Здесь величина θ_* есть решение следующего уравнения:

$$\frac{d\tau_{\theta z}(\theta)}{d\theta} = 0 .$$

Максимальное значение функции $\tau_{z\theta}(\theta)$ находится обычными методами дифференциального исчисления. Для построения недостающих уравнений требуем минимизации максимального значения функции $\tau_{z\theta}$ вдоль контура L

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0,2\pi]} \tau_{\theta z}(\eta, \theta) . \qquad (10)$$

Необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия, т. е. выполнялся минимаксный критерий (10) при ограничениях

$$\tau_{z\theta} \le [\tau]. \qquad (11)$$

Здесь $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение, определяемое опытным путем.

Следует распорядиться функцией $H(\theta)$ таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения $\tau_{z\theta}$. Требуется найти такие значения коэффициентов α_k, β_k, которые удовлетворяют полученной системе уравнений и обращают в минимум линейную функцию $\max\tau_{z\theta}$ (целевую функцию).

Система уравнений (11) совместно с полученными соотношениями задачи теории упругости в нулевом и первом приближениях позволяет определить оптимальную форму отверстия, напряженно-деформированное состояние тела.

Рост трещины продольного сдвига происходит по направлению максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ [3]. Таким направлением является продолжение трещины ($\theta = 0$). Следовательно, как только напряжение $\tau_{z\theta}$ окажется равным некоторой предельной величине τ_c, характерной для данного материала, трещина продольного сдвига будет расти. Таким образом, условием хрупкого разрушения будет

$$\tau_{z\theta}(K_{\mathrm{III}}) = \tau_c. \qquad (12)$$

Согласно условию (12) трещина будет расти, как только коэффициент интенсивности напряжений K_{III} (параметр нагружения) достигает некоторой критической величины, при которой оптимальное значение напряжения оказывается равной предельной величине τ_c. Величина τ_c является характерной для данного материала и зависит от характерного размера отверстия в кончике трещины и прочности материала.

Список литературы

1 **Финкель, В. М.** Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М. : Металлургия, 1977. – 360 с.

2 **Мирсалимов, В. М.** Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. –124 с.

3 **Баренблатт, Г. И.** О хрупких трещинах продольного сдвига / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1110–1119.

УДК 539.3

ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ НА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ КРУГЛУЮ ПЛАСТИНУ

А. В. НЕСТЕРОВИЧ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Применение многослойных конструкций, в частности трехслойных, широко распространено в различных отраслях. Статическое и динамическое деформирование трехслойных стержней и пластин на основании Пастернака рассмотрено в статьях [1, 2]. В работе [3] исследуется изгиб упругопластической пластины со сжимаемым заполнителем. В статье [4] показан изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании. Неосесимметричному деформированию упругих трехслойных круговых пластин посвящены работы [5–9]. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости рассмотрено в [10].

Рассматривается неосесимметричное изотермическое деформирование физически нелинейной трехслойной круговой пластины в своей плоскости, закрепленной по контуру. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной со срединной плоскостью заполнителя, к которой приложена непрерывно распределенная нагрузка, проекции которой на оси координат: p_r (r, φ), p_φ (r, φ). Предполагается, что в процессе деформирования материалы несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругий.

Для решения задачи используется метод последовательных линейных приближений. Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина с учетом температуры:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k\left(T_k\right)\left(1-\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k\right)\right)Э_{\alpha\beta}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k\left(T_k\right)\left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)}\Delta T_k\right) \quad (\alpha, \beta = r, \varphi;\ k = 1, 2, 3),$$

где $\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k\right)$ – функции пластичности Ильюшина для несущих слоев; $\omega_3\left(\varepsilon_u^{(3)}, T_k\right)$ – универсальная функция нелинейности заполнителя; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций.

Система дифференциальных уравнений равновесия в итерационном виде:

$$\mathrm{L}_2\left(u_r^{(n)}\right) + \frac{a_3}{a_1 x^2}u_r^{(n)},_{\varphi\varphi} + \frac{a_2+a_3}{a_1 x}u_\varphi^{(n)},_{\varphi x} - \frac{a_1+a_3}{a_1 x^2}u_\varphi^{(n)},_\varphi = \frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}\right),$$

$$\mathrm{L}_2\left(u_\varphi^{(n)}\right) + \frac{a_2+a_3}{a_3 x}u_r^{(n)},_{x\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2}u_\varphi^{(n)},_{\varphi\varphi} + \frac{a_1+a_3}{a_3 x^2}u_r^{(n)},_\varphi = \frac{r_0^2}{a_3}\left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}\right), \qquad (1)$$

где L_2 – оператор Бесселя; r_0 – радиус пластины; x – безразмерная радиальная координата; $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ – дополнительные нагрузки; a_i – коэффициенты, зависящие от температуры и определяемые через геометрические и упругие характеристики материалов слоев; n – номер приближения; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования.

Искомые перемещения системы (1), внешние и дополнительные нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды Фурье. Общее решение системы (1) представляется в виде суммы общего решения, соответствующей однородной системы, и некоторого частного решения неоднородной $u_{rm}^{(1)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(1)(n)*}$, $u_{rm}^{(2)(n)*}$, $u_{\varphi m}^{(2)(n)*}$.

Асимметричные составляющие перемещений при m-х гармониках на n-м шаге будут следующими:

$$u_{rm}^{(1)(n)} = -C_{m1}^{(n)}x^{m-1} + C_{m2}^{(n)}h_{m1}x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)}h_{m2}x^{m+1} + u_{rm}^{(1)(n)*},$$

$$u_{\varphi m}^{(2)(n)} = C_{m1}^{(n)}x^{m-1} + C_{m2}^{(n)}x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)}x^{m+1} + u_{\varphi m}^{(2)(n)*},$$

$$u_{rm}^{(2)(n)} = C_{m5}^{(n)}x^{m-1} - C_{m6}^{(n)}h_{m1}x^{-m+1} - C_{m7}^{(n)}x^{-m-1} - C_{m8}^{(n)}h_{m2}x^{m+1} + u_{rm}^{(2)(n)*},$$

$$u_{\varphi m}^{(1)(n)} = C_{m5}^{(n)}x^{m-1} + C_{m6}^{(n)}x^{-m+1} + C_{m7}^{(n)}x^{-m-1} + C_{m8}^{(n)}x^{m+1} + u_{\varphi m}^{(1)(n)*}, \qquad (2)$$

где $C_{m1}^{(n)}, \ldots, C_{m8}^{(n)}$ – константы интегрирования.

Частные решения в системе (2) зависят от вида коэффициентов разложения нагрузок в ряды Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Т20РМ-047).

Список литературы

1 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

2 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня на основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2018. – Т. 15, № 3. – С. 32–38.

3 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – № 1 (26). – С. 58–73.

4 **Яровая, А. В.** Изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании погонными нагрузками / А. В. Яровая // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 212–217.

5 **Старовойтов, Э. И.** Неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 38–45.

6 **Старовойтов, Э. И.** Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – № 1 (27). – С. 17–30.

7 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр.– Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

8 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.

9 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

10 **Нестерович, А. В.** Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр.– Гомель : БелГУТ, 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРЕВЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. ОРЕХОВ, Л. Н. РАБИНСКИЙ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Производство изделий различной геометрии и назначения методами аддитивных технологий сейчас широко применяется в различных отраслях промышленности, а разнообразие металлов и технологий печати позволяет перейти от прототипирования к созданию реальных изделий, конструкций и их элементов. Из-за особенностей процесса аддитивного производства от традиционного физико-механические характеристики одной и той же детали, произведенной тем или иным методом, могут отличаться. Так как в процессе трехмерной печати металлом на относительно холодную поверхность материала действует подвижный источник с высокой энергией, то это создает большие температурные градиенты, что приводит к тепловому расширению материала и возникновению температурных напряжений и пластических деформаций.

Решена задача о нагреве полупространства подвижным источником лазерного излучения с учетом теплоотдачи на поверхности. Полагается, что среда, заполняющая полупространство, характеризуется удельной теплоемкостью, плотностью и коэффициентом теплопроводности. Среда является однородной и изотропной, а также отсутствуют объемные источники тепла. Распределение теплового потока по поверхности полупространства подчиняется закону распределения Гаусса.

Представлены результаты численно-аналитического расчета распределения температуры как по поверхности вдоль траектории движения подвижного источника тепла, так и по глубине полупространства для различных вариантов стратегии сканирования, положения лазерного пятна и времени. Эти результаты показали хорошую согласованность с результатами численного расчета в программном комплексе конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00517.