

УДК 531.45:539.3

Е. В. КОДНЯНКО^{1,2}, Д. А. ЧЕРНОУС²

¹ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

РАСЧЕТ КОНТАКТНОГО СДВИГОВОГО НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КОЛЕСА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПЕРИФЕРИЕЙ

Разработана новая математическая модель начала качения жесткого колеса с тонким линейно упругим покрытием. Деформирование покрытия описывается в рамках модели основания Винклера. При этом учитывается асимметрия распределения контактного давления, обусловленная действующим на колесо моментом. Рассмотрен ведущий режим качения при фиксированном значении горизонтальной силы. Получены расчетные распределения сдвигового напряжения в области контакта при различных значениях действующего момента.

Ключевые слова: модель основания Винклера, контактное давление, контактное сдвиговое напряжение, момент сопротивления качению, зона сцепления, зона проскальзывания.

Введение. Результаты решения контактных задач для тел качения находят широкое практическое применение при расчетах и проектировании колес транспортных средств, а также роликов и подшипников в различных механизмах. Решению подобных задач посвящено множество научных работ. Однако до настоящего времени остается актуальной разработка новых и совершенствование существующих расчетных методик, которые должны в каждом конкретном случае обеспечивать приемлемую точность оценок результатов при использовании относительно простого математического аппарата, пригодного для инженерных расчетов. В частности, при решении контактных задач для автомобильного колеса или стального ролика с антифрикционным полимерным покрытием используется упрощенная структурная модель в виде жесткого цилиндра с деформируемой периферией [1, 2].

Если материал периферии не является несжимаемым, а ее толщина много меньше ширины области контакта, то для такого слоя может быть использована модель основания Винклера [3]. Несмотря на упрощенный характер, данная модель широко используется при решении контактных задач для тонких покрытий [4–6]. В частности, в работе [2] получена оценка момента сопротивления качению в покое с учетом нарушения симметрии распределения контактного давления при приложении к покоящемуся колесу малого крутящего момента. Однако в ней рассматривается только режим свободного качения при отсутствии сдвиговой (параллельной опорной поверхности) силы, что существенно сужает область применения разработанной методики. Ряд фундаментальных и прикладных работ посвящен анализу влияния сдви-

говой силы на параметры качения колес [7–9]. В рамках классической теории качения, изложенной в них, при рассмотрении линейно упругого деформирования материалов контактирующих тел (без учета вязкости и физической нелинейности) наличие приложенной к колесу пары сил не сказывается на распределении контактного давления. Подобный подход не позволяет достоверно прогнозировать параметры напряженно-деформированного состояния в области контакта колеса с опорной поверхностью.

В связи с вышесказанным целью настоящего исследования является совершенствование ранее предложенной методики [2] расчетного определения момента сопротивления качению в покое и разработка на ее основе математической модели, позволяющей для колеса с деформируемой периферией рассчитывать не только контактное давление, но и сдвиговое контактное напряжение в зонах сцепления и проскальзывания.

Описание модели. Как и в работе [2], в качестве упрощенной структурной модели колеса рассмотрим абсолютно жесткий цилиндр с длиной образующей l , радиусом R и деформируемой периферией толщины h . В дальнейшем для краткости будем называть данную периферию покрытием. Колесо находится в контакте с горизонтальной недеформируемой опорной поверхностью.

На колесо действует вертикальная сила P , направленная к опорной поверхности, горизонтальная сила F и пара сил с моментом $M_{пр}$ (рисунок 1). Деформируемая периферия образована изотропным линейно упругим материалом, характеризующимся модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν .

Под действием силы P центр колеса смещается к опорной поверхности на u_{n0} . При этом образуется область контакта полушириной a . Вертикальные смещения точек поверхности покрытия, находящихся в данной области, зависят от координаты x следующим образом:

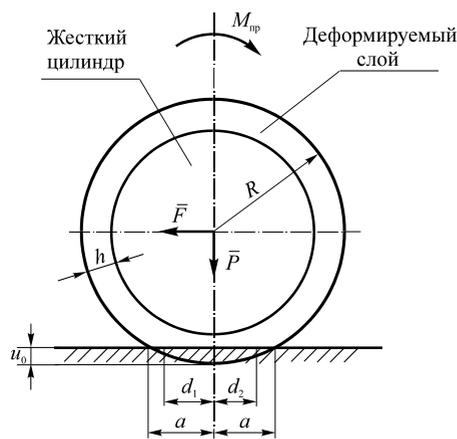


Рисунок 1 – Структурная модель колеса

$$u_n(x) = u_{n0} - \frac{x^2}{2R}. \quad (1)$$

Ось x направлена по опорной поверхности перпендикулярно образующей цилиндра. Начало координат соответствует центру области контакта.

Толщина h покрытия считается достаточно малой ($h \ll a$) для того, чтобы при решении контактной задачи могла использоваться модель основания Винклера [3]. При этом контактное давление p определяется вертикальными

смещениями u_n точек поверхности покрытия, а сдвиговое напряжение τ в области контакта – горизонтальными смещениями u_τ этих точек

$$p = k_n u_n, \quad \tau = k_\tau u_\tau. \quad (2)$$

Коэффициенты жесткости k_n и k_τ вычисляются по формулам [3]

$$k_n = \frac{E(1-\nu)}{h(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad k_\tau = \frac{E}{2h(1+\nu)}.$$

На границах области контакта давление p принимает нулевые значения. Тогда, используя совместно соотношения (1) и (2), можно установить связь максимального вертикального смещения и полуширины a :

$$a = \sqrt{2Ru_{n0}}.$$

При заданном значении вертикальной силы P смещение u_{n0} определяется из условия равновесия колеса

$$P = l \int_{-a}^a p dx = lk_n u_{n0} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} lk_n u_{n0} a = \frac{2}{3} \frac{lk_n a^3}{R}.$$

Следовательно,

$$a = \left(\frac{3RP}{2lk_n}\right)^{1/3}, \quad u_{n0} = \frac{a^2}{2R} = \left(\frac{3P}{4lk_n \sqrt{2R}}\right)^{2/3}. \quad (3)$$

Общая ширина области контакта

$$l_{\text{конт}} = 2a = \left(\frac{12RP}{lk_n}\right)^{1/3}.$$

Как было показано в работе [2], при действии на покоящееся колесо пары сил с моментом M_d , не превышающим момента сопротивления качению в покое M_{c0} , распределение вертикальных смещений изменяется

$$u_{nM}(x) = u_{n0} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \gamma \frac{x}{a}\right), \quad (4)$$

где

$$\gamma = \frac{M_d}{M_{c0}} = \frac{M_{\text{пр}} - FR}{M_{c0}}. \quad (5)$$

Значение момента M_{c0} определяется из условия равновесия колеса в момент начала качения (при $\gamma = 1$)

$$M_{c0} = l \int_{-a}^a p x dx = lk_n u_{n0} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right) x dx = \frac{4}{15} lk_n u_{n0} a^2 = \frac{1}{5} aP.$$

В области контакта выделяются зоны сцепления и проскальзывания. В зоне проскальзывания выполняется закон Кулона

$$\tau = fp. \quad (6)$$

где f – коэффициент трения между покрытием и опорной поверхностью.

В зоне сцепления выполняется условие постоянства деформации $\varepsilon_{xx} = du_x/dx$ [9]. При этом

$$u_\tau = C_1 + C_2 x, \quad (7)$$

где C_1, C_2 – некоторые не зависящие от координаты x величины.

Известно [8], что при качении зона сцепления распространяется до границы области контакта, соответствующей направлению качения. Поэтому в рамках модели основания Винклера соотношение (7) перепишем в виде

$$u_\tau(x) = u_{\tau 0} \left(1 - \gamma \frac{x}{a} \right), \quad (8)$$

где $u_{\tau 0}$ – горизонтальное смещение точки поверхности покрытия в центре области контакта ($x = 0$).

При заданном значении горизонтальной силы F смещение $u_{\tau 0}$ определяется из условия равновесия колеса

$$F = l \int_{-a}^a \tau dx = l \left(\int_{-a}^{-d_1} fk_n u_{nM}(x) dx + \int_{-d_1}^{d_2} k_\tau u_\tau(x) dx + \int_{d_2}^a fk_n u_{nM}(x) dx \right). \quad (9)$$

Здесь d_1, d_2 – длины отрезков, определяющих размер зоны сцепления (см. рисунок 1). Функция $u_{nM}(x)$ задается соотношением (4), а функция $u_\tau(x)$ – выражением (8).

Для нахождения d_1 и d_2 используем условие выполнения на границе зоны сцепления закона Кулона (6)

$$fk_n u_{nM}(-d_1) = k_\tau u_\tau(-d_1), \quad fk_n u_{nM}(d_2) = k_\tau u_\tau(d_2). \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) составляют систему трех нелинейных уравнений для нахождения неизвестных d_1, d_2 и $u_{\tau 0}$. После ее решения определяется распределение сдвигового напряжения в области контакта

$$\tau(x) = \begin{cases} k_\tau u_\tau(x), & -d_1 \leq x \leq d_2; \\ fk_n u_{nM}(x), & -a \leq x < -d_1, d_2 < x \leq a. \end{cases} \quad (11)$$

Общая ширина зоны сцепления

$$l_{\text{сц}} = d_1 + d_2.$$

Расчетный пример. В качестве объекта анализа выбран стальной ролик радиуса $R = 0,15$ м и шириной $l = 0,08$ м с полиуретановым покрытием толщины $h = 0,03$ м. Сила прижатия ролика $P = 100$ Н. Представленные данные

соответствуют ролику скипа, перемещающегося по проводникам скипо-клетевого ствола № 2 1РУ ОАО «Беларуськалий» [10]. Значения упругих характеристик материала покрытия $E = 5$ МПа, $\nu = 0,47$. Коэффициент трения между покрытием и стальной опорной поверхностью составляет $f = 0,1$ [11].

Не снижая общности разработанной модели, будем рассматривать ведущий режим качения, при котором горизонтальная сила, направленная противоположно направлению качения, принимает фиксированное значение $F = M_{c0}/R = Pa/5R$. Данное значение соответствует началу качения ролика в ведомом режиме. Приложенный момент $M_{пр}$ будем изменять от минимального значения $M_{прmin} = M_{c0}$, соответствующего отсутствию действующего момента, до максимального $M_{прmax} = 2M_{c0}$, соответствующего началу качения в ведущем режиме. Данный выбор диапазона изменения приложенного момента обеспечивает изменение коэффициента γ (5) от нуля до единицы.

При $\gamma = 0$ система уравнений (9), (10) может быть решена аналитически:

$$d_1 = d_2 = \left(\frac{3R(fP - F)}{2fk_n l} \right)^{1/3}.$$

В этом случае максимальное значение сдвигового напряжения в области контакта составит

$$\tau_{0max} = fk_n u_{n0} - \left(\frac{3(fP - F)}{4l} \sqrt{\frac{fk_n}{2R}} \right)^{2/3}.$$

На рисунке 2 представлены расчетные эпюры сдвигового напряжения в области контакта, отнесенного к величине τ_{0max} . Можно отметить, что напряжение τ достигает максимального значения τ_{max} на границе зоны сцепления в направлении действия горизонтальной силы.

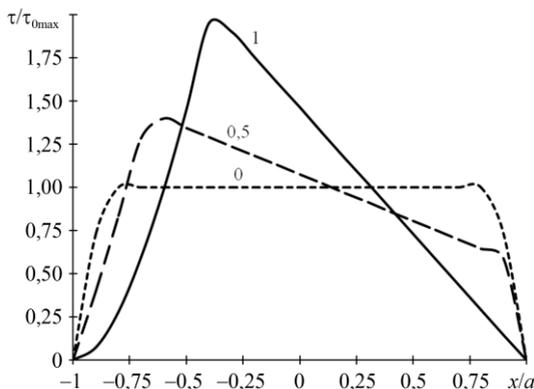


Рисунок 2 – Расчетные эпюры относительного сдвигового напряжения в области контакта. Числа у кривых соответствуют значению коэффициента γ

С увеличением действующего на колесо момента величина τ_{\max} возрастает. При этом зависимость τ_{\max} от коэффициента γ близка к линейной (рисунок 3). В момент начала качения ($\gamma = 1$) максимальное значение сдвигового напряжения в 2 раза превышает $\tau_{0\max}$. Ширина зоны сцепления при увеличении действующего момента снижается (рисунок 3). При изменении коэффициента γ от нуля до единицы ширина $l_{\text{сц}}$ уменьшилась на 20 %.

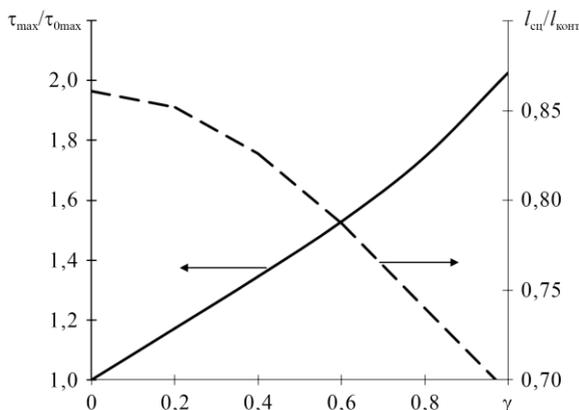


Рисунок 3 – Зависимость относительного максимального значения сдвигового напряжения (сплошная кривая) и относительной ширины зоны сцепления от коэффициента γ

Заключение. В результате использования разработанной математической модели установлено, что нарушение симметрии распределения контактного давления при приложении к колесу вращающего момента оказывает существенное влияние и на распределение сдвигового напряжения в области контакта. При этом максимальное значение сдвигового напряжения возрастает практически линейно при увеличении действующего момента и в рассмотренном расчетном примере в момент начала качения в 2 раза превышает соответствующее значение, вычисленное без учета указанной асимметрии. При увеличении действующего момента от нуля до значения момента сопротивления качению в покое ширина зоны сцепления уменьшилась на 20 %.

Полученные результаты позволяют расширить возможности использования упрощенной модели основания Винклера при решении контактных задач для тел качения с покрытиями. Кроме того, использование разработанной модели обеспечивает более точные по сравнению с ранее предложенной методикой расчетные оценки параметров напряженно-деформированного состояния в области контакта колеса с опорной поверхностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Вильке, В. Г. Стационарный режим качения колеса с вязкоупругой периферией / В. Г. Вильке, В. А. Синицын // Механика твердого тела. – 1997. – № 3. – С. 39–46.
- 2 Взаимодействие в системе «пневматическое колесо-рельс» транспортного средства на комбинированном ходу / В. А. Довгяло [и др.] // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 6. – С. 604–612.
- 3 Черноус, Д. А. Оценка применимости модели Винклера основания для анизотропного покрытия / Д. А. Черноус, Е. В. Коднянко // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – Вып. 13. – С. 166–182.
- 4 Горячева, И. Г. Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения / И. Г. Горячева, М. М. Губенко, Ю. Ю. Маховская // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 99–107.
- 5 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg [et al.] // Tribology International. Elsevier. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.
- 6 Christoforou, A. P. On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate / A. P. Christoforou // Composite Structures. – 1993. – № 26. – P. 77–82.
- 7 Блинов, Е. И. Основы динамической теории движения колесных машин / Е. И. Блинов. – М. : Машиностроение-1, 2006. – 149 с.
- 8 Johnson, K. L. Contact mechanics / K. L. Johnson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1985. – 510 p.
- 9 Попов, В. Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М. : Физматлит, 2012. – 348 с.
- 10 Скип шахтный: пат. 11460 Респ. Беларусь, МПК В66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев ; заявитель Солигорский Институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством – № и 20170053 ; заявл. 22.02.2017.
- 11 Ferry, J. D. Viscoelastic properties of polymers / J. D. Ferry. – New York-London, 1961. – 530 p.

A. V. KADNIANKA^{1,2}, D. A. CHARNAVUS²

¹JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus

²Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

CALCULATION OF THE CONTACT SHEAR STRESS FOR A WHEEL WITH A DEFORMABLE PERIPHERAL

A new mathematical model of a rolling beginning of a rigid wheel with a thin linearly elastic coating is developed. The coating deformation is described in the Winkler foundation model terms. There is taken into account the asymmetry of the contact pressure distribution caused by the torque acting the wheel. The leading rolling mode is considered at a fixed value of the horizontal force. There are obtained the calculated distributions of shear stress in the contact area for different values of the acting torque.

Keywords: Winkler foundation model, contact pressure, contact shear stress, rolling resistance moment, adhesion zone, slipping zone.

Получено 13.10.2021