

9 Жаворонок С. И. Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы / С. И. Жаворонок, А. Н. Леонтьев, К. А. Леонтьев // Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engineering. – 2010. – Vol. 6, nos. 1–2. – P. 105–111.

10 Мовчан, А. А. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко, Т. Л. Сильченко // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 44–56.

11 Zhavoronok, S. I. On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type / S. I. Zhavoronok // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol. 17, no. 1. – P. 72–81.

УДК 539.3

## О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

С. И. ЖАВОРОНОК

*Институт прикладной механики РАН, г. Москва*

А. С. КУРБАТОВ

*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*

Рассмотрена линейная задача динамики нетонкой оболочки, описываемой общей теорией неоднородных анизотропных оболочек N-го порядка [1–3]. Модель оболочки [2, 3] как двумерной континуальной системы определена на касательном расслоении двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности оболочки, множеством переменных поля первого рода  $u_i^{(k)}$ , порождаемых разложением вектора перемещения по базисной системе функций  $p_{(k)}(\zeta)$  безразмерной нормальной координаты  $\zeta \in [-1, 1]$ , поверхностной  $\mathcal{L}_S$  и контурной  $\mathcal{L}_T$  плотностями функционала Лагранжа, зависящими от переменных поля  $u_\alpha^{(k)}, u_\zeta^{(k)}$  и их производных. Уравнения движения оболочки являются уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы [2, 3] и имеют второй порядок как по времени, так и по пространственным переменным  $\xi^\alpha$ . С другой стороны, в работе [4] получены уравнения в производных первого порядка, являющиеся квазиканоническими уравнениями Гамильтона континуальной системы в соответствии с терминологией [5] и вытекающие из уравнений [3] в результате преобразования Лежандра плотностей функционала Лагранжа  $\mathcal{L}_S, \mathcal{L}_T$  по всем производным [4, 5] всех переменных поля первого рода  $u_\alpha^{(k)}$ . Ниже рассмотрен частный случай, заключающийся в преобразовании Лежандра плотности функционала Лагранжа только по производным переменных поля  $u_\alpha^{(k)}$  по одной из криволинейных координат  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , которым ставятся в соответствие обобщенные усилия  $s_{(k)}^{\alpha i}$  аналогично [4]. Полученная система уравнений движения разрешена относительно производных первого порядка обобщенных перемещений и обобщенных усилий по одной из криволинейных координат  $\xi^1$  (аналогично методу [6], где, однако, преобразование задачи к уравнениям первого порядка осуществлено в трехмерной постановке, и система разрешена относительно производных компонентов перемещения  $u_j$  по нормальной координате  $\zeta$ ). В отличие от [6] предложенные уравнения теории оболочек порождаются некоторой скалярной функцией – поверхностной плотностью функционала  $R_s$ , зависящей от обобщенных перемещений  $u_\alpha^{(k)}$  и обобщенных усилий  $s_{(k)}^{\alpha i}$  и в определенном смысле аналогичной функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем, а уравнения движения представляют собой обобщенные уравнения Рауса. Рассмотрено приложение полученных уравнений к решению задач о дисперсии нормальных волн в плоском слое [7–10]. Предполагается, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  сонаправлен координате  $\xi^1$ . Полученные уравнения движения на плоскости «частота – волновое число» приводят к линейной относительно волнового числа задаче о собственных значениях, что существенно при исследовании как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн [6, 11]. При этом в отличие от подхода [6, 11] уравнения движения следуют из принципов аналитической динамики, обобщенной на континуальные системы [5]. Рассмотрены примеры задач для градиентно-неоднородных упругих слоев симметричной и несимметричной структуры, построены дисперсион-

ные кривые, соответствующие распространяющимся и затухающим модам нормальных волн, и проведен анализ сходимости приближенных решений при различных базисных системах  $p_k(\zeta)$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-01-00695-а и 19-08-00938-а).*

#### Список литературы

- 1 **Жаворонок, С. И.** Модели высшего порядка анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 561–571.
- 2 **Жаворонок, С. И.** Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Вестник Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4–5. – С. 2154–2156.
- 3 **Жаворонок, С. И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 116–132.
- 4 **Zhavoronok, S. I.** On Hamiltonian formulations and conservation laws for plate theories of Vekua-Amosov type / S. I. Zhavoronok // Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engineering. – 2017. – Vol. 13, no. 4. – P. 82–95.
- 5 **Кильчевский, Н. А.** Аналитическая динамика континуальных систем / Н. А. Кильчевский, Г. А. Кильчинская, Н. Е. Ткаченко. – Киев : Наукова думка, 1979. – 188 с.
- 6 Modeling guided wave propagation in functionally graded plates by state-vector formalism and the Legendre polynomial method / J. Gao [et al.] // Ultrasonics. – 2019. – Vol. 99. – P. 105953.
- 7 **Жаворонок, С. И.** Исследования гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 4–2. – С. 693–701.
- 8 **Жаворонок, С. И.** Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 2. – С. 278–287.
- 9 **Жаворонок, С. И.** Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 45–56.
- 10 **Жаворонок, С. И.** Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории анизотропных оболочек N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложения к задачам стационарной динамики / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 333–344.
- 11 The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder / X. Zhang [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 89. – P. 299–313.

УДК 539.3

## АНАЛИЗ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАГРУЗКЕ

*Ю. В. ЗАХАРЧУК, К. А. КУРЧЕВА*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Благодаря интенсивному развитию облегченных трехслойных конструкций за полувековой период производители расширили область применения своей продукции от космической отрасли до народного хозяйства. Трехслойные пакеты имеют важные конструктивные особенности и в условиях необходимости одновременного удовлетворения ряду противоречивых требований их использование становится наиболее близким оптимальному с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость [1]. Перспективные позиции среди легких ограждающих конструкций в строительной практике в последние десятилетия сохраняют металлические панели с утеплителем типа «сэндвич». Распространенные конструктивные решения стеновых и кровельных сэндвич-панелей представляют собой пакеты из двух листов металлической обшивки (оцинкованной, окрашенной или с полимерным покрытием) и слоя заполнителя в виде минеральной ваты, пенополистирола или пенополиуретана.

Ввиду расширения объектов строительства из сэндвич-панелей в промышленности и сельском хозяйстве происходит непрерывный процесс совершенствования ограждающих конструкций. Это сопровождается поиском новых конструктивных решений и новых композиций в составе трехслойных пакетов, интенсивной разработкой теорий и методов их расчёта. С запуска первого собственного производства сэндвич-панелей в нашей стране прошло два десятилетия, за это время была создана комплексная нормативная база, регламентирующая правила расчета и конструирования сэндвич-панелей, и проектировщики перешли от использования эксперимен-