

9 Жаворонок С. И. Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы / С. И. Жаворонок, А. Н. Леонтьев, К. А. Леонтьев // Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engineering. – 2010. – Vol. 6, nos. 1–2. – P. 105–111.

10 Мовчан, А. А. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко, Т. Л. Сильченко // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 44–56.

11 Zhavoronok, S. I. On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type / S. I. Zhavoronok // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol. 17, no. 1. – P. 72–81.

УДК 539.3

О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

С. И. ЖАВОРОНОК

Институт прикладной механики РАН, г. Москва

А. С. КУРБАТОВ

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Рассмотрена линейная задача динамики нетонкой оболочки, описываемой общей теорией неоднородных анизотропных оболочек N-го порядка [1–3]. Модель оболочки [2, 3] как двумерной континуальной системы определена на касательном расслоении двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности оболочки, множеством переменных поля первого рода $u_i^{(k)}$, порождаемых разложением вектора перемещения по базисной системе функций $p_{(k)}(\zeta)$ безразмерной нормальной координаты $\zeta \in [-1, 1]$, поверхностной \mathcal{L}_S и контурной \mathcal{L}_T плотностями функционала Лагранжа, зависящими от переменных поля $u_\alpha^{(k)}, u_\zeta^{(k)}$ и их производных. Уравнения движения оболочки являются уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы [2, 3] и имеют второй порядок как по времени, так и по пространственным переменным ξ^α . С другой стороны, в работе [4] получены уравнения в производных первого порядка, являющиеся квазиканоническими уравнениями Гамильтона континуальной системы в соответствии с терминологией [5] и вытекающие из уравнений [3] в результате преобразования Лежандра плотностей функционала Лагранжа $\mathcal{L}_S, \mathcal{L}_T$ по всем производным [4, 5] всех переменных поля первого рода $u_\alpha^{(k)}$. Ниже рассмотрен частный случай, заключающийся в преобразовании Лежандра плотности функционала Лагранжа только по производным переменных поля $u_\alpha^{(k)}$ по одной из криволинейных координат ξ^α , $\alpha = 1, 2$, которым ставятся в соответствие обобщенные усилия $s_{(k)}^{\alpha i}$ аналогично [4]. Полученная система уравнений движения разрешена относительно производных первого порядка обобщенных перемещений и обобщенных усилий по одной из криволинейных координат ξ^1 (аналогично методу [6], где, однако, преобразование задачи к уравнениям первого порядка осуществлено в трехмерной постановке, и система разрешена относительно производных компонентов перемещения u_j по нормальной координате ζ). В отличие от [6] предложенные уравнения теории оболочек порождаются некоторой скалярной функцией – поверхностной плотностью функционала R_s , зависящей от обобщенных перемещений $u_\alpha^{(k)}$ и обобщенных усилий $s_{(k)}^{\alpha i}$ и в определенном смысле аналогичной функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем, а уравнения движения представляют собой обобщенные уравнения Рауса. Рассмотрено приложение полученных уравнений к решению задач о дисперсии нормальных волн в плоском слое [7–10]. Предполагается, что волновой вектор k сонаправлен координате ξ^1 . Полученные уравнения движения на плоскости «частота – волновое число» приводят к линейной относительно волнового числа задаче о собственных значениях, что существенно при исследовании как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн [6, 11]. При этом в отличие от подхода [6, 11] уравнения движения следуют из принципов аналитической динамики, обобщенной на континуальные системы [5]. Рассмотрены примеры задач для градиентно-неоднородных упругих слоев симметричной и несимметричной структуры, построены дисперсион-

ные кривые, соответствующие распространяющимся и затухающим модам нормальных волн, и проведен анализ сходимости приближенных решений при различных базисных системах $p_k(\zeta)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-01-00695-а и 19-08-00938-а).

Список литературы

- 1 **Жаворонок, С. И.** Модели высшего порядка анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 561–571.
- 2 **Жаворонок, С. И.** Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Вестник Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4–5. – С. 2154–2156.
- 3 **Жаворонок, С. И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 116–132.
- 4 **Zhavoronok, S. I.** On Hamiltonian formulations and conservation laws for plate theories of Vekua-Amosov type / S. I. Zhavoronok // Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engineering. – 2017. – Vol. 13, no. 4. – P. 82–95.
- 5 **Кильчевский, Н. А.** Аналитическая динамика континуальных систем / Н. А. Кильчевский, Г. А. Кильчинская, Н. Е. Ткаченко. – Киев : Наукова думка, 1979. – 188 с.
- 6 Modeling guided wave propagation in functionally graded plates by state-vector formalism and the Legendre polynomial method / J. Gao [et al.] // Ultrasonics. – 2019. – Vol. 99. – P. 105953.
- 7 **Жаворонок, С. И.** Исследования гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 4–2. – С. 693–701.
- 8 **Жаворонок, С. И.** Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 278–287.
- 9 **Жаворонок, С. И.** Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 45–56.
- 10 **Жаворонок, С. И.** Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории анизотропных оболочек N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложения к задачам стационарной динамики / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 333–344.
- 11 The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder / X. Zhang [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 89. – P. 299–313.

УДК 539.3

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАГРУЗКЕ

Ю. В. ЗАХАРЧУК, К. А. КУРЧЕВА

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Благодаря интенсивному развитию облегченных трехслойных конструкций за полувековой период производители расширили область применения своей продукции от космической отрасли до народного хозяйства. Трехслойные пакеты имеют важные конструктивные особенности и в условиях необходимости одновременного удовлетворения ряду противоречивых требований их использование становится наиболее близким оптимальному с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость [1]. Перспективные позиции среди легких ограждающих конструкций в строительной практике в последние десятилетия сохраняют металлические панели с утеплителем типа «сэндвич». Распространенные конструктивные решения стеновых и кровельных сэндвич-панелей представляют собой пакеты из двух листов металлической обшивки (оцинкованной, окрашенной или с полимерным покрытием) и слоя заполнителя в виде минеральной ваты, пенополистирола или пенополиуретана.

Ввиду расширения объектов строительства из сэндвич-панелей в промышленности и сельском хозяйстве происходит непрерывный процесс совершенствования ограждающих конструкций. Это сопровождается поиском новых конструктивных решений и новых композиций в составе трехслойных пакетов, интенсивной разработкой теорий и методов их расчёта. С запуска первого собственного производства сэндвич-панелей в нашей стране прошло два десятилетия, за это время была создана комплексная нормативная база, регламентирующая правила расчета и конструирования сэндвич-панелей, и проектировщики перешли от использования эксперимен-