

3 Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958.

4 **Сосновский, Л. А.** О классификации контактных задач применительно к силовым системам машин / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков // Современные методы проектирования машин: сб. науч. тр. Вып. 2. В 7 т. / под общ. ред. П. А. Витязя. – Мн.: УП "Технопринт", 2004. – Т. 4. – С. 48 – 58.

5 **Щербаков, С. С.** Исследование напряженного состояния силовой системы для испытаний на контактно-механическую усталость / С. С. Щербаков // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: тр. I Міжнарод. науч.-техн. конф., 4-7 октября 2004 г., Тернополь, Украина) /

Получено 18.01.2006

**V. A. Zhmajlik, S. S. Shcherbakov, V. V. Komissarov.** Calculation of the stressed state model of the engagement in the field of contact

The technique and procedure of calculation of a three-dimensional stressed state for general view the unmatched contact, which is generated at interaction of elements of model of an engagement is offered. Use of this procedure allows to calculate a builders of stresses not only on a surface of contact and on an axis  $z$ , but also in any point of the elliptic unmatched contact. The analysis of an stressed state of model of an engagement is conducted and three-dimensional distributions of all a builders of a stresses which is characterize an stressed state in a zone of contact are indicated. General expression for calculation of stresses is written down in case of a moving contact.

It is established, that realization of the analysis of an stressed state with use of the developed procedure in comparison with a method of final elements gives a smaller lapse of calculation (accordingly 3 and 10 %), an opportunity of making of very major file of settlement points and functions of interpolation of stresses between them.

The knowledge of the stressed state in a zone of contact of model of an engagement is necessary at definition of an absolute extent of damage, termed in dangerous volume.

---

Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2006. № 1-2(12-13)

---

УДК 681.11.034.1

*В. В. КОМИССАРОВ, аспирант; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

## РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА МОДЕЛИ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Представлен расчет параметров эллиптической площадки контакта, образующейся при взаимодействии элементов модели зубчатого зацепления. Отличительной особенностью методики расчета является возможность ее полной автоматизации благодаря установлению полиномиальной взаимосвязи эксцентриситета эллипса контакта ( $e$ ) и геометрического параметра ( $\Omega$ ) и расчету эллиптических интегралов на ЭВМ. Произведена оценка зависимости рассчитанных параметров площадки контакта от контактной нагрузки для различных типоразмеров моделей зубчатого зацепления. Установлен характер изменения зависимости параметров площадки контакта от контактной нагрузки в связи с увеличением радиуса образца испытываемой модели. Данные этого расчета будут использованы при экспериментальном исследовании масштабного эффекта при контактной усталости.

**С**уществующие методы расчетов параметров площадок контактов в основном базируются на использовании расчетных таблиц, которые, как правило, содержатся в самих методиках. Однако проведение полномасштабных исследований параметров площадок контактов, а тем более в таком общем случае, как эллиптическая площадка контакта, требует пересмотра существующих методик и разработки новых подходов, основанных на применении ЭВМ.

Целью работы является решение задачи расчета параметров эллиптической площадки контакта, образующейся при взаимодействии элементов модели зубчатого зацепления, которое позволяет обойти перечисленные затруднения.

Модель зубчатого зацепления и метод совме-

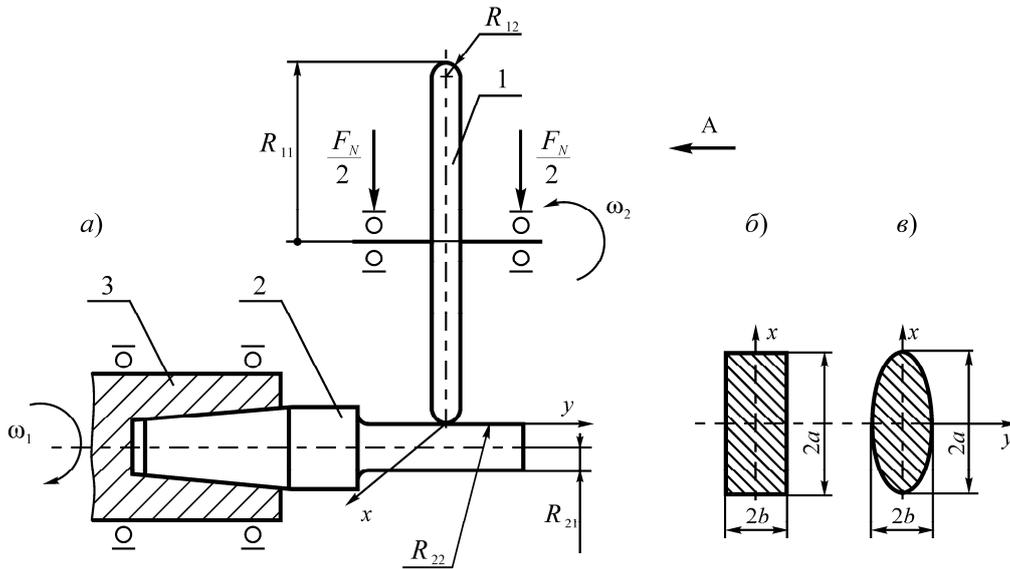
отв. ред. В.Т. Трощенко. – Тернополь: Тернопольский государственный технический университет имени Ивана Пулюя, 2004. – С.400–407.

6 Исследование напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс / Л. А. Сосновский [и др.] // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2005. – № 2. – С. 18 – 41.

7 Компьютерное моделирование опасных объемов для модели зубчатых зацеплений / М.А.Журавков [и др.] // Тр. 5-го Междунар. симпозиума по трибофатике (ISTF 2005), 3–7 октября 2005 г., Иркутск (Россия) / отв. ред. А.П. Хоменко. – Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2005. – Т. 1. – С. 142 – 148.

щенных испытаний зубчатых зацеплений описаны в работах [1 – 3]. Схема для расчета параметров площадки контакта изображена на рисунке 1, а.

Через контробразец 1 с радиусами  $R_{11}$  и  $R_{12}$  контактная нагрузка  $F_N$  передается на образец 2 с радиусами  $R_{21}$  и  $R_{22} = \infty$ . Если  $R_{11} = \infty$ , то реализуется площадка контакта в виде полоски с определяющими размерами  $2a \times 2b$  (рисунок 1, б). В таком случае моделируется зацепление цилиндрических зубчатых колес. При конечных величинах  $R_{11}$  реализуется контактная площадка в виде эллипса с определяющими размерами  $2a \times 2b$  (рисунок 1, в), при этом  $a > b$ , т. е.  $a$  – это всегда большая, а  $b$  – это всегда малая полуось эллипса. В таком случае моделируется зацепление нецилиндрических зубчатых колес (с любым профилем зуба).



1 – контрообразец; 2 – образец; 3 – шпindel испытательной машины  
 Рисунок 1 – Схема модели зубчатого зацепления с обозначением радиусов кривизны (а) и основные типы контактной площадки: полоска (б), эллипс (в)

В общем случае принимается (рисунок 2), что нормальное давление  $p(x,y)$  распределяется по площадке контакта по эллиптическому закону

$$p(x,y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (1)$$

где  $p_0$  – наибольшее давление в центре площадки контакта.

Закон распределения касательной контактной

нагрузки описывается формулой

$$fp(x,y) = fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (2)$$

где  $f$  – коэффициент трения.

В общем случае для расчета параметров эллиптической площадки контакта предварительно определяют геометрический параметр  $\Omega$  и эксцентриситет эллипса контакта [4 – 6]:

$$\Omega = \frac{1}{\sum k} \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\alpha}, \quad (3)$$

$$e^2(\Omega) = 2,667\Omega - 3,577\Omega^2 + 4,244\Omega^3 - 5,871\Omega^4 + 10,312\Omega^5 - 18,202\Omega^6 + 24,577\Omega^7 - 21,858\Omega^8 + 11,213\Omega^9 - 2,506\Omega^{10}, \quad (4)$$

где  $k_{ij}$  ( $ij = 1,2$ ) – кривизна соприкасающихся тел согласно рисунку 1:  $k_{11} = \frac{1}{R_{11}}, k_{12} = \frac{1}{R_{12}},$

$$k_{21} = \frac{1}{R_{21}}, k_{22} = \frac{1}{R_{22}}, \sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}.$$

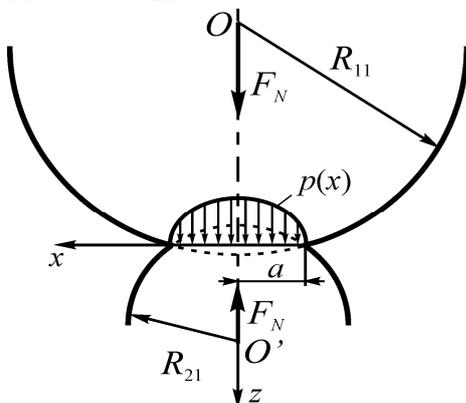


Рисунок 2 – Распределение нормального давления  $p(x)$  по площадке контакта (вид А)

Формулы для определения полуосей эллипса  $a, b$ , наибольшего давления  $p_0$  в центре площадки контакта, сближения осей  $\delta$  при действии контактной нагрузки  $F_N$  имеют вид

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3 \eta F_N}{2 \sum k}}, b = n_b \sqrt[3]{\frac{3 \eta F_N}{2 \sum k}}, S = \pi ab, \quad (5)$$

$$p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left( \frac{\sum k}{\eta} \right)^2 F_N},$$

$$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k F_N^2},$$

здесь коэффициенты

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1 + \Omega}{1 - \Omega} \right) D(e)},$$

$$n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1 - \Omega}{1 + \Omega} \right) (K(e) - D(e)) \sqrt{1 - e^2}},$$

$$n_p = \frac{1}{n_a n_b}, \quad n_\delta = K(e) \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1+\Omega}{1-\Omega}\right) D(e)}}, \quad (6)$$

обобщенный параметр свойств материалов

$$\eta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (7)$$

и эллиптические интегралы

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]. \quad (8)$$

В приведенных выше формулах  $K(e)$  – эллиптический интеграл 1-го рода;  $L(e)$  – эллиптический интеграл 2-го рода;  $D(e)$  – сочетание эллип-

тических интегралов 1-го и 2-го рода;  $E_1, E_2$  и  $\nu_1, \nu_2$  – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для двух (индексы 1,2) соприкасающихся тел.

В таблице 2 формулы (5) записаны для конкретных размеров моделей зубчатых зацеплений, приведенных в таблице 1.

Таблица 1 – Размеры моделей зубчатых зацеплений

Модель зубчатого зацепления	В миллиметрах			
	$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{21}$	$R_{22}$
1	50	3	4	$\infty$
2	50	3	5	$\infty$
3	50	3	6	$\infty$
4	50	3	10	$\infty$

Таким образом, модели зубчатых зацеплений, представленных в таблице 1, различаются только диаметром  $D = 2R_{21}$  образцов; они предназначены для исследования масштабного эффекта при контактной усталости.

Таблица 2 – Основные характеристики контактного взаимодействия

Параметр площадки контакта	1	2	3	4
	$\Omega = 0,105$ $e^2 = 0,24485$	$\Omega = 0,2048$ $e^2 = 0,42502$	$\Omega = 0,2821$ $e^2 = 0,53773$	$\Omega = 0,4706$ $e^2 = 0,74218$
Большая полуось эллипса контакта $a$ , м	$3,0378 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$	$3,359 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$	$3,6377 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$	$4,4885 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$
Меньшая полуось эллипса контакта $b$ , м	$2,6398 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$	$2,5469 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$	$2,4731 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$	$2,2788 \cdot 10^{-5} F_N^{1/3}$
Площадь эллипса контакта $S$ , м <sup>2</sup>	$2,5192 \cdot 10^{-9} F_N^{1/3}$	$2,6877 \cdot 10^{-9} F_N^{1/3}$	$2,8263 \cdot 10^{-9} F_N^{1/3}$	$3,2134 \cdot 10^{-9} F_N^{1/3}$
Сближение осей ролика и вала $\delta$ , м	$2,4072 \cdot 10^{-7} F_N^{1/3}$	$2,3222 \cdot 10^{-7} F_N^{1/3}$	$2,2544 \cdot 10^{-7} F_N^{1/3}$	$2,0742 \cdot 10^{-7} F_N^{1/3}$
Давление в центре контакта $p_0$ , Па	$5,9542 \cdot 10^8 F_N^{1/3}$	$5,581 \cdot 10^8 F_N^{1/3}$	$5,3073 \cdot 10^8 F_N^{1/3}$	$4,668 \cdot 10^8 F_N^{1/3}$

На рисунках 3 – 6 дано графическое представление зависимостей, приведенных в таблице 2. Графиками можно пользоваться для оцен-

ки (в первом приближении) величин  $a, b, S, \delta, p_0$  в зависимости от задаваемой контактной нагрузки  $F_N$ .

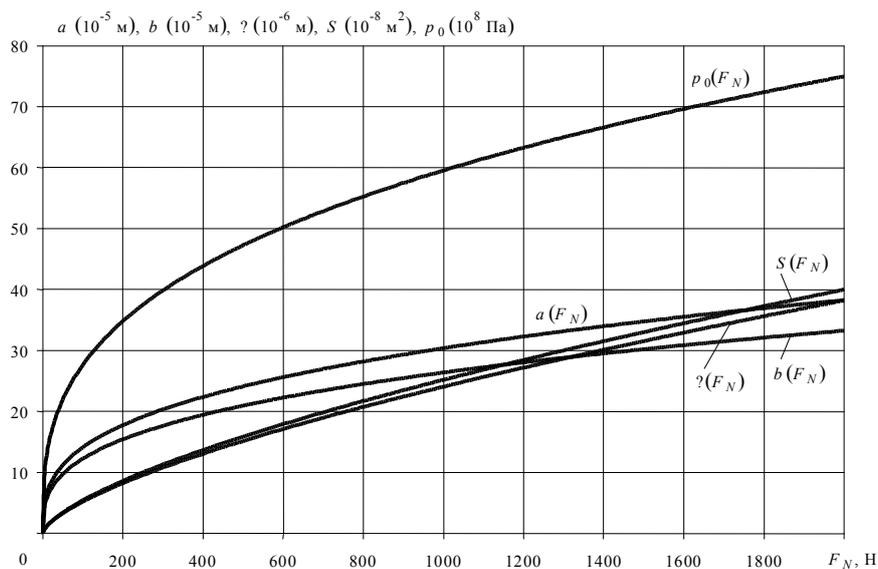


Рисунок 3 – Зависимость параметров контакта от контактной нагрузки ( $R_{21} = 4$  мм)

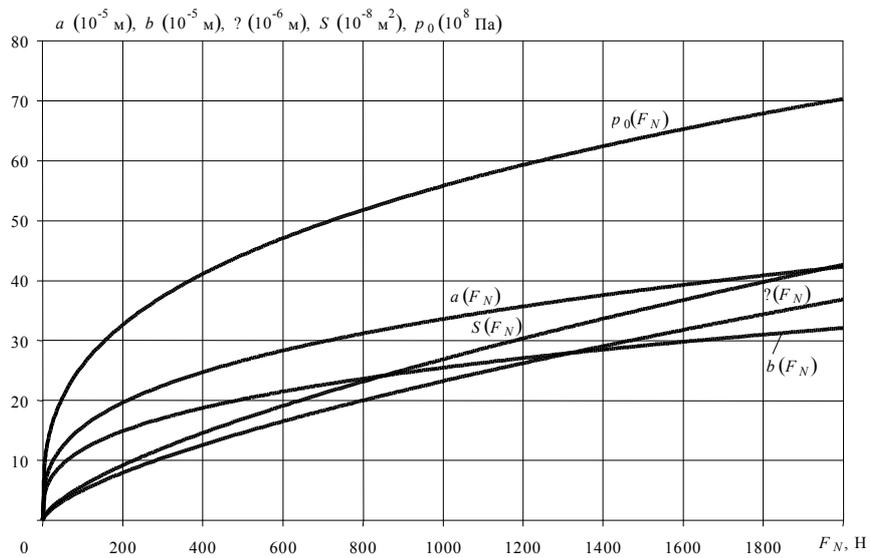


Рисунок 4 – Зависимость параметров контакта от контактной нагрузки ( $R_{21} = 5 \text{ мм}$ )

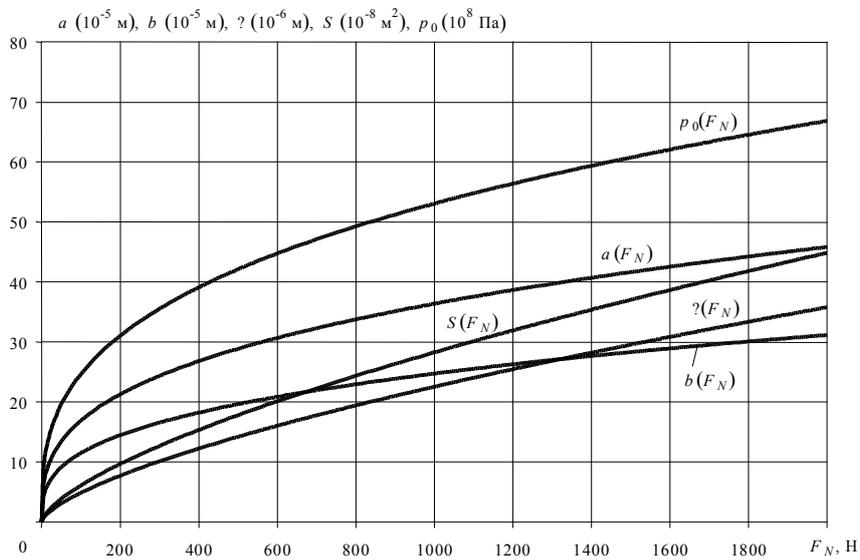


Рисунок 5 – Зависимость параметров контакта от контактной нагрузки ( $R_{21} = 6 \text{ мм}$ )

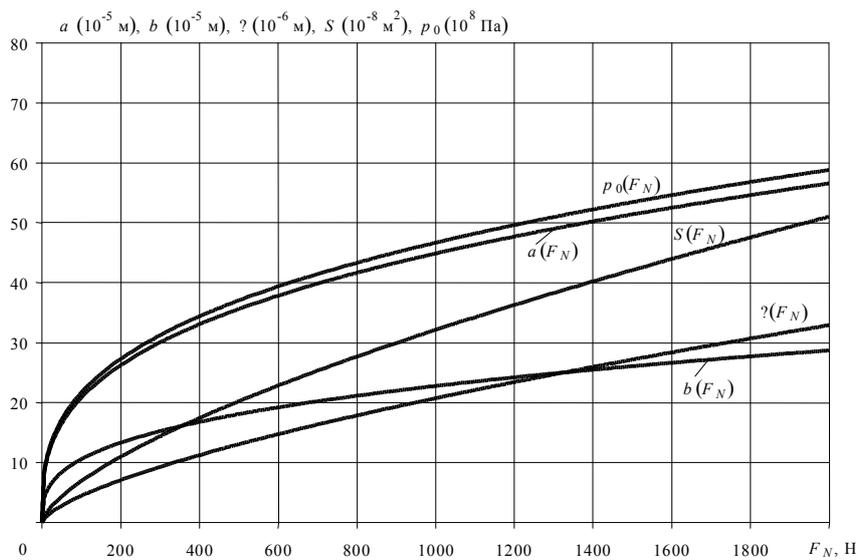


Рисунок 6 – Зависимость параметров контакта от контактной нагрузки ( $R_{21} = 10 \text{ мм}$ )

Сравнительный анализ изменения наибольшего нормального давления для различных типов паразитов площадки контакта представлен на рисунке 7.

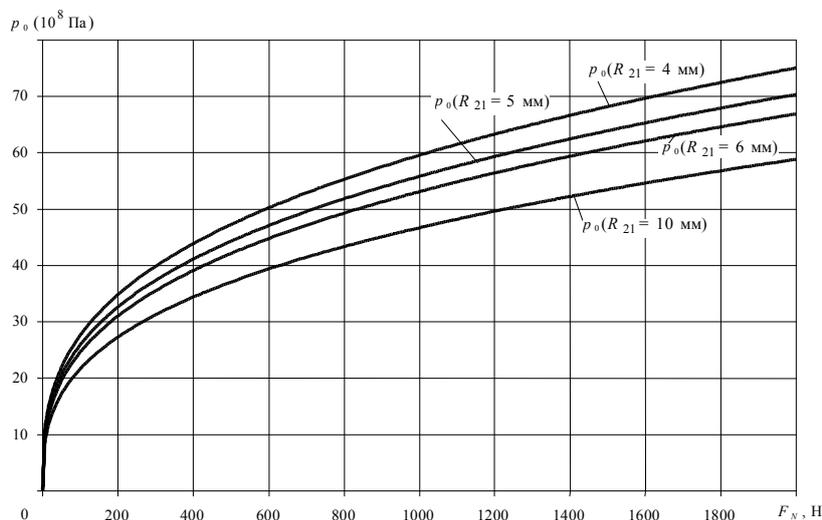


Рисунок 7 – Зависимость нормального давления от контактной нагрузки

Анализируя полученные зависимости, можем видеть, что увеличение радиуса образца испытуемой модели оказывает влияние:

- на снижение нормального давления  $p_0$ , причем для различной величины контактной нагрузки и радиуса образца снижение имеет строго определенную величину (разница между  $p_0(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $p_0(R_{21} = 5 \text{ мм})$  составляет  $\sim 7\%$ ; между  $p_0(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $p_0(R_{21} = 6 \text{ мм}) \sim 12\%$ ; между  $p_0(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $p_0(R_{21} = 10 \text{ мм}) \sim 27\%$ ) (подобная зависимость наблюдается и для других рассчитываемых параметров);

- на увеличение большей полуоси эллипса контакта  $a$  (разница между  $a(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $a(R_{21} = 5 \text{ мм})$  составляет  $\sim 11\%$ ; между  $a(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $a(R_{21} = 6 \text{ мм}) \sim 20\%$ ; между  $a(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $a(R_{21} = 10 \text{ мм}) \sim 48\%$ );

- на уменьшение меньшей полуоси эллипса контакта  $b$  (разница между  $b(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $b(R_{21} = 5 \text{ мм})$  составляет  $\sim 4\%$ ; между  $b(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $b(R_{21} = 6 \text{ мм}) \sim 7\%$ ; между  $b(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $b(R_{21} = 10 \text{ мм}) \sim 16\%$ );

- на увеличение площади контакта  $S$  (разница между  $S(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $S(R_{21} = 5 \text{ мм})$  составляет  $\sim 7\%$ ; между  $S(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $S(R_{21} = 6 \text{ мм}) \sim 12\%$ ; между  $S(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $S(R_{21} = 10 \text{ мм}) \sim 27\%$ );

- на снижение величины сближения осей  $\delta$  (разница между  $\delta(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $\delta(R_{21} = 5 \text{ мм})$  составляет  $\sim 4\%$ ; между  $\delta(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $\delta(R_{21} = 6 \text{ мм}) \sim 7\%$ ; между  $\delta(R_{21} = 4 \text{ мм})$  и  $\delta(R_{21} = 10 \text{ мм}) \sim 16\%$ );

Получено 18.01.2006

**V. V. Komissarov.** Calculation of parameters of the platform of contact models of the engagement.

Calculation of parameters of an elliptic platform of the contact formed at interaction of elements of model of an engagement is presented. A distinctive feature of a design procedure is the opportunity of its full automation, due to establishment of polynomial interrelation of a centering error of an ellipse of contact ( $e$ ) both a critical buckling ( $\Omega$ ) and to calculation of elliptic integrals on the computer. The estimation of dependence of the designed parameters of a platform of contact from a contact load for various standard sizes of models of an engagement is made. Character of a change of dependences of parameters of a platform of contact from a contact load is established due to increasing of radius of a sample of tested model. The data of this calculation will be used at an experimental research of a scale effect at contact fatigue.

Пропорциональное увеличение площади контакта  $S$  с ростом  $R_{21}$  вызывает такое же пропорциональное уменьшение контактного давления  $p_0$ , а уменьшение меньшей полуоси эллипса контакта  $b$  и величины сближения осей  $\delta$  происходит соизмеримо, хотя характер их зависимости от контактного давления имеет разный вид.

С использованием данных этого расчета планируется выполнить экспериментальные исследования масштабного эффекта при контактной усталости.

#### Список литературы

- 1 **Тюрин, С. А.** Новый метод испытаний зубчатых колес на моделях / С. А. Тюрин, В. В. Комиссаров // Динамика, прочность и ресурс машин и конструкций: тез. докл. Междунар. науч.-техн. конференции. – Киев, 2005. – Т.2. – С. 347 – 348.
- 2 **Жмайлик, В. А.** Опыт обеспечения работоспособности зубчатых колес / В. А. Жмайлик, С. А.Тюрин, В. В. Комиссаров // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: тр. I Междунар. науч.-техн. конф. 4 – 7 октября 2004 г., Тернополь, Украина / отв. ред. В.Т. Трощенко. – Тернополь: Тернопольский государственный технический университет имени Ивана Пулюя, 2004. –С. 337 – 342.
- 3 Метод совмещенных усталостных испытаний моделей зубчатых зацеплений / Н. А. Махутов [и др.] // Заводская лаборатория. –2005. –Т.71. –№ 1. –С. 55 – 57.
- 4 Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.] –М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958.
- 5 Исследование напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс / Л. А. Сосновский [и др.] // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. –2005. –№ 2. – С. 18 – 41.
- 6 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 555 с.