МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Экономика транспорта»

В. Т. БУШЕВ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2016

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Экономика транспорта»

В. Т. БУШЕВ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ

Одобрено научно-методической комиссией гуманитарно-экономического факультета в качестве учебно-методического пособия для студентов специальности «Транспортная логистика (по направлениям)»

Гомель 2016

УДК 330.4 (075.8)
ББК 65.050
Б94

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика»
С. И. Жогаль (УО «БелГУТ»)

Бушев, В. Т.

Б94 Экономико-математические методы и модели в логистике : учеб.-метод. пособие / В. Т. Бушев ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2016. – 83 с.
ISBN 978-985-554-513-3

В краткой форме рассмотрены теоретические основы математических методов определения кратчайших путей на сети дорог, решения транспортной задачи, метода динамического программирования и задач теории игр. Даны примеры решения экономических задач с их использованием.

Предназначено для студентов специальности «Транспортная логистика».

УДК 330.4 (075.8)
ББК 65.050

ISBN 978-985-554-513-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Найти наилучшее оптимальное решение, не рассматривая все возможные варианты, позволяет получившая развитие в прошлом столетии отрасль математики – **линейное программирование**. Методами линейного программирования можно, отправляясь от какого-то выбранного варианта, переходить к следующему, только лучшему. Процесс продолжается до тех пор, пока за конечное, сравнительно малое, число шагов не приходят к такому варианту – оптимальному, который уже нельзя улучшить.

Наиболее простая задача линейного программирования – так называемая транспортная, или задача оптимального прикрепления поставщиков к потребителям.

Трудности оптимального решения невыпуклых задач связаны с тем, что такие задачи часто являются многоэкстремальными, т. е. имеют много максимумов или минимумов. Целевую функцию невыпуклых задач при наличии всего двух переменных можно наглядно представить в виде рельефа местности, имеющего много вершин и впадин. При оптимизации требуется найти глобальный оптимум: самую высокую вершину в задачах на максимум или самую глубокую впадину в задачах на минимум.

Любая процедура улучшения плана в выпуклом (и линейном) программировании заключается в нахождении какой-либо исходной точки поверхности и движении от этой точки в сторону подъема (задачи на максимум) или спуска (задачи на минимум). В случае многоэкстремальной целевой функции в результате можно попасть не на самую высокую вершину (самую низкую впадину), а на какую-либо иную вершину (впадину), т. е. найти локальный оптимум, значительно уступающий глобальному по своим показателям. Отсюда очевидна целесообразность применения при многоэкстремальных функциях *принципа случайного поиска*, когда берут много отдаленных друг от друга исходных точек и повторяют процедуру оптимизации, начиная от каждой из них, в надежде найти глобальный оптимум при одной из таких попыток.

Конкретные правила выбора начальных точек могут быть различными, как и правила последующего улучшения плана. Таким образом, возникает множество приближенных и эвристических способов решения невыпуклых задач.

Если состояние каждого объекта оптимизируемой системы определяется незначительным числом варьируемых параметров, возможно точное решение невыпуклых задач на основе *принципа динамического программирования*. Этот принцип предназначен в основном для оптимизации многоэтапных процессов, отыскания наивыгоднейших путей развития систем с учетом ряда последовательных этапов или периодов. Но динамическое программирование может быть использовано и для одноэтапных решений, выбора наилучшего варианта какого-либо однократного действия. При этом этапность искусственно вводится в процесс поиска оптимума, хотя и отсутствует в самой оптимизируемой системе.

Динамическое программирование – это не алгоритм. Речь идет, скорее, об общем принципе, допускающем приложения ко многим задачам оптимизации с ограничениями, линейным или нелинейным, с непрерывными или дискретными переменными, но обладающими некоторым свойством, называемым разложимостью. Термин «динамическое программирование» по происхождению связан с тем, что этот метод первоначально применялся к оптимизации динамических систем, т. е. систем, меняющихся в ходе времени, эволюция которых может управляться некоторыми переменными управления. Однако в этом пособии мы увидим, что принцип динамического программирования носит более общий характер и может применяться к задачам, в которых время не участвует, например, к задачам целочисленной оптимизации.

Важным направлением совершенствования планово-экономической работы является использование современной вычислительной техники и математических методов для оптимизации экономических процессов и углубленного анализа количественных зависимостей в экономике. Однако для рассмотрения последующих событий экономического или социального характера, вследствие неопределенности их проистекания, сейчас уже недостаточно знаний, основанных только на формальной логике. Современная математика, базирующаяся на механистических схемах и булевой алгебре, стала непригодной для объяснения и прогнозирования действий, которые следует предпринять в будущем. Использовавшиеся до недавнего времени формальные модели, основанные на точных данных, в настоящее время не всегда возможно применять, так как неопределенность, характеризующая события в нашем обществе, не позволяет получить таковые. Вероятностные модели также не могут применяться по тем же причинам, поскольку для использования вероятностных законов необходимо иметь, во-первых, последовательность явлений, повторявшихся при определенных условиях, и, во-вторых, возможность перенести полученные результаты на другое явление, находящееся в тех же условиях. Для того, чтобы в ответ на возникающие перед обществом или производством новые обстоятельства и задачи получить возможность сформулировать какой-либо прогноз или мнение относительно характера будущих событий, стало необходимым применение новых методов, основанных на обработке неопределенных данных.

Разделом математики, хорошо приспособленным для отражения субъективного и неопределенного, является **теория нечетких множеств**.

Цель данного пособия – ознакомить студентов с основами экономико-математических методов и теории нечетких множеств при решении задач управления производством в условиях неопределенности.

В данном пособии рассмотрены теоретические основы математических методов определения кратчайших путей на сети дорог, решения транспортных задач и задач, допускающих постановку в терминах общей задачи динамического программирования, задач теории игр.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА СЕТИ ДОРОГ

Кратчайшие пути находим с использованием алгоритма Форда. Каждой дуге данной сети $(X,\ U)$ отнесем число $l(U) \geq 0$, которое назовем длиной дуги U. Требуется найти путь μ из вершины a в вершину b, чтобы полная длина его была наименьшей, т.е. $\sum_{U\in\mu} l(U)$.

Процесс решения для сетей с большим числом вершин следующий:

1 Помечаем каждую вершину X_i индексом λ_i; первоначально берем $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_i = \infty$ при $i \neq 1$.

2 Ищем такую дугу (X_i, X_j), для которой $\lambda_i - \lambda_i > l(X_i, X_j)$, затем заменяем индекс λ_j индексом $\lambda_j' = \lambda_i + l(X_i, X_j) < \lambda_j$. Заметим, что $\lambda_j' > 0$ при $j \neq 0$. Процесс продолжается до тех пор, пока найдется хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_i.

3 После того как индексы будут установлены, найдется такая вершина X_{p_1}, для которой $\lambda_n - \lambda_{p_1} = l\left(X_{p_1},\ X_n\right)$, так как индекс λ_n монотонно уменьшается и X_{p_1} – последняя вершина, поступившая для его уменьшения. Точно также найдется вершина X_{p_2}, для которой $\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} = l(X_{p_2} - \ X_{p_1})$ и т. д. Так как последовательность $\lambda_n, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \ldots$ строго убывающая, то при некотором k получим $X_{p_{k+1}} = X_1$ и длину кратчайшего пути из X_1 в X_n $\mu_0 = X_1, X_{p_k}, X_{p_{k+1}}, \ldots,\ X_p, X_n$.

С помощью алгоритма Форда можно получить кратчайшие пути только от одного узла. Затем необходимо переходить ко второму и так далее до тех пор, пока не будет известна вся матрица длин кратчайших путей. Матричная модификация алгоритма позволяет получить всю матрицу кратчайших путей.

Алгоритм поиска кратчайших путей между любыми двумя узлами сети основан на применении так называемой тернарной операции:

$$d_{ik} = d_{ij} + d_{jk}, \text{ если } d_{ik} > d_{ij} + d_{jk}, i \neq j \neq k, \qquad (1.1)$$

где d_{ik} – длина некоторой цепи, соединяющей i-й и -й узлы; d_{ij} и d_{jk} – длины цепей, соединяющих соответственно i-й , j-й и k-й узлы.

Определим кратчайшие пути между узлами расчетного полигона (рисунок 1.1).

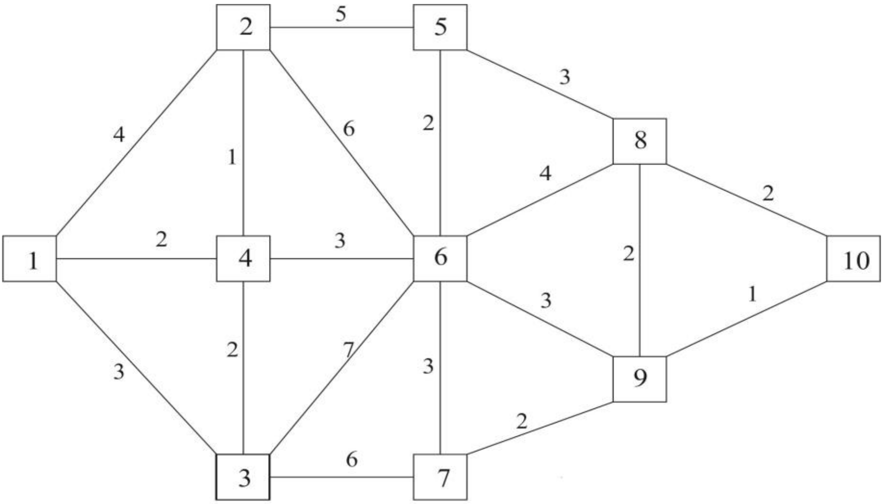

Рисунок 1.1 – Расчетный полигон

Работа алгоритма поиска кратчайших цепей в сети, основанного на применении тернарной операции, начинается с построения входной матрицы D_0, в которой элемент d_{ik} равен длине дуги (i, k), если такая дуга принадлежит сети G и $d_{ik} = \infty$ – в противном случае:

D_0

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	3	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	4	0	∞	1	5	6	∞	∞	∞	∞
3	3	∞	0	2	∞	7	6	∞	∞	∞
4	2	1	2	0	∞	3	∞	∞	∞	∞
5	∞	5	∞	∞	0	2	∞	3	∞	∞
6	∞	6	7	3	2	0	3	4	3	∞

7	∞	∞	6	∞	∞	3	0	∞	2	∞
8	∞	∞	∞	∞	3	4	∞	0	2	2
9	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

Одновременно строим вспомогательную матрицу B_0 с элементами (i,k), равными k:

B_0

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Пересчет элементов матрицы D_0 в соответствии с тернарной операцией вызывает и пересчет матрицы B_0 по следующему правилу:

$$(i,k) = (i,j), \text{ если } d_{ik} > d_{ij} + d_{jk},$$
$$(i,k) = (i,k), \text{ если } d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk}. \qquad (1.2)$$

Работа алгоритма начинается с применения тернарной операции при $j = 1$, т.е. с пересчета всех элементов матриц D_0 и B_0, кроме элементов первой строки и первого столбца:

$$d'_{23} = \min(d_{23};\ d_{21} + d_{13}) = \min(\infty; 4 + 3) = 7;$$

$$d'_{32} = \min(d_{32};\ d_{31} + d_{12}) = \min(\infty; 3 + 4) = 7.$$

Так как элемент d_{23} пересчитывается, то элемент (2, 3) матрицы B_0 изменяется на элемент (2, 1) согласно правилу (1. 2). Аналогично элемент (3, 2) заменяется на элемент (3, 1).

Элементы, претерпевшие изменения на *n*-м шаге, в матрицах выделены жирным шрифтом:

$$d'_{24} = \min(d_{24};\ d_{21} + d_{14}) = \min(1; 4 + 2) = 1;$$

$$d'_{42} = \min(d_{42};\ d_{41} + d_{12}) = \min(1; 2 + 4) = 1.$$

Элементы (2, 4) и (4, 2) в матрице B_2 остаются без изменений, так как $d'_{24} = d_{24}$ и $d'_{42} = d_{42}$:

$$d'_{34} = \min(\mathrm{d}_{34};\ \mathrm{d}_{31} + \mathrm{d}_{14}) = \min(2; 3 + 2) = 2;$$

$$d'_{43} = \min(\mathrm{d}_{43};\ \mathrm{d}_{41} + \mathrm{d}_{13}) = \min(2; 2 + 3) = 2.$$

Элементы (3,4) и (4,3) в матрице B_2 остаются без изменений, так как $d'_{34} = d_{34}$ и $d'_{43} = d_{43}$.

Все остальные элементы матрицы D_0 переносятся в матрицу D_1 без изменения:

D_1

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	3	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	4	0	7	1	5	6	∞	∞	∞	∞
3	3	7	0	2	∞	7	6	∞	∞	∞
4	2	1	2	0	∞	3	∞	∞	∞	∞
5	∞	5	∞	∞	0	2	∞	3	∞	∞
6	∞	6	7	3	2	0	3	4	3	∞
7	∞	∞	6	∞	∞	3	0	∞	2	∞
8	∞	∞	∞	∞	3	4	∞	0	2	2
9	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

Одновременно строим вспомогательную матрицу B_1:

B_1

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	**1**	4	5	6	7	8	9	10
3	1	**1**	3	4	5	6	7	8	9	10

4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Следующая итерация сводится к пересчету всех элементов, кроме второго столбца и второй строки, т. е. при $j = 2$:

$$d'_{14} = \min(d_{14};\ d_{12} + d_{24}) = \min(2; 4 + 1) = 2;$$

$$d'_{41} = \min(d_{41};\ d_{42} + d_{21}) = \min(2; 1 + 4) = 2.$$

Элементы (1, 4) и (4, 1) в матрице B_2 остаются без изменений, так как $d'_{14} = d_{14}$ и $d'_{41} = d_{41}$:

$$d'_{15} = \min(d_{15};\ d_{12} + d_{25}) = \min(\infty; 4 + 5) = 9;$$

$$d'_{51} = \min(d_{51};\ d_{52} + d_{21}) = \min(\infty; 5 + 4) = 9.$$

Элементы (1, 5) и (5, 1) в матрице B_2 заменяются на элемент (1, 2), равный 2:

$$d'_{16} = \min(d_{16};\ d_{12} + d_{26}) = \min(\infty; 4 + 6) = 10;$$

$$d'_{61} = \min(d_{61};\ d_{62} + d_{21}) = \min(\infty; 6 + 4) = 10.$$

Элементы (1, 6) и (6, 1) в матрице B_2 заменяются на элемент (1, 2), равный 2:

$$d'_{35} = \min(d_{35};\ d_{32} + d_{25}) = \min(\infty; 7 + 5) = 12;$$

$$d'_{53} = \min(d_{53};\ d_{52} + d_{23}) = \min(\infty; 5 + 7) = 12.$$

Элементы (3, 5) и (5, 3) в матрице B_2 заменяются на элемент (1, 2), равный 2:

$$d'_{36} = \min(d_{36};\ d_{32} + d_{26}) = \min(7; 7 + 6) = 7;$$

$$d'_{63} = \min(d_{63};\ d_{62} + d_{23}) = \min(7; 6 + 7) = 7.$$

Элементы (3, 6) и (6, 3) в матрице B_2 остаются без изменений, так как $d'_{36} = d_{36}$ и $d'_{63} = d_{63}$:

$$d'_{45} = \min(d_{45};\ d_{42} + d_{25}) = \min(\infty; 1 + 5) = 6;$$

$$d'_{54} = \min(d_{54};\ d_{52} + d_{24}) = \min(\infty; 5 + 1) = 6.$$

Элементы (4, 5) и (5, 4) в матрице B_2 заменяются на элемент (1, 2), равный 2:

$$d'_{46} = \min(d_{46};\ d_{42} + d_{26}) = \min(3; 1 + 6) = 3;$$

$$d'_{64} = \min(d_{64};\ d_{62} + d_{24}) = \min(3; 6 + 1) = 3.$$

Элементы (4, 6) и (6, 4) в матрице B_2 остаются без изменений, так как $d'_{46} = d_{46}$ и $d'_{64} = d_{64}$:

$$d'_{56} = \min(d_{56};\ d_{52} + d_{26}) = \min(2; 5 + 6) = 2;$$

$$d'_{65} = \min(d_{65};\ d_{62} + d_{25}) = \min(2; 6 + 5) = 2.$$

Элементы (5, 6) и (6, 5) в матрице B_2 остаются без изменений, так как $d'_{56} = d_{56}$ и $d'_{65} = d_{65}$.

Все остальные элементы матриц D_2 и B_2 также остаются без изменений:

D_2

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	3	2	**9**	**10**	∞	∞	∞	∞
2	4	0	7	1	5	6	∞	∞	∞	∞
3	3	7	0	2	**12**	7	6	∞	∞	∞
4	2	1	2	0	**6**	3	∞	∞	∞	∞
5	**9**	5	**12**	**6**	0	2	∞	3	∞	∞
6	**10**	6	7	3	2	0	3	4	3	∞
7	∞	∞	6	∞	∞	3	0	∞	2	∞
8	∞	∞	∞	∞	3	4	∞	0	2	2
9	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

B_2

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	**2**	**2**	7	8	9	10
2	1	2	**1**	4	5	6	7	8	9	10
3	1	**1**	3	4	**2**	6	7	8	9	10

4	1	2	3	4	**2**	6	7	8	9	10
5	**2**	2	**2**	**2**	5	6	7	8	9	10
6	**2**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Производим расчеты при $j = 3, 4, 5, 6$ и заполняем матрицы $D_3, B_3;\ D_4, B_4;\ D_5, B_5;\ D_6, B_6$.

D_3

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	3	2	9	10	**9**	∞	∞	∞
2	4	0	7	1	5	6	**13**	∞	∞	∞
3	3	7	0	2	12	7	6	∞	∞	∞
4	2	1	2	0	6	3	**8**	∞	∞	∞
5	9	5	12	6	0	2	**18**	3	∞	∞
6	10	6	7	3	2	0	3	4	3	∞
7	**9**	**13**	6	**8**	**18**	3	0	∞	2	∞
8	∞	∞	∞	∞	3	4	∞	0	2	2
9	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

B_3

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	2	2	**3**	8	9	10
2	1	2	1	4	5	6	**3**	8	9	10
3	1	1	3	4	2	6	7	8	9	10
4	1	2	3	4	2	6	**3**	8	9	10
5	2	2	2	2	5	6	**3**	8	9	10
6	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	**3**	**3**	3	**3**	**3**	6	7	8	9	10
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

D_4

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	0	**3**	3	2	**8**	**5**	9	∞	∞	∞
2	**3**	0	**3**	1	5	**4**	**9**	∞	∞	∞
3	3	7	0	2	**8**	**5**	6	∞	∞	∞
4	2	1	2	0	6	3	8	∞	∞	∞
5	**8**	5	**8**	6	0	2	**14**	3	∞	∞
6	**5**	**4**	**5**	3	2	0	3	4	3	∞
7	9	**9**	6	8	**14**	3	0	∞	2	∞
8	∞	∞	∞	∞	3	4	∞	0	2	2
9	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

B_4

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	**4**	3	4	**4**	**4**	7	11	9	10
2	**4**	2	**4**	4	5	**4**	**4**	8	9	10
3	1	**4**	3	4	**4**	**4**	7	11	9	10
4	1	2	3	4	2	6	7	8	9	10
5	**4**	2	**4**	2	5	6	**4**	8	9	10
6	**4**	**4**	**4**	4	5	6	7	8	9	10
7	1	**4**	3	4	**4**	6	7	17	9	10
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

D_5

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	3	2	8	5	9	**11**	∞	∞
2	3	0	3	1	5	4	9	**8**	∞	∞
3	3	7	0	2	8	5	6	**11**	∞	∞
4	2	1	2	0	6	3	8	∞	∞	∞
5	8	5	8	6	0	2	14	3	∞	∞
6	5	4	5	3	2	0	3	4	3	∞
7	9	9	6	8	14	3	0	**17**	2	∞
8	**11**	**8**	**11**	∞	3	4	**17**	0	2	2
9	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

B_5

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	1	4	3	4	4	4	7	**5**	9	10
2	4	2	4	4	5	4	4	**5**	9	10
3	1	4	3	4	4	4	7	**5**	9	10
4	1	2	3	4	2	6	7	8	9	10
5	4	2	4	2	5	6	4	8	9	10
6	4	4	4	4	5	6	7	8	9	10
7	1	4	3	4	4	6	7	**5**	9	10
8	**5**	**5**	**5**	4	5	6	**5**	8	9	10
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

D_6

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	3	2	**7**	5	**8**	**9**	**8**	∞
2	3	0	3	1	5	4	9	8	**7**	∞
3	3	7	0	2	**7**	5	6	**9**	**8**	∞
4	2	1	2	0	**5**	3	**6**	**7**	**6**	∞
5	**7**	5	**7**	**5**	0	2	**5**	3	**5**	∞
6	5	4	5	3	2	0	3	4	3	∞
7	**8**	9	6	**6**	**5**	3	0	**7**	2	∞
8	**9**	8	**9**	**7**	3	4	**7**	0	2	2
9	**8**	**7**	**8**	**6**	**5**	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

B_6

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	3	4	**6**	4	**6**	**6**	**6**	10
2	4	2	4	4	5	4	4	5	**6**	10
3	1	4	3	4	**6**	4	7	**6**	**6**	10
4	1	2	3	4	**6**	6	**6**	**6**	**6**	10
5	**6**	2	**6**	**6**	5	6	**6**	8	**6**	10
6	4	4	4	4	5	6	7	8	9	10
7	**6**	4	3	**6**	**6**	6	7	**6**	9	10
8	**6**	5	**6**	**6**	5	6	**6**	8	9	10
9	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Производим расчеты при $j = 7$:

$$d'_{19} = \min(d_{19};\ d_{17} + d_{79}) = \min(8; 9 + 2) = 8;$$
$$d'_{91} = \min(d_{91};\ d_{97} + d_{71}) = \min(8; 2 + 9) = 8.$$

Элементы (1, 9) и (9, 1) в матрице B_7 остаются без изменений, так как

$d'_{19} = d_{19}$ и $d'_{91} = d_{91}$:

$$d'_{36} = \min(d_{36};\ d_{37} + d_{76}) = \min(7; 6 + 3) = 7;$$
$$d'_{63} = \min(d_{63};\ d_{67} + d_{73}) = \min(7; 3 + 6) = 7.$$

Элементы (3, 6) и (6, 3) в матрице B_7 остаются без изменений, так как $d'_{36} = d_{36}$ и $d'_{63} = d_{63}$:

$$d'_{39} = \min(d_{39};\ d_{37} + d_{79}) = \min(8; 6 + 2) = 8;$$
$$d'_{93} = \min(d_{93};\ d_{97} + d_{73}) = \min(8; 2 + 6) = 8.$$

Элементы (3, 9) и (9, 3) в матрице B_7 остаются без изменений, так как $d'_{39} = d_{39}$ и $d'_{93} = d_{93}$:

$$d'_{69} = \min(d_{69};\ d_{67} + d_{79}) = \min(3; 3 + 2) = 3;$$
$$d'_{96} = \min(d_{96};\ d_{97} + d_{76}) = \min(3; 2 + 3) = 3.$$

Элементы (6, 9) и (9, 6) в матрице B_7 остаются без изменений, так как $d'_{69} = d_{69}$ и $d'_{96} = d_{96}$.

Из произведенных на седьмом шаге расчетов видим, что все элементы матриц D_6 и B_6 остаются без изменений. Переносим их соответственно в матрицы D_7 и B_7.

D_7

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	3	2	7	5	8	9	8	∞
2	3	0	3	1	5	4	9	8	7	∞
3	3	7	0	2	7	5	6	9	8	∞
4	2	1	2	0	5	3	6	7	6	∞
5	7	5	7	5	0	2	5	3	5	∞
6	5	4	5	3	2	0	3	4	3	∞
7	8	9	6	6	5	3	0	7	2	∞
8	9	8	9	7	3	4	7	0	2	2
9	8	7	8	6	5	3	2	2	0	1
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	1	0

B_7

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	3	4	6	4	6	6	6	10
2	4	2	4	4	5	4	4	5	6	10
3	1	4	3	4	6	4	7	6	6	10

4	1	2	3	4	6	6	6	6	6	10
5	6	2	6	6	5	6	6	8	6	10
6	4	4	4	4	5	6	7	8	9	10
7	6	4	3	6	6	6	7	6	9	10
8	6	5	6	6	5	6	6	8	9	10
9	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Производём расчеты при $j = 8$ и $j = 9$ и заполним матрицы $D_8, B_8;\ D_9, B_9;$

D_8

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	3	2	7	5	8	9	8	**11**
2	3	0	3	1	5	4	9	8	7	**10**
3	3	7	0	2	7	5	6	9	8	**13**
4	2	1	2	0	5	3	6	7	6	**9**
5	7	5	7	5	0	2	5	3	5	**5**
6	5	4	5	3	2	0	3	4	3	**6**
7	8	9	6	6	5	3	0	7	2	**9**
8	9	8	9	7	3	4	7	0	2	2
9	8	7	8	6	5	3	2	2	0	1
10	**11**	**10**	**13**	**9**	**5**	**6**	**9**	2	1	0

B_8

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	3	4	6	4	6	6	6	**8**
2	4	2	4	4	5	4	4	5	6	**8**
3	1	4	3	4	6	4	7	6	6	**8**
4	1	2	3	4	6	6	6	6	6	**8**
5	6	2	6	6	5	6	6	8	6	**8**
6	4	4	4	4	5	6	7	8	9	**8**
7	6	4	3	6	6	6	7	6	9	**8**
8	6	5	6	6	5	6	6	8	9	10
9	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10
10	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	9	10

D_9

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	0	3	3	2	7	5	8	9	8	**9**
2	3	0	3	1	5	4	9	8	7	**8**
3	3	7	0	2	7	5	6	9	8	**9**
4	2	1	2	0	5	3	6	7	6	**7**
5	7	5	7	5	0	2	5	3	5	5
6	5	4	5	3	2	0	3	4	3	**4**
7	8	9	6	6	5	3	0	7	2	**3**
8	9	8	9	7	3	4	7	0	2	2
9	8	7	8	6	5	3	2	2	0	1
10	**9**	**8**	**9**	**7**	5	**4**	**3**	2	1	0

B_9

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	3	4	6	4	6	6	6	**9**
2	4	2	4	4	5	4	4	5	6	**9**
3	1	4	3	4	6	4	7	6	6	**9**
4	1	2	3	4	6	6	6	6	6	**9**
5	6	2	6	6	5	6	6	8	6	8
6	4	4	4	4	5	6	7	8	9	**9**
7	6	4	3	6	6	6	7	6	9	**9**
8	6	5	6	6	5	6	6	8	9	10
9	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10
10	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**9**	**9**	**8**	9	10

Полученная матрица D_9 является матрицей длин кратчайших путей между узлами расчетной сети.

По вспомогательной матрице B_9 можно построить любую из кратчайших цепей между узлами расчетной сети. Построим, например, кратчайшую цепь из первого узла в десятый. Элемент матрицы B_9 (1,10) равен 9. Элемент (1,9) равен 6.Элемент (1,6) равен 4.

Поэтому кратчайшая цепь из первого узла в десятый узел будет

$$1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10.$$

Аналогично по матрице D_9 определяются расстояния из любого узла во все остальные узлы сети.

Алгоритм Форда может быть также использован для отыскания максимального пути графа. Достаточно положить $\lambda_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots n,$ а затем заменить λ_i на $\lambda'_j = \lambda_j + l(X_i, X_j)$, если $\lambda'_j > \lambda_j$, до тех пор, пока возможно увеличивать λ_j.

Исходные данные задачи по вариантам представлены в приложении Д.

2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

2.1 Метод потенциалов для решения транспортной задачи в матричной форме с ограничениями пропускной способности

Задание

1 Построить оптимальный план перевозок каменного угля с пяти станций A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5), обслуживающих шахты, до девяти крупных потребителей, имеющих подъездные пути B_j (j = 1, 2, …, 8, 9).

По своему варианту студент приводит лишь две заполненные матрицы: с начальным планом перевозки и с оптимальным планом перевозки. На обеих матрицах записываются ресурсы станций отправления и потребности станций назначения.

2 Определить объем тонно-километровой работы начального и оптимального планов перевозки груза.

Исходные данные о наличии ресурсов на пяти станциях отправления A_i приведены в таблице 2.1, данные о размерах прибытия груза B_j на девять станций назначения – в таблице 2.2. Расстояние перевозки от каждой i-й станции отправления до каждой j-й станции назначения указано в таблице 2.3 в каждой клетке в квадратных скобках. Ограничения пропускной способности указаны в фигурных скобках. Матрица расстояний и ограничений пропускной способности принимается одинаковой для любого варианта.

В таблице 2.1 номер варианта определяют по последней, в таблице 2.2 – по предпоследней цифре шифра зачетной книжки.

Таблица 2.1 – **Ресурсы станции отправления** A_i

В тысячах тонн

Номер станции отправления (строка матрицы)	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_1	155	250	150	195	155	250	300	150	100	245
A_2	150	145	155	155	200	205	150	150	255	300
A_3	145	155	150	150	250	145	155	170	150	100
A_4	150	200	145	150	150	150	150	130	150	100
A_5	300	150	300	250	145	150	145	300	245	155
Итого отправлено	900	900	900	900	900	900	900	900	900	900

Таблица 2.2 – **Объем прибытия груза B_j на станции назначения**

В тысячах тонн

Номер станции назначения	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

(строка матрицы)										
B_1	150	90	100	50	150	35	85	65	145	130
B_2	100	90	100	150	100	85	50	220	80	115
B_3	100	110	95	50	100	80	120	80	100	80
B_4	100	110	45	150	100	80	120	85	115	95
B_5	100	100	105	90	100	100	80	100	80	100
B_6	50	100	155	90	100	100	110	50	70	50
B_7	100	100	100	110	90	220	80	65	35	55
B_8	50	50	50	60	40	70	30	70	50	70
B_9	150	150	150	150	120	130	225	165	225	205
И т о г о прибыло	900	900	900	900	900	900	900	900	900	900

Методические указания по выполнению задания

1 Решение задачи начинают с составления исходной матрицы, приведенной в таблице 2.3. Для решения задачи в столбец A_i заносят размеры ресурсов станций отправления, а в строку B_j – объемы прибытия грузов на станции назначения. После записи ресурсов и потребностей груза по своему варианту на исходную матрицу для решения задачи строят начальный план любым известным способом [2, с. 35]. Пример построения начального плана базисного варианта приведен в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – **Пример построения начального плана**

В тысячах тонн

Объемы ресурсов станций отправления A_i	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j									U_i
	$B_1 = 100$	$B_2 = 100$	$B_3 = 100$	$B_4 = 100$	$B_5 = 150$	$B_6 = 150$	$B_7 = 100$	$B_8 = 100$	$B_9 = 100$	
$A_1 = 150$	[80]	[40] **100** *X*	[90]	[105]	[150]	{30} [50] **30**	[75] **20** *X*	[80]	[90]	
$A_2 = 150$	[10] **100** *X*	[30]	[45]	[40]	[25]	[65]	{30} [15] **30**	[30] **10** *X*	{10} [30] **10**	
$A_3 = 150$	{10} [20]	[35]	[75]	[160]	[90]	[80]	[70]	[40] **90** *X*	[60] **60** *X*	
$A_4 = 250$	[45]	[5]	[35] **100** *X*	[30] **100** *X*	[110]	[40] **20** *X*	[75]	[30]	[20] **30** *X*	
$A_5 = 300$	[15]	{15} [25]	[10]	{20} [35]	[25] **150** *X*	[80] **100** *X*	[20] **50** *X*	[70]	[85]	

V_j										

Студент после составления начального плана обязан проверить баланс по строкам и столбцам матрицы. Число базисных клеток (базисной клеткой называется клетка, имеющая корреспонденцию, т. е. объем перевозки из i-й станции отправления на j-ю станцию назначения) должно быть равно: $K = m + n - 1$, где m – число строк; n – число столбцов матрицы. Для рассматриваемой матрицы $K = 5 + 9 - 1 = 13$. Если число базисных клеток больше числа K, то начальный план составлен неправильно. В этом случае студенту рекомендуется составить начальный план заново. Клетки, где величина перевозки равна пропускной способности (например, клетка 1–6 таблицы 2.3), будем называть небазисными. Базисные клетки помечены знаком X, а величины корреспонденций в них показаны жирным шрифтом.

2 Оптимальный план перевозок на заданной матрице необходимо составить по методу потенциалов. Любой допустимый план является оптимальным тогда, когда каждой строке и каждому столбцу могут быть присвоены некоторые числа U_i и V_j, называемые потенциалами и отвечающие следующим условиям:

$$V_j - U_i \le c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0; \quad (2.1)$$

$$V_j - U_i = c_{ij} \text{ для } d_{ij} > x_{ij} \ge 0; \quad (2.2)$$

$$V_j - U_i \ge c_{ij} \text{ для } x_{ij} = d_{ij}, \quad (2.3)$$

где V_j – потенциал j-го столбца;

U_i – потенциал i-й строки;

c_{ij} – расстояние перевозки от i-го поставщика до j-го потребителя;

x_{ij} – корреспонденция (размеры перевозок) от i-го поставщика до j-го потребителя;

d_{ij} – величина пропускной способности.

3 Присвоение потенциалов начинают со строки, в которой среди базисных клеток имеется максимальное расстояние. Этой строке можно присвоить любой положительный потенциал, например 100. Затем, используя условие оптимальности (2.2), находят потенциалы остальных строк и столбцов:

для j-го столбца –

$$V_j = U_i + c_{ij}, \quad (2.4)$$

для i-й строки –

$$U_i = V_j - c_{ij}. \quad (2.5)$$

4 После присвоения всем строкам и столбцам потенциалов определяют нарушения неравенств (2.1) и (2.3):

$$H_{ij} = V_j - U_i - c_{ij}. \quad (2.6)$$

Для свободных клеток нарушения являются положительными по всей величине, для клеток с поставкой, равной пропускной способности, – отрицательными.

5 Улучшение допустимого плана начинают с клетки, имеющей максимальное (по модулю) нарушение $H_{ij}^{\max}$. Для этой клетки строят замкнутый контур, в который входят только базисные клетки и выбранная клетка с нарушением. Замкнутый контур строится следующим образом. Из выбранной клетки с нарушением проводят ломаную линию, заканчивающуюся в той же клетке, двигаясь аналогично движению шахматной ладьи, направление движения при этом изменяется под прямым углом только в базисных клетках.

Следует помнить, что для каждой клетки с нарушением существует только один контур улучшения плана. Нумерация клеток контура начинается с клетки с нарушением. Если клетка с нарушением свободная, то ей присваивают номер 1. Для клеток с поставками, равными пропускной способности, нумерация начинается с нуля. Далее номера присваиваются по ходу контура. Число клеток в контуре всегда четное.

В найденном допустимом контуре определяют корреспонденцию улучшения допустимого плана на данном этапе решения. Корреспонденция улучшения плана находится из следующего выражения:

$$x_{\text{ул}} = \min[x_{ij\,\text{чет}},\ (d_{ij} - x_{ij})_{\text{нечет}}]. \tag{2.7}$$

На величину $x_{\text{ул}}$ изменяются все корреспонденции контура, начиная с клетки с нарушением: уменьшаются корреспонденции, записанные в четных клетках, и увеличиваются корреспонденции, записанные в нечетных клетках контура.

6 После пересмотра корреспонденций необходимо пересоставить систему потенциалов всей матрицы и проверить соблюдение условия оптимальности (2.1)–(2.3). Если небазисные клетки удовлетворяют этим условиям, то найдено оптимальное решение. Если имеются нарушения условий оптимальности, то расчет по матрице следует продолжить до тех пор, пока все клетки матрицы не будут удовлетворять условиям (2.1)–(2.3). Число нарушений и их величина всегда стремятся к нулю.

После построения начального плана (см. таблицу 2.3) определяем объем тонно-километровой работы:

$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = 40 \cdot 100 + 50 \cdot 30 + 75 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 15 \cdot 30 + 30 \cdot 10 +$
$+30 \cdot 10 + 40 \cdot 90 + 60 \cdot 60 + 35 \cdot 100 + 30 \cdot 100 + 40 \cdot 20 + 20 \cdot 30 + 25 \times$
$\times 150 + 80 \cdot 100 + 20 \cdot 50 = 36900$ т·км.

Далее, используя метод потенциалов, производим **улучшение плана.**

Шаг 1.

Произведем в таблице 2.4 оценку полученного в таблице 2.3 решения. Каждому поставщику A_i ставим в соответствие некоторое число U_i, называемое потенциалом поставщика. Каждому потребителю B_j ставим в соответствие некоторое число V_j, называемое потенциалом потребителя. Для базисной ячейки (задействованного маршрута) сумма потенциала поставщика и расстояния (тарифа) перевозки должна быть равна потенциалу потребителя ($U_i + c_{ij} = V_j$).

Таблица 2.4 – **Пример построения улучшенного плана**

В тысячах тонн

Объемы ресурсов станций отправления A_i	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j									U_i
	$B_1 = 100$	$B_2 = 100$	$B_3 = 100$	$B_4 = 100$	$B_5 = 150$	$B_6 = 150$	$B_7 = 100$	$B_8 = 100$	$B_9 = 100$	
$A_1 = 150$	[80] –5	[40] **100** *X*	[90] +40	[105] +20	[150] –70	{30} [50] **30** **+85**	[75] **20** *X*	[80] +15	[90] +25	45
$A_2 = 150$	[10] **100** *X*	[30] –55	[45] +20	[40] +20	[25] –10	[65] +5	{30} [15] **30** –5	[30] **10** *X*	{10} [30] **10** +20	110
$A_3 = 150$	{10} [20] 0	[35] –50	[75] 0	[160] –90	[90] –65	[80] 0	[70] –50	[40] **90** *X*	[60] **60** *X*	100
$A_4 = 250$	[45] –65	[5] –60	*2** [35] **100** *X*	[30] **100** *X*	[110] –125	*3** [40] **20** *X*	[75] –95	[30] –30	[20] **30** *X*	140
$A_5 = 300$	[15] +5	{15} [25] –40	*1** [10] +65	{20} [35] +35	[25] **150** *X*	*4** [80] **100** *X*	[20] **50** *X*	[70] –30	[85] –25	100
V_j	120	85	175	170	125	180	120	140	160	

Поскольку число базисных клеток K = 13, а общее количество потенциалов равно 14, то для однозначного определения потенциалов значение одного из них можно выбрать произвольно.

Среди базисных клеток таблицы 2.4 максимальное расстояние в клетке 5–6. Присваиваем этой строке положительный потенциал U_5 = 100. Затем, используя условия оптимальности (2.1) – (2.3), находим потенциалы остальных строк и столбцов по формулам (2.4) и (2.5):

$U_5 = 100$; $V_5 = U_5 + c_{5,5} = 100 + 25 = 125$;
$V_6 = U_5 + c_{5,6} = 100 + 80 = 180$; $V_7 = U_5 + c_{5,7} = 100 + 20 = 120$;
$U_1 = V_7 – c_{1,7} = 120 – 75 = 45$; $V_2 = U_1 + c_{1,2} = 45 + 40 = 85$;
$U_4 = V_6 – c_{4,6} = 180 – 40 = 140$; $V_3 = U_4 + c_{4,3} = 140 + 35 = 175$;
$V_4 = U_4 + c_{4,4} = 140 + 30 = 170$; $V_9 = U_4 + c_{4,9} = 140 + 20 = 160$;
$U_3 = V_9 – c_{3,9} = 160 – 60 = 100$; $V_8 = U_3 + c_{3,8} = 100 + 40 = 140$;
$U_2 = V_8 – c_{2,8} = 140 – 30 = 110$; $V_1 = U_2 + c_{2,1} = 110 + 10 = 120$.

Найдем оценки свободных ячеек по формуле (2.6) (в таблице 2.4 они располагаются внизу ячейки):

$H_{1,1} = V_1 – U_1 – c_{1,1} = 120 – 45 – 80 = –5$;
$H_{1,3} = V_3 – U_1 – c_{1,3} = 175 – 45 – 90 = +40$;
$H_{1,4} = V_4 – U_1 – c_{1,4} = 170 – 45 – 105 = +20$;
$H_{1,5} = V_5 – U_1 – c_{1,5} = 125 – 45 – 150 = –70$;
$H_{1,6} = V_6 – U_1 – c_{1,6} = 180 – 45 – 50 = +85$;
$H_{1,8} = V_8 – U_1 – c_{1,8} = 140 – 45 – 80 = +15$;
$H_{1,9} = V_9 – U_1 – c_{1,9} = 160 – 45 – 90 = +25$;
$H_{2,2} = V_2 – U_2 – c_{2,2} = 85 – 110 – 30 = –55$;
$H_{2,3} = V_3 – U_2 – c_{2,3} = 175 – 110 – 45 = +20$;
$H_{2,4} = V_4 – U_2 – c_{2,4} = 170 – 110 – 40 = +20$;
$H_{2,5} = V_5 – U_2 – c_{2,5} = 125 – 110 – 25 = –10$;
$H_{2,6} = V_6 – U_2 – c_{2,6} = 180 – 110 – 65 = +5$;
$H_{2,7} = V_7 – U_2 – c_{2,7} = 120 – 110 – 15 = –5$;
$H_{2,9} = V_9 – U_2 – c_{2,9} = 160 – 110 – 30 = +20$;
$H_{3,1} = V_1 – U_3 – c_{3,1} = 120 – 100 – 20 = 0$;
$H_{3,2} = V_2 – U_3 – c_{3,2} = 85 – 100 – 35= –50$;
$H_{3,3} = V_3 – U_3 – c_{3,3} = 175 – 100 – 75= 0$;
$H_{3,4} = V_4 – U_3 – c_{3,4} = 170 – 100 – 160= –90$;
$H_{3,5} = V_5 – U_3 – c_{3,5} = 125– 100 – 90 = –65$;
$H_{3,6} = V_6 – U_3 – c_{3,6} = 180 – 100 – 80 = 0$;
$H_{3,7} = V_7 – U_3 – c_{3,7} = 120 – 100 – 70 = –50$;
$H_{4,1} = V_1 – U_4 – c_{4,1} = 120 – 140 – 45 = –65$;
$H_{4,2} = V_2 – U_4 – c_{4,2} = 85 – 140 – 5 = –60$;

$H_{4,5} = V_5 - U_4 - c_{4,5} = 125 - 140 - 110 = -125;$
$H_{4,7} = V_7 - U_4 - c_{4,7} = 120 - 140 - 75 = -95;$
$H_{4,8} = V_8 - U_4 - c_{4,8} = 140 - 140 - 30 = -30;$
$H_{5,1} = V_1 - U_5 - c_{5,1} = 120 - 100 - 15 = +5;$
$H_{5,2} = V_2 - U_5 - c_{5,2} = 85 - 100 - 25 = -40;$
$H_{5,3} = V_3 - U_5 - c_{5,3} = 175 - 100 - 10 = +65;$
$H_{5,4} = V_4 - U_5 - c_{5,4} = 170 - 100 - 35 = +35;$
$H_{5,8} = V_8 - U_5 - c_{5,8} = 140 - 100 - 70 = -30;$
$H_{5,9} = V_9 - U_5 - c_{5,9} = 160 - 100 - 85 = -25.$

Среди оценок свободных ячеек есть положительные, следовательно, решение не является оптимальным. Среди ячеек с поставкой, равной пропускной способности, нарушений нет, так как во всех этих ячейках оценки положительные. Из свободных ячеек, имеющих положительные оценки, выбираем ячейку с большим нарушением A_5B_3. Величина нарушения в ней по абсолютной величине $H_{5,3} = 65$.

Построим цикл для выбранной ячейки A_5B_3. Используя горизонтальные и вертикальные перемещения, соединяем базисные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку A_5B_3. Базисные ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной нами ячейки. Он единственный. Направление обхода не имеет значения. Ячейки, образующие цикл для свободной ячейки A_5B_3: A_5B_3, A_4B_3, A_4B_6, A_5B_6. Пусть ячейка A_5B_3, для которой строим цикл, имеет порядковый номер один (1^*). Среди ячеек цикла A_4B_3 (2^*) и A_5B_6 (4^*), номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением перевозки: min = {100, 100} = = 100. В данном случае таких ячеек две. Остановим свой выбор на ячейке, у которой расстояние перевозки большее, т. е. A_5B_6. Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых четные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A_5 к потребителю B_6, как самый нерентабельный. Данный маршрут исключим из схемы доставки продукции. От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 100. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 100. Тем самым мы вводим маршрут доставки продукции от поставщика A_5 к потребителю B_3. По данному маршруту доставим 100 единиц продукции. Ячейка A_5B_6 перестала быть базисной. Ячейка A_5B_3 стала базисной.

Ш а г 2.

Произведем в таблице 2.5 оценку полученного в таблице 2.4 решения.

Каждому поставщику A_i ставим в соответствие некоторое число U_i , называемое потенциалом поставщика. Каждому потребителю B_j ставим в соответствие некоторое число V_j, называемое потенциалом потребителя. Среди базисных клеток максимальное расстояние в клетке 1–7. Присваиваем строке, содержащей эту клетку, положительный потенциал $U_1 = 100$. Затем, используя условия оптимальности (2.1) – (2.3), находим потенциалы остальных строк и столбцов по формулам (2.4) и (2.5):

$U_1 = 100$, $V_2 = U_1 + c_{1,2} = 100 + 40 = 140$;
$V_7 = U_1 + c_{1,7} = 100 + 75 = 175$; $U_5 = V_7 - c_{5,7} = 175 - 20 = 155$;
$V_3 = U_5 + c_{5,3} = 155 + 10 = 165$; $V_5 = U_5 + c_{5,5} = 155 + 25 = 180$;
$U_4 = V_3 - c_{4,3} = 165 - 35 = 130$; $V_4 = U_4 + c_{4,4} = 130 + 30 = 160$;
$V_9 = U_4 + c_{4,9} = 130 + 20 = 150$;
$V_6 = U_4 - c_{4,6} = 130 + 40 = 170$; $V_8 = U_3 + c_{3,8} = 90 + 40 = 130$;
$U_3 = V_9 - c_{3,9} = 150 - 60 = 90$;
$U_2 = V_8 - c_{2,8} = 130 - 30 = 100$; $V_1 = U_2 + c_{2,1} = 100 + 10 = 110$;

Таблица 2.5 – **Пример построения улучшенного плана**

В тысячах тонн

Объемы ресурсов станций отправления A_i	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j									U_i
	$B_1 = 100$	$B_2 = 100$	$B_3 = 100$	$B_4 = 100$	$B_5 = 150$	$B_6 = 150$	$B_7 = 100$	$B_8 = 100$	$B_9 = 100$	
$A_1 = 150$	[80] –70	[40] **100** *X*	[90] –25	[105] –45	[150] –70	{30} [50] **30** **+20**	[75] **20** *X*	[80] –50	[90] –40	100
$A_2 = 150$	[10] **100** *X*	[30] +10	[45] +20	[40] +40	1* [25] +55	[65] +5	{30} [15] **30** +60	2* [30] **10** *X*	{10} [30] **10** +20	100
$A_3 = 150$	{10} [20] 0	[35] +15	[75] 0	[160] –90	[90] 0	[80] 0	[70] +15	3* [40] **90** *X*	4* [60] **60** *X*	90
$A_4 = 250$	[45] –65	[5] +5	6* [35] **0** *X*	[30] **100** *X*	[110] –60	[40] **120** *X*	[75] –30	[30] –30	5* [20] **30** *X*	130
$A_5 = 300$	[15] –60	{15} [25] –40	7* [10] **100** *X*	{20} [35] –30	8* [25] **150** *X*	[80] –65	[20] **50** *X*	[70] –95	[85] –90	155
V_j	110	140	165	160	180	170	175	130	150	

Найдем оценки свободных ячеек:

$H_{1,1} = V_1 - U_1 - c_{1,1} = 110 - 100 - 80 = -70;$
$H_{1,3} = V_3 - U_1 - c_{1,3} = 165 - 100 - 90 = -25;$
$H_{1,4} = V_4 - U_1 - c_{1,4} = 160 - 100 - 105 = -45;$
$H_{1,5} = V_5 - U_1 - c_{1,5} = 180 - 100 - 150 = -70;$
$H_{1,6} = V_6 - U_1 - c_{1,6} = 170 - 100 - 50 = +20;$
$H_{1,8} = V_8 - U_1 - c_{1,8} = 130 - 100 - 80 = -50;$
$H_{1,9} = V_9 - U_1 - c_{1,9} = 150 - 100 - 90 = -40;$
$H_{2,2} = V_2 - U_2 - c_{2,2} = 140 - 100 - 30 = +10;$
$H_{2,3} = V_3 - U_2 - c_{2,3} = 165 - 100 - 45 = +20;$
$H_{2,4} = V_4 - U_2 - c_{2,4} = 180 - 100 - 40 = +40;$
$H_{2,5} = V_5 - U_2 - c_{2,5} = 180 - 100 - 25 = +55;$
$H_{2,6} = V_6 - U_2 - c_{2,6} = 170 - 100 - 65 = +5;$
$H_{2,7} = V_7 - U_2 - c_{2,7} = 175 - 100 - 15 = +60;$
$H_{2,9} = V_9 - U_2 - c_{2,9} = 150 - 100 - 30 = +20;$
$H_{3,1} = V_1 - U_3 - c_{3,1} = 110 - 90 - 20 = 0;$
$H_{3,2} = V_2 - U_3 - c_{3,2} = 140 - 90 - 35 = +15;$
$H_{3,3} = V_3 - U_3 - c_{3,3} = 165 - 90 - 75 = 0;$
$H_{3,4} = V_4 - U_3 - c_{3,4} = 160 - 90 - 160 = -90;$
$H_{3,5} = V_5 - U_3 - c_{3,5} = 180 - 90 - 90 = 0;$
$H_{3,6} = V_6 - U_3 - c_{3,6} = 170 - 90 - 80 = 0;$
$H_{3,7} = V_7 - U_3 - c_{3,7} = 175 - 90 - 70 = +15;$
$H_{4,1} = V_1 - U_4 - c_{4,1} = 110 - 130 - 45 = -65;$
$H_{4,2} = V_2 - U_4 - c_{4,2} = 140 - 130 - 5 = +5;$
$H_{4,5} = V_5 - U_4 - c_{4,5} = 180 - 130 - 110 = -60;$
$H_{4,7} = V_7 - U_4 - c_{4,7} = 175 - 130 - 75 = -30;$
$H_{4,8} = V_8 - U_4 - c_{4,8} = 130 - 130 - 30 = -30;$
$H_{5,1} = V_1 - U_5 - c_{5,1} = 110 - 155 - 15 = -60;$
$H_{5,2} = V_2 - U_5 - c_{5,2} = 140 - 155 - 25 = -40;$
$H_{5,4} = V_4 - U_5 - c_{5,4} = 160 - 155 - 35 = -30;$
$H_{5,6} = V_6 - U_5 - c_{5,6} = 170 - 155 - 80 = -65;$
$H_{5,8} = V_8 - U_5 - c_{5,8} = 130 - 155 - 70 = -95;$
$H_{5,9} = V_9 - U_5 - c_{5,9} = 150 - 155 - 85 = -90.$

Среди оценок свободных ячеек есть положительные, следовательно, решение не является оптимальным. Среди ячеек с поставкой, равной пропускной способности, нарушений нет, так как во всех этих ячейках оценки положительные. Из свободных ячеек, имеющих положительные оценки, выбираем ячейку с большим нарушением A_2B_5. Величина нарушения в ней по абсолютной величине $H_{5,3} = 55$.

Построим цикл для выбранной ячейки A_2B_5. Используя горизонтальные и вертикальные перемещения, соединяем базисные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку, A_2B_5. Базисные ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной нами ячейки. Ячейки, образующие цикл для свободной ячейки A_2B_5: A_2B_5, A_2B_8, A_3B_8, A_3B_9, A_4B_9, A_4B_3, A_5B_3, A_5B_5.

Пусть ячейка A_2B_5, для которой строим цикл, имеет порядковый номер один (*1**). Среди ячеек цикла A_2B_8 (*2**), A_3B_9, (*4**), A_4B_3, (*6**) и A_5B_5 (*8**), номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением перевозки: min = {10, 60, 0, 150} = 0. В данном случае остановим свой выбор на ячейке A_4B_3. Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых четные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A_4 к потребителю B_3, как самый нерентабельный. Данный маршрут исключим из схемы доставки продукции. От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 0. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 0. Тем самым мы вводим маршрут доставки продукции от поставщика A_2 к потребителю B_5. По данному маршруту доставим 0 единиц продукции. Ячейка A_4B_3 перестала быть базисной. Ячейка A_2B_5 стала базисной.

Определяем объем тонно-километровой работы в соответствии с таблицей 2.5:

$$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} = 40 \cdot 100 + 50 \cdot 30 + 75 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 15 \cdot 30 + 30 \cdot 10 +$$
$$+30 \cdot 10 + 40 \cdot 90 + 60 \cdot 60 + 35 \cdot 0 + 30 \cdot 100 + 40 \cdot 120 + 20 \cdot 30 + 10 \times$$
$$\times 100 + 25 \cdot 150 + 20 \cdot 50 = 30400 \text{ т·км}.$$

Ш а г 3.

Произведем в таблице 2.6 оценку полученного в таблице 2.5 решения.

Таблица 2.6 – **Пример построения улучшенного плана**

В тысячах тонн

Объемы ресурсов станций отправления A_i	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j									U_i
	$B_1 = 100$	$B_2 = 100$	$B_3 = 100$	$B_4 = 100$	$B_5 = 150$	$B_6 = 150$	$B_7 = 100$	$B_8 = 100$	$B_9 = 100$	
$A_1 = 150$	[80] –15	[40] **100** *X*	[90] –25	[105] +10	[150] –70	{30} [50] **30** +75	[75] **20** *X*	[80] +5	[90] +15	100
$A_2 = 150$	[10] **100** *X*	[30] –45	[45] –35	*1** [40] +20	[25] **0** *X*	[65] +5	{30} [15] **30** +5	*2** [30] **10** *X*	{10} [30] **10** +20	155

A_3 = 150	{10} [20] 0	[35] –40	[75] –55	[160] –90	[90] –55	[80] 0	[70] –40	*3** [40] **90** *X*	*4** [60] **60** *X*	145
A_4 = 250	[45] –65	[5] –50	[35] –55	*6** [30] **100** *X*	[110] –115	[40] **120** *X*	[75] –85	[30] –30	*5** [20] **30** *X*	185
A_5 = 300	[15] –5	{15} [25] –40	[10] **100** *X*	{20} [35] +25	[25] **150** *X*	[80] –10	[20] **50** *X*	[70] –40	[85] –35	155
V_j	165	140	165	215	180	225	175	185	205	

Среди базисных клеток максимальное расстояние в клетке 1–7. Присваиваем строке, содержащей эту клетку, положительный потенциал U_1 = 100. Затем используя условия оптимальности (2.1) – (2.3), находим потенциалы остальных строк и столбцов:

$U_1 = 100$; $V_2 = U_1 + c_{1,2} = 100 + 40 = 140$;
$V_7 = U_1 + c_{1,7} = 100 + 75 = 175$; $U_5 = V_7 – c_{5,7} = 175 – 20 = 155$;
$V_3 = U_5 + c_{5,3} = 155 + 10 = 165$; $V_5 = U_5 + c_{5,5} = 155 + 25 = 180$;
$U_2 = V_5 – c_{2,5} = 180 – 25 = 155$; $V_1 = U_2 + c_{2,1} = 155 + 10 = 165$;
$V_8 = U_2 + c_{2,8} = 155 + 30 = 185$; $U_3 = V_8 – c_{3,8} = 185 – 40 = 145$;
$V_9 = U_3 + c_{3,9} = 145 + 60 = 205$; $U_4 = V_9 – c_{4,9} = 205 – 20 = 185$;
$V_4 = U_4 + c_{4,4} = 185 + 30 = 215$; $V_6 = U_4 + c_{4,6} = 185 + 40 = 225$.

Найдем оценки свободных ячеек:

$H_{1,1} = V_1 – U_1 – c_{1,1} = 165 – 100 – 80 = –15$;
$H_{1,3} = V_3 – U_1 – c_{1,3} = 165 – 100 – 90 = –25$;
$H_{1,4} = V_4 – U_1 – c_{1,4} = 215 – 100 – 105 = +10$;
$H_{1,5} = V_5 – U_1 – c_{1,5} = 180 – 100 – 150 = –70$;
$H_{1,6} = V_6 – U_1 – c_{1,6} = 225 – 100 – 50 = +75$;
$H_{1,8} = V_8 – U_1 – c_{1,8} = 185 – 100 – 80 = +5$;
$H_{1,9} = V_9 – U_1 – c_{1,9} = 205 – 100 – 90 = +15$;
$H_{2,2} = V_2 – U_2 – c_{2,2} = 140 – 155 – 30 = –45$;
$H_{2,3} = V_3 – U_2 – c_{2,3} = 165 – 155 – 45 = –35$;
$H_{2,4} = V_4 – U_2 – c_{2,4} = 215 – 155 – 40 = +20$;
$H_{2,6} = V_6 – U_2 – c_{2,6} = 225 – 155 – 65 = +5$;
$H_{2,7} = V_7 – U_2 – c_{2,7} = 175 – 155 – 15 = +5$;
$H_{2,9} = V_9 – U_2 – c_{2,9} = 205 – 155 – 30 = +20$;
$H_{3,1} = V_1 – U_3 – c_{3,1} = 165 – 145 – 20 = 0$;

$H_{3,2} = V_2 – U_3 – c_{3,2} = 140 – 145 – 35 = –40;$
$H_{3,3} = V_3 – U_3 – c_{3,3} = 165 – 145 – 75 = –55;$
$H_{3,4} = V_4– U_3 – c_{3,4}= 215 – 145 – 160 = –90;$
$H_{3,5} = V_5 – U_3 – c_{3,5} = 180 – 145 – 90 = –55;$
$H_{3,6} = V_6 – U_3 – c_{3,6} = 225 – 145 – 80 = 0;$
$H_{3,7} = V_7 – U_3 – c_{3,7} = 175 – 145 – 70 = –40;$
$H_{4,1} = V_1 – U_4 – c_{4,1} = 165 – 185 – 45 = –65;$
$H_{4,2} = V_2 – U_4 – c_{4,2} = 140 – 185 – 5 = –50;$
$H_{4,3} = V_3 – U_4 – c_{4,3} = 165 – 185 – 35 = –55;$
$H_{4,5} = V_5 – U_4 – c_{4,5} = 180 – 185 – 110 = –115;$
$H_{4,7} = V_7 – U_4 – c_{4,7} = 175 – 185 – 75 = –85;$
$H_{4,8} = V_8 – U_4 – c_{4,8} = 185 – 185 – 30 = –30;$
$H_{5,1} = V_1 – U_5 – c_{5,1} = 165 – 155 – 15 = –5;$
$H_{5,2} = V_2 – U_5 – c_{5,2} = 140 – 155 – 25 = –40;$
$H_{5,4} = V_4 – U_5 – c_{5,4} = 215 – 155 – 35 = +25;$
$H_{5,6} = V_6 – U_5 – c_{5,6} = 225 – 155 – 80 = –10;$
$H_{5,8} = V_8 – U_5 – c_{5,8} = 185 – 155 – 70 = –40;$
$H_{5,9} = V_9 – U_5 – c_{5,9} = 205 – 155 – 85 = –35.$

Среди оценок свободных ячеек есть положительные, следовательно, решение не является оптимальным. Среди ячеек с поставкой, равной пропускной способности, нарушений нет, так как во всех этих ячейках оценки положительные. Из свободных ячеек, имеющих положительные оценки, выбираем ячейку с большим нарушением A_2B_4. Величина нарушения в ней по абсолютной величине $H_{5,3} = 20$.

Построим цикл для выбранной ячейки A_2B_4. Используя горизонтальные и вертикальные перемещения, соединяем базисные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку A_2B_4. Базисные ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной нами ячейки. Ячейки, образующие цикл для свободной ячейки A_2B_4: A_2B_4, A_2B_8, A_3B_8, A_3B_9, A_4B_9, A_4B_4

Пусть ячейка A_2B_4, для которой строим цикл, имеет порядковый номер один (1^*). Среди ячеек цикла A_2B_8 (2^*), A_3B_9 (4^*), A_4B_4 (6^*), номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением перевозки: min = {10, 60, 100} = 10. В данном случае остановим свой выбор на ячейке A_2B_8. Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых четные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A_2 к потребителю B_8, как самый нерентабельный. Данный маршрут исключим из схемы доставки продукции. От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 10. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 10. Тем самым мы вводим маршрут доставки продукции от поставщика A_2 к потребителю B_4. По данному маршруту доставим 10 единиц продукции. Ячейка A_2B_8 перестала быть базисной. Ячейка A_2B_4 стала базисной.

Определяем объем тонно-километровой работы в соответствии с таблицей 2.6:

$$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} = 40 \cdot 100 + 50 \cdot 30 + 75 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 25 \cdot 0 + 15 \cdot 30 +$$
$$+30 \cdot 10 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 90 + 60 \cdot 60 + 30 \cdot 100 + 40 \cdot 120 + 20 \cdot 30 + 10 \times$$
$$\times\ 100 + 25 \cdot 150 + 20 \cdot 50 = 30400 \text{ т·км.}$$

Ш а г 4.

Произведем в таблице 2.7 оценку полученного в таблице 2.6 решения.

Среди базисных клеток максимальное расстояние в клетке 1–7. Присваиваем строке, содержащей эту клетку, положительный потенциал U_1 = 100. Затем, используя условия оптимальности (2.1) – (2.3), находим потенциалы остальных строк и столбцов:

$U_1 = 100$; $V_1 = U_1 + c_{1,2} = 100 + 40 = 140$;
$V_7 = U_1 + c_{1,7} = 100 + 75 = 175$; $U_5 = V_7 – c_{5,7} = 175 – 20 = 155$;
$V_3 = U_5 + c_{5,3} = 155 + 10 = 165$; $V_5 = U_5 + c_{5,5} = 155 + 25 = 180$;
$U_2 = V_5 – c_{2,5} = 180 – 25 = 155$; $V_1 = U_2 + c_{2,1} = 155 + 10 = 165$;
$V_4 = U_4 + c_{4,4} = 155 + 40 = 195$; $U_4 = V_4 – c_{4,4} = 195 –30 = 165$;
$V_6 = U_4 + c_{4,6} = 165 + 40 = 205$; $V_9 = U_4 – c_{4,9} = 165 + 20 = 185$;
$U_3 = V_9 – c_{3,9} = 185 – 60 = 125$; $V_8 = U_3 + c_{3,8} = 125 + 40 = 165$.

Таблица 2.7 – **Пример построения улучшенного плана**

В тысячах тонн

Объемы ресурсов станций отправления A_i	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j									U_i
	B_1 = 100	B_2 = 100	B_3 = 100	B_4 = 100	B_5 = 150	B_6 = 150	B_7 = 100	B_8 = 100	B_9 = 100	
A_1 = 150	[80] –15	[40] **100** *X*	[90] –25	[105] –10	[150] –70	{30} [50] **30** +55	[75] **20** *X*	[80] –15	[90] –5	100
A_2 = 150	*2** [10] **100** *X*	[30] –45	[45] –35	*3** [40] **10** *X*	[25] **0** *X*	[65] –15	{30} [15] **30** +5	[30] –20	{10} [30] **10** 0	155
A_3 = 150	{10} [20] *1** +20	[35] –20	[75] –35	[160] –90	[90] –35	[80] 0	[70] –20	[40] **100** *X*	*6** [60] **50** *X*	125

$A_4 = 250$	[45] –45	[5] –30	[35] –35	*4** [30] **90** *X*	[110] –95	[40] **120** *X*	[75] –65	[30] –30	*5** [20] **40** *X*	165
$A_5 = 300$	[15] –5	{15} [25] –40	[10] **100** *X*	{20} [35] +5	[25] **150** *X*	[80] –30	[20] **50** *X*	[70] –60	[85] –55	155
V_j	165	140	165	195	180	205	175	165	185	

Найдем оценки свободных ячеек:

$H_{1,1} = V_1 - U_1 - c_{1,1} = 165 - 100 - 80 = -15;$
$H_{1,3} = V_3 - U_1 - c_{1,3} = 165 - 100 - 90 = -25;$
$H_{1,4} = V_4 - U_1 - c_{1,4} = 195 - 100 - 105 = -10;$
$H_{1,5} = V_5 - U_1 - c_{1,5} = 180 - 100 - 150 = -70;$
$H_{1,6} = V_6 - U_1 - c_{1,6} = 205 - 100 - 50 = +55;$
$H_{1,8} = V_8 - U_1 - c_{1,8} = 165 - 100 - 80 = -15;$
$H_{1,9} = V_9 - U_1 - c_{1,9} = 185 - 100 - 90 = -5;$
$H_{2,2} = V_2 - U_2 - c_{2,2} = 140 - 155 - 30 = -45;$
$H_{2,3} = V_3 - U_2 - c_{2,3} = 165 - 155 - 45 = -35;$
$H_{2,6} = V_6 - U_2 - c_{2,6} = 205 - 155 - 65 = -15;$
$H_{2,7} = V_7 - U_2 - c_{2,7} = 175 - 155 - 15 = +5;$
$H_{2,8} = V_8 - U_2 - c_{2,8} = 165 - 155 - 30 = -20;$
$H_{2,9} = V_9 - U_2 - c_{2,9} = 185 - 155 - 30 = 0;$
$H_{3,1} = V_1 - U_3 - c_{3,1} = 165 - 125 - 20 = +20;$
$H_{3,2} = V_2 - U_3 - c_{3,2} = 140 - 125 - 35 = -20;$
$H_{3,3} = V_3 - U_3 - c_{3,3} = 165 - 125 - 75 = -35;$
$H_{3,4} = V_4 - U_3 - c_{3,4} = 195 - 125 - 160 = -90;$
$H_{3,5} = V_5 - U_3 - c_{3,5} = 180 - 125 - 90 = -35;$
$H_{3,6} = V_6 - U_3 - c_{3,6} = 205 - 125 - 80 = 0;$
$H_{3,7} = V_7 - U_3 - c_{3,7} = 175 - 125 - 70 = -20;$
$H_{4,1} = V_1 - U_4 - c_{4,1} = 165 - 165 - 45 = -45;$
$H_{4,2} = V_2 - U_4 - c_{4,2} = 140 - 165 - 5 = -30;$
$H_{4,3} = V_3 - U_4 - c_{4,3} = 165 - 165 - 35 = -35;$
$H_{4,5} = V_5 - U_4 - c_{4,5} = 180 - 165 - 110 = -95;$
$H_{4,7} = V_7 - U_4 - c_{4,7} = 175 - 165 - 75 = -65;$
$H_{4,8} = V_8 - U_4 - c_{4,8} = 165 - 165 - 30 = -30;$
$H_{5,1} = V_1 - U_5 - c_{5,1} = 165 - 155 - 15 = -5;$
$H_{5,2} = V_2 - U_5 - c_{5,2} = 140 - 155 - 25 = -40;$
$H_{5,4} = V_4 - U_5 - c_{5,4} = 195 - 155 - 35 = +5;$
$H_{5,6} = V_6 - U_5 - c_{5,6} = 205 - 155 - 80 = -30;$
$H_{5,8} = V_8 - U_5 - c_{5,8} = 165 - 155 - 70 = -60;$
$H_{5,9} = V_9 - U_5 - c_{5,9} = 185 - 155 - 85 = -55.$

Среди оценок свободных ячеек есть положительные, следовательно, решение не является оптимальным. Среди ячеек с поставкой, равной пропускной способности, нарушений нет, так как во всех этих ячейках оценки положительные. Из свободных ячеек, имеющих положительные оценки, выбираем ячейку с большим нарушением A_5B_4. Величина нарушения в ней по абсолютной величине $H_{5,4} = 5$.

Построим цикл для выбранной ячейки A_5B_4. Используя горизонтальные и вертикальные перемещения, соединяем базисные ячейки так, чтобы вернуться в исходную ячейку A_5B_4. Базисные ячейки, расположенные в вершинах построенной ломаной линии, образуют цикл для выбранной нами ячейки. Ячейки, образующие цикл для свободной ячейки A_5B_4: A_5B_4, A_2B_4, A_2B_5, A_5B_5.

Пусть ячейка A_5B_4, для которой строим цикл, имеет порядковый номер один (1^*). Среди ячеек цикла A_2B_4, (2^*), A_5B_5, (4^*), номера которых четные, найдем ячейку, обладающую наименьшим значением перевозки: min = {20, 150} = 20. В данном случае остановим свой выбор на ячейке A_2B_4. Другими словами, из маршрутов доставки продукции, номера которых четные в данном цикле, выберем маршрут от поставщика A_2 к потребителю B_4, как самый нерентабельный. Данный маршрут исключим из схемы доставки продукции. От ячеек цикла с четными номерами отнимаем 20. К ячейкам с нечетными номерами прибавляем 20. Тем самым мы вводим маршрут доставки продукции от поставщика A_5 к потребителю B_4. По данному маршруту доставим 20 единиц продукции. Ячейка A_2B_4 перестала быть базисной. Ячейка A_5B_4 стала базисной.

Определяем объем тонно-километровой работы в соответствии с таблицей 2.7:

$$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} = 40 \cdot 100 + 50 \cdot 30 + 75 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 40 \cdot 10 + 25 \cdot 0 +$$
$$+15 \cdot 30 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 100 + 60 \cdot 50 + 30 \cdot 90 + 40 \cdot 120 + 20 \cdot 40 + 10 \times$$
$$\times 100 + 25 \cdot 150 + 20 \cdot 50 = 30200 \text{ т·км.}$$

Ш а г 5.

Произведем в таблице 2.8 оценку полученного в таблице 2.7 решения.

Среди базисных клеток максимальное расстояние в клетке 1–7. Присваиваем строке, содержащей эту клетку, положительный потенциал $U_1 = 100$.

Таблица 2.8 – **Пример построения улучшенного плана**

В тысячах тонн

Объемы	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j	U_i

ресурсов станций отправления A_i	$B_1 = 100$	$B_2 = 100$	$B_3 = 100$	$B_4 = 100$	$B_5 = 150$	$B_6 = 150$	$B_7 = 100$	$B_8 = 100$	$B_9 = 100$	
$A_1 = 150$	[80] –15	[40] **100** *X*	[90] –25	[105] –10	[150] –70	{30} [50] **30** +55	[75] **20** *X*	[80] –15	[90] –5	100
$A_2 = 150$	[10] **90** *X*	[30] –45	[45] –35	[40] 0	[25] **20** *X*	[65] -15	{30} [15] **30** +5	[30] –20	{10} [30] **10** 0	155
$A_3 = 150$	{10} [20] **10** +20	[35] –20	[75] –35	[160] –90	[90] –35	[80] 0	[70] –20	[40] **100** *X*	[60] **40** *X*	125
$A_4 = 250$	[45] –45	[5] –30	[35] –35	[30] **80** *X*	[110] –95	[40] **120** *X*	[75] –65	[30] –30	[20] **50** *X*	165
$A_5 = 300$	[15] –5	{15} [25] -–40	[10] **100** *X*	{20} [35] **20** +5	[25] **130** *X*	[80] –30	[20] **50** *X*	[70] –60	[85] –55	155
V_j	165	140	165	195	180	205	175	165	185	

Затем, используя условия оптимальности (2.1)–(2.3), находим потенциалы остальных строк и столбцов:

$U_1 = 100$; $V_2 = U_1 + c_{1,2} = 100 + 40 = 140$;
$V_7 = U_1 + c_{1,7} = 100 + 75 = 175$; $U_5 = V_7 - c_{5,7} = 175 - 20 = 155$;
$V_3 = U_5 + c_{5,3} = 155 + 10 = 165$; $V_5 = U_5 + c_{5,5} = 155 + 25 = 180$;
$U_2 = V_5 - c_{2,5} = 180 - 25 = 155$; $V_1 = U_2 + c_{2,1} = 155 + 10 = 165$;
$V_4 = U_4 + c_{4,4} = 155 + 40 = 195$; $U_4 = V_4 - c_{4,4} = 195 - 30 = 165$;
$V_6 = U_4 + c_{4,6} = 165 + 40 = 205$; $V_9 = U_4 + c_{4,9} = 165 + 20 = 185$;
$U_3 = V_9 - c_{3,9} = 180 - 60 = 125$; $V_8 = U_3 + c_{3,8} = 125 + 40 = 165$;

Найдем оценки свободных ячеек:

$H_{1,1} = V_1 - U_1 - c_{1,1} = 165 - 100 - 80 = -15$;
$H_{1,3} = V_3 - U_1 - c_{1,3} = 165 - 100 - 90 = -25$;
$H_{1,4} = V_4 - U_1 - c_{1,4} = 195 - 100 - 105 = -10$;
$H_{1,5} = V_5 - U_1 - c_{1,5} = 180 - 100 - 150 = -70$;

$H_{1,6} = V_6 - U_1 - c_{1,6} = 205 - 100 - 50 = +55;$
$H_{1,8} = V_8 - U_1 - c_{1,8} = 165 - 100 - 80 = -15;$
$H_{1,9} = V_9 - U_1 - c_{1,9} = 185 - 100 - 90 = -5;$
$H_{2,2} = V_2 - U_2 - c_{2,2} = 140 - 155 - 30 = -45;$
$H_{2,3} = V_3 - U_2 - c_{2,3} = 165 - 155 - 45 = -35;$
$H_{2,4} = V_4 - U_2 - c_{2,4} = 195 - 155 - 40 = 0;$
$H_{2,6} = V_6 - U_2 - c_{2,6} = 205 - 155 - 65 = -15;$
$H_{2,7} = V_7 - U_2 - c_{2,7} = 175 - 155 - 15 = +5;$
$H_{2,8} = V_8 - U_2 - c_{2,8} = 165 - 155 - 30 = -20;$
$H_{3,1} = V_1 - U_3 - c_{3,1} = 165 - 125 - 20 = +20;$
$H_{3,2} = V_2 - U_3 - c_{3,2} = 140 - 125 - 35 = -20;$
$H_{3,3} = V_3 - U_3 - c_{3,3} = 165 - 125 - 75 = -35;$
$H_{3,4} = V_4 - U_3 - c_{3,4} = 195 - 125 - 160 = -90;$
$H_{3,5} = V_5 - U_3 - c_{3,5} = 180 - 125 - 90 = -35;$
$H_{3,6} = V_6 - U_3 - c_{3,6} = 205 - 125 - 80 = 0;$
$H_{3,7} = V_7 - U_3 - c_{3,7} = 175 - 125 - 70 = -20;$
$H_{4,1} = V_1 - U_4 - c_{4,1} = 165 - 165 - 45 = -45;$
$H_{4,2} = V_2 - U_4 - c_{4,2} = 140 - 165 - 5 = -30;$
$H_{4,3} = V_3 - U_4 - c_{4,3} = 165 - 165 - 35 = -35;$
$H_{4,5} = V_5 - U_4 - c_{4,5} = 180 - 165 - 110 = -95;$
$H_{4,7} = V_7 - U_4 - c_{4,7} = 175 - 165 - 75 = -65;$
$H_{4,8} = V_8 - U_4 - c_{4,8} = 165 - 165 - 30 = -30;$
$H_{5,1} = V_1 - U_5 - c_{5,1} = 165 - 155 - 15 = -5;$
$H_{5,2} = V_2 - U_5 - c_{5,2} = 140 - 155 - 25 = -40;$
$H_{5,4} = V_4 - U_5 - c_{5,4} = 195 - 155 - 35 = +5;$
$H_{5,6} = V_6 - U_5 - c_{5,6} = 205 - 155 - 80 = -30;$
$H_{5,8} = V_8 - U_5 - c_{5,8} = 165 - 155 - 70 = -60;$
$H_{5,9} = V_9 - U_5 - c_{5,9} = 185 - 155 - 85 = -55.$

Ш а г 6.

Среди оценок свободных ячеек нет положительных. Среди ячеек с поставкой, равной пропускной способности, нарушений нет, так как во всех этих ячейках оценки положительные. Следовательно, улучшенный в таблице 2.8 план улучшить нельзя. Оптимальный план перевозок приведен в матрице (таблица 2.9).

Таблица 2.9 – **Оптимальный план перевозок каменного угля**

В тысячах тонн

Объемы	Объемы прибытия грузов на станции назначения B_j	U_i

ресурсов станций отправления A_i	$B_1 = 100$	$B_2 = 100$	$B_3 = 100$	$B_4 = 100$	$B_5 = 150$	$B_6 = 150$	$B_7 = 100$	$B_8 = 100$	$B_9 = 100$	
$A_1 = 150$	[80]	[40] **100** *X*	[90]	[105]	[150]	{30} [50] **30**	[75] **20** *X*	[80]	[90]	100
$A_2 = 150$	[10] **90** *X*	[30]	[45]	[40]	[25] **20** *X*	[65]	{30} [15] **30**	[30]	{10} [30] **10** *X*	155
$A_3 = 150$	{10} [20] **10**	[35]	[75]	[160]	[90]	[80]	[70]	[40] **100** X	[60] **40** X	125
$A_4 = 250$	[45]	[5]	[35]	[30] **80** *X*	[110]	[40] **120** *X*	[75]	[30]	[20] **50** *X*	165
$A_5 = 300$	[15]	{15} [25]	[10] **100** *X*	{20} [35] **20**	[25] **130** *X*	[80]	[20] **50** *X*	[70]	[85]	155
V_j	165	140	165	195	180	205	175	165	185	

Определяем объем тонно-километровой работы в соответствии с таблицей 2.9:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = 40 \cdot 100 + 50 \cdot 30 + 75 \cdot 20 + 10 \cdot 90 + 25 \cdot 20 + 15 \cdot 30 + \\ +30 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 40 \cdot 100 + 60 \cdot 40 + 30 \cdot 80 + 40 \cdot 120 + 20 \cdot 50 + 10 \times \\ \times 100 + 35 \cdot 20 + 25 \cdot 130 + 20 \cdot 50 = 29900 \text{ т·км.}$$

Сравнивая объемы тонно-километровой работы начального и оптимального планов, видим, что величина этого показателя меньше для оптимального плана.

2.2 Метод потенциалов для решения транспортной задачи в сетевой форме

Задание

Надо построить оптимальный план перевозки груза на сети (рисунок 2.1) от трех станций отправления до десяти станций назначения.

В контрольной работе студент приводит две сети: с начальным планом перевозок и с оптимальным планом перевозок.

Исходные данные о наличии ресурсов на станциях отправления груза приведены в таблице 2.10. Размеры прибытия груза на станции назначения даны в таблице 2.11. Для всех вариантов задан один и тот же полигон (см.

рисунок 2.1), для которого производится решение задачи. В знаменателе для звеньев 1–7, 1–11, 2–9, 3–10 заданы ограничения пропускной способности.

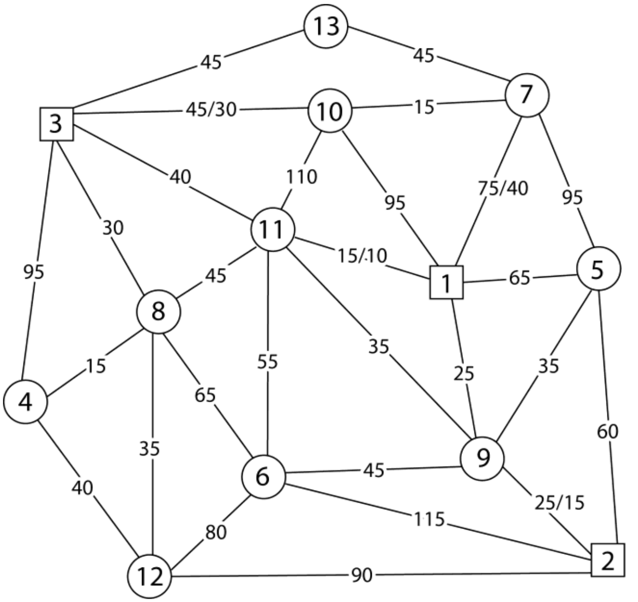

Рисунок 2.1 – Схема сети железных дорог

В таблице 2.10 номер варианта определяют по последней, в таблице 2.11 – по предпоследней цифре шифра зачетной книжки.

Таблица 2.10 – **Ресурсы станции отправления**

В тысячах тонн

Номер станции	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	250	100	200	200	200	150	275	100	125	175
2	100	250	100	200	100	250	100	225	275	200
3	150	150	200	100	200	100	125	175	100	125
Итого отправлено	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Таблица 2.11 – **Объем прибытия груза на станции назначения**

В тысячах тонн

Номер станции	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

назначения										
4	65	75	55	70	60	50	65	40	45	55
5	45	50	40	65	40	55	60	70	40	65
6	50	55	65	60	75	65	40	75	40	60
7	55	65	60	75	70	60	70	45	50	70
8	40	60	75	40	40	40	40	40	55	40
9	60	40	70	40	45	70	45	50	65	75
10	75	70	40	45	50	40	75	55	60	45
11	70	40	45	50	55	45	50	65	75	40
12	40	45	50	55	65	75	55	60	70	50
Итого прибыло	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Методические указания по решению задачи

1 Решение задачи в сетевой форме начинают с составления начального плана, который не допускает встречных перевозок на участках заданного полигона. Начальный (или любой допустимый) план характеризуется определенным числом базисных звеньев, на которых имеется поток груза:

$$K = n - 1,$$

где n – число вершин, вошедших в полигон сети.

Для полигона (см. рисунок 2.1) число базисных звеньев $K = 13 - 1 = 12$. Звенья с потоком, равным пропускной способности, являются небазисными. Эти потоки называют пересыщенными. Изображать их будем пунктирной стрелкой.

При решении задачи может встретиться случай вырождения, когда число базисных звеньев заданного полигона меньше числа K. В этом случае по свободному звену (желательно по звену с наименьшим расстоянием) пропускают нулевой поток, и это звено в последующих операциях принимают за базисное. Базисным может стать и звено с потоком, равным пропускной способности.

В ходе решения возможен и такой случай, когда число звеньев в допустимом плане больше числа K, например, если на сети получился замкнутый контур. Это означает, что допущена ошибка, которую необходимо устранить до построения системы потенциалов. Для избежания данного случая рекомендуется снабжать потребителей только от одного поставщика, а от двух – когда у первого не хватит ресурсов.

Возможный начальный план приведен в качестве примера на рисунке 2.2, на котором знаком «+» отмечена вершина отправления груза, знаком «–» – потребления (прибытия) на станции выгрузки, «–40» – величина прибытия и «+200» – величина отправления груза. Поток на участке обозначен стрелкой в правопутном направлении, а величина грузопотока – числом у стрелки.

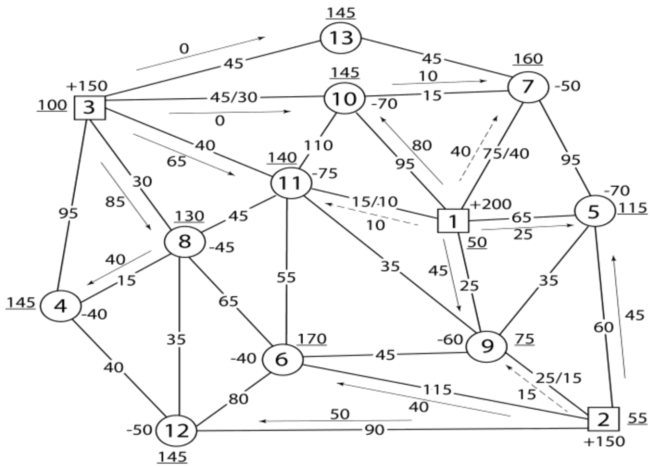

Рисунок 2.2 – Начальный план перевозок

2 После построения начального (допустимого) плана, пример которого приведен на рисунке 2.2, начинают строить на сети оптимальный план методом потенциалов (рисунки 2.3–2,5). Любой допустимый план называют оптимальным тогда, когда каждой вершине полигона могут быть присвоены некоторые числа (потенциалы) V, которые отвечают следующим условиям:

$$V_j - V_i \le c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0; \tag{2.8}$$

$$V_j - V_i = c_{ij} \text{ для } d_{ij} > x_{ij} \ge 0; \tag{2.9}$$

$$V_j - V_i \ge c_{ij} \text{ для } x_{ij} = d_{ij}, \tag{2.10}$$

где i, j – номера вершин полигона;

V_j, V_i – потенциалы соответственно i-й и j-й вершин;

c_{ij} – расстояние от i-й до смежной j-й вершины (длина участка, соединяющего соседние станции);

x_{ij} – грузопоток на звене ij;

d_{ij} – ограничение пропускной способности на участке ij.

Для всех вершин полигона находят систему потенциалов. Одной из станций отправления присваивается начальный потенциал, например $V_3 = 100$. Затем по базисным звеньям определяют потенциалы смежных вершин. Из условия оптимальности (2.9) следует, что

$$V_j = V_i + c_{ij}, \tag{2.11}$$

если известен потенциал вершины i, а по звену проходит поток в направлении от i к j. Например, $V_8 = V_3 + c_{3,8} = 100 + 30 = 130$.

Из этого же условия оптимальности следует, что

$$V_i = V_j - c_{ij}, \qquad (2.12)$$

если известен потенциал вершины j, а по звену проходит грузопоток в направлении от i к j. Например, $V_2 = V_5 - c_{5,2} = 115 - 60 = 55$.

Находим потенциалы для остальных вершин:

$V_{10} = V_3 + c_{3,10} = 100 + 45 = 145$, $V_{11} = V_3 + c_{3,11} = 100 + 40 = 140$;
$V_8 = V_3 + c_{3,8} = 100 + 30 = 130$, $V_4 = V_8 + c_{8,4} = 130 + 15 = 145$;
$V_{13} = V_3 + c_{3,13} = 100 + 45 = 145$, $V_7 = V_{10} + c_{10,7} = 145 + 15 = 160$;
$V_1 = V_{10} - c_{1,10} = 145 - 95 = 50$, $V_5 = V_1 + c_{1,5} = 50 + 65 = 115$;
$V_2 = V_5 - c_{2,5} = 115 - 60 = 55$, $V_{12} = V_2 + c_{2,12} = 55 + 90 = 145$;
$V_9 = V_1 + c_{1,9} = 50 + 25 = 75$, $V_6 = V_2 + c_{2,6} = 55 + 115 = 170$.

Потенциалы всех вершин заданного полигона на рисунке 2.2 подчеркнуты.

3 После построения системы потенциалов находят звенья сети с нарушением условий оптимальности (2.8) и (2.10):

$$H_{ij} = V_j - V_\mathrm{i} - c_{ij}. \qquad (2.13)$$

$H_{3,4} = V_4 - V_3 - c_{3,4} = 145 - 100 - 95 = -50$;
$H_{4,12} = V_{12} - V_4 - c_{4,12} = 145 - 145 - 40 = -40$;
$H_{8,12} = V_{12} - V_8 - c_{8,12} = 145 - 130 - 35 = -20$;
$H_{8,11} = V_{11} - V_8 - c_{8,11} = 140 - 130 - 45 = -35$;
$H_{6,11} = V_6 - V_{11} - c_{6,11} = 170 - 140 - 55 = -25$;
$H_{6,12} = V_6 - V_{12} - c_{6,12} = 170 - 145 - 80 = -55$;
$H_{10,11} = V_{10} - V_{11} - c_{10,11} = 145 - 140 - 110 = -105$;
$H_{9,11} = V_{11} - V_9 - c_{9,11} = 140 - 75 - 35 = +30$;
$H_{6,9} = V_6 - V_9 - c_{6,9} = 170 - 75 - 45 = +50$;
$H_{5,9} = V_5 - V_9 - c_{5,9} = 115 - 55 - 60 = 0$;
$H_{5,7} = V_7 - V_5 - c_{5,7} = 160 - 115 - 95 = -50$;
$H_{7,13} = V_7 - V_{13} - c_{7,13} = 160 - 145 - 45 = +5$

Для рассматриваемого примера имеются следующие нарушения условий оптимальности на свободных звеньях:

$H_{5,9} = 115 - 75 - 35 = 5$;
$H_{6,9} = 170 - 75 - 45 = 50$;
$H_{9,11} = 140 - 75 - 35 = 30$.

Нарушения на звеньях с потоком, равным пропускной способности, отрицательные по своей величине:

$H_{2,9} = V_9 - V_2 - c_{2,9} = 75 - 55 - 25 = -5$;
$H_{1,7} = V_7 - V_1 - c_{1,7} = 160 - 50 - 75 = +35$;

$H_{1,11} = V_{11} – V_1 – c_{1,11} = 140 – 50 – 15 = +75$

.

4 Из всех звеньев с нарушениями выбирают звено, имеющее максимальную по модулю величину нарушения. Для этого звена строят замкнутый контур, состоящий из базисных звеньев и выбранного звена с нарушением. Если замкнутый контур состоит из звеньев без ограничения пропускной способности, то на звено с нарушением назначают поток с улучшением плана:

$$x_{ул} = \min x_{ij\text{встр}}. \qquad (2.14)$$

На величину потока улучшения плана $x_{ул}$ изменяют все потоки рассматриваемого контура: уменьшают встречные и увеличивают попутные потоки. Встречные и попутные потоки контура улучшения плана находятся после определения направления следования потока на звене с нарушением. На рассматриваемом звене с нарушением направление всегда будет от вершины (ограничивающей данное звено) с меньшим потенциалом к вершине (ограничивающей это звено с другой стороны) с большим потенциалом. В направлении следования нового потока на свободном звене с нарушением просматриваются все потоки, и из них находят попутные и встречные.

Если в замкнутом контуре есть попутные звенья с ограничением пропускной способности, то на звено с нарушением назначают поток $x_{ул} = \min\, [x_{ij\text{встр}},\ (d_{ij\text{попутн}} – x_{ij\text{попутн}})]$. Если звено с нарушением является пересыщенным, то $x_{ул} = \min[x_{ij\text{попутн}},\ (d_{ij\text{встр}} – x_{ij\text{встр}})]$.

В контуре попутные потоки уменьшают, встречные – увеличивают.

Следует помнить, что контур улучшения плана всегда может быть только один для рассматриваемого звена с нарушением.

5 После этого пересматриваются потенциалы вершин, входящих в рассмотренный контур, и потенциалы смежных с ними вершин:

$V_9 = V_1 + c_{1,9} = 50 + 25 = 75;$ $V_6 = V_9 + c_{9,6} = 75 + 45 = 120;$
$V_2 = V_6 – c_{2,6} = 120 – 115 = 5;$ $V_5 = V_2 + c_{2,5} = 5 + 60 = 65;$
$V_{12} = V_2 – c_{2,12} = 5 + 90 = 95.$

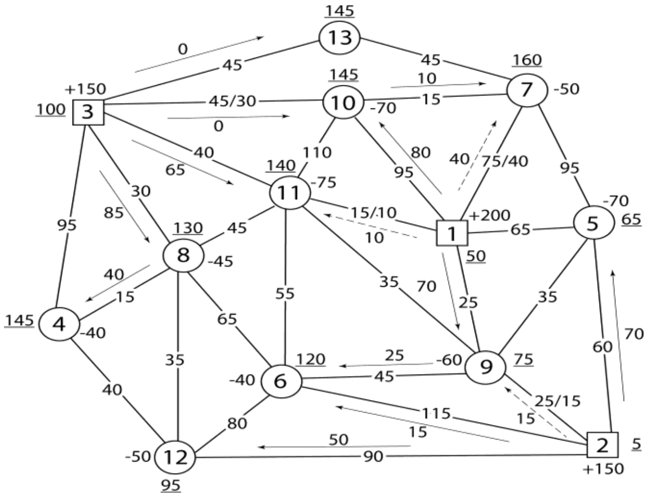

Рисунок 2.3 – Улучшенный план перевозок

Улучшенная схема вновь проверяется на оптимальность:

$H_{3,4} = V_4 – V_3 – c_{3,4} = 145 – 100 – 95 = –50;$
$H_{4,12} = V_{12} – V_4 – c_{4,12} = 145 – 95 – 40 = +10;$
$H_{8,12} = V_{12} – V_8 – c_{8,12} = 130 – 95 – 35 = 0;$
$H_{8,11} = V_{11} – V_8 – c_{8,11} = 140 – 130 – 45 = –35;$
$H_{6,11} = V_6 – V_{11} – c_{6,11} = 140 – 120 – 55 = –35;$
$H_{6,12} = V_6 – V_{12} – c_{6,12} = 120– 95 – 80 = –55;$
$H_{10,11} = V_{10} – V_{11} – c_{10,11} = 145 – 140 – 110 = –105;$
$H_{9,11} = V_{11} – V_9 – c_{9,11} = 140 – 75 – 35 = +30;$
$H_{5,9} = V_9 – V_5 – c_{5,9} = 75 – 65 – 35 = –25;$
$H_{5,7} = V_7 – V_5 – c_{5,7} = 160 – 65 – 95 = 0;$
$H_{7,13} = V_7 – V_{13} – c_{7,13} = 160 – 145 – 45 = –30.$

Для рассматриваемого примера имеются следующие нарушения условий оптимальности на свободных звеньях:

$H_{4,12} = V_4 – V_{12} – c_{4,12} = 145 – 95 – 40 = +10;$
$H_{9,11} = V_{11} – V_9 – c_{9,11} = 140 – 75 – 35 = +30.$

Находим звенья сети с потоком, равным пропускной способности с нарушением условия оптимальности (2.10):

$H_{2,9} = V_4 – V_{12} – c_{2,9} = 75 – 5 – 25 = +45;$
$H_{1,7} = V_7 – V_1 – c_{1,7} = 160 – 50 – 75 = +35;$
$H_{1,11} = V_{11} – V_1 – c_{1,11} = 140 – 50 – 15 = +75.$

На всех звеньях сети с потоком, равным пропускной способности, результаты вычислений по формуле (2.13) положительные. Следовательно, на этих звеньях нарушений нет.

Из всех звеньев с нарушениями выбираем звено, имеющее максимальную по модулю величину нарушения. Для этого звена строим замкнутый контур, состоящий из базисных звеньев и выбранного звена с нарушением между вершинами 9, 11, 3, 10, 1. Если замкнутый контур состоит из звеньев без ограничения пропускной способности, то на звено с нарушением назначают поток с улучшением плана. В нашем случае в замкнутом контуре содержится звено 3–10, имеющее ограничение пропускной способности, равное 30. Наименьшее значение потока, встречное потоку улучшения плана $x_{ул} = x_{9,11}$ в контуре, равно 65 (звено 3–11). Мы должны были бы принять $x_{ул} = x_{9,11} = 65$. Но так как в звене 3–10, входящем в замкнутый контур, имеется ограничение, принимаем $x_{ул} = x_{9,11} = 30$. В контуре попутные потоки уменьшаем, встречные – повышаем на величину $x_{ул} = 30$.

Далее пересматриваем потенциалы вершин, входящие в рассмотренный контур, и смежных с ними вершин:

$V_9 = V_{11} + c_{9,11} = 140 - 35 = 105;$ $V_6 = V_9 + c_{9,6} = 105 + 45 = 150;$
$V_2 = V_6 - c_{2,6} = 150 - 115 = 35;$ $V_5 = V_2 + c_{2,5} = 35 + 60 = 95;$
$V_{12} = V_2 + c_{2,12} = 35 + 90 = 125;$ $V_1 = V_9 - c_{1,9} = 105 - 25 = 80;$
$V_{10} = V_1 + c_{2,10} = 80 + 95 = 175;$ $V_7 = V_{10} + c_{10,7} = 175 + 15 = 190.$

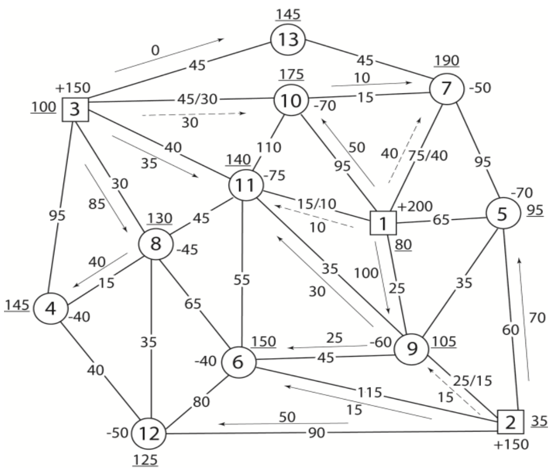

Рисунок 2.4 – Улучшенный план перевозок

Улучшенную схему вновь проверяем на оптимальность:

$H_{3,4} = V_4 - V_3 - c_{3,4} = 145 - 100 - 95 = -50;$

$H_{4,12} = V_4 - V_{12} - c_{4,12} = 145 - 125 - 40 = -20;$
$H_{8,12} = V_8 - V_{12} - c_{8,12} = 130 - 125 - 35 = -30;$
$H_{8,11} = V_{11} - V_8 - c_{8,11} = 140 - 130 - 45 = -35;$
$H_{6,11} = V_6 - V_{11} - c_{6,11} = 150 - 140 - 55 = -45;$
$H_{6,12} = V_6 - V_{12} - c_{6,12} = 150 - 125 - 80 = -55;$
$H_{10,11} = V_{10} - V_{11} - c_{10,11} = 175 - 140 - 110 = -75;$
$H_{9,11} = V_{11} - V_9 - c_{9,11} = 140 - 105 - 35 = 0;$
$H_{5,9} = V_9 - V_5 - c_{5,9} = 105 - 95 - 35 = -25;$
$H_{5,7} = V_7 - V_5 - c_{5,7} = 190 - 95 - 95 = 0;$
$H_{7,13} = V_7 - V_{13} - c_{7,13} = 190 - 145 - 45 = 0.$

Находим звенья сети с потоком, равным пропускной способности с нарушением условия оптимальности (2.10):

$H_{2,9} = V_9 - V_2 - c_{2,9} = 105 - 35 - 25 = +45;$
$H_{1,7} = V_7 - V_1 - c_{1,7} = 190 - 80 - 75 = +35;$
$H_{1,11} = V_{11} - V_1 - c_{1,11} = 140 - 80 - 15 = +45.$

На всех звеньях сети с потоком, равным пропускной способности, результаты вычислений по формуле (2.13) положительные. Следовательно, на этих звеньях нарушений нет.

Если небазисные звенья удовлетворяют условиям (2.8) и (2.10), то получен оптимальный план. Если небазисные звенья этим условиям не удовлетворяют, то решение продолжают.

В нашем случае все небазисные звенья удовлетворяют условиям (2.8) и (2.10).

На рисунке 2.5 приведен один из вариантов оптимального плана.

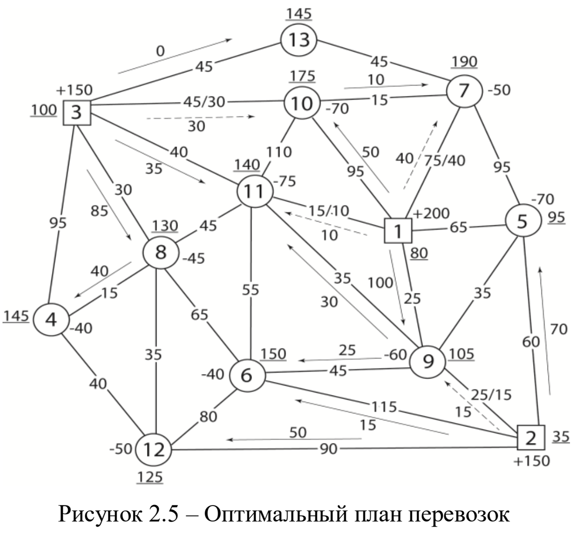

Рисунок 2.5 – Оптимальный план перевозок

При наличии на полигоне 40–50 станций отправления и 400–500 станций прибытия необходимо осуществить укрупнение потребителей и поставщиков.

3 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

3.1 Теоретические основы решения задач методом динамического программирования

Задачи динамического программирования являются многоэтапными, или многошаговыми. Иными словами, нахождение решения конкретных задач методами динамического программирования включает несколько этапов, или шагов, на каждом из которых определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной. Поэтому термин «динамическое программирование» не столько определяет особый тип задач, сколько характеризует методы нахождения решения отдельных классов задач математического программирования, которые могут относиться к задачам как линейного, так и нелинейного программирования. Целесообразно дать общую постановку задачи динамического программирования и определить единый подход к ее решению.

Предположим, что рассматриваемая система S находится в некотором начальном состоянии $S_0 \in \bar{S}_0$ и является управляемой. Таким образом, благодаря осуществлению некоторого управления U указанная система переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{\text{кон}} \in \bar{S}_R$. При этом качество каждого из реализуемых управлений U характеризуется соответствующим значением функции $W(U)$. Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений U найти такое U^*, при котором функция $W(U)$ принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение $W(U^*)$. Сформулированная задача является общей задачей динамического программирования.

Рассмотрим в общем виде решение задачи динамического программирования. Для этого введем некоторые обозначения и сделаем необходимые для дальнейших изложений предположения. Будем считать, что состояние рассматриваемой системы S на k-м шаге $(k = \overline{1, n})$ определяется совокупностью чисел $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, которые получены в результате реализации управления u_k, обеспечившего переход системы S из состояния $X^{(k-1)}$ в состояние $X^{(k)}$. При этом будем предполагать, что состояние $X^{(k)}$, в которое перешла система S, зависит от данного состояния $X^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k и не зависит от того, каким образом система S пришла в состояние $X^{(k-1)}$.

Далее будем считать, что если в результате реализации k-го шага обеспечен определенный доход или выигрыш, также зависящий от исходного состояния системы $X^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k и равный $W_k(X^{(k-1)}, u_k)$, то общий доход или выигрыш за n шагов

$$F = \sum_{k=1}^{n} W_k(X^{(k-1)}, u_k). \tag{3.1}$$

Таким образом, мы сформулировали два условия, которым должна удовлетворять рассматриваемая задача динамического программирования. Первое условие обычно называют *условием отсутствия последействия*, а второе – *условием аддитивности* целевой функции задачи.

Выполнение для задачи динамического программирования первого условия позволяет сформулировать для нее **принцип оптимальности Белмана**. Прежде чем сделать это, дадим определение *оптимальной стратегии управления.* Под такой стратегией будем понимать совокупность управлений $U^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*)$, в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $X^{(0)}$ в конечное $X^{(k)}$ и при этом функция (3.1) принимает наибольшее значение. Следовательно, принцип оптимальности можно сформулировать следующим образом: *каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.* Отсюда следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-м шаге, затем – на двух последних шагах, затем – на трех последних шагах и т. д., вплоть до первого шага.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи динамического программирования целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем, n-м шаге. Для того чтобы найти это решение, очевидно, нужно сделать различные предположения о том, как мог окончиться предпоследний шаг, и с учетом этого выбрать управление u_n^0, обеспечивающее максимальное значение функции $W_n(X^{(n-1)}, u_n)$. Такое управление u_n^0, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется *условно оптимальным* *управлением.* Следовательно, принцип оптимальности требует находить на каждом шаге условно оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Чтобы это можно было осуществить практически, необходимо дать математическую формулировку принципа оптимальности. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $F_n(X^0)$ максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $X^{(0)}$ в конечное состояние $X^{(n)}$ при реализации оптимальной стратегии управления $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$, а через $F_{n-k}(X^{(k)})$ – максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $X^{(k)}$ в конечное состояние $X^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся $n-k$ шагах. Тогда

$$F_n(X^0) = \max[W_1(X^{(0)}, u_1) + ... + W_n(X^{(n-1)}, u_n)]; \qquad (3.2)$$

$$F_{n-k}(X^{(k)}) = \max[W_{k+1}(X^{(k)}, u_{k+1}) + F_{n-k-1}(X^{(k+1)})]; \quad (k = \overline{0, n-1}). \qquad (3.3)$$

Последнее выражение представляет собой математическую запись принципа оптимальности и носит название *основного функционального уравнения* Беллмана или рекуррентного соотношения. Используя данное уравнение, находим решение рассматриваемой задачи динамического программирования. Остановимся на этом более подробно.

Полагая $k = n-1$ в рекуррентном соотношении (3.3), получаем следующее функциональное уравнение:

$$F_1(X^{(n-1)}) = \max_{u_n}[W_n(X^{(n-1)}, u_n) + F_0(X^{(n)})]. \qquad (3.4)$$

В этом уравнении $F_0(X^{(n)})$ будем считать известным. Используя теперь уравнение (3.4) и рассматривая всевозможные допустимые состояния системы S на (n – 1)-м шаге $X_1^{(n-1)}$, $X_2^{(n-1)}, ..., X_m^{(n-1)}, ...,$ находим условные оптимальные решения

$$u_n^0(x_1^{(n-1)}), u_n^o(x_2^{(n-1)}), \ldots, u_n^0(x_m^{(n-1)}), \ldots$$

и соответствующие значения функции (3.4)

$$F_1^0(X_1^{(n-1)}),\ F_1^0(X_2^{(n-1)}), ..., F_1^0(X_m^{(n-1)}), ...$$

Таким образом, на n-м шаге находим условно оптимальное управление при любом допустимом состоянии системы S после (n – 1)-го шага. Иными словами, в каком бы состоянии система ни оказалась после (n – l)-го шага, нам уже известно, какое следует принять решение на n-м шаге. Известно также и соответствующее значение функции (3.4).

Переходим теперь к рассмотрению функционального уравнения при $k = n - 2$:

$$F_2(X^{(n-1)}) = \max_{u_{n-1}}[W_{n-1}(X^{(n-2)},\ u_{n-1}) + F_1(X^{(n-1)})]. \qquad (3.5)$$

Для того чтобы найти значения F_2 для всех допустимых значений $X^{(n-2)}$, необходимо знать $W_{n-1}(X^{(n-2)},\ u_{n-1})$ и $F_1(X^{(n-1)})$. Что касается значений $F_1(X^{(n-1)})$, то мы их уже определили. Поэтому нужно произвести вычисления для $W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1})$ при некотором наборе допустимых значений $X^{(n-2)}$ и соответствующих управлений u_{n-1}. Эти вычисления позволят определить условно оптимальное управление u_{n-1}^0 для каждого $X^{(n-2)}$. Каждое из таких управлений совместно с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивает максимальное значение дохода на двух последних шагах.

Последовательно осуществляя описанный выше итерационный процесс, дойдем, наконец, до первого шага. На этом шаге нам известно, в каком состоянии может находиться система. Поэтому уже не требуется делать предположений о допустимых состояниях системы, а остается лишь только выбрать управление, которое является наилучшим с учетом условно оптимальных управлений, уже принятых на всех последующих шагах.

Таким образом, в результате последовательного прохождения всех этапов от конца к началу определяем максимальное значение выигрыша за n шагов и для каждого из них находим условно оптимальное управление.

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, т. е. определить искомое решение задачи, нужно теперь пройти всю последовательность шагов, только на этот раз от начала к концу. А именно: на первом шаге в качестве оптимального управления u_1^* возьмем найденное условно оптимальное управление u_1^0. На втором шаге найдем состояние X_1^*, в которое переводит систему управление u_1^*. Это состояние определяет найденное условно оптимальное управление u_2^0 , которое теперь будем считать оптимальным. Зная u_2^*, находим X_2^* , а значит, определяем u_3^* и т. д. В результате этого находим решение задачи, т. е. максимально возможный доход и оптимальную стратегию управления U^*, включающую оптимальные управления на отдельных шагах: $U^* = (u_1^*,\ u_2^*,\ \dots,\ u_n^*)$

Итак, мы рассмотрели в общем виде нахождение решения задачи динамического программирования. Из изложенного видно, что этот процесс является довольно громоздким. Поэтому ниже рассмотрено нахождение решения самых простых задач, допускающих постановку в терминах общей задачи динамического программирования. Вместе с тем отметим, что использование ЭВМ позволяет находить на основе описанного выше подхода решение и более сложных практических задач.

3.2 Оптимальное распределение капитала

Задание

Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме S, тыс. руб. Использование i-м предприятием x тыс. руб. из указанных средств обеспечивает увеличение прибыли, определяемое значением нелинейной функции $f_i(x_i)$.

Найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение прибыли.

Математическая постановка задачи состоит в определении наибольшего значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (3.6)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \qquad (3.7)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,n})\,. \qquad (3.8)$$

Сформулированная задача является задачей нелинейного программирования. В том случае, когда $f_i(x_i)$ – выпуклые (или вогнутые) функции, ее решение можно найти, например, методом множителей Лагранжа. Если же функции $f_i(x_i)$ не являются таковыми, то известные методы нахождения решения задач нелинейного программирования не позволяют определить глобальный максимум функции (3.6). Тогда решение задачи (3.6)–(3.8) можно найти с помощью динамического программирования. Для этого исходную задачу нужно рассмотреть как многоэтапную или многошаговую. Вместо того чтобы рассматривать допустимые варианты распределения капиталовложений между n предприятиями и оценивать их эффективность, будем исследовать эффективность вложения средств на одном предприятии, на двух предприятиях и т. д., наконец, на n предприятиях. Таким образом, получим n этапов, на каждом из которых состояние системы (в качестве которой выступают предприятия) описывается объемом средств, подлежащих освоению k предприятиями $(k = \overline{1, n})$. Решения об объемах капиталовложений, выделяемых k-му предприятию $(k = \overline{1, n})$, и являются управлениями. Задача состоит в выборе таких управлений, при которых функция (2.6) принимает наибольшее значение.

Варианты заданий выбираются по предпоследней цифре шифра и приведены в приложении А.

Методические указания по выполнению задания

Найти решение задачи, если максимальное значение S = 10 млрд руб., n = 4, а значения X_i и $f_i(x_i)$ приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – **Исходные данные**

В миллиардах рублей

Объем капиталовложений x_i	Прирост прибыли $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений			
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3	предприятие 4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

Для решения данной задачи динамического программирования следует составить рекуррентное соотношение Беллмана.

Пусть дано n ункций с неотрицательными значениями:

$f_1(x)$, где $x \in d_1$; $f_2(x)$, где $x \in d_2; ...;$ $f_n(x)$, где $x \in d_n$.

Определим максимум (минимум) функции

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n),$$

причем на переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ наложена система ограничений, при которых максимум (минимум) φ существует.

В исследуемой задаче система ограничений сводится к уравнению

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = Z.$$

Тогда, для того чтобы найти

$$\Phi(Z) = \max_{x_1, x_2, ..., x_n} [f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)]$$

при условии

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = Z\ ,$$

необходимо выполнить следующие этапы, или шаги:

$$\varphi_{1,2}(Z) = \max_{x \in d_1} [f_1(x) + f_2(Z - x)],$$

$$\varphi_{1,2,3}(Z) = \max_{x \in d_2} [\varphi_{1,2}(x) + f_3(Z - x)]$$

……………………………………..

$$\varphi_{1,2,\ldots,(n-1)}(Z) = \max_{x \in d_{n-1}} [\varphi_{1,2,\ldots,n-2}(x) + f_{n-1}(Z - x)]$$

$$\Phi(Z) = \max_{x \in d_n} [\varphi_{1,2,\ldots,n-1}(x) + f_{n-1}(Z - x)]$$

Таким образом, вычисляется максимум $f_1 + f_2$ для всех рассматриваемых x_1 и x_2, таких, что

$$x_1 + x_2 = Z.$$

Так получают функцию $\varphi_{1,2}(Z)$. Затем вычисляется максимум $\varphi_{1,2}$ и f_3 для различных испытуемых значений x_1, x_2 и x_3, таких, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = Z.$$

Так получают функцию $\varphi_{1,2,3}(Z)$ и так далее.

Таким образом, чтобы определить $\varphi_{1,2}(2)$ в нашем примере, надо вычислить:

$$f_1(0) + f_2(2) = 0{,}00 + 0{,}41 = 0{,}41;$$
$$f_1(1) + f_2(1) = 0{,}28 + 0{,}25 = 0{,}53;$$
$$f_1(2) + f_2(0) = 0{,}45 + 0{,}00 = 0{,}45.$$

Получаем

$$\varphi_{1,2}(2) = 0{,}53.$$

Вычислим таким способом значения

$$\varphi_{1,2}(0),\ \ \varphi_{1,2}(1),\ \ \varphi_{1,2}(2),...,\ \ \varphi_{1,2}(10)$$

и сведем их в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 – **Результаты первого шага решения задачи**

$(\varphi_{1,2}(Z) = \max[f_1(x) + f_2(Z - x)])$

Z	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi_{1,2}(Z)$	Оптимальная политика при вложении в предприятия 1 и 2
0	0	0	0	(0,0)
1	0,28	0,25	0,28	(1,0)
2	0,45	0,41	0,53	(1,1)
3	0,65	0,55	0,70	(2,1)
4	0,78	0,65	0,90	(3,1)
5	0,90	0,75	1,06	(3,2)
6	1,02	0,80	1,20	(3,3)
7	1,13	0,85	1,33	(4,3)
8	1,23	0,88	1,45	(5,3)
9	1,23	0,90	1,57	(6,3)
10	1,38	0,90	1,68	(7,3)

Таблица 3.2 позволяет определить политики, соответствующие оптимальному доходу при данном капиталовложении. Например, если в предприятия 1 и 2 вместе вложить 4 млрд руб. , то в предприятие 1 надо вложить 3 млрд руб., а в предприятие 2 – 1 млрд. руб. Именно это и обозначает символ (3, 1) в пятом столбце. Прибыль в этом случае равна 0,90 млрд руб.

Если в предприятия 1 и 2 вкладывать 10 млрд руб., следует избрать политику (7, 3). Для такого распределения прибыль оптимальна и равна 1,68.

Исследование будет продолжено вычислением $\varphi_{1,2,3}(Z)$, т. е. поиском оптимальной комбинации, когда капитал Z вкладывается в предприятия 1, 2 и 3. Результаты составляют содержание таблицы 3.3. Например, если капиталовложение в 7 млрд руб. распределять между предприятиями 1, 2 и 3, оптимальная прибыль будет соответствовать политике (3, 3, 1) и достигнет 3,35 млрд руб.

Таблица 3.3 – **Результаты второго шага решения задачи**

$(\varphi_{1,2,3}(Z) = \max[\varphi_{1,2}(x) + f_3(Z - x)])$

Z	$\varphi_{1,2}(x)$	$f_3(x)$	$\varphi_{1,2,3}(Z)$	Оптимальная политика вложений в предприятия	
				1 и 2	1, 2 и 3
0	0	0	0	(0,0)	(0,0,0)
1	0,28	0,15	0,28	(1,0)	(1,0,0)
2	0,53	0,25	0,53	(1,1)	(1,1,0)
3	0,70	0,40	0,70	(2,1)	(2,1,0)
4	0,90	0,50	0,90	(3,1)	(3,1,0)
5	1,06	0,62	1,06	(3,2)	(3,2,0)
6	1,20	0,73	1,21	(3,3)	(3,2,1)
7	1,33	0,82	1,35	(4,3)	(3,3,1)
8	1,45	0,90	1,48	(5,3)	(4,3,1)
9	1,57	0,96	1,60	(6,3)	(5,3,1) или (3,3,3)
10	1,68	1,00	1,73	(7,3)	(4,3,3)

Далее определяем $\varphi_{1,2,3,4}(Z)$, т. е. оптимальную прибыль при вкладывании в предприятия 1, 2, 3, и 4. Результаты расчета заносим в таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – **Результаты третьего шага решения задачи**

$(\varphi_{1,2,3,4}(Z) = \max[\varphi_{1,2,3,4}(x) + f_4(Z - x)])$

Z	$\varphi_{1,2,3}(x)$	$f_4(x)$	$\varphi_{1,2,3,4}(x)$	Оптимальная политика вложений в предприятия	
				1, 2 и 3	1, 2, 3, 4
0	0	0	0	(0,0,0)	(0,0,0,0)
1	0,28	0,20	0,28	(1,0,0)	(1,0,0,0)
2	0,53	0,33	0,53	(1,1,0)	(1,1,0,0)
3	0,70	0,42	0,73	(2,1,0)	(1,1,0,1)
4	0,90	0,48	0,90	(3,1,0)	(3,1,0,0) или (2,1,0,1)
5	1,06	0,53	1,10	(3,2,0)	(3,1,0,1)

6	1,21	0,56	1,26	(3,2,1)	(3,2,0,1)
7	1,35	0,58	1,41	(3,3,1)	(3,2,1,1)
8	1,48	0,60	1,55	(4,3,1)	(3,3,1,1)
9	1,60	0,60	1,68	(5,3,1) или (3,3,3)	(4,3,1,1) или (3,3,1,2)
10	1,73	0,60	1,81	(4,3,3)	(4,3,1,2)

Результаты вычислений остаются в силе при любом ином порядке вычислений, например $\varphi_{3,1}(Z)$; $\varphi_{3,1,2}(Z)$; $\varphi_{3,1,2,4}(Z)$.

Оптимальные распределения капиталовложений представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – **Оптимальное распределение капиталовложений**

Объем инвестиций x_i, млрд руб.	Вложения в предприятия				Оптимальный прирост прибыли, млрд руб.
	1	2	3	4	
1	1	0	0	0	0,28
2	1	1	0	0	0,53
3	1	1	0	1	0,73
4	3	1	0	0	0,90
	2	1	0	1	
5	3	1	0	1	1,10
6	3	2	0	1	1,26
7	3	2	1	1	1,41
8	3	3	1	1	1,55
9	4	3	1	1	1,68
	3	3	1	2	
10	4	3	1	2	1,81

Из таблицы 3.5 видно, что оптимальная маргинальная прибыль убывает в зависимости от Z. Установлено, что, в общем, приращение прибыли, получающееся от дополнительного вложения Z млрд руб. вместо Z – 1, как функция Z, убывает.

Упомянутое убывание очевидным образом связано с общей тенденцией к насыщению.

4 АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1 Решение задачи симплекс М-методом

Задание

Найти оптимальные величины производства продукции на предприятии видов А, Б и В. Исходные данные о затратах сырья на единицу продукции, объеме сырья, затратах оборудования на единицу продукции, объеме оборудования, прибыли от реализации единицы продукции, спросе на продукцию приведены в таблице 4.1. Критерием является максимум прибыли предприятия. Исходные данные определяются по последней цифре шифра зачетной книжки.

Таблица 4.1 – **Исходные данные**

Виды продукции	Варианты					
	ПРИМЕР	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7
Затраты сырья на единицу продукции						
А	4	4	2	3	5	6
Б	5	5	4	5	6	3
В	2	3	6	4	3	5
Объем сырья						
	4000	3000	2000	2200	2800	2600
Затраты оборудования на единицу продукции						
А	5	5	4	4	3	2
Б	4	5	6	6	4	3
В	5	4	6	5	5	4
Объем оборудования						
	2000	1600	1200	1400	2000	2400
Прибыль от реализации единицы продукции						
А	12	14	8	10	14	10
Б	10	12	10	12	10	8
В	14	10	12	8	12	12
Спрос на продукцию						
А	200	100	80	120	150	140
Б	100	50	40	60	300	280

Окончание таблицы 4.1

Виды продукции	Варианты				
	6	7	8	9	0
1	8	9	10	11	12
Затраты сырья на единицу продукции					
А	5	6	4	6	2
Б	3	2	4	3	4
В	6	4	6	4	6
Объем сырья					
	1200	1400	1600	1800	2000
Затраты оборудования на единицу продукции					
А	4	5	3	4	4

Б	2	3	2	5	5
В	3	2	5	4	6
Объем оборудования					
	600	800	1000	1200	1000
Прибыль от реализации единицы продукции					
А	12	8	12	14	12
Б	8	12	8	10	10
В	10	10	10	12	8
Спрос на продукцию					
А	80	100	120	180	200
Б	40	40	80	100	100

Методические указания по выполнению задания

Для того, чтобы решить задачу симплексным методом, необходимо выполнить следующее:

– привести задачу к каноническому виду;

– найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решение ввиду несовместимости системы ограничений);

– вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода;

– если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается;

– если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения.

Приведем пример решения задачи.

Определим оптимальный план производства.

Пусть x_1, x_2, x_3 – количество произведенной продукции вида А, Б, В, соответственно. Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$F = 12x_1 + 10x_2 + 14x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 4000; \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 2000; \\ x_1 \ge 200; \\ x_2 \ge 100; \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Вводим дополнительные переменные $x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0$, чтобы неравенства преобразовать в равенства:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 4000; \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 2000; \\ x_1 - x_6 = 200; \\ x_2 - x_7 = 100. \end{cases}$$

Чтобы выбрать начальный базис, вводим искусственные переменные $x_8 \geq 0, x_9 \geq 0$ и очень большое число $M(M \to \infty)$. Решаем М-методом.

$$F = 12x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - \mathrm{M}x_8 + \mathrm{M}x_9 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 4000; \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 2000; \\ x_1 - x_6 = 200; \\ x_2 - x_7 = 100; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0. \end{cases}$$

В качестве базиса возьмем $x_4 = 4000;\ x_5 = 2000;\ x_8 = 200;\ x_9 = 100.$
Данные заносим в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – **Симплекс-таблица № 1**

1	2	3	4	5	6	7	8
	C_i		12	10	14	0	0
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	4000	4	5	2	1	0
0	x_5	2000	5	4	5	0	1
$-M$	x_8	200	1	0	0	0	0
$-M$	x_9	100	0	1	0	0	0
	Δ_i	$-300M$	$\underline{-M-12}$	$-M-10$	-14	0	0

Окончание таблицы 4.2

9	10	11	12	13	14	15	16
	C_i		0	0	$-M$	$-M$	
C_i		b_i	x_6	x_7	x_8	x_9	Q
0	x_4	4000	0	0	0	0	1000
0	x_5	2000	0	0	0	0	400
$-M$	x_8	200	-1	0	1	0	$\underline{200}$
$-M$	x_9	100	0	-1	0	1	–
	Δ_i	$-300M$	M	M	0	0	

Целевая функция

$$F = \sum_{i=1}^{4} C_i\, b_i = 0 \cdot 4000 + 0 \cdot 2000 + (-M) \cdot 200 + (-M) \cdot 100 = -300M.$$

Вычисляем оценки по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{4} C_i a_{ij} - C_j:$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - 12 = -M - 12;$
$\Delta_2 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - 10 = -M - 10;$
$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 14 = -14;$
$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 - 0 = M;$
$\Delta_7 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) - 0 = M;$
$\Delta_8 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - (-M) = 0;$
$\Delta_9 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - (-M) = 0.$

Поскольку есть отрицательные оценки, то план не оптимален. Наименьшая оценка $\Delta_1 = -M - 12$.

Вводим переменную x_1 в базис.

Определяем переменную, выходящую из базиса. Для этого находим наименьшее неотрицательное отношение

$$Q_i = \frac{a_i}{b_i}$$

для столбца x_1:

$$Q_1 = \frac{4000}{4} = 1000;$$

$$Q_2 = \frac{2000}{5} = 400;$$

$$Q_3 = \frac{200}{1} = 200;$$

$$Q_4 = \frac{100}{0} = \infty.$$

Наименьшее неотрицательное – Q_3 = 200. Выводим переменную x_8 из базиса. Для этого над строками таблицы 4.2 выполняем линейные преобразования (таблица 4.3).

Из 1-й строки вычитаем 3-ю строку, умноженную на 4. Из 2-й строки вычитаем 3-ю строку, умноженную на 5.

Таблица 4.3 – **Вспомогательная таблица**

1	2	3	4	5	6	7	8
	C_i			8	12	0	0
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	4000 – 4 · 200	4 – 4 · 1	5 – 4 · 0	2 – 4 · 0	1 – 4 · 0	0 – 4 · 0
0	x_5	2000 – 5 · 200	5 – 5 · 1	4 – 5 · 0	5 – 5 · 0	0 –5 ·0	1 – 5 · 0
12	x_8	200	$\underline{1}$	0	0	0	0
–*M*	x_9	100	0	1	0	0	0

Окончание таблицы 4.3

9	10	11	12	13	14	15	16
	C_i		0	0	–*M*	–*M*	
C_i		b_i	x_6	x_7	x_8	x_9	*Q*
0	x_4	4000 – 4 · 200	0 – 4 · (–1)	0 – 4 · 0	0 – 4 · 1	0 – 4 · 0	
0	x_5	2000 – 5 · 200	0 – 5 · (–1)	0 – 5 · 0	0 – 5 · 1	0 – 5 · 0	
12	x_8	200	–1	0	1	0	
–*M*	x_9	100	0	–1	0	1	

Получаем новую таблицу:

Таблица 4.4 – **Симплекс-таблица № 2**

1	2	3	4	5	6	7	8
	C_i		12	10	14	0	0
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	3200	0	5	2	1	0
0	x_5	1000	0	4	5	0	1
12	x_8	200	1	0	0	0	0
–*M*	x_9	100	0	$\underline{1}$	0	0	0
	Δ_i	–100*M* +2400	$\underline{0}$	$\underline{-M-10}$	–14	0	0

Окончание таблицы 4.4

9	10	11	12	13	14	15	16
	C_i		0	0	–*M*	–*M*	
C_i		b_i	x_6	x_7	x_8	x_9	*Q*
0	x_4	3200	4	0	–4	0	640
0	x_5	1000	5	0	–5	0	250
12	x_8	200	–1	0	1	0	–
–*M*	x_9	100	0	–1	0	1	$\underline{\underline{100}}$

	Δ_i	$-100M$ +2400	–12	M	M + 12	0	

Целевая функция

$$F=\sum_{i=1}^{4}C_i\,b_i=0\cdot 3200+0\cdot 1000+12\cdot 200+(-M)\cdot 100=$$

$$=-100M+2400.$$

Вычисляем оценки по формуле

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{4}C_i a_{ij}-C_j:$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - 12 = 0;$
$\Delta_2 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 12 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - 10 = -M - 10;$
$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 14 = -14;$
$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_6 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 12 \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 - 0 = -12;$
$\Delta_7 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) - 0 = M;$
$\Delta_8 = 0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-5) + 12 \cdot 1 + (-M) \cdot 0 - (-M) = M + 12;$
$\Delta_9 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 - (-M) = 0.$

Поскольку есть отрицательные оценки, то план не оптимален. Наименьшая оценка $\Delta_2 = -M - 10$.

Вводим переменную x_2 в базис.

Определяем переменную, выходящую из базиса. Для этого находим наименьшее неотрицательное отношение

$$Q_i=\frac{a_i}{b_i}$$

для столбца x_2:

$$Q_1=\frac{3200}{5}=640;$$

$$Q_2=\frac{1000}{4}=250;$$

$$Q_3=\frac{200}{0}=\infty;$$

$$Q_4 = \frac{100}{1} = 100.$$

Наименьшее неотрицательное – $Q_4 = 100$. Выводим переменную x_9 из базиса и удаляем искусственные переменные. Выполняем линейные преобразования.

Из 1-й строки таблицы 4.5 вычитаем 4-ю строку, умноженную на 5. Из 2-й строки вычитаем 4-ю строку, умноженную на 4.

Таблица 4.5 – **Вспомогательная таблица**

1	2	3	4	5	6	7
	C_i		12	10	14	0
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_4	$3200 - 5 \cdot 100$	$0 - 5 \cdot 0$	$5 - 5 \cdot 1$	$2 - 5 \cdot 0$	$1 - 5 \cdot 0$
0	x_5	$1000 - 4 \cdot 100$	$0 - 4 \cdot 0$	$4 - 4 \cdot 1$	$5 - 4 \cdot 0$	$0 - 4 \cdot 0$
12	x_1	200	1	0	0	0
10	x_2	100	0	<u>1</u>	0	0

Окончание таблицы 4.5

8	9	10	11	12	13	14
	C_i		0	0	0	
C_i		b_i	x_5	x_6	x_7	Q
0	x_4	$3200 - 5 \cdot 100$	$0 - 5 \cdot 0$	$4 - 5 \cdot 0$	$0 - 5 \cdot (-1)$	
0	x_5	$1000 - 4 \cdot 100$	$1 - 4 \cdot 0$	$5 - 4 \cdot 0$	$0 - 4 \cdot (-1)$	
12	x_1	200	0	–1	0	
10	x_2	100	0	0	–1	

Получаем новую таблицу:

Таблица 4.6 – **Симплекс-таблица № 3**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	C_i		12	10	14	0	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Q
0	x_4	2700	0	0	2	1	0	4	5	1350
0	x_5	600	0	0	<u>5</u>	0	1	5	4	<u>120</u>
12	x_1	200	1	0	0	0	0	–1	0	–
10	x_2	100	0	1	0	0	0	0	–1	–
	Δ_i	3400	0	0	<u>–14</u>	0	0	–12	–10	

Целевая функция

$$F = \sum_{i=1}^{4} C_i\, b_i = 0 \cdot 2700 + 0 \cdot 600 + 12 \cdot 200 + 10 \cdot 100 = 3400.$$

Вычисляем оценки по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{4} C_i a_{ij} - C_j:$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 - 12 = 0;$
$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 1 - 10 = 0;$
$\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 14 = -14;$
$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_6 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 12 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 - 0 = -12;$
$\Delta_7 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot (-1) - 0 = -10;$

Поскольку есть отрицательные оценки, то план не оптимален. Наименьшая оценка – $\Delta_3 = -14$.

Вводим переменную x_3 в базис

Определяем переменную, выходящую из базиса. Для этого находим наименьшее неотрицательное отношение

$$Q_i = \frac{a_i}{b_i}$$

для столбца x_3.

$$Q_1 = \frac{2700}{2} = 1350;$$

$$Q_2 = \frac{600}{5} = 120;$$

$$Q_3 = \frac{200}{0} = \infty;$$

$$Q_4 = \frac{100}{0} = \infty.$$

Наименьшее неотрицательное: $Q_2 = 120$. Выводим переменную x_5 из базиса и 2-ю строку делим на 5. Из 1-й строки вычитаем 2-ю строку, умноженную на 2.

Таблица 4.7 – **Вспомогательная таблица**

1	2	3	4	5	6	7
	C_i		12	10	14	0
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_4	$2700 - 2 \cdot 120$	$0 - 2 \cdot 0$	$0 - 2 \cdot 0$	$2 - 2 \cdot 1$	$1 - 2 \cdot 0$
14	x_5	120	0	0	1	0
12	x_1	200	1	0	0	0

10	x_2	100	0	1	0	0

Окончание таблицы 4.7

8	9	10	11	12	13	14
	C_i		0	0	0	
C_i		b_i	x_5	x_6	x_7	Q
0	x_4	2700 – 2 · 120	0 – 2 · 0,2	4 – 2 · 1	5 – 2 · 1,25	
14	x_5	120	0,2	1	0,8	
12	x_1	200	0	–1	0	
10	x_2	100	0	0	–1	

Вычисляем:

1400 – 4 · 87,5 =1050;
2 – 4 · 1,25 = –3.

Получаем новую таблицу:

Таблица 4.8 – **Симплекс-таблица № 4**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	C_i		12	10	14	0	0	0	0	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Q
0	x_4	2460	0	0	0	1	–0,4	2	2,5	
14	x_5	120	0	0	1	0	0,2	1	0,8	
12	x_1	200	1	0	0	0	0	–1	0	
10	x_2	100	0	1	0	0	0	0	–1	
	Δ_i	5080	0	0	0	0	2,8	2	1,2	

Целевая функция

$$F = \sum_{i=1}^{4} C_i\, b_i = 0 \cdot 2460 + 14 \cdot 120 + 12 \cdot 200 + 10 \cdot 100 = 5080.$$

Вычисляем оценки по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{4} C_i a_{ij} - C_j:$$

$\Delta_1 = 0 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 - 12 = 0;$
$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 1 - 10 = 0;$
$\Delta_3 = 0 \cdot 0 + 14 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 14 = 0;$
$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 14 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 0 = 0;$
$\Delta_5 = 0 \cdot (-0{,}4) + 14 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 0 = 2{,}8;$
$\Delta_6 = 0 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 - 0 = 2;$

$\Delta_7 = 0 \cdot 2{,}5 + 14 \cdot 0{,}8 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot (-1) - 0 = 1{,}2.$

Поскольку отрицательных оценок нет, то план оптимален.

Решение задачи: $x_1 = 200$; $x_2 = 100$; $x_3 = 120$; $x_4 = 2460$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$; $F_{\max} = 5080$.

5 ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИГР

5.1 Решение матричных игр в чистых стратегиях

Задание

Требуется решить матричную игру, заданную матрицей, в чистых стратегиях.

Исходные данные

Варианты заданий выбираются по последней цифре шифра в приложении Б.

Методические указания по выполнению задания

Рассмотрим парную конечную игру.

Пусть игрок A располагает m личными стратегиями: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Пусть у игрока B имеется n личных стратегий. Обозначим их $B_1, B_2, \ldots, B_n$. В этом случае игра имеет размерность $m \times n$. В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i, B_j $(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$ однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока A (положительный или отрицательный) и проигрыш $(-a_{ij})$ игрока B.

Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i,B_j).

Матрица $A = (a_{ij}), i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}$, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_j, называется **платежной матрицей,** или **матрицей игры**.

Общий вид платежной матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Платежную матрицу также часто представляют в виде таблицы 5.1.

Таблица 5.1 – **Общий вид платежной матрицы**

A_i	B_J

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	A_{11}	A_{12}	…	A_{1n}
A_2	A_{21}	A_{22}	…	A_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	A_{m1}	A_{m2}	…	A_{mn}

Строки матрицы A соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго.

Эти стратегии называются **чистыми**.

Рассмотрим игру размера $m \times n$ с матрицей $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, и определим лучшую среди стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Выбирая стратегию A_i, игрок A должен рассчитывать , что игрок B ответит на нее той из стратегий B_j, для которой выигрыш игрока A минимален (игрок B стремится "навредить" игроку A).

Обозначим α_i – наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока B (наименьшее число в i-й строке платежной матрицы), т.е.

$$\alpha_i = \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}.$$

Среди чисел $\alpha_i (i = \overline{1, m})$ выберем наибольшее: $\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \alpha_i$. Назовем α **нижней ценой игры** или **максимальным выигрышем (максимином)**. Это **гарантированный выигрыш игрока *A* при любой стратегии игрока *B***.

Итоговую формулу можно записать следующим образом:

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}.$$

Стратегия, соответствующая максимину, называется **максиминной стратегией**.

Аналогичные рассуждения могут быть выполнены и в отношении игрока B. Игрок B заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока A. Выбирая стратегию B_j, он учитывает, что игрок A будет стремиться к максимальному выигрышу.

Обозначим $\beta_j = \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}$ – наибольший проигрыш игрока B при выборе им стратегии B_j для всех возможных стратегий игрока A (наибольшее число в j-ой строке платежной матрицы).

Среди $\beta_j (j = \overline{1,n})$ выберем наименьшее: $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,n}} \beta_j$ и назовем β **верхней ценой игры** или **минимаксом**. Это **минимальный гарантированный проигрыш игрока *B***.

Таким образом,

$$\beta = \min_{j=\overline{1,n}} \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij.}$$

Стратегия, соответствующая минимаксу, называется **минимаксной стратегией**.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" максиминной и минимаксной стратегий, называется **принципом минимакса**. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника.

Игрок выбирает свои действия, предполагая, что противник будет действовать неблагоприятным образом, т.е. будет стараться "навредить".

Опредtлим нижнюю и верхнюю цену игры.

Рассмотрим платежную матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

При выборе стратегии A_1 (первая строка матрицы) минимальный выигрыш равен $\alpha_1 = \min(4, 5, 7, 6) = 4$ и соответствует стратегии B_1 игрока *B*. При выборе стратегии A_2 (вторая строка матрицы) минимальный выигрыш равен $\alpha_2 = \min(6, 1, -1, -3) = -3$, он достигается при использовании игроком *B* стратегии B_4. При выборе стратегии A_3 (третья строка матрицы) минимальный выигрыш равен $\alpha_3 = \min(9, -2, -5, 1) = -5$, он достигается при использовании игроком *B* стратегии B_4.

Гарантируя себе максимальный выигрыш при любой стратегии игрока *B*, т.е. нижнюю цену игры $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \max(4, -3, -5) = 4$, игрок *A* может выбрать любую стратегию*:* A_1, A_2 или A_3, т.е. любая его стратегия является максиминной.

Выбирая стратегию B_1 (первый столбец), игрок *B* понимает, что игрок *A* ответит стратегией A_1, чтобы максимизировать свой выигрыш (проигрыш игрока *B*). Следовательно, максимальный проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии B_1 равен $\beta_1 = \max(4, 6, 9) = 9$.

Аналогично, максимальный проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии B_2 (второй столбец) равен $\beta_2 = \max(5, 1, -2) = 5$. Максимальный проигрыш игрока *B* при выборе им стратегии B_3 (третий столбец) равен $\beta_3 = \max(7, -1, -5) = 7$. Максимальный проигрыш игрока

B при выборе им стратегии B_4 (четвертый столбец) равен $\beta_4 = \max(6, -3, 1) = 6$.

Таким образом, при любой стратегии игрока A гарантированный минимальный проигрыш игрока B равен $\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \min(9, 5, 7, 6) = 5$ – верхней цене игры.

Любая стратегия игрока B является минимаксной.

Результаты наших рассуждений сведем в таблицу 5.2, которая представляет собой платежную матрицу с дополнительной строкой β_j и столбцом α_i. На их пересечении будем записывать верхнюю и нижнюю цену игры.

Таблица 5.2 – **Платежная матрица с дополнительными строкой и столбцом**

A_i	B_J				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	7	6	4
A_2	6	1	–1	–3	–3
A_3	9	–2	–5	1	–5
β_j	9	5	7	6	$\alpha = 5;\ \beta = 4$

Таким образом, в рассматриваемой задаче нижняя и верхняя цены игры различны: $\alpha \neq \beta$.

Если же верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены $v = \alpha = \beta$ называется **чистой ценой игры**, или просто **ценой игры**. Максиминная и минимаксная стратегии, соответствующие цене игры, являются **оптимальными стратегиями**, а их совокупность – **оптимальным решением**, или просто **решением игры**.

В этом случае игрок A получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока B) выигрыш v, а игрок B добивается минимального гарантированного (не зависящего от поведения игрока A) проигрыша v. Говорят, что решение игры обладает **устойчивостью**, т.е., если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара чистых стратегий A_i и B_j дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Такая ситуация, если она существует, называется **седловой точкой** (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз – в другом).

Таким образом, для игры с седловой точкой нахождение решения заключается в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые и являются оптимальными.

Далее рассмотрим пример.

Пример 1. Требуется определить нижнюю и верхнюю цену игры, которая задана следующей платежной матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Выясним, имеет ли игра седловую точку. Решение удобно проводить в таблице. Таблица 5.3 включает платежную матрицу игры, а также дополнительные строку и столбец, которые иллюстрируют процесс поиска оптимальных стратегий.

Таблица 5.3 – **Платежная матрица с дополнительными строкой и столбцом**

A_i	B_J				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	2	2
A_2	6	1	–1	–3	–3
A_3	9	–2	–5	1	–5
β_j	9	2	3	2	$\alpha = \beta = 2$

Приведем некоторые пояснения.

Столбец α_i заполнен на основе анализа строк матрицы (стратегии игрока A): $\alpha_1 = 2;\ \alpha_2 = -3;\ \alpha_3 = -5$ – минимальные числа в строках.

Аналогично, $\beta_1 = 9;\ \beta_2 = 2;\ \beta_3 = 3;\ \beta_4 = 2$ – максимальные числа в столбцах.

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_{i=1,2,3}; \alpha_1 = \max(2, -3, -5) = 2$ (наибольший элемент в столбце α_i).

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{j=1,2,3};\ \beta_j = \min(9, 2, 3, 2)$ (наименьший элемент в строке β_j). Эти значения равны, т.е. $\alpha = \beta$, и достигаются на паре стратегий (A_1, B_2) и (A_1, B_4). Цена игры $v = 2$.

Таким образом, оптимальное решение состоит в выборе игроками A и B стратегий A_1 и B_2 и A_1 и B_4 соответственно.

Пример наглядно демонстрирует свойство устойчивости решения. Можно убедиться, что если любой из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому заведомо невыгодно отступать от своей оптимальной стратегии.

5.2 Решение игр в смешанных стратегиях

Задание

Требуется решить матричную игру, заданную матрицей, в смешанных стратегиях.

Исходные данные

Варианты заданий выбираются по последней цифре шифра в приложении В.

Методические указания по выполнению задания

Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые и являются оптимальными.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае можно получить оптимальное решение, чередуя чистые стратегии.

Смешанной стратегией игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$с вероятностями $u_1, u_2, \dots, u_n$. Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор: $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u_1},\ \boldsymbol{u_2},\ \dots, \boldsymbol{u_m})$, а стратегию второго игрока как вектор: $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \dots, \boldsymbol{z_n})$.

Очевидно, что

$$u_i \geq 0, i =;$$
$$z_j \geq 0, j =;$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1, \sum_{j=1}^{n} z_j = 1.$$

Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать вектором, в котором единица соответствует чистой стратегии.

Оптимальное решение игры (или просто – **решение игры**) – это пара оптимальных стратегий U^*, Z^*, в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется **ценой игры v**. Цена игры удовлетворяет неравенству

$$\alpha \le v \le \beta.$$

Справедлива следующая основная теорема теории игр.

Теорема Неймана. *Каждая конечная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.* .

Пусть $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ и $Z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ - пара оптимальных стратегий. Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с вероятностью, отличной от нуля, то она называется **активной**.

Теорема об активных стратегиях. *Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.*.

Эта теорема имеет большое практическое значение. Она дает конкретные модели для нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Рассмотрим игру размера 2×2.

Такая игра является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение - это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Для игры, в которой отсутствует седловая точка в соответствии с теоремой Неймана, оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий $U^* = (u_1^*, u_2^*)$ и $Z^* = (z_1^*, z_2^*)$. Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии U^*, то его средний выигрыш будет равен цене игры v, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок B. Для игры 2×2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка.

Выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) – случайная величина, математическое ожидание которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока A (при использовании оптимальной стратегии) будет равен v и для первой, и для второй стратегий противника.

Пусть игра задана платежной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Средний выигрыш игрока A, если он использует оптимальную смешанную стратегию $U^* = (u_1^*, u_2^*)$, а игрок B – чистую стратегию B_1 (что соответствует первому столбцу платежной матрицы), равен цене игры v, т.е.

$$a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^*.$$

Тот же средний выигрыш получает игрок А, если противник применяет стратегию B_2, т.е. $a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* = v$. Учитывая, что $U_1^* + U_2^* = 1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^* = v; \\ a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* = v; \\ \quad u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Решая систему (5.1), можно найти оптимальную стратегию U^* и цену игры v.

Аналогичная система уравнений может быть получена для определения оптимальной стратегии игрока B:

$$\begin{cases} a_{11}z_1^* + a_{12}z_2^* = v; \\ a_{21}z_1^* + a_{22}z_2^* = v; \\ \quad z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Далее рассчитаем **пример**.

Найти решение игры, заданной платежной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Прежде всего, проверим наличие седловой точки. Для этого найдем минимальные элементы в каждой из строк и максимальные в каждом из столбцов (таблица 5.4).

Таблица 5.4 – **Платежная матрица с дополнительными строкой и столбцом**

A_i	B_J		α_i
	B_1	B_2	
A_1	2	9	2
A_2	6	3	3
β_j	6	9	$\alpha = 3;\ \beta = 6$

Таким образом, нижняя цена игры $\alpha = \max(2;\ 3) = 3$, верхняя –$\beta = \min(6; 9) = 6$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, решение игры следует искать в смешанных стратегиях, при этом цена игры находится в следующих пределах: $3 \leq v \leq 6$.

Предположим, что для игрока *A* стратегия задается вектором $U = (u_1,\ u_2)$. Тогда на основании теоремы об активных стратегиях можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = v; \\ 9u_1^* + 3u_2^* = v; \\ \quad u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим: $u_1^* = 3/10\,, u_2^* = 7/10\,, v = 24/5$.

Теперь найдем оптимальную стратегию игрока *B*. Пусть стратегия данного игрока задается вектором $Z = (z_1, z_2)$. Система уравнений (5.2), основанная на использовании теоремы об активных стратегиях, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 2z_1^* + 9z_2^* = 24/5; \\ 6z_1^* + 3z_2^* = 24/5; \\ \quad z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая систему, состоящую из любых двух уравнений, взятых из последней системы, получим $z_1^* = 3/5,\ z_2^* = 2/5$.

Следовательно, решением игры примера 9.3 являются смешанные стратегии: $U^* = (3/10, 7/10)$, $Z^* = (3/5, 2/5)$, цена игры $v = 24/5$.

5.3 Решене статистических игр

Задание

Требуется решить статистическую игру, заданную матрицей.

Исходные данные

Варианты заданий выбираются по предпоследней цифре шифра приложения Г.

Методические указания по выполнению задания

В задачах, решаемых на основе использования теории игр, довольно часто в качестве противника выступает так называемая *природа*. Природа может находиться в одном из множества возможных состояний, которое, в принципе, может быть как конечным, так и бесконечным. Довольно часто в этой ситуации речь идёт о выборе одной (соответственно, чистой) стратегии, т.е. «повторить партию», чтобы вести речь о средних выигрышах, невозможно.

Итак, будем считать, что множество состояний природы B_j ($j = \overline{1,\ n}$) конечно. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения.

Будем считать, что множество управленческих решений (планов) A_i также конечно и равно m.

Как и ранее, исход игры будем определять платёжной матрицей A. Далее условимся, что в том случае, если элементы a_{ij} для игрока представляют собой выигрыш, полезность, будем считать, что A – это игрок, B – природа. И наоборот, если a_{ij} – затраты, потери, то, как таковой, игрок – это игрок B, природа – игрок A.

Один из критериев, применяемых при решении подобных задач, был рассмотрен в предыдущих разделах – это ***максиминный/минимаксный критерий*** (называемый также ***критерием Вальда***).

Рассмотрим некоторые альтернативные критерии.

Критерий Лапласа

Данный критерий опирается на *«принцип недостаточного основания»*, согласно которому все состояния природы B_j полагаются равновероятными, т.е. вероятности того, что природа окажется в одном из n своих состояний, одинаковы и равны:

$$q_j = \frac{1}{n}\ .$$

Если для принимающего решение элементы матрицы a_{ij} платёжной матрицы – выигрыши, то оптимальной считается та стратегия A_i, для которой среднее арифметическое возможных выигрышей максимально, т.е. критерий

$$\max_{A_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right\}. \qquad (5.3)$$

Если принимающий решение является игроком B, то критерий становится таким:

$$\min_{B_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right\}. \qquad (5.4)$$

Критерий Сэвиджа

Введём понятие ***матрицы рисков R***. Это матрица, имеющая размерность $m \times n$. Её элементы r_{ij} определяются по следующей формуле (если A – игрок, B – природа):

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \qquad (5.5)$$

где β_j – максимальный элемент в j-м столбце платёжной матрицы.

Для иллюстрации порядка формирования матрицы рисков используем *пример*. Пусть задана следующая платёжная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Если решение принимает игрок A, то соответствующая матрица рисков такова:

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если же человек, принимающий решение, – игрок B, т.е. a_{ij} – потери, то элементы матрицы рисков определяются так:

$$r_{ij} = a_{ij} - \alpha_i, \tag{5.6}$$

где α_i – минимальный элемент в i-й строке платёжной матрицы.

В случае, если принимающий решение – игрок B, матрица рисков будет такой:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков R и рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.

$$\min_i \max_j \{r_{ij}\}. \tag{5.7}$$

По сути, это тот же минимаксный критерий, только по отношению к матрице рисков, а не к платежной матрице.

Если принимающий решение – игрок B, критерий становится таким:

$$\min_j \max_i \{r_{ij}\}. \tag{5.8}$$

Критерий Гурвица

Данный критерий основан на использовании так называемого *коэффициента доверия*. Обозначим его γ и предположим, что природа окажется в самом выгодном состоянии с вероятностью γ и в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1-\gamma$.

Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих исходов.

Если принимающий решение – игрок *A*, то

$$\max_i\left[\gamma \max_j\{a_{ij}\} + (1-\gamma)\min_j\{a_{ij}\}\right]. \quad (5.9)$$

Если принимающий решение – игрок B, то

$$\min_j\left[\gamma \min_i\{a_{ij}\} + (1-\gamma)\max_i\{a_{ij}\}\right]. \quad (5.10)$$

Заметим, что, если коэффициент доверия равен нулю, критерий Гурвица превращается в "классический" минимакс, а при $\gamma = 1$ получаем правило "максимум из максимумов" – выбор лучшего из лучших исходов.

Пример. Телефонная компания должна определить уровень своих возможностей по предоставлению услуг так, чтобы удовлетворить спрос своих клиентов на планируемый период.

Для каждого уровня спроса существуют различные уровни возможностей телефонной компании (например, при вводе нового тарифа). Имеются четыре варианта спроса на телефонные услуги, что равнозначно наличию четырёх состояний природы. Известны также четыре варианта предоставления телефонных услуг. Прибыль для каждого сочетания «управленческое решение – состояние природы» приведена в таблице 5.5.

Таблица 5.5 – **Платежная матрица**

Услуги	Спрос			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	25	18	14	10
A_2	20	26	24	6
A_3	4	10	16	8
A_4	16	24	8	9

Необходимо определить оптимальную стратегию телефонной компании, используя различные критерии.

Решение

Для решения задачи используем критерии Вальда, Лапласа, Гурвица и Сэвиджа.

Максиминный критерий (критерий Вальда).

В данном случае обычным образом определяем нижнюю цену игры α, используя максиминный критерий (критерий Вальда).

Выясним, имеет ли игра седловую точку. Решение удобно проводить в таблице. Таблица 5.6 включает платежную матрицу игры, а также дополнительные строку и столбец, которые иллюстрируют процесс поиска оптимальных стратегий.

Таблица 5.6 – **Платежная матрица с дополнительными строкой и столбцом**

Услуги	Спрос				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	25	18	14	10	10
A_2	20	26	24	6	6
A_3	4	10	16	8	4
A_4	16	24	8	9	8
β_j	25	26	24	10	10

Приведем некоторые пояснения.

Столбец α_i заполнен на основе анализа строк матрицы (стратегии игрока A): $\alpha_1 = 10;\ \alpha_2 = 6;\ \alpha_3 = 4;\ \alpha_4 = 8$ (минимальные числа в строках).

Аналогично, $\beta_1 = 25;\ \beta_2 = 26;\ \beta_3 = 24;\ \beta_4 = 10$ (максимальные числа в столбцах).

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_{i=1,2,3};\ \alpha_i = \max(10;\ 6; 4; 8) = 10$ (наибольший элемент в столбце α_i).

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{j=1,2,3};\ \beta_j = \min(25; 26; 24; 10) = 10$ (наименьший элемент в строке β_j). Эти значения равны, т.е. $\alpha = \beta$, и достигаются на паре стратегий (A_1, B_4). Цена игры v = 10.

Оптимальная стратегия – A_1.

Критерий Лапласа.

Необходимо определить среднее арифметическое по каждой из строк платежной матрицы, а затем выбрать максимальное значение [критерий (5.9)]. В результате расчетов получим: для стратегии A_1 – 16,75; для стратегии A_2 – 19; для стратегии A_3 – 9,5; для стратегии A_4 – 14,25. Оптимальная стратегия по критерию Лапласа – A_2.

Критерий Сэвиджа

Сначала сформируем матрицу рисков R. Для этого воспользуемся соотношением (5.3), т.е. будем вычитать каждый элемент платежной матрицы из максимального элемента соответствующего столбца.

В результате получим следующую матрицу рисков:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 21 & 16 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 16 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя максимум в каждой строке, получим: для стратегии A_1 – 10; для стратегии A_2 – 5; для стратегии A_3 – 21; для стратегии A_4 – 16. Выбираем минимум. Таким образом, по критерию Сэвиджа оптимальной является стратегия A_2.

Критерий Гурвица.

Определение оптимальной стратегии по критерию Гурвица предполагает установление коэффициента доверия. Примем его равным 0,2 и найдем оптимальную стратегию для данного значения. Используя критерий (5.7), для каждой из строк платежной матрицы, определим значение выражения в квадратных скобках:

$$\max_i \left[\gamma \max_j \{a_{ij}\} + (1-\gamma) \min_j \{a_{ij}\} \right] = \max_i h_j.$$

Расчеты производим в таблице 5.7.

Таблица 5.7 – **Определение оптимальной стратегии по критерию Гурвица**

Услуги	Спрос				$0{,}2 \max\limits_j a_{ij}$	$0{,}8 \min\limits_j a_{ij}$	h_j
	B_1	B_2	B_3	B_4			
A_1	25	18	14	10	5	8	13
A_2	20	26	24	6	5,2	4,8	11
A_3	4	10	16	8	3,2	3,2	6,4
A_4	16	24	8	9	4,8	6,4	11,2
$\max\limits_i h_j$							13

Таким образом, оптимальой стратегией по критерию Гурвица является стратегия A_1, для которой $h_j = 13$ – наибольшее. Заметим, что такое решение было получено при $\gamma = 0{,}2$. При иных значениях коэффициента доверия оптимальное решение может быть другим.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

Варианты исходных данных для задачи 3.2

В миллиардах рублей

Объем капиталовложений X_i	Прирост прибыли $f_i(X_i)$ в зависимости от объема капиталовложений в предприятия			
	1	2	3	4
Вариант 1				
0	0	0	0	0
100	30	40	20	25
200	40	45	40	45
300	90	60	60	50
400	120	90	70	75
500	170	110	90	100
600	180	150	120	130
700	210	170	150	170
800	240	200	170	220
900	290	200	190	260
1000	330	220	200	320
Вариант 2				
0	0	0	0	0
100	25	15	30	40
200	30	30	40	45
300	35	60	50	60
400	55	80	70	80
500	70	100	120	110
600	90	110	130	150
700	120	130	150	180
800	150	150	190	200
900	160	160	205	200
1000	170	200	210	210
Вариант 3				
0	0	0	0	0
100	35	35	40	45
200	60	45	50	45
300	90	50	60	60
400	140	70	75	70
500	150	100	90	100
600	180	130	110	130
700	200	180	150	170
800	220	190	170	240
900	250	220	190	260
1000	290	240	220	310

Продолжение приложения А

Объем капиталовложений x_i	Прирост прибыли $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений в предприятия

	1	2	3	4
Вариант 4				
0	0	0	0	0
100	45	10	20	35
200	50	30	40	45
300	65	60	60	60
400	95	100	70	80
500	100	120	100	140
600	120	160	110	150
700	150	180	150	170
800	180	200	180	200
900	240	240	205	200
1000	250	290	210	210
Вариант 5				
0	0	0	0	0
100	25	15	20	25
200	30	30	30	45
300	45	80	50	60
400	65	90	70	80
500	70	150	100	110
600	90	160	110	150
700	120	180	150	190
800	130	220	160	200
900	170	230	225	230
1000	190	280	245	240
Вариант 6				
0	0	0	0	0
200	20	60	45	55
300	30	65	55	70
400	50	75	50	80
500	85	80	70	90
600	110	95	100	110
700	150	110	135	140
800	190	140	170	165
900	240	160	225	180
1000	290	185	260	220
1100	345	200	290	250

Продолжение приложения А

Объем капита-ловложений x_i	Прирост прибыли $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений в предприятия

	1	2	3	4
Вариант 7				
0	0	0	0	0
200	65	50	55	45
300	80	60	70	45
400	100	80	90	50
500	120	110	100	70
600	150	160	110	100
700	200	200	130	130
800	220	220	140	180
900	250	240	170	220
1000	290	300	180	260
1100	320	330	210	310
Вариант 8				
0	0	0	0	0
300	40	20	90	80
400	50	40	130	110
500	70	60	160	120
600	90	90	190	150
700	130	130	220	180
800	170	180	260	210
900	220	240	300	260
1000	270	290	310	300
1100	320	340	310	340
1200	405	425	345	370
Вариант 9				
0	0	0	0	0
200	20	50	45	65
300	30	55	45	70
400	40	60	50	80
500	50	70	70	90
600	60	80	100	110
700	80	100	130	140
800	100	120	170	160
900	140	130	220	180
1000	170	150	260	220
1100	180	190	280	270

Окончание приложения А

Объем капиталовложений x_i	Прирост прибыли $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений в предприятия

	1	2	3	4
Вариант 10				
0	0	0	0	0
300	150	110	70	125
400	160	120	80	130
500	190	155	90	140
600	220	180	100	150
700	260	250	120	170
800	300	260	160	190
900	310	300	170	240
1000	310	340	200	250
1100	315	380	250	290
1200	340	430	300	330

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(обязательное)

Варианты исходных данных для задачи 5.1

Перва буква фамилии студента	Платежная матрица	Перва буква фамилии студента	Платежная матрица
А	$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 4 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	П	$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 4 & -2 & -4 & 1\end{bmatrix}.$
Б	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Р	$A=\begin{bmatrix}9 & 5 & 3 & 2\\ 5 & 1 & -1 & -3\\ 8 & -2 & -3 & 1\end{bmatrix}.$
В	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	С	$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & -1 & -3\\ 7 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$
Г	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 5\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 8 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Т	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 6\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 4\end{bmatrix}.$
Д	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 6\\ 7 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	У	$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -7 & -4 & 5\end{bmatrix}.$
Е	$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3 & 7\\ 6 & 1 & -1 & -4\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Ф	$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -5 & 6\end{bmatrix}.$
Ж	$A=\begin{bmatrix}8 & 3 & 4 & 3\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Х	$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -8 & -5 & 7\end{bmatrix}.$
З	$A=\begin{bmatrix}7 & 4 & 3 & 5\\ 3 & 1 & -1 & -4\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Ц	$A=\begin{bmatrix}9 & 3 & 3 & 8\\ 4 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 6\end{bmatrix}.$
И	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Ч	$A=\begin{bmatrix}9 & 2 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 8\end{bmatrix}.$

Окончание приложения Б

Перва буква фамилии	Платежная матрица	Перва буква фамилии	Платежная матрица

студента		студента	
К	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Ш	$A=\begin{bmatrix}8 & 2 & 3 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 8 & -2 & -5 & 9\end{bmatrix}.$
Л	$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Щ	$A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1 & -5\\ 9 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$
М	$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 4 & 6\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Э	$A=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7 & 2\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$
Н	$A=\begin{bmatrix}5 & 6 & 5 & 7\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Ю	$A=\begin{bmatrix}4 & 7 & 6 & 2\\ 4 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 2\end{bmatrix}.$
О	$A=\begin{bmatrix}6 & 7 & 6 & 8\\ 6 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$	Я	$A=\begin{bmatrix}4 & 8 & 7 & 3\\ 9 & 1 & -1 & -3\\ 9 & -2 & -5 & 1\end{bmatrix}.$

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(обязательное)

Варианты исходных данных для задачи 5.2

Вторая буква фамилии студента	Платежная матрица	Вторая буква фамилии студента	Платежная матрица	Вторая буква фамилии студента	Платежная матрица
а	$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	л	$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	х	$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
б	$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	м	$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	ц	$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
в	$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	н	$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	ч	$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
г	$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$	о	$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	ш	$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
д	$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$	д	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	щ	$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
е	$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	р	$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$	э	$A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
ж	$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	с	$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	ю	$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$
з	$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	т	$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$	я	$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
и	$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	у	$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	ъ	$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
к	$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	ф	$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	ь	$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
(обязательное)

Варианты исходных данных для задачи 5.3

Услуги				
	B_1	B_2	B_3	B_4
Вариант 1				
A_1	24	20	16	12
A_2	20	26	24	6
A_3	2	8	10	8
A_4	16	22	8	11
Вариант 2				
A_1	23	14	18	10
A_2	22	26	20	6
A_3	3	12	16	8
A_4	12	24	8	9
Вариант 3				
A_1	22	18	14	10
A_2	20	28	24	6
A_3	4	10	18	8
A_4	16	24	8	7
Вариант 4				
A_1	25	18	14	12
A_2	18	24	26	8
A_3	4	14	16	5
A_4	18	24	6	9
Вариант 5				
A_1	25	18	13	10
A_2	20	26	24	7
A_3	6	10	14	8
A_4	16	22	8	9
Вариант 6				
A_1	25	18	14	10
A_2	20	26	24	6
A_3	4	10	16	8
A_4	16	24	8	9
Вариант 7				
A_1	25	18	14	10
A_2	20	26	22	6
A_3	4	16	16	14
A_4	15	24	8	9

Окончание приложения Г

Услуги				
	B_1	B_2	B_3	B_4

Вариант 8				
A_1	12	18	14	20
A_2	20	30	18	6
A_3	4	10	16	10
A_4	16	24	8	9
Вариант 9				
A_1	25	18	14	10
A_2	14	26	15	6
A_3	4	16	16	17
A_4	16	24	8	9
Вариант 0				
A_1	25	12	14	10
A_2	20	18	24	6
A_3	22	14	10	8
A_4	16	24	8	7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Лисинская, Т. В.** Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели" / Т. В. Лисинская. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.

2 **Бодров, В.И.** Методы исследования операций при принятии решений : учеб. пособие / В. И. Бодров, Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 160 с.

3 **Бугаев, В. П.** Применение динамического программирования для решения экономических задач : пособие для студентов экономических специальностей / В. П. Бугаев, В. Т. Бушев. – Гомель : БелГУТ, 2004.– 77 с.

4 Математическое моделирование экономических процессов на железнодорожном транспорте : учеб. / под ред. А. Б. Каплана. – М. : Транспорт, 1984. – 256 с.

5 Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под ред. А. В. Кузнецова. – Мн. : БГЭУ, 1999. – 413 с. – ISBN 985-426-159-X.

6 Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / С. Ф. Миксюк [и др.] ; под общ. ред. С. Ф. Миксюк, В. Н. Комкова. – Мн. : БГЭУ, 2006. – 219 с.