$$\nu_{12}=\nu_{13}=V\nu_f+(1-V)\nu_m,\quad \nu_{21}=\nu_{31}=E_2/E_1\ \nu_{12},\quad \nu_{23}=\nu_{32}=1-\nu_{21}-E_2/(3K),$$

где $K=K_f K_m/(VK_m+(1-V)K_f)$, $K_f=E_f/(3-6\nu_f)$, $K_m=E_m/(3-6\nu_m)$; индексы f и m обозначают волокно и матрицу соответственно; V – объемное содержание волокна в матрице материала; K_f, K_m – объемные модули упругости волокна и матрицы.

Данная зависимость легко преобразуется в формулу для определения контактного сближения изотропного цилиндра при $\beta_1=\beta_2$ и имеет вид [1, 7]

$$v_1=-\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}P\left[\ln\frac{a}{2q}+\frac{\nu}{2(1-\nu)}\right].$$

Сближение двух контактирующих зубьев δ, мм, представляет собой сумму контактных перемещений каждого зуба.

Список литературы

1 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 280 с.

2 **Можаровский, В. В.** Расчет изгибных перемещений зубьев зубчатых колес из композитов / В. В. Можаровский, М. В. Москалева, Д. С. Кузьменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – No. 4(41). – С. 59–65.

3 **Rahate, Harshal P.** Contact Stress Analysis of Composite Spur Gear using Photo-Stress Method and Finite Element Analysis / Harshal P. Rahate, R. A. Marne // International Research Journal of Engineering and Technology. – 2016. – No. 7. – P. 540–545.

4 **Pawar, P. B.** Analysis of Composite Material Spur Gear under Static Loading Condition / P. B. Pawar, Abhay A. Utpat // Materials Today: Proceedings. – 2015. – P. 2968–2974.

5 **Hossan, M. R.** Strength evaluation of polymer composite spur gear by finite element analysis / M. R Hossan, Z. Hu // International Mechanical Engeneering Congress and Exposition, Boston. – 2008. – P. 1–8.

6 Contact Stress Analysis of Stainless Steel Spur Gears using Finite Element Analysis and Comparison with Theoretical Results using Hertz Theory / M. J. Khan [et al.] // Int. J. of Engineering Research and Applications. – 2015. – Vol. 5, no. 5. – P. 10–18.

7 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

8 **Autear, K. K.** Mechanics of Composite Materials / K. K. Autear ; Taylor & Francis Group. – 2nd ed. – Boca Raton, Florida, 2006. – 473 p.

9 **Иосилевич, Г. Б.** Детали машин : учеб. для студентов машиностроит. спец. вузов / Г. Б. Иосилевич. – М. : Машиностроение, 1988. – 368 с.

10 **Белый, В. А.** Металлополимерные зубчатые передачи / В. А. Белый, В. Е. Старжинский, С. В. Щербаков. – Минск : Наука и техника, 1981. – 352 с.

УДК 539.375

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ОТВЕРСТИЯ ДЛЯ ОСТАНОВКИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

А. Б. МУСТАФАЕВ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

Одним из способов остановки (торможения) медленно растущей трещины является засверловка отверстия в ее кончике [1]. Форма отверстия оказывает значительное влияние на механические свойства детали или конструкции. Оптимальная форма отверстия позволяет повысить такие свойства конструкции, как прочность, надежность, долговечность. Поэтому целесообразно тормозить медленно растущую трещину засверловкой в вершине отверстия оптимальной формы.

Рассмотрим сплошное упругое тело, ослабленное прямолинейной трещиной продольного сдвига, в вершине которой высверлено отверстие. Деформации тела приняты малыми величинами. Принято, что выполняется условие локальной симметрии, т. е. в малой окрестности каждой точки контура трещины имеет место симметрия относительно касательной плоскости к поверхности трещины в этой точке. Рассмотрим окрестность вершины трещины, малую относительно характерного линейного размера тела L, но большую по сравнению с размером R отверстия в вершине трещины. Считается, что упругое тело находится в условиях антиплоской деформации.

Разместим в вершине трещины центр O системы прямолинейных декартовых координат xyz, ось y которой направлена по нормали к поверхности трещины, ось z – вдоль контура трещины, а ось x – вглубь тела. Рассматриваемая малая окрестность представится на плоскости Oxy бесконечной областью, занимающей внешность контура D. Параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние тела в этой малой окрестности, не зависят от координаты z. Таким образом, приходим к следующей задаче теории упругости с неизвестной границей:

$$\tau_{yz} = 0 \qquad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -a; \tag{1}$$

на неизвестном контуре отверстия $r = \rho(\theta)$

$$\tau_{zn} = 0, \quad \lim\left(\tau_{yz}\sqrt{z}\right) = K_{\text{III}} \quad \text{при } y = 0, \qquad x \to \infty. \tag{2}$$

Требуется определить функцию $\rho(\theta)$ (отыскать форму отверстия).

В условиях антиплоской деформации напряжения и перемещения можно представить [2] через одну аналитическую функцию $f(z)$

$$w = \operatorname{Re} f(z), \qquad \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu\overline{f'(z)}, \qquad z = x + iy. \tag{3}$$

Постановку задачи следует дополнить критерием выбора формы отверстия, в качестве которого принимаем минимизацию максимального напряжения $\tau_{\theta z}$ вдоль контура отверстия. Следовательно, в рассматриваемом случае отыскания для отверстия в вершине трещины в упругом теле, формы, обладающей минимальной концентрацией напряжения, приходим к обратной задаче теории упругости с дополнительным условием

$$\min_{\eta\in C}\ \max_{\theta\in[0,2\pi]} \tau_{\theta z}(\theta,\eta)\,. \tag{4}$$

Представим неизвестный контур отверстия в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon h(\theta), \tag{5}$$

Здесь $h(\theta)$ – искомая функция; $\varepsilon = R_0/R$ – малый параметр; R_0 – наибольшая высота отклонения (неровности) профиля контура отверстия от окружности $r = R$.

Без уменьшения общности рассматриваемой задачи принимаем, что неизвестная функция $h(\theta)$ может быть представлена в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье. Напряжения и перемещения ищем в виде разложений по малому параметру ε. Каждое из этих приближений удовлетворяет дифференциальным уравнениям плоской задачи теории упругости в условиях антиплоской деформации. Разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$, получаем значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$. Согласно известным формулам для компонент напряжений, граничные условия задачи примут следующий вид:

– для нулевого приближения

$$\tau_{zn}^{(0)} = 0 \quad \text{на контуре } r = R, \tag{6}$$

$$\tau_{yz}^{(0)} = 0 \quad \text{на берегах трещины} \quad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -R; \tag{7}$$

– для первого приближения

$$\tau_{zn}^{(1)} = T(\theta) \quad \text{на контуре } r = R, \tag{8}$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = 0 \quad \text{на берегах трещины} \quad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < -R. \tag{9}$$

Здесь функция $T(\theta)$ зависит от напряженного состояния в нулевом приближении и функции $h(\theta)$.

Используя методы теории комплексных переменных, находим напряжения в нулевом и первом приближениях. Для заданной функции $h(\theta)$ формы отверстия полученные соотношения являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние тела в условиях антиплоской деформации.

Чтобы построить недостающие уравнения, позволяющие найти коэффициенты α_k и β_k ряда Фурье искомой функции $h(\theta)$, определяем тангенциальное напряжение $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия, а затем требуем распределения напряжений на контуре отверстия соответственно условию (4) оптимизации. Для функции $\tau_{z\theta}(\theta,\alpha_k,\beta_k)$ находим ее максимальное значение на контуре L

$$\max\tau_{z\theta}(\theta_*,\alpha_k,\beta_k).$$

Здесь величина θ_* есть решение следующего уравнения:

$$\frac{d\tau_{\theta z}(\theta)}{d\theta} = 0 .$$

Максимальное значение функции $\tau_{z\theta}(\theta)$ находится обычными методами дифференциального исчисления. Для построения недостающих уравнений требуем минимизации максимального значения функции $\tau_{z\theta}$ вдоль контура L

$$\min_{\eta\in C} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \tau_{\theta z}(\eta,\theta) . \tag{10}$$

Необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия, т. е. выполнялся минимаксный критерий (10) при ограничениях

$$\tau_{z\theta} \le [\tau]. \tag{11}$$

Здесь $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение, определяемое опытным путем.

Следует распорядиться функцией $H(\theta)$ таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения $\tau_{z\theta}$. Требуется найти такие значения коэффициентов α_k, β_k, которые удовлетворяют полученной системе уравнений и обращают в минимум линейную функцию $\max\tau_{z\theta}$ (целевую функцию).

Система уравнений (11) совместно с полученными соотношениями задачи теории упругости в нулевом и первом приближениях позволяет определить оптимальную форму отверстия, напряженно-деформированное состояние тела.

Рост трещины продольного сдвига происходит по направлению максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ [3]. Таким направлением является продолжение трещины ($\theta = 0$). Следовательно, как только напряжение $\tau_{z\theta}$ окажется равным некоторой предельной величине τ_c, характерной для данного материала, трещина продольного сдвига будет расти. Таким образом, условием хрупкого разрушения будет

$$\tau_{z\theta}(K_{\text{III}}) = \tau_c. \tag{12}$$

Согласно условию (12) трещина будет расти, как только коэффициент интенсивности напряжений K_{III} (параметр нагружения) достигает некоторой критической величины, при которой оптимальное значение напряжения оказывается равной предельной величине τ_c. Величина τ_c является характерной для данного материала и зависит от характерного размера отверстия в кончике трещины и прочности материала.

Список литературы

1 **Финкель, В. М.** Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М. : Металлургия, 1977. – 360 с.

2 **Мирсалимов, В. М.** Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. –124 с.

3 **Баренблатт, Г. И.** О хрупких трещинах продольного сдвига / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1110–1119.

УДК 539.3

ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ НА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ КРУГЛУЮ ПЛАСТИНУ

А. В. НЕСТЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Применение многослойных конструкций, в частности трехслойных, широко распространено в различных отраслях. Статическое и динамическое деформирование трехслойных стержней и пластин на основании Пастернака рассмотрено в статьях [1, 2]. В работе [3] исследуется изгиб упругопластической пластины со сжимаемым заполнителем. В статье [4] показан изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании. Неосесимметричному деформированию упругих