УДК 539.3

С. А. ОРЛОВ, аспирант; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Предложена постановка краевой задачи о термовязкоупругопластическом изгибе трехслойной кольцевой пластины. Получено аналитическое решение в итерациях и проведена его численная реализация.

Объект исследований – несимметричная по толщине кольцевая трехслойная пластина, наружные несущие слои которой выполнены из металла, несжимаемый по толщине внутренний слой (заполнитель) – полимер. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

Постановка и решение краевой задачи термовязкоупругопластичности. Цилиндрическая система координат r, φ, z связывается со срединной плоскостью заполнителя, ось z направлена ей перпендикулярно вверх.

Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее внешнему радиусу r_1, силовые характеристики – к 1 Па. На торцах пластины предполагается наличие жесткой теплоизолирующей диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют ($u_\varphi^{(k)} = 0$), а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ, т. е. $w = w(r, t)$, $\psi = \psi(r, t)$ $u = u(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми.

Пусть в начальный момент времени на пластину, находящуюся в естественном состоянии, начинает действовать тепловой поток интенсивностью q_t в направлении, противоположном внешней нормали. Обозначим проекции внешней распределенной нагрузки на вертикальную и радиальную оси координат через q и p соответственно. На границах могут быть заданы внешние усилия $N'^{(k)}_{\alpha\beta 0}, Q'^{(k)}_{\alpha 0}, M'^{(k)}_{\alpha\beta 0}$ (α, $\beta = r$, φ). Через $k = 1, 2, 3$ обозначен номер слоя.

Предполагается, что в процессе деформирования материалы несущих слоев могут проявлять вязкоупругопластические свойства. Для их описания используем наследственные соотношения термовязкоупругопластичности [1]:

$$S_\alpha^{(k)} = 2G_k(T)\Big(f_1^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)},T)\,э_\alpha^{(k)} - \int_0^t R_k(t-\tau) f_2^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)},T)\,э_\alpha^{(k)}(\tau)\,d\tau\Big),$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T), \ (k = 1,2), \tag{1}$$

где $S_\alpha^{(k)}, э_\alpha^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций соответственно; $f_1^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)},T) = 1 - \omega_1^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)},T)$ – функция пластичности материала k-го слоя, которую при $\varepsilon_u^{(k)} = \varepsilon_т^{(k)}(T^{(k)})$ следует положить равной единице; $\varepsilon_u^{(k)}$, $\varepsilon_т^{(k)}(T^{(k)})$ – интенсивность деформаций и деформационный предел текучести материала k-го слоя; $f_2^{(k)}(\varepsilon_u,T)$ – универсальная функция нелинейной ползучести; $R_k(t)$ – ядро релаксации; α_{0k} – осредненный коэффициент линейного температурного расширения; T – неоднородное и нестационарное температурное поле, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0; $G_k(T), K_k(T)$ – модули сдвига и объемного деформирования, линейно зависящие от температуры (формула Дж. Ф. Белла [2]). Объемное деформирование в слоях считаем упругим.

В физически нелинейном вязкоупругом заполнителе учитывается влияние вида напряженного состояния:

$$\varphi_1(\sigma^{(3)},T)S_{\alpha\beta}^{(3)} = 2G_3\Big(f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)},T)\,э_{\alpha\beta}^{(3)} - \int_0^t R_3(t-\tau) f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})\,э_{\alpha\beta}^{(3)}(\tau)\,d\tau\Big),$$

$$\varphi_2(\sigma^{(3)},T)\sigma^{(3)} = 3K_3(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}T), \tag{2}$$

где $f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)},T) = 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)},T), \varphi_n(\sigma^{(3)},T)$ – универсальные функции, описывающие физическую нелинейность полимерного заполнителя (n = 1, 2), причем $f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)},T) = 1$ при $\varepsilon_u < \varepsilon_s$; $S_{\alpha\beta}^{(3)}, э_{\alpha\beta}^{(3)}$, $\sigma^{(3)}, \varepsilon^{(3)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций соответственно; $R_3(t)$ – ядро релаксации материала заполнителя;

α_{03} – осредненный коэффициент линейного температурного расширения; G_3, K_3 – модули сдвига и объемного деформирования.

Для составления алгоритма решения задачи выделим в компонентах тензора напряжений линейную (индекс "e") и нелинейную (индекс "ω") составляющие:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)};\ \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)};$$
$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k Э_\alpha^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)};\ \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 Э_{rz}^{(3)}.$$

Нелинейные составляющие напряжений в соответствии с формулами (1), (2) для несущих слоев имеют вид (k = 1, 2; $\alpha = r, \varphi$):

$$\sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k(T)\Big(\omega_1^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T\ )Э_\alpha^{(k)} -$$
$$-\int_0^t R_k(t-\tau, T) f_2^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T\ )Э_\alpha^{(k)}(\tau)\, d\tau\Big) + 3K_k \alpha_{0k} T.$$

В заполнителе

$$\sigma_{\alpha\omega}^{(3)} = 2G_3(\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, T)Э_\alpha^{(3)} -$$
$$-\int_0^t R_3(t-\tau) f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})Э_\alpha^{(3)}(\tau)d\tau) +$$
$$+ 3K_3\alpha_{03}T + \omega_1^{(3)}S_\alpha^{(3)} + \omega_2^{(3)}\sigma^{(3)};$$
$$\sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\,(\omega^{(3)}\,(\varepsilon_u^{(3)}, T)Э_{rz}^{(3)} -$$
$$-\int_0^t R_3\,(t-\tau) f^{(3)}\,(\varepsilon_u^{(3)})Э_{rz}^{(3)}\,(\tau)d\tau) + \omega_1^{(3)} S_{rz}^{(3)},$$
$$\omega_\gamma^{(3)} = \varphi_\gamma(\sigma^{(3)}) - 1,\ (\gamma = 1, 2).$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в итерациях, описывающая вязкоупругопластическое деформирование трехслойной пластины при нагружении из естественного состояния, формально совпадает с приведенной в [3]:

$$L_2(a_1 u^n + a_2\psi^n - a_3 w,_r^n) = -p + p_\omega^{n-1};$$
$$L_2(a_2 u^n + a_4\psi^n - a_5 w,_r^n) - 2cG_3\psi^n = h_\omega^{n-1};$$
$$L_3(a_3 u^n + a_5\psi^n - a_6 w,_r^n) = -q + q_\omega^{n-1}, \quad (3)$$

где a_i – коэффициенты, зависящие от геометрических и упругих параметров материалов слоев, вычисляются по известным формулам [3], однако входящие в них упругие параметры здесь зависят от температуры; $L_2(g), L_3(g)$ – дифференциальные операторы,

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2};$$
$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\big(rL_2(g)\big),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Величины p_ω^{n-1}, h_ω^{n-1}, q_ω^{n-1} называют "дополнительными" внешними нагрузками и на первом шаге (n = 1) полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения:

$$p_\omega^{n-1} = T_{r\omega}^{n-1},_r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{n-1} - T_{\varphi\omega}^{n-1});$$
$$h_\omega^{n-1} = H_{r\omega}^{n-1},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{n-1} - H_{\varphi\omega}^{n-1}) - Q_\omega^{n-1};$$
$$q_\omega^{n-1} = M_{r\omega}^{n-1},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{n-1},_r - M_{\varphi\omega}^{n-1},_r),$$

где

$$T_{\alpha\omega}^{n-1} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\omega}^{(k)n-1} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha\omega}^{(k)n-1}dz;$$
$$M_{\alpha\omega}^{n-1} \equiv \sum_{k=1}^{3} M_{\alpha\omega}^{(k)n-1} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha\omega}^{(k)n-1}z\,dz;$$
$$H_{\alpha\omega}^{n-1} = M_{\alpha\omega}^{(3)n-1} + c\left(T_{\alpha\omega}^{(1)n-1} - T_{\alpha\omega}^{(2)n-1}\right);$$
$$Q_\omega^{n-1} = \int_{-c}^{c}\sigma_{rz}^{(3)n-1}dz;\ (\alpha = r, \varphi).$$

При указанных условиях теплообмена температурное поле неоднородно только по толщине пластины, соответствующий расчет приведен в литературе [1]. Здесь, при вычислении упругих параметров температурное поле усредняется по толщине каждого слоя:

$$T_0^{(k)}(t) = \frac{1}{h_k}\int_{h_k} T^{(k)}(z, t)\,dz,$$

$$G^{(k)}(T^{(k)}) \equiv G^{(k)}(T_0^{(k)});\ K^{(k)}(T^{(k)}) \equiv K^{(k)}(T_0^{(k)}).$$

Таким образом, итерационное решение рассматриваемой задачи о деформировании кольцевой вязкоупругопластической пластины при нагружении из естественного состояния будет следующим:

$$u^n = \frac{a_3}{a_1}w^n,_r - \frac{a_2}{a_1}\psi^n - \frac{1}{a_1}L_2^{-1}(p - p_\omega^{n-1}) + \frac{C_7^n r}{2} + \frac{C_8^n}{r};$$
$$\psi^n = C_2^n I_1(\beta r) + C_3^n K_1(\beta r) - K_1(\beta r)\int I_1(\beta r) f^n(r)\,r dr +$$
$$+ I_1(\beta r)\int K_1(\beta r) f^n(r)\,r dr,$$
$$f^n(r) = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2}\left[h_\omega^{n-1} + (p - p_\omega^{n-1})\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} +\right.$$
$$\left. + \frac{b_2}{b_3 r}\int (q - q_\omega^{n-1})\,r dr\right] - \frac{b_2 C_1^n}{r(b_1 b_3 - b_2^2)};$$

$$w^n = \frac{b_2}{b_3}\int \psi^n dr - \frac{a_3}{b_3 a_1}\int L_2^{-1}(p - p_\omega^{n-1})dr - \frac{C_1^n r^2}{4b_3}(\ln r - 1) +$$
$$+\frac{1}{b_3}\int L_3^{-1}(q - q_\omega^{n-1})dr + \frac{C_5^n r^2}{4} + C_6^n \ln r + C_4^n,$$

где $I_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка; $K_1(\beta r)$ – функция Макдональда первого порядка; параметры β, b_i формально совпадают с приведенными в [3]; L_2^{-1}, L_3^{-1} – линейные интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (3),

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r}\int r \int f\,dr\,dr; \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r}\int r \int \frac{1}{r}\int r f\,dr\,dr\,dr .$$

Константы интегрирования $C_1^n ... C_8^n$ следуют из граничных условий на внешнем и внутреннем контурах. Например, в случае заделки обоих контуров они являются решением системы из восьми линейных уравнений

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \text{ при } r = r_0 \text{ и } r = 1,$$

и определяются соотношениями, полученными в [4].

Численные результаты. Получены для трехслойной кольцевой пластины, заделанной на внешнем и внутреннем контурах. Материал несущих слоев – дюралюминий, заполнитель – фторопласт. Теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем (в силу его тонкости и малой теплоемкости) и считаем его температуру равной температуре заполнителя в месте склейки: $T^{(1)} = T^{(3)}(c,t)$. Подобным образом поступаем с температурой внутреннего слоя: $T^{(2)} = T^{(3)}(-c,t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t, идет на нагревание заполнителя.

Величина нагрузки ($q = 3{,}0\cdot 10^7$), интенсивность теплового потока (q_t = 5000 Дж/(м^2·с)), время их воздействия (t_0 = 10 мин) и относительные толщины слоев ($h_1 = h_2 = 0{,}04$, $h_3 = 0{,}4$) подбирались таким образом, чтобы нелинейные, теплофизические и реономные свойства материалов проявились в достаточной степени. Аналитический вид материальных функций физической нелинейности, экспериментальные параметры и константы материалов заимствованы в [1].

Численная реализация решения показала практическую сходимость метода последовательных приближений. За искомое решение принято 13-е приближение, его отличие от предыдущего составляет менее 1 %.

Учет упругопластических, нелинейных и реономных свойств материалов несущих слоев и заполнителя приводит при температурном воздействии к увеличению расчетного упругого прогиба на 101 % (кривые *1*, *4* на рисунке 1).

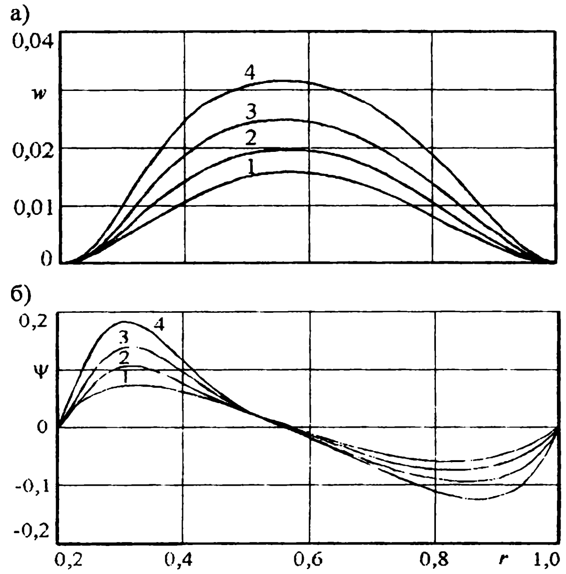

Рисунок 1 – Изменение прогиба (*а*) и относительного сдвига в заполнителе (*б*) по радиусу пластины:
1 - упругая пластина; 2 – упругопластическая пластина;
3 –термоупругопластическая пластина;
4 – термовязкоупругопластическая пластина

Из рисунка 2 видно, что уточнение физических уравнений состояния рассчитываемой модели влечет за собой увеличение областей пластических деформаций в несущих слоях и областей нелинейности в заполнителе. Воздействие температурного поля приводит к тому, что 1-й несущий слой полностью деформируется пластично (рисунок 2, *б*, *в*).

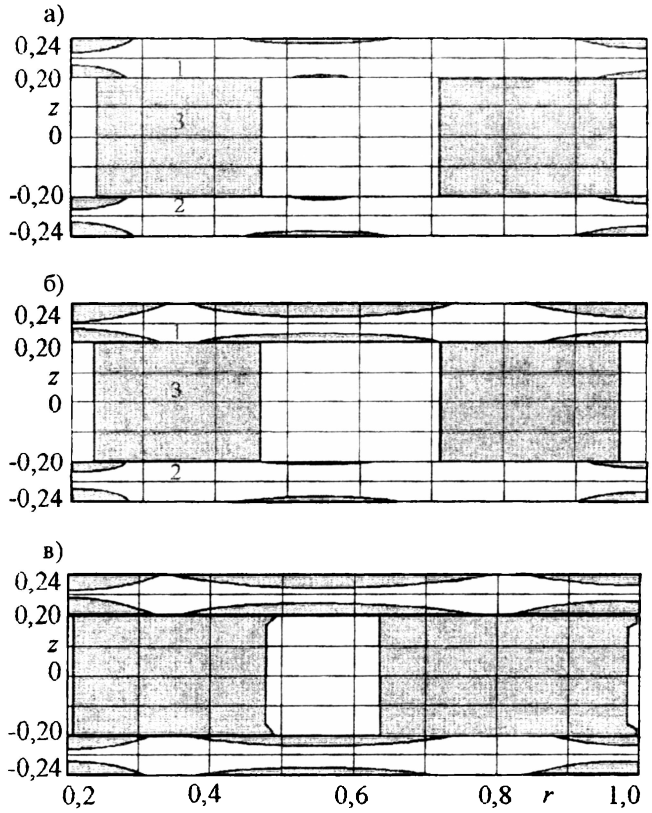

Рисунок 2 – Области пластичности в несущих слоях (*1*, *2*) и физической нелинейности в заполнителе (*3*):
а – упругопластическая пластина; *б* –термоупругопластическая пластина; *в* – вязкотермоупругопластическая пластина

Вывод. Учет температуры, нелинейных и реономных свойств материалов слоев вносит существенные поправки в соответствующие расчеты трехслойных элементов конструкций.

Список литературы

1 *Старовойтов Э. И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 343 с.

2 *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. – М.: Наука, 1984. – 1027 с.

3 *Орлов С. А.* Упругопластический изгиб трехслойной кольцевой пластины // Материалы, технологии, инструменты. – 2001. – № 4. – Т.6. – С. 20–23.

4 *Старовойтов Э. И., Орлов С. А.* Изгиб трехслойной кольцевой пластины // Вопросы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 48–52.

Получено 31.01.2002

S. A. Orlov Thermoviscoelastoplastic bending of sandwich ring plate.
A formulation of boundary problem of thermoviscoelastoplastic bending of sandwich ring shaped plate is given. Analytical decision is received in iterations. Numeric realization of solution is made.

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2002. № 1 (4)

УДК 625.143.482

С. И. ЖОГАЛЬ, кандидат технических наук; В. И. МАТВЕЦОВ, кандидат технических наук;
С. А. ВАЩЕНКО, ассистент; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА РАВНОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается методика исследования вынужденных колебаний балок с помощью асимптотических методов нелинейной механики, аппарата теории марковских диффузионных процессов и уравнений Колмогорова-Фокера-Планка (КФП), а также перспективы применения указанной методики к исследованиям колебаний рельсовой плети бесстыкового пути как балки, лежащей на сплошном упругом основании и совершающей вынужденные случайные колебания в результате взаимодействия с подвижным составом.

Железнодорожный путь, состоящий из рельсов, скреплений, шпал и балласта, по характеру своей работы можно условно считать балкой бесконечной длины, лежащей на сплошном упругом основании. При этом, с достаточной для рассуждения точностью подрельсовое основание, балласт и земляное полотно условно рассматриваются как сплошное упругое основание. В процессе эксплуатации железнодорожного пути как при его взаимодействии с подвижным составом, так и в процессах, обусловленных постоянным воздействием на путь природно-климатических факторов (в первую очередь, сезонных и суточных изменений температуры рельсов в пути), достаточно актуальной является проблема поиска путей прогнозирования надёжности его работы, основанных на применении современных методов математического моделирования. Среди традиционных конструкций железнодорожного пути наибольший интерес для исследований представляет бесстыковой путь со сварными рельсовыми плетями длиной на блок-участок, перегон и более. Эта конструкция является наиболее экономически перспективной и отвечает возможности реализации высоких скоростей движения пассажирских поездов. Кроме того, в данной конструкции особенно остро могут проявить себя все неблагоприятные эксплуатационные и климатические факторы. Эти факторы обуславливают возникновение в рельсовых плетях бесстыкового пути внутренних сжимающих или растягивающих усилий, которые могут в конечном итоге привести соответственно к резкому искривлению рельсошпальной решётки в горизонтальной или вертикальной плоскости (выброс пути) или к разрыву рельсовых плетей или стыковых болтов в стыках уравнительных пролётов. Особенно актуальной является проблема предотвращения выброса бесстыкового пути впереди тормозящего поезда.

Вышеуказанные причины и обусловили применение математических методов с целью более полного и всестороннего учёта всех возможных действующих на путь неблагоприятных эксплуатационных и природно-климатических факторов с целью прогнозирования и обоснования разработки мероприятий по предотвращению возникновения этих ситуаций.

В рамках данной статьи рассматривается методика исследования случайных колебаний балок и