

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра I рода. Его решение ищется численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников. После этого решение исходной задачи (1) записывается в виде

$$u(r, \tau) = \int_0^{\tau} G_{11}(r, \tau-t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau} G_{1m}(r, \tau-t) f_m(t) dt,$$

$$\eta_q(r, \tau) = \int_0^{\tau} G_{q+1,1}(r, \tau-t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau} G_{q+1,m}(r, \tau-t) f_m(t) dt.$$

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет выразить решение задачи с произвольными граничными условиями через какое-либо известное решение задачи данного класса.

Список литературы

- 1 **Deswal, S.** Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction / S. Deswal, K. K. Kalkal, S. S. Sheoran // *Physica B: Condensed Matter*. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.
- 2 **Aouadi, M. A.** Problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion / M. A. Aouadi // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 5711–5722.
- 3 **Зверев, Н. А.** Модель механоdiffузии для сплошного ортотропного цилиндра с учетом релаксации диффузионных процессов / Н. А. Зверев, А. В. Земсков // *Авиация и космонавтика : тезисы докладов 19-й Междунар. конф., Москва, 23–27 ноября 2020 г.* – М., 2020. – С. 458–459.
- 4 **Зверев, Н. А.** Моделирование нестационарных связанных механоdiffузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2020. – Т. 82, № 2. – С. 156–167.
- 5 **Zemskov, A. V.** Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii // *Materials Physics and Mechanics*. – 2015. – Vol. 23, no. 1. – P. 36–41.

УДК 539.3, 539.8

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГОДИФFUЗИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

А. В. ЗЕМСКОВ^{1,2}, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ^{2,1}

¹*Московский авиационный институт (НИИ),*

²*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины Тимошенко, находящейся в поле совместного действия механического и диффузионного полей.

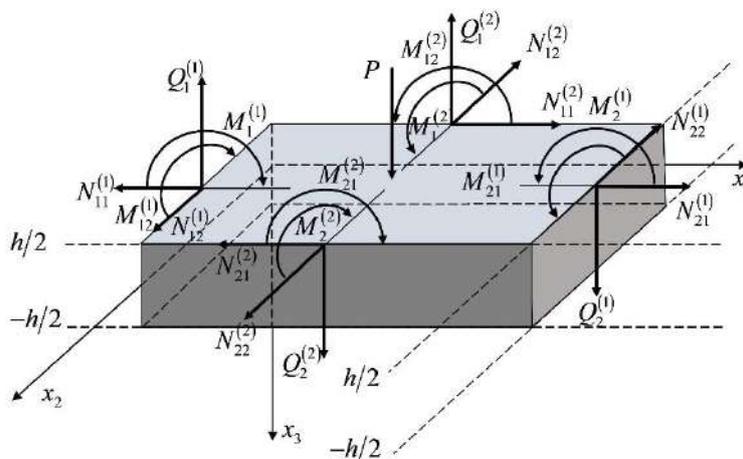


Рисунок 1 – Рисунок к постановке задачи

Для математической постановки задачи используется система уравнений механоdiffузии для анизотропных сплошных сред [1–5]. Из неё, с помощью вариационного принципа Даламбера, получена модель упругодiffузионных поперечных колебаний ортотропной прямоугольной пластины [6]:

$$\begin{aligned}
\ddot{\chi}_1 &= \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} + C_{55} k_T^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \chi_1 \right) + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} \frac{\partial H_q}{\partial x_1} - \frac{12}{h^3} m_1, \\
\ddot{\chi}_2 &= C_{66} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_2^2} + C_{44} k_T^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \chi_2 \right) + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^{(q)} \frac{\partial H_q}{\partial x_2} - \frac{12}{h^3} m_2, \\
\dot{w} &= C_{55} k_T^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right) + C_{44} k_T^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right) + \frac{q}{h}, \\
\dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q &= \left(D_1^{(q)} \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_1^2} + D_2^{(q)} \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_2^2} \right) + \Lambda_{11}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial x_1^3} + \Lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{21}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \Lambda_{22}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x_2^3} + \frac{12}{h^3} z_q,
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь точки обозначают производную по времени. Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{x_i^*}{l}, \quad w = \frac{w^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ij} = \frac{C_{ij}^*}{C_{11}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{11}^*}{\rho}, \quad l_m = \frac{l_m^*}{l}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \quad m_i = \frac{m_i^*}{C_{11}^*}, \\
\alpha_i^{(q)} &= \frac{\alpha_i^{*(q)}}{C_{11}^*}, \quad D_i^{(q)} = \frac{D_i^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ij}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_i^{*(q)} \alpha_j^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l}, \quad q = \frac{q^*}{C_{11}^*}, \quad z_q = \frac{l z^{(q)}}{C}, \quad h = \frac{h^*}{l},
\end{aligned}$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; w^* – прогибы пластины; χ_i – углы поворота нормальных к срединной поверхности волокон; l – характерный линейный размер; l_1^* и l_2^* – длина и ширина пластины; h^* – толщина пластины; $\eta^{(q)} = x_3 H_q$ – приращение концентрации q -й компоненты вещества в составе N – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q -го вещества; C_{ij}^* – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_i^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_i^{*(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; m_i^* – распределенные по поверхности моменты; q^* – распределенная по поверхности поперечная нагрузка; $z^{(q)}$ – распределённая по поверхности плотность объёмных источников массопереноса; k_T – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению балки.

Замыкают постановку начально-краевые условия, которые в случае чистого изгиба под действием изгибающих моментов $M_k^{(l)}$, изображенных на рисунке 1, имеют вид

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} H_q \right) \Big|_{x_1=0} &= f_{111}, \quad \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} H_q \right) \Big|_{x_1=l_1} = f_{112}, \\
\left(C_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^{(q)} H_q \right) \Big|_{x_2=0} &= f_{121}, \quad \left(C_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{q=1}^N \alpha_2^{(q)} H_q \right) \Big|_{x_2=l_2} = f_{122}, \\
\chi_2 \Big|_{x_1=0} &= f_{211}(x_2, \tau), \quad \chi_2 \Big|_{x_1=l_1} = f_{212}(x_2, \tau), \quad \chi_1 \Big|_{x_2=0} = f_{221}(x_1, \tau), \quad \chi_1 \Big|_{x_2=l_2} = f_{222}(x_1, \tau), \\
w \Big|_{x_1=0} &= f_{311}(x_2, \tau), \quad w \Big|_{x_1=l_1} = f_{312}(x_2, \tau), \quad w \Big|_{x_2=0} = f_{321}(x_1, \tau), \quad w \Big|_{x_2=l_2} = f_{322}(x_1, \tau), \\
H_q \Big|_{x_1=0} &= f_{q+3,11}(x_2, \tau), \quad H_q \Big|_{x_1=l_1} = f_{q+3,12}(x_2, \tau), \quad H_q \Big|_{x_2=0} = f_{q+3,21}(x_1, \tau), \quad H_q \Big|_{x_2=l_2} = f_{q+3,22}(x_1, \tau),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$f_{111}(x_2, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_1^{(1)}(x_2, \tau), \quad f_{112}(x_2, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_2^{(1)}(x_2, \tau),$$

$$f_{121}(x_1, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_1^{(2)}(x_1, \tau), \quad f_{122}(x_1, \tau) = -\frac{12}{h^3} M_2^{(2)}(x_1, \tau).$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Решения задачи (1), (2) ищется в интегральной форме. Ядрами интегральных представлений являются функции Грина, для нахождения которых используются разложения двойные тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00589 А).

Список литературы

- 1 **Еремеев, В. С.** Диффузия и напряжения / В. С. Еремеев. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
- 2 **Igumnov, L. A.** A two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer / L. A. Igumnov, D. V. Tarlakovskii, A. V. Zemskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 5. – P. 808–817.
- 3 **Aouadi, M.** Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory / M. Aouadi, M. I. M. Copetti // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – P. 1–24.
- 4 **Deswal, S.** A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion / S. Deswal, K. Kalkal // International Journal of Thermal Sciences. – 2011. – Vol. 50, no. 5. – P. 749–759.
- 5 **Elhagary, M. A.** A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating / M. A. Elhagary // Acta Mechanica. – 2013. – Vol. 224. – P. 3057–3069.
- 6 **Zemskov, A.** Modeling an unsteady elastic diffusion processes in a Timoshenko plate / A. Zemskov, D. Tarlakovskii, N. Grigorevskiy // Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering : 9th edition of the International Conference (COUPLED PROBLEMS 2021). – URL : https://www.scipedia.com/public/Zemskov_et_al_2021a.

УДК 539.3, 539.8

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОУПРУГОДИФFUЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА

А. В. ЗЕМСКОВ^{1,2}, ХАО ЛЕ ВАН¹

¹Московский авиационный институт (НИУ),

²НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается задача о нестационарных термоупругодиффузионных колебаниях балки Бернулли – Эйлера, находящейся в поле совместного действия механического, температурного и диффузионного полей (рисунок 1).

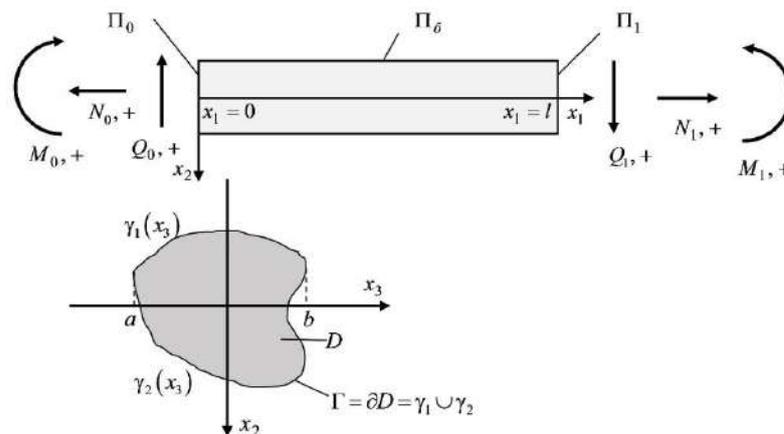


Рисунок 1 – Рисунок к постановке задачи

Для математической постановки задачи используется система уравнений термомеханодиффузии для анизотропных сплошных сред [1–5]. Модель учитывает релаксационные эффекты, подразуме-