

$$f_{111}(x_2, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_1^{(1)}(x_2, \tau), \quad f_{112}(x_2, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_2^{(1)}(x_2, \tau),$$

$$f_{121}(x_1, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_1^{(2)}(x_1, \tau), \quad f_{122}(x_1, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_2^{(2)}(x_1, \tau).$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Решения задачи (1), (2) ищется в интегральной форме. Ядрами интегральных представлений являются функции Грина, для нахождения которых используются разложения двойные тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00589 А).

Список литературы

- 1 **Еремеев, В. С.** Диффузия и напряжения / В. С. Еремеев. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
- 2 **Igunnov, L. A.** A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer / L. A. Igunnov, D. V. Tarlakovskii, A. V. Zemskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 5. – P. 808–817.
- 3 **Aouadi, M.** Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory / M. Aouadi, M. I. M. Copetti // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – P. 1–24.
- 4 **Deswal, S.** A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion / S. Deswal, K. Kalkal // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – Vol. 50, no. 5. – P. 749–759.
- 5 **Elhagary, M. A.** A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating / M. A. Elhagary // Acta Mechanica. – 2013. – Vol. 224. – P. 3057–3069.
- 6 **Zemskov, A.** Modeling an unsteady elastic diffusion processes in a Timoshenko plate / A. Zemskov, D. Tarlakovskii, N. Grigorevskiy // Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering : 9th edition of the International Conference (COUPLED PROBLEMS 2021). – URL : https://www.scipedia.com/public/Zemskov_et_al_2021a.

УДК 539.3, 539.8

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОУПРУГОДИФфуЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА

А. В. ЗЕМСКОВ^{1,2}, ХАО ЛЕ ВАН¹

¹*Московский авиационный институт (НИУ),*

²*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

Рассматривается задача о нестационарных термоупругодиффузионных колебаниях балки Бернулли – Эйлера, находящейся в поле совместного действия механического, температурного и диффузионного полей (рисунок 1).

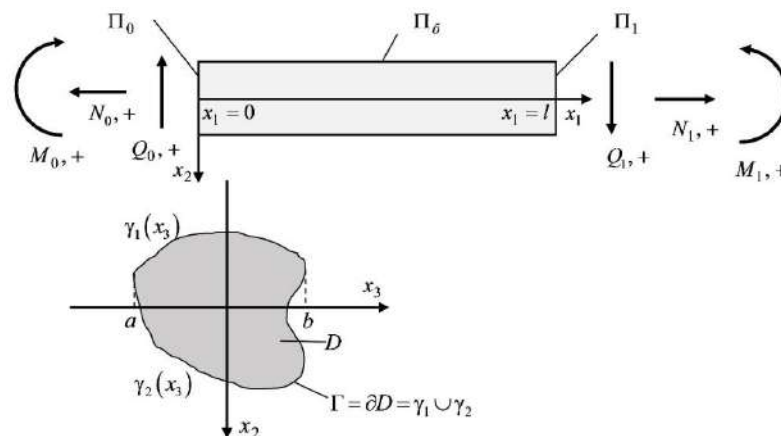


Рисунок 1 – Рисунок к постановке задачи

Для математической постановки задачи используется система уравнений термомеханодиффузии для анизотропных сплошных сред [1–5]. Модель учитывает релаксационные эффекты, подразуме-

вающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков. Из неё, с помощью вариационного принципа Даламбера [6, 7], получена модель термоупругодиффузионных поперечных колебаний балки Бернулли – Эйлера:

$$\begin{aligned} \ddot{v}'' - \frac{F}{J_3} \ddot{v} = v^{IV} + b_1 \vartheta'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j'' - \frac{q + m'}{J_3}, \\ \dot{\vartheta} + \tau_t \ddot{\vartheta} = k_1 \vartheta'' + B_1 (\dot{v}'' + \tau_t \ddot{v}'') - \sum_{q=1}^N v^{(q)} (H_q + \tau_t \dot{H}_q) + \frac{q^{(\varrho)}}{J_3}, \\ \dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q = D_1^{(q)} H_q'' + \Lambda_{11}^{(q)} v^{IV} + M_1^{(q)} \vartheta'' + \frac{z^{(q)}}{J_3}, \quad H_{N+1} = - \sum_{q=1}^N H_q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь точки обозначают производную по времени, штрихи – производную по координате x_1 . Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad u = \frac{u^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ij} = \frac{C_{ij}^*}{C_{11}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{11}^*}{\rho}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \tau_t = \frac{C\tau_T}{l}, \\ k_i = \frac{k_i^*}{\rho c_0 Cl}, \quad B_i = \frac{b_i^*}{\rho c_0}, \quad v^{(q)} = \rho RT_0 \frac{\ln[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{m^{(q)}}, \quad M_i^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_i^{*(q)}}{T_0} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}), \quad q^{(\varrho)} = \frac{lq^{(j)}}{T_0 c_0 C}, \\ \alpha_i^{(q)} = \frac{\alpha_i^{*(q)}}{C_{11}^*}, \quad D_i^{(q)} = \frac{D_i^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ij}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_i^{*(q)} \alpha_j^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad q = \frac{q^*}{C_{11}^*}, \quad z_q = \frac{lz^{(q)}}{C}, \quad m_i = \frac{m_i^*}{C_{11}^*}, \end{aligned}$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – прогибы балки; l – длина балки; $\eta^{(q)} = x_2 H_q$ – приращение концентрации q -й компоненты вещества в составе $N+1$ – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q -го вещества; $\theta = x_2 \vartheta$ – приращение температуры; C_{ij}^* – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_i^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; b_i^* – тепловые постоянные, характеризующие объёмное изменение за счёт теплопереноса; $D_i^{*(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; k_i^* – коэффициенты теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – начальная температура среды; T – актуальная температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; τ_T – время релаксации тепловых потоков; m_i^* – распределенные по длине балки моменты; q^* – распределенная по длине балки поперечная нагрузка; $q^{(j)}$ – линейная плотность источников теплопереноса; $z^{(q)}$ – линейная плотность источников массопереноса; J_3 – момент инерции балки относительно оси Ox_3 ; F – площадь поперечного сечения.

Замыкают постановку начально-краевые условия, которые в случае чистого изгиба под действием изгибающих моментов M_k , изображенных на рисунке 1, имеют вид

$$\begin{aligned} \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_1=0} = -\frac{M_0}{J_3}, \quad \left(v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_1=1} = -\frac{M_1}{J_3}, \\ v \Big|_{x_1=0} = V_0, \quad v \Big|_{x_1=1} = V_1, \quad \vartheta \Big|_{x_1=0} = \vartheta_0, \quad \vartheta \Big|_{x_1=1} = \vartheta_1, \quad H_q \Big|_{x_1=0} = H_{q0}, \quad H_q \Big|_{x_1=1} = H_{q1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где V_l – граничные значения для прогибов балки; ϑ_l – граничные значения для температурного поля, H_{q0} – граничные значения диффузионных полей.

Начальные условия полагаем нулевыми.

Решения задачи (1), (2) ищется в интегральной форме. Ядрами интегральных представлений являются функции Грина, для нахождения которых используются разложения в тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00589 А).

Список литературы

- 1 Еремеев, В. С. Диффузия и напряжения / В. С. Еремеев. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
- 2 Igumnov, L. A. A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer / L. A. Igumnov, D. V. Tarlakovskii, A. V. Zemskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 5. – P. 808–817.
- 3 Aouadi, M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory / M. Aouadi, M. I. M. Copetti // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – P. 1–24.
- 4 Deswal, S. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion / S. Deswal, K. Kalkal // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – Vol. 50, no. 5. – P. 749–759.
- 5 Elhagary, M. A. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating / M. A. Elhagary // Acta Mechanica. – 2013. – Vol. 224. – P. 3057–3069.
- 6 Земсков, А. В. Нестационарный изгиб консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера с учетом диффузии / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский, Г. М. Файкин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 40–50. – DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.4.
- 7 Zemskov, A. V. Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action / A. V. Zemskov, A. S. Okonechnikov, D. V. Tarlakovskii // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials / ed. by Holm Altenbach, Victor A. Eremeyev, Leonid A. Igumnov. – Springer Nature Switzerland AG. – 2021. – Vol. 141. – P. 487–499.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

А. М. КАРИМОВ

Ташкентский государственный транспортный университет, Республика Узбекистан

Композиционные материалы с упругими и вязкоупругими свойствами имеют широкое применение в области транспортного строительства, машиностроения, авиации. В настоящее время разрабатываются новые виды композиционных материалов, например, металлопластики, металлы, армированные керамическими нитями, и другие. Изделия из композиционных материалов часто работают в таких условиях, где не исключена возможность ударной нагрузки. Нагрузки подобного вида вызывает появление напряжений, которые могут привести конструкцию к разрушению. Поэтому важно знать динамические характеристики композиционных материалов.

Рассматривается задача о колебаниях упругого композиционного слоя $\{-\infty < x_1; x_2 < \infty, 0 \leq x_3 \leq L\}$, образованного периодическим повторением элементарных ячеек (слоев), ортогональных к оси x_3 . Ячейка периодичности, в свою очередь, состоит из двух упругих изотропных слоев различной толщины l_m с разными механическими свойствами λ_m, μ_m, ρ_m ($m = 1, 2$).

На внешних плоскостях $x_3 = 0$ и $x_3 = L$ заданы вектор смещений $\bar{u}(x_1, x_2, t)$, которые являются гармоническими функциями времени, т. е. $\bar{u}(x, t) = \bar{U}(x)e^{-i\omega t}$. На границах раздела слоев выполняются условия жесткого контакта. Тогда, вектор вихря $2\bar{\Omega} = \text{rot}\bar{U}$ удовлетворяет волновому уравнению в каждом слое с номером m . В случае, когда рассматривается одномерная задача о вращательных колебаниях вокруг оси $x_3 \equiv x$, получим [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] + \omega^2 \rho(x) \Omega = 0, \quad (1)$$

где $\Omega = \Omega_1(x_3) = \Omega_1(x)$.

Решение уравнению движения ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру α , равному отношению периода структуры $l = l_1 + l_2$ к характерному размеру рассматриваемого тела L [2]:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \sum_q (-1)^q N_{s-2q, 2q}(\xi, \omega) \frac{d^{s-2q}}{dx^{s-2q}} v(x), \quad (2)$$

где $N_{s-2q, 2q}(\xi, \omega)$ – так называемые локальные функции периодические по переменной $\xi = \frac{x}{\alpha}$, зависящей от частоты ω .