УДК 539.3

ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

С. Г. ПШЕНИЧНОВ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

В современном производстве широко используются материалы, обладающие вязкоупругими свойствами. В элементах конструкций из таких материалов могут происходить различные динамические процессы, изучение которых представляется весьма актуальным. Одним из важных направлений в данной области являются аналитические исследования, однако ввиду математической сложности количество работ, посвященных решению соответствующих динамических задач, даже в одномерной постановке относительно невелико. Изложение основных методов, используемых при исследовании как нестационарных динамических задач рассматриваемого класса, так и задач о собственных колебаниях можно найти, например, в публикациях [1–7]. Целью данной работы является изучение вопросов, связанных с процессом свободных колебаний линейно-вязкоупругих тел.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях однородного линейно-вязкоупругого тела, занимающего область Ω с границей Σ. Будем считать, что в отсутствие объемных сил и граничных воздействий тело совершает колебания спустя такое время после их начала, когда характер колебаний уже не зависит от способа их возбуждения. Область изменения пространственных координат в рамках одномерной, двумерной, или трехмерной постановок соответствующих стационарных динамических задач предполагается ограниченной. Согласно известному подходу к задачам рассматриваемого класса, нижний предел интегрирования в соотношениях Больцмана – Вольтерра примем равным минус бесконечности. Математическую постановку такой задачи составляют уравнение динамики

$$(\breve{\lambda}+\breve{\mu})\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)+\breve{\mu}\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)\,, \tag{1}$$

определяющие соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t)=2\breve{\mu}\operatorname{def}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)+\breve{\lambda}\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\;\tilde{\mathbf{I}},\qquad \mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)\in\Omega\,, \tag{2}$$

и граничные условия, записанные в обобщенном виде

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}+\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}\,,\qquad \mathbf{x}\in\Sigma\,, \tag{3}$$

где $\breve{\lambda}$ и $\breve{\mu}$ – операторы вида

$$\breve{\lambda}=\frac{1}{3}[3K_0(1-\breve{T}_V)-2G_0(1-\breve{T}_s)],\quad \breve{\mu}=G_0(1-\breve{T}_s), \tag{4}$$

$$\breve{T}_j\,\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}T_j\,(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau=\int_0^{\infty}T_j\,(\vartheta)\xi(t-\vartheta)\,d\vartheta,\qquad j=\mathrm{V},s.$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напряжений; $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\mathbf{n}$ – единичная внешняя нормаль; ρ – плотность; Δ – оператор Лапласа; $\tilde{\mathbf{I}}$ – единичный тензор; G_0, K_0 – мгновенные значения модулей сдвига и объемного сжатия; $T_V(t)$, $T_s(t)$ – ядра объемной и сдвиговой релаксации; $\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ – заданные тензоры, определяющие тип граничных условий; точка над переменной обозначает производную по времени t.

Представив нетривиальное решение задачи (1–4) в форме

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{V}(\mathbf{x},s)\,e^{st},\qquad s\in C\,,$$

получим спектральную задачу, включающую в себя векторное уравнение

$$(\Lambda(s)+\mathrm{M}(s))\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}(\mathbf{x},s)+\mathrm{M}(s)\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x},s)-\rho s^2\mathbf{V}(\mathbf{x},s)=\mathbf{0}\,,\qquad \mathbf{x}\in\Omega \tag{5}$$

и однородные граничные условия обобщенного вида

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x},s)\mathbf{n}+\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x},s)=\mathbf{0},\qquad \mathbf{x}\in\Sigma\,, \tag{6}$$

где

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x},s)=2\mathrm{M}(s)\,\mathrm{def}\,\mathbf{V}(\mathbf{x},s)+\Lambda(s)\mathrm{div}\,\mathbf{V}(\mathbf{x},s)\tilde{\mathbf{I}},\quad \Lambda(s)=\frac{1}{3}[3K_0(1-\Theta_V(s))-2G_0(1-\Theta_s(s))],\quad \mathrm{M}(s)=G_0(1-\Theta_s(s)),$$

при этом $\Theta_V(s),\ \Theta_s(s)$ – Лапласовы трансформанты ядер $T_V(t),\ \ T_s(t)$, получающиеся в результате применения к этим ядрам интегрального преобразования Лапласа. Собственные значения $s\in C$ задачи (5), (6) определяют частоты и коэффициенты затухания свободных колебаний вязкоупругого тела. Обозначим S_* множество всех собственных значений этой задачи.

Если представить перемещение через скалярный и векторный потенциалы $\boldsymbol{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{grad}\varphi(\mathbf{x},\mathrm{t})+$ $+\,\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},\mathrm{t})$, а затем записать спектральную задачу в потенциалах, то будет видно, что ее особыми точками заведомо будут корни уравнений

$$1-\Theta(s)=0,\quad 1-\Theta_s(s)=0, \tag{7}$$

где $\Theta(s)$ – Лапласова трансформанта функции $T(t)=[(1+\nu_0)T_V(t)+2(1-2\nu_0)T_s(t)]/[3(1-\nu_0)]$, при этом ν_0 – мгновенное значение коэффициента Пуассона.

Рассмотрен случай, когда оба ядра $T_V(t)$, $T_s(t)$ принадлежат множеству функций класса:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\exp(-b_nt),\quad 0\le\sum_{n=1}^{N}a_n/b_n<1,\quad b_n>0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots N), \tag{8}$$

Лапласовы трансформанты которых имеют вид $F(s)=\sum_{n=1}^{N}a_n/(s+\ b_n)$.

Для функций класса (8) доказано следующее утверждение. Если $a_n>0$ для каждого $n=1,\ 2,\ \ldots,\ N$, то все корни уравнения $1-F(s)=0$ однократны и действительны, причем отрицательны.

В рамках принятого допущения о принадлежности обоих ядер классу (8) рассмотрен частный случай, когда граничные условия имеют вид

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}=\mathbf{0}\quad(\mathbf{x}\in\Sigma_1),\qquad \mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}\ \ (\mathbf{x}\in\Sigma_2),$$

и, кроме того, $T_V(t)=T_s(t)=T(t)$, т. е. коэффициент Пуассона не зависит от времени $\nu=\nu_0$ (const). В этом случае корни уравнения $1-\Theta(s)=0$ являются конечными предельными точками спектра S_*, а сами элементы множества S_* находятся с помощью простого алгоритма, если известен соответствующий спектр для линейно-упругого тела (в отсутствие вязкости).

Для более общего случая, когда коэффициент Пуассона зависит от времени и при этом оба наследственных ядра $T_V(t),\ \ T_s(t)$ принадлежат классу (8), а все корни уравнений (7) однократны и действительны, предложен алгоритм отыскания элементов множества S_* на основе гипотезы о структуре этого множества.

Применение алгоритмов построения спектра для указанных случаев продемонстрировано на конкретных примерах вязкоупругого слоя и цилиндра.

Список литературы

1 **Егорычев, О. А.** Нормальный удар по торцу цилиндрической оболочки / О. А. Егорычев, О. И. Поддаева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006. – № 1. – С. 34–36.

2 **Желтков, В. И.** Переходные функции в динамике вязкоупругих тел / В. И. Желтков, Л. А. Толоконников, Н. Г. Хромова //Доклады РАН. – 1993. – Т. 329. – № 6. – С. 718–719.

3 **Ильясов, М. Х.** Нестационарные вязкоупругие волны / М. Х. Ильясов. – Баку. – 2011. – 330 с.

4 **Лычева, Т. Н.** Спектральные разложения в динамических задачах вязкоупругости / Т. Н. Лычева, С. А. Лычев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 120–150.

5 **Филиппов, И. Г.** Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней / И. Г. Филиппов, В. Г. Чебан. – Кишинев : Штиинца, 1988. – 190 с.

6 **Шамаев, А. С.** Асимптотика спектра одномерных собственных колебаний в среде из слоев вязкоупругого материала и вязкой жидкости / А. С. Шамаев, В. В. Шумилова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2019. – № 6. – С. 12–24. – DOI**:** 10.1134/S0568528119060100.

7 **Colombaro, I.** On the propagation of transient waves in a viscoelastic Bessel medium / I.Colombaro, A. Giusti, F. Mainardi // Math. Phys. – 2017. – 68: 62. – DOI: 10.1007/s00033-017-0808-6.