Список литературы

1 **Еремеев, В. С.** Диффузия и напряжения / В. С. Еремеев. – М. : Энергоатомиздат, 1984. –182 с.

2 **Igumnov, L. A.** A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer / L. A. Igumnov, D. V. Tarlakovskii, A. V. Zemskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 5. – P. 808–817.

3 **Aouadi, M.** Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory / M. Aouadi, M. I. M. Copetti // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – P. 1–24.

4 **Deswal, S.** A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion / S. Deswal, K. Kalkal // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – Vol. 50, no. 5. – P. 749–759.

5 **Elhagary, M. A.** A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating / M. A. Elhagary // Acta Mechanica. – 2013. – Vol. 224. – P. 3057–3069.

6 **Земсков, А. В.** Нестационарный изгиб консольно-закреплённой балки Бернулли-Эйлера с учетом диффузии / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский, Г. М. Файкин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 40–50. – DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.4.

7 **Zemskov, A. V.** Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action / A. V. Zemskov, A. S. Okonechnikov, D. V. Tarlakovskii // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials / ed. by Holm Altenbach, Victor A. Eremeyev, Leonid A. Igumnov. – Springer Nature Switzerland AG. – 2021. – Vol. 141. – P. 487–499.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

А. М. КАРИМОВ

Ташкентский государственный транспортный университет, Республика Узбекистан

Композиционные материалы с упругими и вязкоупругими свойствами имеют широкое применение в области транспортного строительства, машиностроения, авиации. В настоящее время разрабатываются новые виды композиционных материалов, например, металопластики, металлы, армированные керамическими нитями, и другие. Изделия из композиционных материалов часто работают в таких условиях, где не исключена возможность ударной нагрузки. Нагрузки подобного вида вызывает появление напряжений, которые могут привести конструкцию к разрушению. Поэтому важно знать динамические характеристики композиционных материалов.

Рассматривается задача о колебаниях упругого композиционного слоя $\{-\infty < x_1; x_2 < \infty, 0 \le x_3 \le L\}$, образованного периодическим повторением элементарных ячеек (слоев), ортогональных к оси x_3. Ячейка периодичности, в свою очередь, состоит из двух упругих изотропных слоев различной толщины l_m с разными механическими свойствами λ_m, μ_m, ρ_m (m = 1,2).

На внешних плоскостях $x_3 = 0$ и $x_3 = L$ заданы вектор смещений $\overline{u}(x_1, x_2, t)$, которые являются гармоническими функциями времени, т. е. $\overline{u}(\overline{x}, t) = \overline{U}(\overline{x})e^{-i\omega t}$. На границах раздела слоев выполняются условия жесткого контакта. Тогда, вектор вихря $2\overline{\Omega} = rot\overline{U}$ удовлетворяет волновому уравнению в каждом слое с номером m. В случае, когда рассматривается одномерная задача о вращательных колебания вокруг оси $x_3 \equiv x$, получим [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right] + \omega^2\rho(x)\Omega = 0, \tag{1}$$

где $\Omega = \Omega_1(x_3) = \Omega_1(x)$.

Решение уравнению движения ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру α, равному отношению периода структуры $l = l_1 + l_2$ к характерному размеру рассматриваемого тела L [2]:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s \sum_q (-1)^q N_{s-2q,2q}(\xi,\omega)\frac{d^{s-2q}}{dx^{s-2q}}v(x), \tag{2}$$

где $N_{s-2q,2q}(\xi,\omega)$ – так называемые локальные функции периодические по переменной $\xi = \dfrac{x}{\alpha}$, зависящей от частоты ω.

Суммирование по q происходит от q = 0 так, чтобы выполнялись условия $s-2q\geq 0$. Все локальные функции, имеющие отрицательные индексы, равны нулю, а также $N_{0,0}\equiv 1$.

После применения обычной техники метода осреднения получим

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\alpha^{2(s-1)}\sum_{q=0}(-1)^q H_{2(s-q),2q}\frac{d^{2(s-q)}}{dx^{2(s-q)}}v(x)\right\}=0,$$

где

$$H_{2(s-q),2q}=\left\langle P_{2(s-q)-1}-\rho\omega^2 N_{2(s-q),2(q-1)}\right\rangle;$$

$$P_{e,2q}=\mu\left(N'_{e,2q}(\xi,\omega)+N_{e-1,2q}(\xi,\omega)\right);$$

$$\left\langle P(\xi,\mu)\right\rangle\equiv\int_0^1 P(\xi,\omega)d\xi.$$

Для определения локальных функций $N_{s-2q,2q}$ находим рекуррентную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [3]

$$P'_{s-2q,2q}+P_{s-1-2q,2q}-\rho\omega^2 N_{s-2q,2(q-1)}+H_{s-2q,2q}=0, \quad (3)$$

где s = 1, 2, 3, … ; q = 0, 1, 2, … .

Для того чтобы обеспечить единственное решение уравнений задачи на ячейки периодичности, требуется выполнение условий

$$\left\langle N_{s-2q,2q}(\xi,\omega)\right\rangle=F_{s-2q,2q}(\omega),$$

где $F_{s-2q,2q}$ – некоторые величины, зависящие от частоты, которые определяются из сравнений точного частотного уравнения с частотным уравнением, полученным данным методом для бесконечной упругой слоистой среды периодической структуры [4].

Выбирая решение в виде

$$v(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx},$$

получим дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи

$$\sum_{s=1}^{\infty}\alpha^{2(s-1)}\sum_{q}(-1)^q H_{2(s-q),2q}(-k^2)^{s-q}=0,$$

где k – волновое число.

Выполнение граничных условий дает систему двух однородных уравнений для определения A и B. Потребовав условию существования нетривиального решения, получим $k=\pi n/L$, n = 0, 1, 2, 3, … . Подставляя эти значения в дисперсионное уравнение, получим собственные частоты рассматриваемого упругого композиционного слоя периодической структуры при вращательном колебании.

Анализируя дисперсионное уравнение в нулевом приближении, имеем

$$H_0k^2-\rho_0\omega^2=0.$$

В этом случае фазовая скорость $\left(c=\dfrac{\omega}{k}\right)$ не зависит от частоты и совпадает со скоростью волны в эквивалентной однородной среде. Явление дисперсии отсутствует.

Анализируя дисперсионное уравнение в первом приближении, имеем

$$\left(a_1k^2+a_2\right)\omega^4+\left(a_3k^2+a_4k^4+a_5\right)\omega^4+a_6k^2+k^4=0,$$

где

$$a_1=\frac{R_1+2k_B^2}{\omega_1^2\omega_2^2};\quad a_2=-\frac{k_B^2}{\omega_1^2\omega_2^2};\quad a_3=\left(\frac{2}{c_q^2k_B^2}+R_2\right)R_1;$$

$$a_4 = R_2 - \frac{1}{c_q^2 k_B^2} \cdot R_1; \quad a_5 = -\frac{R_1}{c_q^2}; \quad a_6 = R_1; \quad R_1 = -\frac{c_q^2 k_B^2 \omega_3^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}; \quad R_1 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2};$$

$c_q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ – значения групповой скорости и частот, соответственно, определенных из точного спектра частот данной задачи; k_B – значение волнового числа на конце первой зоны Бриллюэна.

Список литературы

1 **Абдусаттаров, А.** Методы решения задач механики композитных материалов и неупругих элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, А. М. Каримов. – Ташкент : Узбекистан, 2020. – 198 с.

2 **Победря, Б. Е.** Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во МГУ, 1984. –336 с.

3 **Каримов, А. М.** Дисперсионное уравнение вязкоупругих композитов периодической структуры / А. М. Каримов // Проблемы механики. – 2019. – № 1. – С. 18–20.

4 A Dispersive Nonlocal Model for In-Plane Wave Propagation in Laminated Composites with Periodic Structures / H. Brito-Santana [et al.] // Journal of Applied Mechanics. – 2015. – Vol. 82, no. 3. – P. 31–46.

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ИЗГИБ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИЕ ПАСТЕРНАКА

А. Г. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В современном транспортном машиностроении актуально применение композиционных материалов. Широкое распространение получили многослойные, в том числе трехслойные элементы конструкций. При относительно небольшой массе подобные слоистые системы не только сочетают в себе высокую изгибную жесткость и прочность, но и обладают хорошей способностью противостоять тепловым, химическим, радиационным воздействиям. Возникает необходимость создания соответствующих математических моделей, усовершенствованию методов расчета их напряженно-деформированного состояния в различных условиях эксплуатации.

Неосесимметричное нагружение упругих трехслойных круговых пластин рассматривалось в статьях [1, 2]. Влияние сжимаемости заполнителя на деформирование трехслойных пластин исследовалось в работах [3, 4]. Анализ температурного воздействия на трехслойные элементы конструкции, в том числе контактирующие с упругим основанием Винклера, выполнен в статьях [5, 6]. Деформирование упругих круговых трехслойных пластин на основании Пастернака рассматривалось в работах [7, 8], упругопластических – в [9, 10].

Здесь рассматривается квазистатическое деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака при термосиловом нагружении. Для несимметричной по толщине трехслойной пластины принята гипотеза ломаной линии: для внешних жестких слоев ($h_1 \neq h_2$) принимаются гипотезы Кирхгофа, в легком и достаточно толстом заполнителе (h_3 = $2c$), справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Работа заполнителя в тангенциальном направлении не учитывается. Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z. Внешняя поперечная нагрузка, действующая на верхний слой пластины, симметрична, т. е. не зависит от координаты φ: $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R, действующей на нижний слой пластины, и прогиба принимается согласно модели Пастернака:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w,$$

где κ_0 – коэффициент сжатия основания, формально совпадающий с коэффициентом постели Винклера, Па/м; t_f – коэффициент сдвига основания, Па·м; $w(r)$ – осадка (прогиб) поверхности основания, м; Δ – оператор Лапласа.

Реакция основания направлена в сторону, противоположную прогибу.