2 **Журавков, М. А.** Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 540 с.

3 **Плескачевский, Ю.М.** Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Беларуская навука, 2004. – 342 с.

4 **Старовойтов, Э. И.** Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 1. – С. 60–75.

5 **Старовойтов, Э. И.** Неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1(54). – С. 38–45.

6 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26, № 1. – С. 58–73.

7 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

8 **Згировский, А. И.** Расчет и проектирование сэндвич-панелей с использованием стандартов Европейского союза / А. И. Згировский // Современные проблемы внедрения европейских стандартов в области строительства : материалы Междунар. науч.-метод. конф., Минск, 27–28 мая 2014 г. / Белорус. нац. техн. ун-т ; редкол. : В. Ф. Зверев, С. М. Коледа, С. Н. Делендик. – Минск, 2015. – С. 67–73.

9 Панели металлические с утеплителем. Правила проектирования = Панэлі металічныя з уцяпляльнікам. Правілы праектавання : ТКП 45-5.04-222-2010 (02250). – Введ. 07.12.10. – Минск : М-во архитектуры и стр-ва Респ. Беларусь, 2011. – 18 с.

10 Панели самонесущие теплоизоляционные слоистые заводского изготовления. Технические условия = Панэлі саманясучыя цеплаізаляцыйныя слаістыя завадскога вырабу. Тэхнічныя ўмовы : СТБ EN 14509-2009. – Введ. 01.01.2009. – Минск : Белорус. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 2009. – 312 с.

11 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

УДК 539.3, 539.8

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ МЕХАНОДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Н. А. ЗВЕРЕВ[1], *А. В. ЗЕМСКОВ*[1,2]
[1]*Московский авиационный институт (НИУ),*
[2] *НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

В работе рассматривается одномерная полярно-симметричная задача механодиффузии для многокомпонентного ортотропного цилиндра, находящегося под действием нестационарных радиальных равномерно распределенных поверхностных возмущений (рисунок 1).

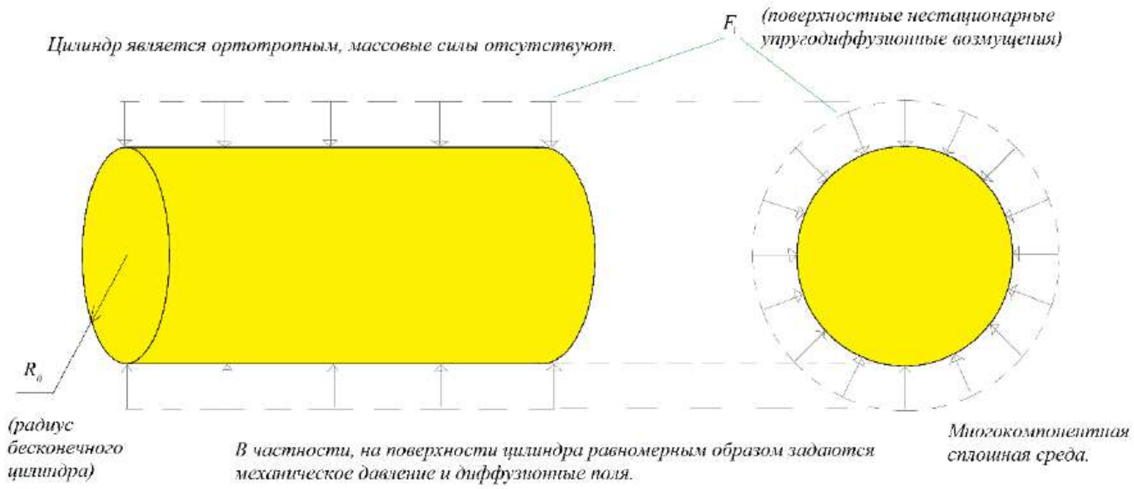

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

В задаче учтено время релаксации диффузионных потоков, подразумевающее конечную скорость распространения диффузионных возмущений. Математическая постановка задачи содержит:

линеаризованное дифференциальное уравнение движения цилиндра, закон сохранения массы в локальной форме, а также N линеаризованных дифференциальных уравнений массопереноса, обусловленного наличием диффузии [1–4]. Замыкают математическую постановку задачи граничные условия, при этом начальные условия принимаются равными нулю.

$$\begin{gathered}
\ddot{u} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(q)} \eta_q', \quad \eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^{N} \eta^{(q)}, \\
\dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q = -\Lambda_{11}^{(q)} \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left(\eta_q'' + \frac{\eta_q'}{r} \right), \\
\left. \left(\frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{q=1}^{N} \alpha_1^{(q)} \eta_q \right) \right|_{r=1} = f_1(\tau), \quad \eta_q \big|_{r=1} = f_{q+1}(\tau).
\end{gathered} \tag{1}$$

Безразмерные величины в (1) связаны с размерными следующим образом:

$$u = \frac{u_r}{L},\ \tau = \frac{Ct}{L},\ C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho},\ \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{L},\ c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}},\ r = \frac{r^*}{L},\ \alpha_1^{(q)} = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}},\ D_1^{(q)} = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL},\ \Lambda_{11}^{(q)} = \frac{m^{(q)} \alpha_{11}^{(q)} D_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho CLRT_0}.$$

Здесь t – время; u_r – радиальная компонента вектора механических перемещений; r^* – радиальная координата; ρ – плотность сплошной среды; T_0 – температура сплошной среды; $D_{11}^{(q)}$ – коэффициент самодиффузии; m^q – молярная масса q-го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; $\eta_q = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q-го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды; α_{11}^q – коэффициент, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных процессов; R – универсальная газовая постоянная; F_1 – удельная плотность объёмных сил; F_{q+1} – объемная плотность источников массопереноса; R_0 – радиус цилиндра (характерный линейный размер L равен радиусу цилиндра).

Решение задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничный условий [5]. Для этого рассматривается вспомогательная задача, решение которой ищется с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени и разложения искомых функций в ряды Фурье по специальным цилиндрическим функциям Бесселя нулевого и первого порядков.

$$\begin{gathered}
\ddot{u} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(q)} \eta_q', \quad \eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^{N} \eta^{(q)}, \\
\dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q = -\Lambda_{11}^{(q)} \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left(\eta_q'' + \frac{\eta_q'}{r} \right), \\
\left. \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \sum_{q=1}^{N} \alpha_1^{(q)} \eta_q \right) \right|_{r=1} = f_1^*(\tau), \quad \eta_q \big|_{r=1} = f_{q+1}(\tau).
\end{gathered} \tag{2}$$

Решение этой задачи получено в работе [4]. Далее, сравнивая граничные условия в задачах (1) и (2), получаем уравнение, связывающее их правые части:

$$\begin{gathered}
\int_0^\tau \left[G_{11}'(1, \tau - t) + c_{12} G_{11}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+1,1}(1, \tau - t) \right] f_1^*(t)\,dt = \\
= f_1(\tau) - \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau \left[G_{1m}'(1, \tau - t) + c_{12} G_{1m}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m}(1, \tau - t) \right] f_m(t)\,dt.
\end{gathered}$$

где G_{kl} – функции Грина задачи (3).

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра I рода. Его решение ищется численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников. После этого решение исходной задачи (1) записывается в виде

$$u(r,\tau)=\int_0^\tau G_{11}(r,\tau-t)\, f_1^*(t)\,dt+\sum_{m=2}^{N+1}\int_0^\tau G_{1m}(r,\tau-t)\, f_m(t)\,dt,$$

$$\eta_q(r,\tau)=\int_0^\tau G_{q+1,1}(r,\tau-t)\, f_1^*(t)\,dt+\sum_{m=2}^{N+1}\int_0^\tau G_{q+1,m}(r,\tau-t)\, f_m(t)\,dt.$$

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет выразить решение задачи с произвольными граничными условиями через какое-либо известное решение задачи данного класса.

Список литературы

1 **Deswal, S.** Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction / S. Deswal, K. K. Kalkal, S. S. Sheoran // Physica B: Condensed Matter. – 2016. – Vol. 496. – P. 57–68.

2 **Aouadi, M. A.** Problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion / M. A. Aouadi // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 5711–5722.

3 **Зверев, Н. А.** Модель механодиффузии для сплошного ортотропного цилиндра с учетом релаксации диффузионных процессов / Н. А. Зверев, А. В. Земсков // Авиация и космонавтика : тезисы докладов 19-й Междунар. конф., Москва, 23–27 ноября 2020 г. – М., 2020. – С. 458–459.

4 **Зверев, Н. А.** Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 2. – С. 156–167.

5 **Zemskov, A. V.** Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer / A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – Vol. 23, no. 1. – P. 36–41.

УДК 539.3, 539.8

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГОДИФФУЗИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

А. В. ЗЕМСКОВ[1,2], Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ [2,1]
[1]Московский авиационный институт (НИУ),
[2] НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины Тимошенко, находящейся в поле совместного действия механического и диффузионного полей.

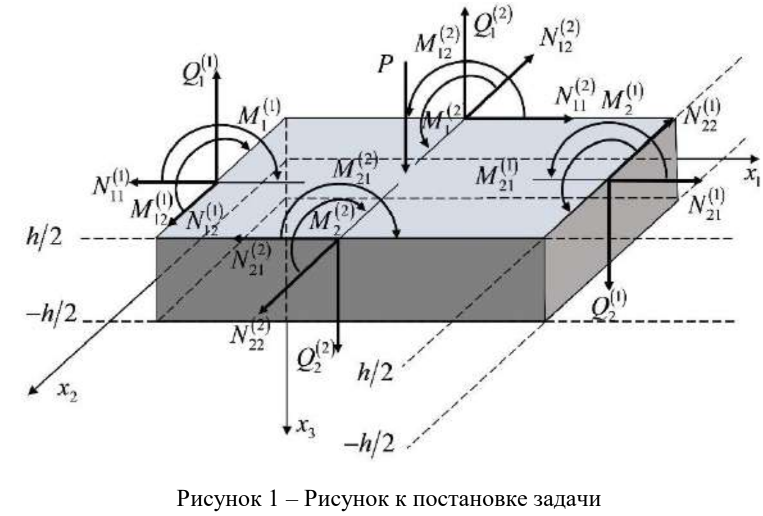

Рисунок 1 – Рисунок к постановке задачи