УДК 539.374

*Гу Юй, аспирант; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

# ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрен изгиб упругого трехслойного стержня со сжимаемым по толщине заполнителем. Для описания кинематики пакета принята гипотеза ломаной линии. Получена система уравнений равновесия и ее решение в перемещениях. Проведен численный анализ.

Результаты исследования трехслойных стержней с несжимаемым по толщине заполнителем, в том числе и вязкоупругопластических, геометрия которых описывается с помощью тех или иных гипотез, приведены в работах [1–3]. Здесь рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень, для изотропных несущих слоёв которого приняты гипотезы Кирхгофа–Лява, в жёстком сжимаемом заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений.

Система координат $x$, $y$, $z$ связывается со срединной плоскостью заполнителя, в которой действует распределенная по площади силовая нагрузка $p(x)$, $q(x)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; $h_k$ – толщина $k$-го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя); $b$ – ширина стержня. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине $l$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$. В несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_1,_x;\; w^{(1)} = w_1 \;\; (c \le z \le c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_2,_x;\; w^{(2)} = w_2 \;\; (-c - h_2 \le z \le -c);$$

в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4} w_1,_x\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4} w_2,_x\right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2 \;\; (-c \le z \le c). \tag{1}$$

где $z$ – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя. Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из (1), используя соотношения Коши:

$$\varepsilon_x^{(1)} = u_1,_x - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_1,_{xx} \;\; (c \le z \le c + h_1);$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1,_x + \frac{h_1}{4} w_1,_{xx}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2,_x - \frac{h_2}{4} w_2,_{xx}\right);$$

$$\varepsilon_z^{(3)} = \frac{1}{2c}\left(w_1 - w_2\right) \;\; (-c \le z \le c);$$

$$\varepsilon_{xz}^{(2)} = \left(\frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_1,_x + \left(\frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4}\right) w_2,_x + \frac{u_1 - u_2}{4c};$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = u_2,_x - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_2,_{xx} \;\; (-c - h_2 \le z \le -c);$$

$$\varepsilon_{xz}^{(1)} = \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0 \tag{2}$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в рассматриваемом случае будут следующими ($э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$; $i, j = x, y, z$):

$$\varepsilon^{(k)} = \tfrac{1}{3}\varepsilon_x^{(k)},\ э_x^{(k)} = \tfrac{2}{3}\varepsilon_x^{(k)},\ \text{при } k=1,2;$$

$$\varepsilon^{(3)} = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_x^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}),\ э_x^{(3)} = \tfrac{2}{3}\varepsilon_x^{(3)} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)} \tag{3}$$

Введем внутренние усилия и моменты:

$$N_x^{(k)} = b\int_{h_k}\sigma_x^{(k)}dz;\ M_x^{(k)} = b\int_{h_k}\sigma_x^{(k)}zdz;\ Q^{(3)} = b\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}dz;$$

$$N_z^{(3)} = b\int_{h_3}\sigma_z^{(3)}dz;\ M_{xz}^{(3)} = b\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}zdz, \tag{4}$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений. Интегралы берутся по толщине $k$-го слоя.

Уравнения равновесия получим, используя вариационный принцип Лагранжа [4]:

$$\delta A_e - \delta A_i = 0, \tag{5}$$

где $\delta A_e$ – вариация работы внешних сил; $\delta A_i$ – вариация работы внутренних сил упругости. При определении работы внешних сил считаем, что к внешней поверхности первого несущего слоя приложены произвольные распределенные нагрузки, а к торцам стержня – усилия и моменты.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки представима в виде

$$\delta A_e = b\int_0^l \left[ p\left(\delta u_1 - \frac{h_1}{2}\delta w_{1,x}\right) + q\delta w_1 \right] dx. \tag{6}$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta A_i = b\int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_x^{(k)}\delta\varepsilon_x^{(k)}dz + 2\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}dz + \int_{h_3}\sigma_z^{(3)}\delta\varepsilon_z^{(3)}dz \right] dx. \tag{7}$$

Так как вариации перемещений

$$\delta u^{(1)} = \delta u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right)\delta w_{1,x};\ \delta w^{(1)} = \delta w_1\ \ (c \le z \le c + h_1);$$

$$\delta u^{(2)} = \delta u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right)\delta w_{2,x};\ \delta w^{(2)} = \delta w_2\ \ (-c - h_2 \le z \le -c);$$

$$\delta u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}\delta u_1 + \frac{h_1}{4}\delta w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}\delta u_2 - \frac{h_2}{4}\delta w_{2,x}\right);$$

$$\delta w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right)\delta w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right)\delta w_2\ (-c \le z \le c),$$

то вариации деформаций

$$\delta\varepsilon_x^{(1)} = \delta u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right)\delta w_{1,xx}\ (c \le z \le c + h_1);$$

$$\delta\varepsilon_x^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}\delta u_{1,x} + \frac{h_1}{4}\delta w_{1,xx}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}\delta u_{2,x} - \frac{h_2}{4}\delta w_{2,xx}\right);$$

$$\delta\varepsilon_z^{(3)} = \frac{1}{2c}(\delta w_1 - \delta w_2)\ \ (-c \le z \le c);$$

$$\delta\varepsilon_{xz}^{(2)} = \left(\frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4}\right)\delta w_{1,x} + \left(\frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4}\right)\delta w_{2,x} + \frac{\delta u_1 - \delta u_2}{4c};$$

$$\delta\varepsilon_x^{(2)} = \delta u_{2,x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right)\delta w_{2,xx};$$

$$\delta\varepsilon_{xz}^{(1)} = \delta\varepsilon_{xz}^{(2)} = 0\ \ (-c - h_2 \le z \le -c). \tag{8}$$

Рассмотрим интегралы по толщине слоев, входящие в выражение (7). Для слоя 1 с учетом (4), (8) получаем

$$\int_{h_1}\sigma_x^{(1)}\delta\varepsilon_x^{(1)}dz = \int_{h_1}\sigma_x^{(1)}\left[\delta u_{1,x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right)\delta w_{1,xx}\right]dz = \frac{1}{b}\left[\delta u_{1,x}N^{(1)} + \delta w_{1,xx}\left(c + \frac{h_1}{2}\right)N^{(1)} - \delta w_{1,xx}M^{(1)}\right].$$

Аналогично для слоев 2 и 3

$$\int_{h_2}\sigma_x^{(2)}\delta\varepsilon_x^{(2)}dz = = \frac{1}{b}\left[\delta u_2,_x N^{(2)} - \delta w_2,_{xx}\left(c+\frac{h_2}{2}\right)N^{(2)} - \delta w_2,_{xx} M^{(2)}\right];$$

$$\int_{h_3}\sigma_x^{(3)}\delta\varepsilon_x^{(3)}dz = \frac{1}{b}\left[\frac{\delta u_1,_x}{2}\left(N^{(3)}+\frac{M^{(3)}}{c}\right)+\frac{\delta u_2,_x}{2}\left(N^{(3)}-\frac{M^{(3)}}{c}\right)+\frac{\delta w_1,_{xx} h_1}{4}\left(N^{(3)}+\frac{M^{(3)}}{c}\right)-\frac{\delta w_2,_{xx} h_2}{4}\left(N^{(3)}-\frac{M^{(3)}}{c}\right)\right]$$

$$\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}dz = \frac{1}{8b}\left[\delta w_1,_x\left(\left(2+\frac{h_1}{c}\right)Q^{(3)}+\frac{2M_{xz}^{(3)}}{c}\right)+\delta w_2,_x\left(\left(2+\frac{h_2}{c}\right)Q^{(3)}-\frac{2M_{xz}^{(3)}}{c}\right)+\frac{2\delta u_1}{c}Q^{(3)}-\frac{2\delta u_2}{c}Q^{(3)}\right];$$

$$\int_{h_3}\sigma_z^{(3)}\delta\varepsilon_z^{(3)}dz = \int_{h_3}\sigma_z^{(3)}\frac{\delta w_1-\delta w_2}{2c}dz = \frac{\delta w_1-\delta w_2}{2bc}N_z^{(3)}. \qquad (9)$$

С учетом (9) вариация работы сил упругости будет следующей:

$$\delta A_i = \int_0^l\left[\frac{1}{b}\left[\delta u_1,_x N^{(1)} + \delta w_1,_{xx}\left(c+\frac{h_1}{2}\right)N^{(1)} - \delta w_1,_{xx} M^{(1)}\right]+\frac{1}{b}\left[\delta u_2,_x N^{(2)} - \delta w_2,_{xx}\left(c+\frac{h_2}{2}\right)N^{(2)} - \delta w_2,_{xx} M^{(2)}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{b}\left[\frac{\delta u_1,_x}{2}\left(N^{(3)}+\frac{M^{(3)}}{c}\right)+\frac{\delta u_2,_x}{2}\left(N^{(3)}-\frac{M^{(3)}}{c}\right)+\frac{\delta w_1,_{xx} h_1}{4}\left(N^{(3)}+\frac{M^{(3)}}{c}\right)-\frac{\delta w_2,_{xx} h_2}{4}\left(N^{(3)}-\frac{M^{(3)}}{c}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{4b}\left[\delta w_1,_x\left(\left(2+\frac{h_1}{c}\right)Q^{(3)}+\frac{2M_{xz}^{(3)}}{c}\right)+\delta w_2,_x\left(\left(2+\frac{h_2}{c}\right)Q^{(3)}-\frac{2M_{xz}^{(3)}}{c}\right)+\frac{2\delta u_1}{c}Q^{(3)}-\frac{2\delta u_2}{c}Q^{(3)}\right]+$$

$$\left.+\frac{\delta w_1-\delta w_2}{2bc}N_z^{(3)}\right]dx = \frac{1}{b}\int_0^l\left[\frac{Q^{(3)}}{2c}\delta u_1 - \frac{Q^{(3)}}{2c}\delta u_2 + \frac{N_z^{(3)}}{2c}\delta w_1 - \frac{N_z^{(3)}}{2c}\delta w_2 + \delta u_1,_x\left(\frac{N^{(3)}}{2}+\frac{M^{(3)}}{2c}+N^{(1)}\right)+\right.$$

$$+\delta u_2,_x\left(\frac{N^{(3)}}{2}-\frac{M^{(3)}}{2c}+N^{(2)}\right)+\delta w_1,_x\left(\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)\frac{Q^{(3)}}{2}+\frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}\right)+\delta w_2,_x\left(\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)\frac{Q^{(3)}}{2}-\frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}\right)+$$

$$\left.+\delta w_1,_{xx}\left(\left(c+\frac{h_1}{2}\right)N^{(1)}-M^{(1)}+\frac{h_1}{4}N^{(3)}+\frac{h_1}{4c}M^{(3)}\right)+\delta w_2,_{xx}\left(-\left(c+\frac{h_2}{2}\right)N^{(2)}-M^{(2)}+\frac{h_2}{4}N^{(3)}+\frac{h_2}{4c}M^{(3)}\right)\right]dx =$$

$$=\frac{1}{b}\int_0^l\left(H_1\delta u_1 - H_1\delta u_2 + H_2\delta w_1 - H_2\delta w_2 + P_1\delta u_1,_x + P_2\delta u_2,_x + T_1\delta w_1,_x + T_2\delta w_2,_x + S_1\delta w_1,_{xx} + S_2\delta w_2,_{xx}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b}\int_0^l\left[\left(H_1 - P_1,_x\right)\delta u_1 + \left(-H_1 - P_2,_x\right)\delta u_2 + \left(S_1,_{xx} - T_1,_x + H_2\right)\delta w_1 + \left(S_2,_{xx} - T_2,_x - H_2\right)\delta w_2 +\right.$$

$$\left.+\left(P_1\delta u_1 + P_2\delta u_2 + \left(T_1 - S_1,_x\right)\delta w_1 + \left(T_2 - S_2,_x\right)\delta w_2 + S_1\delta w_1,_x + S_2\delta w_2,_x\right),_x\right]dx. \qquad (10)$$

Здесь

$$H_1 = \frac{Q^{(3)}}{2c},\; H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c},\; P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2}+\frac{M_x^{(3)}}{2c}+N_x^{(1)},$$

$$P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2}-\frac{M_x^{(3)}}{2c}+N_x^{(2)},\; T_1 = \left(1+\frac{h_1}{2c}\right)\frac{Q^{(3)}}{2}+\frac{M_{xz}^{(3)}}{2c},$$

$$T_2 = \left(1+\frac{h_2}{2c}\right)\frac{Q^{(3)}}{2}-\frac{M_{xz}^{(3)}}{2c};\; S_1 = \left(c+\frac{h_1}{2}\right)N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4}N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c}M_x^{(3)};$$

$$S_2 = -\left(c+\frac{h_2}{2}\right)N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4}N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c}M_x^{(3)}.$$

$$P_k\delta u_k,_x = \left(P_k\delta u_k\right),_x - P_k,_x\,\delta u_k;\; T_k\delta w_k,_x = \left(T_k\delta w_k\right),_x - T_k,_x\,\delta w_k;$$

$$S_k \delta w_k,_{xx} = \left(S_k \delta w_k,_x\right),_x - \left(S_k,_x \delta w_k\right),_x + S_k,_{xx} \delta w_k \quad (k = 1,2).$$

Подставив выражения (6) и (10) в (5), получим систему уравнений равновесия в усилиях:

$$\begin{cases} \frac{1}{b}\left(H_1 - P_1,_x\right) = p; \quad \frac{1}{b}\left(H_1 + P_2,_x\right) = 0; \\ \frac{1}{b}\left(S_1,_{xx} + H_2 - T_1,_x\right) = q + \frac{p,_x h_1}{2}; \quad \frac{1}{b}\left(S_2,_{xx} - H_2 - T_2,_x\right) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

В слоях трехслойного упругого стержня для связи напряжений и деформаций используются следующие соотношения:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)} \acute{y}_{ij}^{(k)}; \; \sigma^{(k)} = 3K^{(k)} \varepsilon^{(k)} \; (i, j = x, y, z; \, k = 1, 2, 3).$$

Компоненты тензора напряжений с учетом (3)

$$\sigma_x^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_x^{(k)} \; (k = 1,2); \; \sigma_{xz}^{(3)} = 2G^{(3)} \varepsilon_{xz};$$

$$\sigma_x^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_x^{(3)} + K_3^- \varepsilon_z^{(3)}; \; \sigma_z^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- \varepsilon_x^{(3)};$$

$$K_k^+ = K^{(k)} + \tfrac{4}{3} G^{(k)}; \; K_k^- = K^{(k)} - \tfrac{2}{3} G^{(k)}.$$

Используя соотношения (2), (4), выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции $u_1$, $w_1$, $u_2$, $w_2$:

$$N_x^{(1)} = b \int_c^{c+h_1} \sigma_x^{(1)} dz = b h_1 K_1^+ u_1,_x; \; N_x^{(2)} = b \int_{-c-h_1}^{-c} \sigma_x^{(2)} dz = b h_2 K_2^+ u_2,_x;$$

$$N_x^{(3)} = b \int_{-c}^{c} \sigma_x^{(3)} dz = b K_3^- \left(w_1 - w_2\right) + b c K_3^+ \left(u_1,_x + u_2,_x + \frac{h_1}{2} w_1,_{xx} - \frac{h_2}{2} w_2,_{xx}\right);$$

$$N_z^{(3)} = b \int_{-c}^{c} \sigma_x^{(3)} dz = b K_3^+ \left(w_1 - w_2\right) + b c K_3^- \left(u_1,_x + u_2,_x + \frac{h_1}{2} w_1,_{xx} - \frac{h_2}{2} w_2,_{xx}\right);$$

$$M_x^{(1)} = b \int_c^{c+h_1} \sigma_x^{(1)} z dz = b K_1^+ \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2}\right) u_1,_x - \frac{h_1^3}{12} w_1,_{xx}\right];$$

$$M_x^{(2)} = b \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_x^{(2)} z dz = b K_2^+ \left[-h_2 \left(c + \frac{h_2}{2}\right) u_2,_x - \frac{h_2^3}{12} w_2,_{xx}\right];$$

$$M_x^{(3)} = b \int_{-c}^{c} \sigma_x^{(3)} z dz = b \tilde{n}^2 K_3^+ \left[\frac{1}{3} u_1,_x - \frac{1}{3} u_2,_x - \frac{h_1}{6} w_1,_{xx} + \frac{h_2}{6} w_2,_{xx}\right];$$

$$M_{xz}^{(3)} = b \int_{-c}^{c} \sigma_{xz}^{(3)} z dz = \frac{b \tilde{n} G_3}{3} \left[w_1,_x - w_2,_x\right];$$

$$Q^{(3)} = b \int_{-c}^{c} \sigma_{xz}^{(3)} dz = b G_3 \left[u_1 - u_2 + \left(c + \frac{h_1}{2}\right) w_1,_{xx} + \left(c + \frac{h_2}{2}\right) w_2,_{xx}\right]. \tag{12}$$

Подставив выражения (11) в (12), получим

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_1,_{xx} - a_5 u_2,_{xx} + a_2 w_1,_x + a_3 w_2,_x - 2a_6 w_1,_{xxx} + a_7 w_2,_{xxx} = p;$$

$$-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_1,_{xx} - a_9 u_2,_{xx} - a_3 w_1,_x - a_2 w_2,_x - a_6 w_1,_{xxx} + 2a_7 w_2,_{xxx} = 0;$$

$$a_{10} u_1,_x - a_{17} u_2,_x + 2a_6 u_1,_{xxx} + a_6 u_2,_{xxx} + a_{11} w_1,_{xx} - a_{12} w_2,_{xx} + a_{15} w_1,_{xxxx} - a_{16} w_2,_{xxxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q + \frac{p_{1,x} h_1}{2};$$

$$-a_{18} u_1,_x + a_{19} u_2,_x - a_7 u_1,_{xxx} - 2a_7 u_2,_{xxx} - a_{12} w_1,_{xx} + a_{14} w_2,_{xx} - a_{16} w_1,_{xxxx} + a_{13} w_2,_{xxxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = 0,$$

где $a_i$ ($i$ =1, …, 19) – коэффициенты, характеризующие механические свойства и геометрию слоев стержня.

Численно исследуется поперечный изгиб свободно опертого трёхслойного несимметричного по толщине стержня. Для этого продольную нагрузку $p$ примем равной нулю. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$a_1u_1 - a_1u_2 - a_4u_{1,xx} - a_5u_{2,xx} + a_2w_{1,x} + a_3w_{2,x} - 2a_6w_{1,xxx} + a_7w_{2,xxx} = 0\,;$$

$$-a_1u_1 + a_1u_2 - a_5u_{1,xx} - a_9u_{2,xx} - a_3w_{1,x} - a_2w_{2,x} - a_6w_{1,xxx} + 2a_7w_{2,xxx} = 0\,;$$

$$a_{10}u_{1,x} - a_{17}u_{2,x} + 2a_6u_{1,xxx} + a_6u_{2,xxx} + a_{11}w_{1,xx} - a_{12}w_{2,xx} + a_{15}w_{1,xxxx} - a_{16}w_{2,xxxx} + a_8w_1 - a_8w_2 = q\,;$$

$$-a_{18}u_{1,x} + a_{19}u_{2,x} - a_7u_{1,xxx} - 2a_7u_{2,xxx} - a_{12}w_{1,xx} + a_{14}w_{2,xx} - a_{16}w_{1,xxxx} + a_{13}w_{2,xxxx} - a_8w_1 + a_8w_2 = 0. \qquad (13)$$

Решение ищем в виде

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right),$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right),$$

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right),$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right). \qquad (14)$$

Нагрузку $q$ также разлагаем в ряд синусов:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right),\; q_m = \frac{2q}{\pi m}\big(1-\cos(\pi m)\big). \quad (15)$$

После подстановки перемещений (14) и нагрузки (15) в (13), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} b_1U_{1m} + b_2U_{2m} + b_3W_{1m} + b_4W_{2m} = 0; \\ b_2U_{1m} + b_5U_{2m} + b_6W_{1m} - b_7W_{2m} = 0; \\ b_8U_{1m} + b_9U_{2m} + b_{10}W_{1m} + b_{11}W_{2m} = q_m; \\ b_{12}U_{1m} - b_{13}U_{2m} + b_{11}W_{1m} + b_{14}W_{2m} = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Коэффициенты $b_i$ выражаются через $a_i$ следующим образом:

$$b_1 = a_1 + a_4\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2;\; b_2 = -a_1 + a_5\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2;$$

$$b_3 = a_2\frac{\pi m}{l} + 2a_6\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;\; b_4 = a_3\frac{\pi m}{l} - a_7\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_5 = a_1 + a_9\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2;\; b_6 = -a_3\frac{\pi m}{l} + a_6\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_7 = a_2\frac{\pi m}{l} + 2a_7\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;\; b_8 = -a_{10}\frac{\pi m}{l} + 2a_6\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_9 = a_{17}\frac{\pi m}{l} + a_6\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_{10} = -a_{11}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{15}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8;$$

$$b_{11} = a_{12}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - a_{16}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 - a_8;$$

$$b_{12} = a_{18}\frac{\pi m}{l} - a_7\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_{13} = a_{19}\frac{\pi m}{l} + 2a_7\left(\frac{\pi m}{l}\right)^3;$$

$$b_{14} = -a_{14}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{13}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8.$$

Решая систему (16) любым из стандартных методов, получим коэффициенты разложения искомых перемещений в ряд.

Численный счет производился для пакета Д16Т – фторопласт – Д16Т. Толщины слоев $h_1$ = 0,02, $h_2$ = 0,04, $c$ = 0,09. Нагрузка принималась распределенной по всей длине стержня. Ее интенсивность $q$ = 1,5 МПа. На рисунке 1 показана сходимость рядов (14). Как видно из графика, для вычисления перемещений можно ограничиться первыми 10 членами ряда. Добавление к их сумме еще 90 слагаемых изменяет результат на 0,07 %. Рисунок 2 показывает изменение прогиба в несущих слоях вдоль оси стержня. Разность прогибов соответствует величине обжатия заполнителя, которая не превышает 0,6 %.

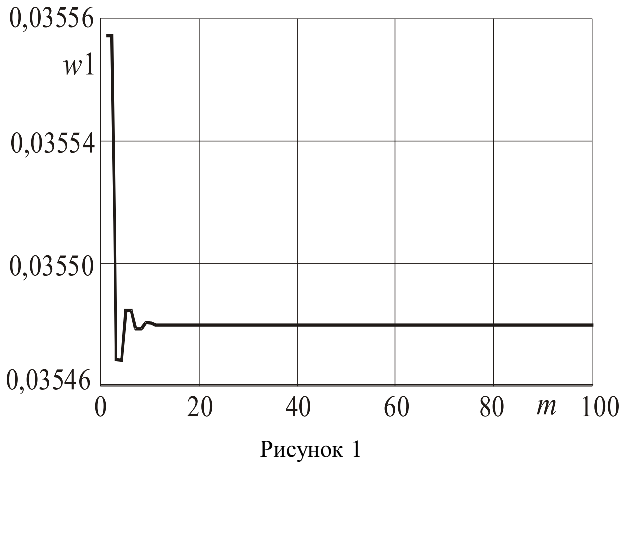


Рисунок 1

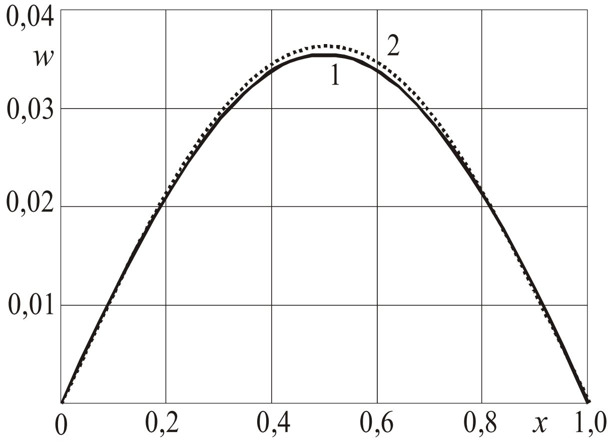


Рисунок 2

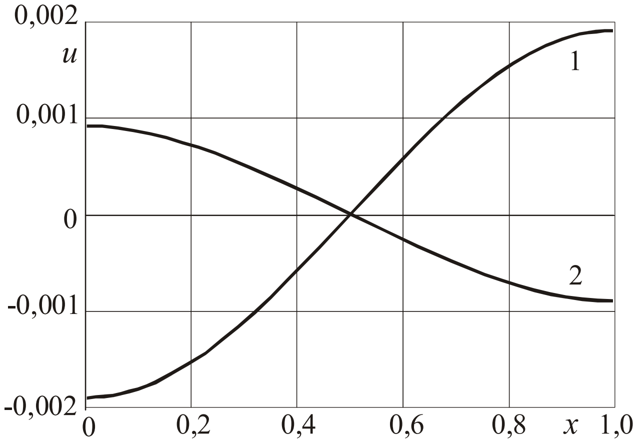


Рисунок 3

Кривые 1 и 2 на рисунке 3 показывают изменение горизонтальных перемещений в слоях 1 и 2 соответственно. Как видно, по середине стержня перемещения равны нулю, а у торцов – принимают максимальные значения.

**Список литературы**


1 *Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня // Материалы, технологии, инструменты. – 1998. Т. 3, № 4. – С. 36–39.

2 *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке // Изв РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 79–85.

3 *Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Леоненко Д. В.* Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

4 *Старовойтов Э. И.* Основы теории упругости и пластичности. – Гомель: БелГУТ, 2001. – С. 344.



Получено 11.10.2002



**Gu Yu.** The bending of a sandwich beam with compressible filler.

The bending of an elastic sandwich beam with the filler compressible in thickness is considered. The hypothesis of the broken line is accepted to describe the packet. The equilibrium equations system and its solutions in displacements is obtained. The numerical analysis is carried out.