами по осям Δx, Δy, Δz. В итоге получено 96 ячеек и 175 узловых точек.

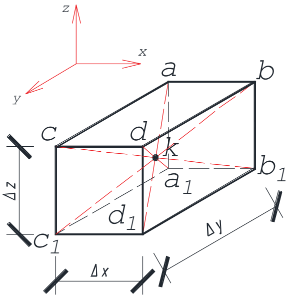

Рисунок 2 – Объемная ячейка расчетной области

Объемная ячейка рассматриваемой расчетной области представляет собой куб, грани которого имеют размеры $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ (рисунок 2).

Принимая компоненты вектора перемещений $u_i(x, y, z)$, $v_i(x, y, z)$, $w_i(x, y, z)$ за неизвестные, решение задачи реализуется в перемещениях. Энергия деформации подсчитывается отдельно для каждой ячейки, а затем суммируется по объему упругого основания. При этом система дифференциальных уравнений после замены выражений функционалов энергий конечно-разностными аппроксимациями преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет найти неизвестные компоненты вектора $u_i(x, y, z)$, $v_i(x, y, z)$, $w_i(x, y, z)$. Чтобы найти энергию деформации в центре объемной ячейки расчетной области, необходимо сначала найти функционал энергии деформаций упругого основания в центрах граней ячейки через известные зависимости теории упругости для плоской задачи, а именно через соотношения Коши и обобщенный закон Гука. Так как ячейка расчетной области представляет собой параллелепипед с попарно-одинаковыми гранями, достаточно определить энергию деформации для трех граней (рисунок 3).

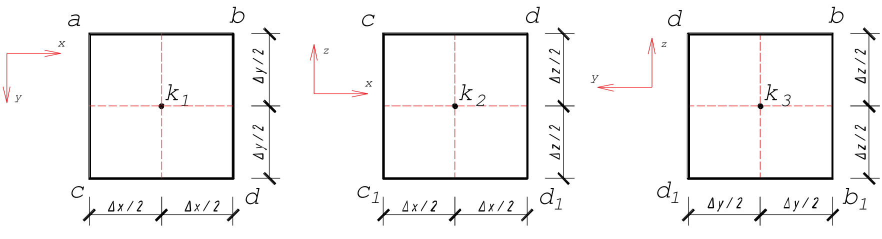

Рисунок 3 – Прямоугольные грани кубической ячейки расчетной области с центрами в точках k_1, k_2, k_3

Последовательность этапов расчета определяется алгоритмом линейного расчета регулярной системы балок методом Ритца – Тимошенко [14, 16].

Ранее в работе [15] приведен предложенный вид функционала полной потенциальной энергии с учетом энергии деформации физически нелинейного и неоднородного упругого основания. Функционал энергии деформаций для упругого основания в единице объема [16] можно представить в виде

$$U_f = \frac{E\mu}{2(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{E}{2(1+\mu)}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) +$$

$$+ \frac{E}{4(1+\mu)}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2),$$

где E, μ – упругие постоянные основания.

Обозначив элемент объема через dV, полную энергию деформации упругого основания запишем в виде

$$U = \int_z \int_y \int_x U_f \, dxdydz = \int_V U_f \, dV.$$

При составлении выражения функционала энергии деформаций для упругого основания работа сил тяжести не учитывается, поскольку они уже уравновешены начальным напряженным состоянием, а работа самоуравновешенной системы сил на возможных перемещениях равняется нулю. В свою очередь полные напряжения являются результатом сложением полученного в работе решения с напряжениями от сил собственного веса основания.

Энергия изгиба двух крестообразно пересеченных балок

$$\Omega = \Omega_x + \Omega_y = \frac{EJ_x}{2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \left(\frac{d^2 w}{d x^2} \right)^2 d x + \frac{EJ_y}{2} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \left(\frac{d^2 w}{d y^2} \right)^2 d y.$$

Энергией деформаций сдвига для рассматриваемой регулярной системы железобетонных балок можно пренебречь [10, 14].

Потенциал внешней нагрузки q определяется из формулы

$$\Pi = -\left(\int_{-l_x/2}^{l_x/2} q(x)\, w(x)\, dx + \int_{-l_y/2}^{l_y/2} q(y)\, w(y)\, dy \right).$$

Функционал полной энергии представляет собой сумму энергий деформации упругого основания, балок и потенциала внешней нагрузки

$$Э = U + \Omega + \Pi.$$

Поскольку в состоянии равновесия функционал полной энергии Э имеет минимум, перемещения $u_i(x, y, z)$, $v_i(x, y, z)$, $w_i(x, y, z)$ определяются из условия равенства нулю производных от полной энергии по каждому из них.

Учет физической нелинейности материала балок. Учет нелинейности осуществляется путем аппроксимации зависимости «момент – кривизна» гиперболическим тангенсом (такой подход ранее был успешно использован при исследовании напряженно-деформированного состояния неоднородных оснований фундаментных конструкций [18] и шарнирно соединенных балок на упругом основании [19]):

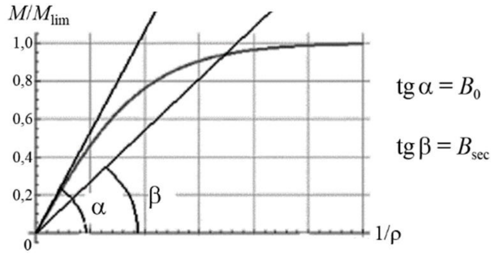

Рисунок 4 – Принятая зависимость «момент – кривизна»

$$M\left(\frac{1}{\rho}\right)=M_{\lim}\ \mathrm{th}\left(\frac{B_0}{M_{\lim}}\frac{1}{\rho}\right),$$

где $M_{\lim}$ – предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением балки; B_0 – начальная жесткость балки; $1/\rho$ – кривизна в данном сечении. При нелинейном расчете используется секущая изгибная жесткость балок B_{sec} (рисунок 4).

Результаты расчета. Апробация разработанной методики осуществлена в системе компьютерной алгебры MATHEMATICA [20, 21]. Для расчета приняты следующие исходные данные: $l_x = l_y = 4$ м, $l_z = 6$ м, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ м, $EJ_x = 2000$ кН·м^2, $EJ_y = 2000$ кН·м^2, $E = 30{,}6$ ГПа; $\mu = 1/6$, $P = 2000$ кН.

На рисунке 5 приведены схемы деформирования рассматриваемой системы в двух вертикальных сечениях, соответствующих расположению осей балок. Перемещения в законтурных точках симметричны относительно границы расчетной области и равны перемещениям узловых точек балок.

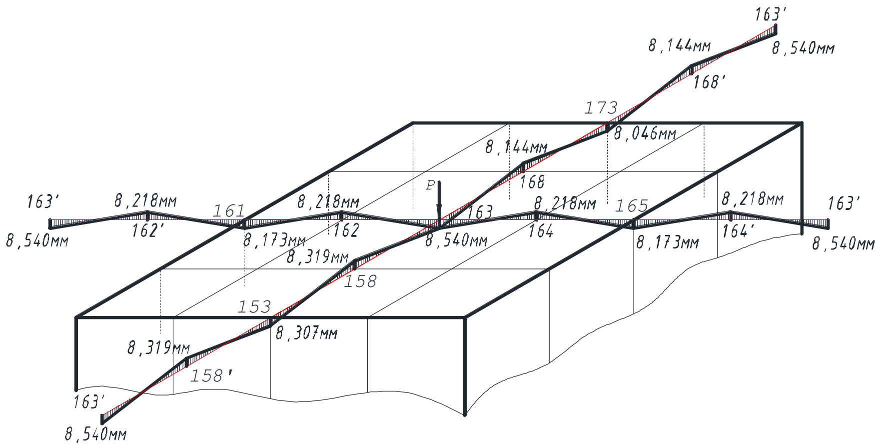

Рисунок 5 – Перемещения железобетонных балок при симметричной нагрузке

При необходимости внутренние силовые факторы в балках можно определить, используя конечные разности, по дифференциальным зависимостям

$$M_x(y)=-EI_x\frac{d^2w}{dy^2};\ M_y(x)=-EI_y\frac{d^2w}{dx^2};\ Q_z(x)=-EI_y\frac{d^3w}{dx^3};\ Q_z(y)=-EI_x\frac{d^3w}{dy^3}.$$

Заключение. В рассматриваемой работе авторами предложена методика определения вариационно-разностным методом параметров напряженно-деформированного состояния ленточных фундаментов на упругом основании, как регулярной системы железобетонных балок, расположенных на упругом полупространстве с ограничением глубины сжимаемой толщи. Построен и реализован алгоритм расчета с учетом нелинейной работы материала балок, составлена программа с использованием компьютерного пакета MATHEMATICA, проведена ее апробация.

В результате проведенных исследований установлено, что при граничных условиях и числовых данных, принятых в рассмотренном примере, балки изгибаются волнообразно, что возможно в натурных условиях при выбранных размерах расчетной области. Для увеличения точности расчетов целесообразно выполнить исследования, связанные с влиянием глубины сжимаемой толщи упругого основания на получаемые результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 639 с.

2 **Горбунов-Посадов, М. И.** Балки и плиты на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов. – М. : Машстройиздат, 1949. – 128 с.

3 **Wieghardt, K.** Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage / K. Wieghardt // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1922. – Bd. 2, H. 3. – S. 165–184.

4 **Проктор, Г. Э.** Об изгибе балок, лежащих на сплошном упругом основании без гипотезы Винклера – Циммермана : дипломная работа / Г. Э. Проктор / Петроградский технологический институт. – Петроград, 1922. – 98 с.

5 **Кузнецов, В. И.** Вопросы статического расчета верхнего строения пути / В. И. Кузнецов. – М. : Трансжелдориздат, 1940. – 78 с.

6 **Жемочкин, Б. Н.** Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Госстройиздат, 1962. – 240 с.

7 **Горбунов-Посадов, М. И.** Осадки и давления под жесткими прямоугольными фундаментными плитами / М. И. Горбунов-Посадов // Строительная промышленность. – 1948. – № 8. – 88 с.

8 **Горбунов-Посадов, М. И.** Плиты на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов. – М. : Госстройиздат, 1941. – 109 с.

9 **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.

10 **Ржаницын, Р. А.** Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – М. : Высш. шк., 1991. – 439 с.

11 **Босаков, С. В.** Расчет системы перекрестных балок на двухслойном основании / С. В. Босаков, Я. Д. Семенюк // Вестник БПУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2000. – № 1. – С. 14–16.

12 **Босаков, С. В.** Расчет железобетонных пространственных фундаментов, как системы перекрестных балок, на упругом основании с учетом ползучести бетона /

С. В. Босаков, С. Д. Семенюк // Вестник БГТУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2001. – № 1. – С. 13–16.

13 **Семенюк, С. Д.** Железобетонные и пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании / С. Д. Семенюк. – Могилёв : Белорусско-Российский университет, 2003. – 269 с.

14 **Босаков, С. В.** Метод Ритца в контактных задачах теории упругости : монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.

15 **Босаков, С. В.** Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Часть 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.

16 **Мурашев, В. Н.** Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона (Основы сопротивления железобетона) / В. Н. Мурашев. – М. : Изд-во М-ва строительства предприятий машиностроения. – 1950. – 268 с.

17 **Соломин, В. И.** Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. – М. : Стройиздат, 1986. – 206 с.

18 **Козунова, О. В.** Применение МКР в нелинейных расчетах балок на однородном упругом слое / О. В. Козунова // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди : зб. наук. пр. / Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2008. – Вип. 17. – С. 373–381.

19 **Босаков, С. В.** Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона : сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС ; редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. – Минск, 2019. – Вып. 11. – С. 11–24.

20 **Дьяконов, В. П.** Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК, Пресс, 2009. – 624 с.

21 **Romano, A.** Classical Mechanics with Mathematica® / A. Romano, A. Marasco. – Second ed. – Boston, MA : Birkhäuser, 2018. – 644 p.

O. V. KOZUNOVA, K. A. SIROSH
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

NONLINEAR CALCULATION OF A REGULAR SYSTEM OF REINFORCED CONCRETE BEAMS ON AN ELASTIC BASE UNDER A SYMMETRICAL LOAD

The paper considers a method for a regular system of reinforced concrete beams on a single-layer isotropic artificial foundation calculating by the variational-difference method in the form of an elastic layer limited in thickness. The nonlinear calculation algorithm is based on the use of the iterative method of elastic solutions. The physical nonlinearity of the reinforced concrete beams material is taken into account through the "moment – curvature" asymptotic dependence. Numerical testing was carried out using the MATHEMATICA software package.

Keywords: crosswise crossed beams, variation-difference method, contact zone, beam deflections, precipitation of the foundation, contact stresses, total energy functional.

Получено 11.10.2021