G_{pl} запишется так:

$$G_{pl}(x,\tau)=\frac{|x_1|}{\tilde{\alpha}\sqrt{2}}\left\{g\left(|x_1|\sqrt{\frac{2b}{\pi}}\right)\cos\left(bx_1^{\,2}+\frac{\pi}{4}\right)+\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{b}}-f\left(|x_1|\sqrt{\frac{2b}{\pi}}\right)\right]\sin\left(bx_1^2+\frac{\pi}{4}\right)\right\},\ b=\frac{1}{4\tilde{\alpha}\tau}.$$

При расчетах удобнее использовать аппроксимации рациональными функциями, гарантирующие абсолютную ошибку $\left|\varepsilon(y)\right|\le 2\cdot 10^{-3}$ на интервале $0\le y<\infty$:

$$g(y)\approx\left(2+4{,}142y+3{,}492y^2+6{,}670y^3\right)^{-1},\ f(y)\approx(1+0{,}926y)\left(2+1{,}792y+3{,}104y^2\right)^{-1}.$$

Для определения напряжений σ_{330} и нормальных перемещений v построен и реализован численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. Интегралы от сингулярных составляющих вычисляются с помощью метода весовых коэффициентов с использованием канонической регуляризации, от регулярных – методом Гаусса [3–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01099 А).

Список литературы

1 **Mikhailova, E. Yu.** Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. – P. 239–247.

2 **Михайлова, Е. Ю.** Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства / Е. Ю. Михайлова, Г. В. Федотенков, Д. В. Тарлаковский // Труды МАИ : электронный журнал. – 2014. – Вып. 78 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53499. – Дата доступа : 23.09.2021.

3 **Горшков, А. Г.** Динамические контактные задачи с подвижными границами / А. Г. Горшков. – М. : Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.

4 **Михайлова, Е.** Контактные напряжения в нестационарной задаче для полупространства с покрытием / Е. Ю. Михайлова, Э. И. Старовойтов, Г. В. Федотенков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М., 2020. – С. 97–99.

5 **Mikhailova, E.Yu.** Impact of transient pressure on a half-space with membrane type coating // Proceedings of the Third International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, ICTAEM 2020. Structural Integrity. – Springer, Cham. – 2020. – Vol. 16. – P. 312–315.

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ОКРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Л. И. МОГИЛЕВИЧ, Е. В. ЕВДОКИМОВА, Е. В. ПОПОВА
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Российская Федерация

Рассмотрена задача гидроупругости цилиндрической оболочки с квадратичной физической нелинейностью неограниченной длины, окруженной упругой средой. Оболочка заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Считается, что в оболочке была возбуждена уединенная волна деформации, например, воздействием пьезоэлектрического элемента или ударным воздействием на ее торец. Рассматриваем упругую среду с учетом нелинейной реакции среды в продольном направлении. В этом случае реакция такой среды в нормальном направлении характеризуется безразмерным коэффициентом жесткости k_1, как основание Винклера. Однако в продольном направлении среда обладает жесткостью с мягкой кубической нелинейностью, характеризуемой безразмерными коэффициентами жесткости k_2, k_3. Оболочка характеризуется следующими параметрами: R_1 – внутренний радиус оболочки; R – радиус ее срединной поверхности; h_0 – толщина оболочки. При этом выполняется условие $h_0/R << 1$.

Сформулирована осесимметричная задача гидроупругости рассматриваемой оболочки, включающая в себя: уравнения динамики рассматриваемой оболочки, а также уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости, которые дополнены соответствующими граничными условиями. В качестве граничных условий выступают условия совпадения скоростей разнородных сред на границах их контакта, а также условие ограниченности гидродинамических параметров на оси симметрии. В силу бесконечной протяженности оболочки характерный поперечный размер сечения жидкости оказывается мал, и динамика жидкости в оболочке рассматривалась в рамках гидродинамической теории смазки, но с учетом инерции ее движения. Для исследования поставленной задачи гидроупругости применялся метод двухмасштабных разложений, позволивший свести исходную задачу к одному модельному уравнению, в котором остались члены, характеризующие нелинейность и дисперсию волнового процесса в стенках канала, а также влияние окружающей упругой среды и вязкой несжимаемой жидкости. Данное уравнение в веденных в рассмотрение безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}+\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[\frac{4m}{\sqrt{3E}}\left(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2\right)^{1/2}\right]\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+k_1\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}-\frac{2}{\sqrt{1-\mu_0^2}}$$

$$\left[k_3u_{10}-k_2u_{10}^3\right]=-\frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon\rho_0h_0}\left\{\frac{\nu}{R_1c_0}\rho4\left[1-2\mu_0\right]^2\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-\frac{R_1}{l}\rho\frac{1}{6}\sqrt{1-\mu_0^2}\left[\left(1-2\mu_0\right)^2+12\mu_0^2\right]\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}\right\}. \quad (1)$$

Здесь u_{10} – безразмерное продольное перемещение оболочки, u_m – характерное значение перемещения; $u_{30}=\mu_0\partial u_{10}/\partial\xi$ – безразмерный прогиб, согласно линейному приближению, ξ – безразмерная бегущая координата; τ – безразмерное медленное время; l – длина волны; ρ_0 – плотность материала оболочки, E – модуль Юнга; m – постоянная материала физически нелинейной оболочки; μ_0 – коэффициент Пуассона, μ_1 и μ_2 зависят от μ_0; ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости, c_0 – скорость продольных волн в оболочке.

Полагая, $\partial u_{10}/\partial\xi=c_3\varphi$, $\eta=c_1\xi$, $t=c_2\tau$, из (1) получено уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}+(\sigma_2-\sigma_4)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\sigma_1\varphi-\sigma_3\int\varphi d\eta+\sigma_5\left(\int\varphi d\eta\right)^3=0, \quad (2)$$

значения c_1, c_2, c_3 и введенные обозначения σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, определяются через параметры задачи, входящих в коэффициенты разрешающего уравнения. Коэффициент σ_1, описывающий вязкостное трение жидкости, принимает значение 0 при μ_0 = 1/2 и при отсутствии жидкости; σ_2, σ_3, σ_5 описывают влияние жесткости упругой окружающей среды в нормальном и касательном направлениях; σ_4 описывает влияние инерции движения жидкости.

При μ_0, отличном от 1/2 ($\sigma_1 \neq 0$), проведено численное исследование уравнения (2) при начальном условии t = 0 в виде солитона – найденного точного решения (для случая μ_0 = 1/2, σ_1 = 0)

$$\varphi\left(\eta,0\right)=2k^2\cosh^{-2}\{k\eta\}, \quad (3)$$

с использованием разработанной разностной схемы.

На рисунке 1 приведен пример расчета в размерных единицах. Материал оболочки – органическое стекло: $\rho_0=1{,}18\cdot10^3$ кг·м$^{-3}$; $E=3\cdot10^9$ Па; $m=1{,}44\cdot10^9$ Па; $\mu_0=0{,}35$. Жидкость внутри оболочки: $\rho=1{,}8\cdot10^3$ кг·м$^{-3}$; $\nu=2{,}5\cdot10^{-4}$ м^{2}с$^{-1}$. Радиус срединной поверхности оболочки: $R=5\cdot10^{-3}$м. Толщина оболочки $h_0=5\cdot10^{-5}$м, малый параметр задачи $\varepsilon=h_0/R=10^{-2}$. Максимальная величина размерного прогиба $W=h_0\mu_0\partial u_{10}/\partial\xi=0{,}33\cdot10^{-5}$м. Длина волны $l=R/\sqrt{\varepsilon}=10\cdot R=5\cdot10^{-2}$м. Коэффициент жесткости окружающей среды в нормальном направлении $K_1=4{,}7\cdot10^7$ Па·м$^{-1}$, коэффициенты жесткости окружающей среды в касательном направлении при первой степени – $K_3=7{,}4\cdot10^6$ Па·м$^{-1}$, при третьей степени – $K_2=7{,}4\cdot10^{15}$ Па·м$^{-3}$.

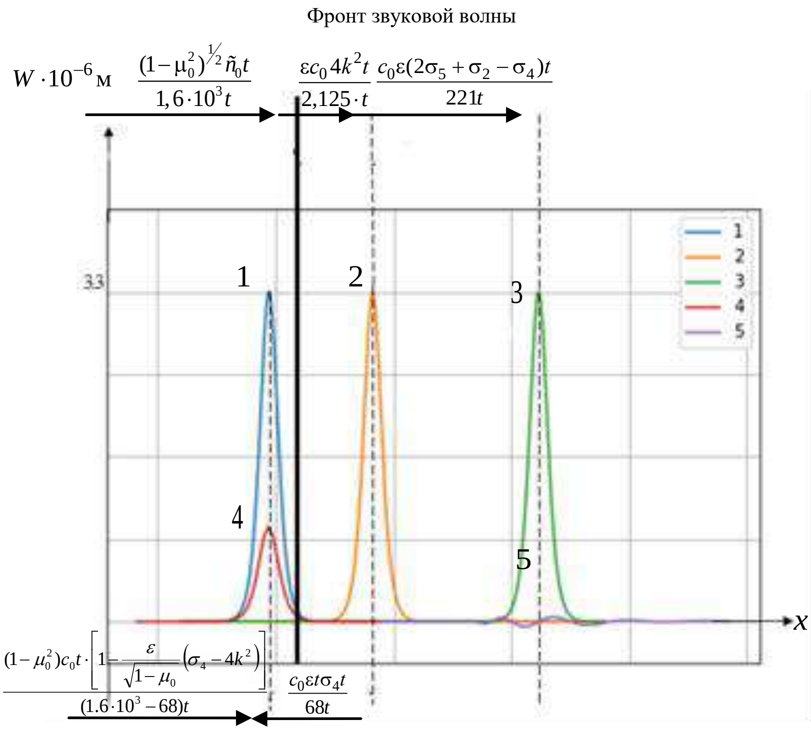

Рисунок 1 – График численного решения в размерных переменных:
1 – учет инерции движения жидкости ($\sigma_4 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0$); *2* – без учета окружающей среды, вязкости жидкости и инерции движения ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$); *3* – учет влияния окружающей среды и инерции движения жидкости ($\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1, \sigma_5 = 8$); *4* – учет влияния инерции движения жидкости и вязкости жидкости ($k = 0{,}18, \sigma_4 = 4, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0$); *5* – совместный учет влияния окружающей среды, инерции движения жидкости и вязкости жидкости ($\sigma_1 = 1, \sigma_2 - \sigma_4 = -4, \sigma_3 = 1, \sigma_5 = 8$)

Представленные результаты расчетов позволяют дать следующую трактовку. Без учета окружающей среды, вязкости жидкости и инерции движения скорость солитона сверхзвуковая (кривая 2). Учет инерции движения жидкости уменьшает скорость солитона, которая становится дозвуковой (кривая 1), а дополнительный учет упругой окружающей среды приводит к возрастанию скорости солитона и она снова становится сверхзвуковой (кривая 3), вязкость жидкости, без учета окружающей среды, ведет к падению амплитуды солитона (кривая 4), совместный учет всех факторов приводит к разрушению солитона (кривая 5).

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а.

УДК 539.3

МЕТОДИКА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Д. С. КУЗЬМЕНКОВ, С. В. КИРГИНЦЕВА
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта (автомобилей, электропогрузчиков, подвесных канатных дорог, эскалаторов метро и др.), а также усовершенствование новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Например, при исследовании контактного взаимодействия упругих тел из композитов возникает необходимость создавать новые методики расчета прочности и износа зубьев зубчатых колес [1, 2]. В связи с этим разрабатываются новые математические модели и компьютерные программы расчета напряжений и деформаций при различных