

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ КОЛЕСО/РЕЛЬС**

Л. А. Сосновский¹, В. И. Сенько¹, С. С. Щербаков², Н. А. Залесский²

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

²Белорусский государственный университет, г. Минск

Разработан метод исследования напряженного состояния системы ролик/кольцо, которая в известной мере моделирует систему колесо/рельс, при подвижном контакте. Сформулированы принципы, положенные в основу решения задачи о напряженном состоянии ее элементов. Приведены численные результаты анализа напряженного состояния при заданных значениях определяющих параметров и переменных.

В работе [1] предложена общая классификация контактных задач применительно к силовым системам машин. На рисунке 1 воспроизводится та её часть, которая относится к классификации контактных задач для тел вращения по двум признакам: характеру нагружения и условиям деформирования. Согласно работе [2] тип контакта *B* соответствует простейшей механической модели для системы колесо/рельс; она предназначена для комплексных износоусталостных испытаний на машинах серии СИ [3]. Здесь ролик (элемент 2) имитирует колесо, а кольцо (элемент 1) – рельс. Ниже эту модель будем называть системой ролик/кольцо.

Статический контакт				
Элемент 1: $R_{11}>0$ $R_{12}>0$				
	Элемент 2: $R_{21}>0$ $R_{22}>0$			
		Тип контакта	<i>A</i>	<i>B</i>
Подвижный контакт				
Элемент 1: $R_{11}>0$ $R_{12}>0$				
	Элемент 2: $R_{21}>0$ $R_{22}>0$			
		Тип контакта	<i>A</i>	<i>B</i>

Рисунок 1 – Классификация контактных задач для тел вращения по двум признакам: характеру нагружения и условиям деформации

Цель данной работы – разработать метод исследования напряженного состояния элементов системы ролик/кольцо при подвижном контакте (задача типа *B*, внизу на рисунке 1).

Принципиальная особенность системы ролик/кольцо по сравнению с соответствующей традиционной контактной задачей для модели ролик/ролик (тип *A* на рисунке 1) состоит в том, что полное напряженное состояние кольца в зоне его взаимодействия с роликом обусловлено не только полем контактных напряжений, но и полем напряжений от изгиба. Методы решения подобных задач (типа *B* и *C* на рисунке 1) отсутствуют в литературе [4–10 и др.]. Нетрадиционный подход к их решению развивается в трибофатике [11] применительно к механическим системам, которые работают в сложных условиях как при поверхностном (контактном), так и объемном деформировании (изгиб, кручение и др.).

Основные положения. Для решения поставленной задачи примем следующие основные положения:

а) в силу симметрии кольца с толщиной h его можно представить, в первом приближении, в виде соответствующего кривого бруса той же толщины h ;

б) под воздействием внешней контактной нагрузки F_N , передаваемой от колеса к кривому брусу, в последнем, вследствие упругого деформирования, возникает внутренний изгибающий момент M_b , который является, по существу, «моментом противодействия» контактной нагрузке со стороны бруса. Условие равновесия, следовательно,

$$F_N = F_c + \varphi(M_b) \quad (1)$$

где F_c – нескомпенсированная моментом M_b часть контактной нагрузки F_N , а функция

$$\varphi(M_b) = F_b \quad (2)$$

представляется как некоторая эквивалентная изгибная (поперечная) нагрузка, которая и обеспечивает условие равновесия (1), т. е.

$$F_N = F_c + F_b. \quad (3)$$

Таким образом, приложенная к системе ролик/кольцо нагрузка F_N для кривого бруса (кольца), вследствие его плоского изгиба, условно разделяется на две составляющие (контактную F_c и изгибающую F_b) так, что выполняется требование (3) о постоянстве их суммы, коль скоро обеспечивается условие (2) эквивалентности. Для ролика, работающего в условиях чистого контакта, т. е. без изгиба, будем рассматривать лишь контактную F_c составляющую разложения (1);

в) соотношение между составляющими F_c и F_b контактной нагрузки F_N в общем случае зависит от объемной жесткости кольца EI_z/l (E – модуль упругости материала кольца, I_z – момент инерции сечения, l – длина дуги бруса от точки приложения контактной нагрузки до ближайшей опоры) или, с точностью до постоянной k , от соотношения определяющих размеров бруса h/l . Постоянная k , следовательно, отражает, главным образом, влияние жесткости материала на формирование составляющих F_c и F_b ;

г) принимается, что разделение составляющих F_c и F_b описывается экспоненциальным законом

$$F_c = F_N \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{lk}\right) \right), \quad F_b = F_N \exp\left(-\frac{h}{lk}\right) \quad (4)$$

с сохранением условия (3). Закон (4) считается справедливым в интервале

$$0 \leq \frac{h}{lk} \leq \infty. \quad (5)$$

Когда $l \rightarrow \infty$, то случай $h/lk = 0$ означает, что кривой брус трансформируется в брус бесконечной длины, для которого $F_N = F_b$, а $F_c = 0$. Когда же $l \rightarrow 0$, то случай $h/lk = \infty$ означает, что кольцо стягивается в ролик (или кривой брус – в половину ролика), для которого $F_N = F_c$, а $F_b = 0$;

д) в силу особенностей геометрии исследуемых взаимодействующих тел конечных размеров ($R_{11} > 0$, $R_{12} > 0$ для ролика и $R_{21} > 0$, $R_{22} > 0$ для кольца – см. рисунок 1) область их контакта всегда будет эллипс (с большой a и малой b полуосями);

е) форма и площадь эллипса контакта в исследуемой системе дополнительно определяется изменением главной кривизны кольца (кривого бруса) вследствие его изгиба, т. е.

$$k_{21} = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{\rho_M}, \quad (6)$$

где ρ_M – изменение радиуса кривизны, обусловленное изгибом оси бруса.

Контактное нагружение. Решим контактную задачу для пары твердых тел, которые соприкасаются под воздействием силы F_c по эллиптической площадке (рисунок 2).

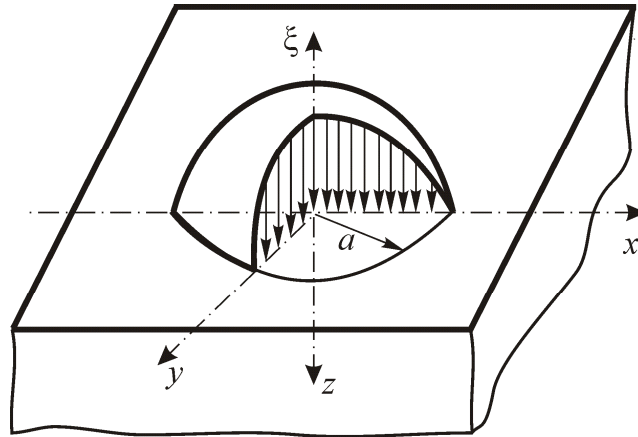


Рисунок 2 – Схема нагружения полупространства

Существующие методы расчетов параметров площадок контакта в основном базируются на использовании расчетных таблиц, которые, как правило, содержатся в самих методиках [4, 5]. В настоящей работе представлено решение задачи расчета параметров эллиптической площадки контакта без использования справочных таблиц.

В качестве исходных данных будем считать заданными: нагрузку F_c , радиусы ролика R_{11} , R_{12} и кольца R_{21} , $R_{22} = \infty$, ρ_M – изменение радиуса кривизны кольца, модули упругости материалов E_1 и E_2 , а также коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 .

Запишем трансцендентное уравнение для определения эксцентриситета e :

$$\frac{1-\Omega}{1+\Omega} - (1-e^2) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}}{e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}} = 0, \quad (7)$$

где Ω – геометрический параметр [5];

$$\Omega = \frac{1}{\sum k} \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\alpha}, \quad (8)$$

$$\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22},$$

$$k_{11} = \frac{1}{R_{11}}, \quad k_{12} = \frac{1}{R_{12}}, \quad k_{21} = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{\rho_M}, \quad k_{22} = \frac{1}{R_{22}}.$$

Здесь кривизна k_{21} записана в соответствии с (6).

Уравнение (7) можно решить численными методами, воспользовавшись, к примеру, методом Ньютона.

Построив график функции, стоящей в левой части уравнения (7), в зависимости от e , значения которого лежат в интервале (0, 1), нетрудно увидеть, что он по виду напоминает график линейной функции, пересекающей ось абсцисс. Таким образом, при любом начальном приближении, взятом из интервала (0, 1), методом Ньютона будет найдено решение уравнения (7).

Программа была протестирована с использованием таблицы 14 из работы [5]. Из этой таблицы выбирались значения параметра Ω и подставлялись в уравнение (7), которое решалось относительно эксцентриситета e . По результатам проведенного тестирования установлено полное совпадение значений эксцентриситета, полученного путем численного решения, и его табличных значений.

Знание эксцентриситета e позволяет рассчитать параметры эллиптической площадки контакта. Выражения для полуосей эллипса a и b , давления p_0 можно представить в следующей форме [5]:

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3 \eta F_c}{2 \sum k}}, \quad b = n_b \sqrt[3]{\frac{3 \eta F_c}{2 \sum k}}, \quad p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3 \left(\sum k \right)^2}{\eta}} F_c, \quad (9)$$

где

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega} \right) D}, \quad n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1-\Omega}{1+\Omega} \right) (K(e) - D(e)) \sqrt{1-e^2}}, \quad n_p = \frac{1}{n_a n_b}, \quad \eta = \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}. \quad (10)$$

В приведенных выше формулах $K(e)$ – эллиптический интеграл 1-го рода, $D(e)$ – сочетание эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода:

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]. \quad (11)$$

Выполним расчет напряженного состояния, вызванного действием давления, распределенного по эллиптическому закону.

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонент напряжений в точках оси z и в некоторых точках поверхности контакта [4–10].

Нахождение всех компонент напряжения в любой точке полупространства в точной постановке крайне затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

При решении данной задачи необходимо учитывать то, что в различных областях контакта (на поверхности внутри площадки контакта, на ее контуре, за ее пределами, в полупространстве под поверхностью) применяются различные соотношения для подсчета напряжений. Так, для подсчета компонент напряжений на площадке контакта вдоль оси x используют выражения [5]:

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\left(1 - \frac{b\gamma}{a} \right) - \frac{x}{ae} \operatorname{arth} \left(\frac{ex}{a+b\gamma} \right) \right], \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\left(\frac{a\gamma}{b} - 1 \right) + \frac{x}{ae} \operatorname{arth} \left(\frac{ex}{a+b\gamma} \right) \right], \quad (13)$$

вдоль оси y :

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\left(1 - \frac{b\gamma}{a} \right) - \frac{y}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{aey}{b(a\gamma+b)} \right) \right], \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\left(\frac{a\gamma}{b} - 1 \right) + \frac{y}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{aey}{b(a\gamma+b)} \right) \right], \quad (15)$$

вне нагруженной области:

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -\frac{\sigma_y}{p_0} = -(1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[1 - \frac{x}{ae} \operatorname{arth} \left(\frac{ex}{a} \right) - \frac{y}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{aey}{b^2} \right) \right], \quad (16)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{p_0} = -(1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\frac{y}{ae} \operatorname{arth} \left(\frac{ex}{a} \right) - \frac{x}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{aey}{b^2} \right) \right], \quad (17)$$

где $\gamma = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

Другие компоненты напряжений на поверхности полупространства находят из следующих соотношений:

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{\sigma_z}{p_0} = 0 \text{ при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \quad (18)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (19)$$

Поскольку выражения (12) – (15) позволяют вычислить напряжения лишь вдоль осей x и y , то для определения напряжений во всех точках эллипса контакта сделаем следующее упрощающее предположение: будем считать, что

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = \sigma_x^0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (20)$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = \sigma_y^0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (21)$$

где σ_x^0 вычисляется в точке $x = 0, y = 0$ по формуле (12) или (14), а σ_y^0 – по формуле (13) или (15).

Графики распределения напряжений, рассчитанные по точным (12), (14) и упрощенной (20) формулам вдоль осей x и y при $b/a = 0,25$, представлены на рисунках 3 и 4. Можно видеть, что предложенные приближенные формулы (20) и (21) дают вполне удовлетворительное приближение точному решению.

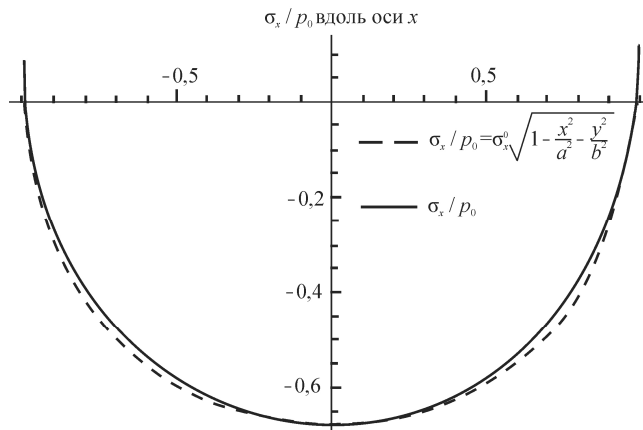


Рисунок 3 – Безразмерные величины напряжений σ_x / p_0 вдоль оси x

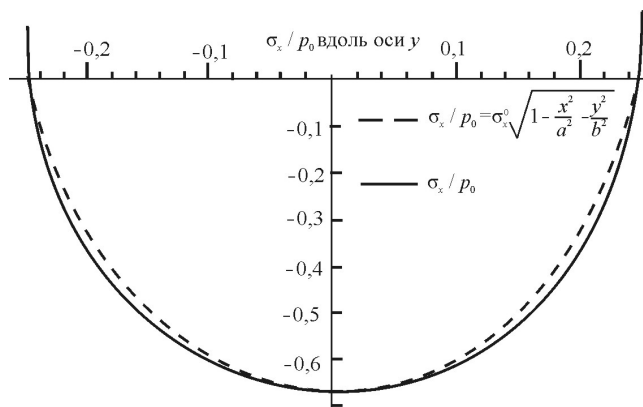


Рисунок 4 – Безразмерные величины напряжений σ_x / p_0 вдоль оси y

Таким образом, для расчета напряжений на поверхности полупространства будем пользоваться формулами (16) – (21).

Задачу нахождения компонент напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ в любой точке полупространства под поверхностью при действии на поверхность эллиптически распределенной нагрузки (см. рисунок 2) будем решать численными методами.

Для этого воспользуемся решением задачи Буссинеска о действии единичной силы на полупространство [4]:

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\}, \quad \sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\},$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5}, \quad (22)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\}, \quad \tau_{xz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \quad \tau_{yz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, P – приложенная сила.

Чтобы получить σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} в точке $M(\xi, \eta, z)$ полупространства необходимо проинтегрировать выражения (22) по эллиптической области S приложения нагрузки P :

$$\sigma_x = \iint_S \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^2} + \frac{z(y-\eta)^2}{\rho^3} \right] - \frac{3z(x-\xi)^2}{\rho^5} \right\} dx dy,$$

$$\sigma_y = \iint_S \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{r^2} + \frac{z(x-\xi)^2}{\rho^3} \right] - \frac{3z(y-\eta)^2}{\rho^5} \right\} dx dy,$$

$$\sigma_z = -\iint_S \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} dx dy, \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = \iint_S \frac{p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} - \frac{(x-\xi)(y-\eta)z}{\rho^3} \right] - \frac{3(x-\xi)(y-\eta)z}{\rho^5} \right\} dx dy,$$

$$\tau_{xz} = -\iint_S \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)z^2}{\rho^5} dx dy, \quad \tau_{yz} = -\iint_S \frac{3p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(y-\eta)z^2}{\rho^5} dx dy,$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, $\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$, $p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ – закон распределения нормальной нагрузки, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение области S .

Для получения поля напряжений в полупространстве в каждой из рассматриваемых точек $M(\xi, \eta, z)$ следует вычислить все двойные интегралы (23). По имеющимся данным, эта задача является нерешенной. Для ее решения применим следующую процедуру. При вычислении каждого из данных интегралов сначала по формуле Симпсона вычислим интеграл по x при фиксированных y , взятых из S с определенным шагом. По полученному набору точек построим сплайн, интегрирование которого дает второй интеграл по y .

В силу того, что задача осесимметрична, будем проводить расчет лишь в 1/4 исследуемой области. Для расчета выберем точки $M \in Z \times X \times Y$, $Z = \{0, z_1 \dots ta\}$, $X = \{0, x_1 \dots ta\}$, $Y = \{0, y_1 \dots ta\}$, где t – множитель, определяющий размеры исследуемой области, a – большая полуось эллипса контакта.

Чтобы получить как можно более точную картину распределения контактных напряжений, необходимо провести расчет для довольно большого массива точек. Для сокращения расчетного времени целесообразно применять интерполяцию в область между точками основной сетки, в которых значения компонент тензора напряжений получены по описанной выше процедуре. Каждую новую точку будем рассчитывать посередине отрезка, соединяющего две уже имеющиеся точки. Значения напряжений получим с помощью построения кубического сплайна по точкам, где эти значения уже известны, вдоль одного направления, зафиксировав два других. Получив рассчитанный таким способом массив точек, отобразим его в три оставшиеся четверти в соответствии с правилами симметрии, присущими каждой из компонент рассматриваемого напряжения. Таким образом, на основе первоначального расчета, проведенного для $(n)^3$ точек $(n \times n \times n)$, получено $32(n)^3$ точек $(4n \times 4n \times 2n)$.

Выполним расчет напряженного состояния, вызванного действием силы трения.

Воспользуемся формулами [4] для определения компонент напряжения при действии единичной касательной силы:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_z &= -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \\ \tau_{xy} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^2y}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[-\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \tau_{xz} &= -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{x^2z}{\rho^5}, \quad \tau_{yz} = -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xyz}{\rho^5},\end{aligned}\tag{24}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $Q_x = Pf$ – касательная сила (сила трения) в направлении оси x , λ – коэффициент трения.

Чтобы получить σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} в точке $M(\xi, \eta, z)$ полупространства проинтегрируем выражения (24) по эллиптической области S приложения нагрузки Q_x :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \iint_S \frac{fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(x-\xi)^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{(x-\xi)}{\rho^3} - \frac{3(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\} dx dy, \\ \sigma_y &= \iint_S \frac{fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(x-\xi)(y-\eta)^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{(x-\xi)}{\rho^3} - \frac{(x-\xi)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)(y-\eta)^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)(y-\eta)^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\} dx dy, \\ \sigma_z &= -\iint_S \frac{3fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)z^2}{\rho^5} dx dy, \\ \tau_{xy} &= \iint_S \frac{fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \left\{ -\frac{3(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[-\frac{(y-\eta)}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2(x-\xi)^2(y-\eta)}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\} dx dy, \\ \tau_{xz} &= -\iint_S \frac{3fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)^2 z}{\rho^5} dx dy, \quad \tau_{yz} = -\iint_S \frac{3fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}{2\pi} \frac{(x-\xi)(y-\eta)z}{\rho^5} dx dy,\end{aligned}\tag{25}$$

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$, $fp_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ – закон распределения касательной нагрузки.

Для получения поля напряжений в полупространстве в каждой из рассматриваемых точек $M(\xi, \eta, z)$ вычисляются все двойные интегралы (25). Это делается по схеме, которая применялась для вычисления интегралов (23).

Изгибное нагружение. Для исследуемой модели определение внешних реакций и внутренних факторов не может быть произведено при помощи используемых в общем случае метода сечений и уравнений равновесия. Это обусловлено тем, что число неизвестных величин (реакций опор) на три единицы превышает число независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для рассматриваемой модели, т.е. представленная модель является три раза статически неопределенной.

Наиболее общим методом раскрытия статической неопределенности упругой модели является метод сил [12]. Он заключается в том, что заданная статически неопределенная модель освобождается от дополнительных внешних связей, а их действие заменяется активными силами. Величина активных сил в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на модель отброшенными связями. Таким образом, при указанном способе решения независимыми оказываются активные силы (рисунок 5).

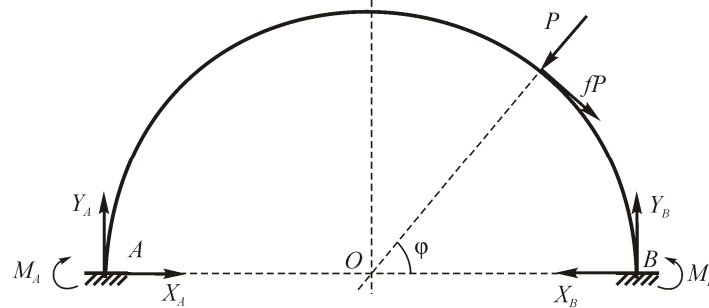


Рисунок 5 – Расчетная схема

На исследуемую модель действуют шесть реакций опор (на рисунке 5 они обозначены как X_A , X_B , Y_A , Y_B , M_A , M_B). Так как рассматриваемая модель является три раза статически неопределенной, выберем произвольно три условия связи и заменим их неизвестными активными нагрузками. При отбрасывании связей будем следить за тем, чтобы новая модель была геометрически неизменяемой. Полученная таким образом статически определенная и геометрически неизменяемая модель называется основной моделью.

Построим основную модель для исследуемого случая. Для этого удалим из рассмотрения реакции опор X_B , M_B , M_A (при этом опору A будем считать в дальнейшем неподвижной шарнирной опорой, а опору B – подвижной с возможностью горизонтального перемещения) и заменим удаленные реакции соответствующими активными нагрузками X_1 , X_2 , X_3 (рисунок 6).

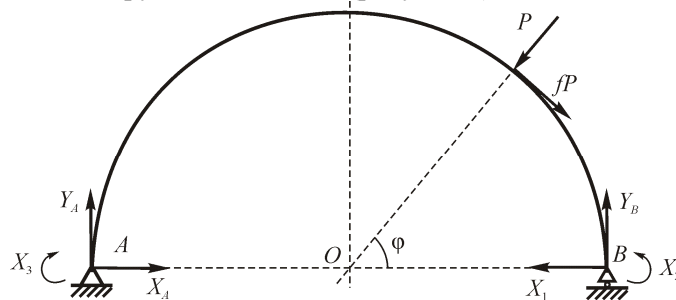


Рисунок 6 – Основная модель

Как уже отмечалось выше, для исследуемой модели полная система уравнений равновесия не является достаточной для определения внешних реакций. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо составить дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций или уравнений деформаций. Смысл их заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и лишними неизвестными реакциями, должны быть такими же, как и для заданной модели.

Прежде, чем составить уравнения совместности деформаций, условимся о стандартном обозначении перемещений. Взаимное смещение точек модели будем обозначать δ_{ik} : первый индекс при δ соответствует силе, в направлении которой перемещается точка, второй – силе, вызвавшей это перемещение. Например, δ_{12} – это перемещение в направлении силы X_1 под действием единичной нагрузки, приложенной в направлении X_2 .

Для рассматриваемой модели в точке A жесткая заделка была заменена неподвижной шарнирной опорой, а в точке B – подвижной с возможностью горизонтального перемещения. Для того чтобы сохранить геометрические параметры системы, необходимо на модель наложить условия, обеспечивающие равенство нулю горизонтального перемещения шарнира B и углов поворота бруса в точках закрепления. Активными силами, действующими на основную модель, являются внешние нагрузки P и fP и введенные условно X_1 , X_2 и X_3 .

Пользуясь принципом независимости действия сил, запишем выражения для виртуальных перемещений:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1P}, \\ \delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2P}, \\ \delta_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3P}.\end{aligned}\tag{26}$$

Здесь δ_1 – перемещение точки B в направлении силы X_1 , т. е. горизонтальное перемещение шарнира; δ_2 и δ_3 – изменения углов поворота бруса по отношению к горизонтальной линии в точках B и A соответственно; δ_{iP} ($i = 1, 2, 3$) – перемещение в направлении силы X_i под действием внешних нагрузок P и fP .

Условия геометрической неизменяемости модели можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1P} = 0, \\ \delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2P} = 0, \\ \delta_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3P} = 0.\end{aligned}\tag{27}$$

Неизвестными в поставленной задаче являются величины X_1 , X_2 и X_3 .

Перемещения δ_{ij} , δ_{iP} могут быть найдены при помощи принципа возможных перемещений и, в частности, метода Максвелла-Мора, базирующегося на этом принципе.

Для того чтобы получить значения δ_{ij} и δ_{iP} , воспользуемся формулой Мора для упругих деформаций:

$$\delta_{ij} = \int_0^\pi \frac{M_i M_j}{EI} R d\psi,\tag{28}$$

$$\delta_{iP} = \int_0^\pi \frac{M_i M_P}{EI} R d\psi,\tag{29}$$

где M_i – изгибающий момент в каждой точке бруса при расчете, учитывающем действие на модель лишь одной активной нагрузки – единичной силы, приложенной в направлении силы X_i ; M_P – изгибающий момент в каждой точке бруса, находящейся под действием активных сил P и fP (сила трения); f – коэффициент трения; ψ – координата точки в полярной системе координат, начало отсчета которой находится в точке O , нулевой угол соответствует горизонтальному направлению радиус-вектора OB .

Перейдем к вычислению интегралов Мора. Для этого определим значения изгибающих моментов M_i и M_P .

Рассматривая брус нагруженным лишь единичной силой X_1 (см. рисунок 6), из уравнений равновесия системы находим реакции опор:

$$X_A = 1, Y_A = 0, Y_B = 0.\tag{30}$$

Изгибающий момент в каждой точке бруса

$$M_1 = -X_1 R \sin \psi = -R \sin \psi. \quad (31)$$

Аналогично предыдущему случаю находим реакции опор и изгибающий момент в каждой точке бруса при действии X_2 :

$$X_A = 0, Y_A = \frac{1}{2R}, Y_B = -\frac{1}{2R}; \quad (32)$$

$$M_2 = Y_B R(1 - \cos \psi) + X_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \quad (33)$$

и X_3 :

$$X_A = 0, Y_A = -\frac{1}{2R}, Y_B = \frac{1}{2R}; \quad (34)$$

$$M_3 = Y_B R(1 - \cos \psi) = \frac{1}{2}(1 - \cos \psi). \quad (35)$$

Найдем реакции опор при действии внешних нагрузок P и fP , принимая $X_1 = X_2 = X_3 = 0$:

$$X_A = P \cos \varphi - fP \sin \varphi, \quad Y_A = \frac{1}{2}(P \sin \varphi + fP(\cos \varphi - 1)), \quad Y_B = \frac{1}{2}(P \sin \varphi + fP(\cos \varphi + 1)). \quad (36)$$

Для вычисления изгибающего момента разобьем брус на три области (рисунок 7).

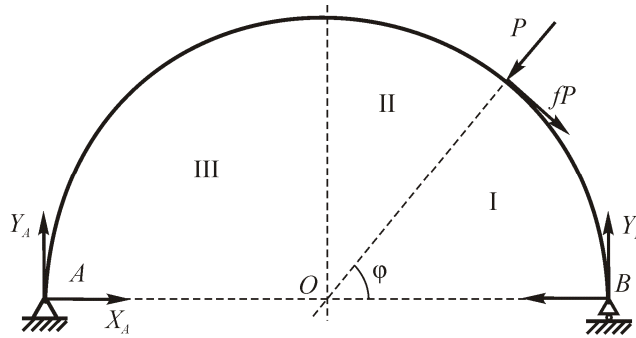


Рисунок 7 – Характерные области для нагруженного бруса

Пусть область I состоит из всех точек бруса, для которых верно неравенство: $0 < \psi < \varphi$.

Область II – все точки бруса, для которых верно: $\varphi < \psi < \frac{\pi}{2}$.

Область III – все точки бруса, для которых верно: $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$.

Изгибающие моменты в соответствующих областях в таком случае можно определить следующим образом:

область I:

$$M_p = Y_B R(1 - \cos \psi); \quad (37)$$

область II:

$$M_p = Y_B R(1 - \cos \psi) - PR \sin(\psi - \varphi) - fPR(1 - \cos(\psi - \varphi)); \quad (38)$$

область III:

$$M_p = -X_A R \sin \psi + Y_A R(1 + \cos \psi). \quad (39)$$

Подставляя полученные выражения для моментов (31), (33), (35) в (28), получим значения перемещений δ_{ij} :

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^3}{EI}, \quad (40)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{R^2}{EI}, \quad (41)$$

$$\delta_{22} = \frac{3}{8} \frac{\pi R}{EI}, \quad (42)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{8} \frac{\pi R}{EI}, \quad (43)$$

$$\delta_{33} = \frac{3}{8} \frac{\pi R}{EI}, \quad (44)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{R^2}{EI}. \quad (45)$$

Выражение (29) перепишем в следующем виде:

$$\delta_{iP} = \int_0^{\varphi} \frac{M_i M_{P1}}{EI} R d\psi + \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{M_i M_{P2}}{EI} R d\psi + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{M_i M_{P3}}{EI} R d\psi, \quad (46)$$

где M_{Pi} ($i = 1, 2, 3$) – изгибающий момент в точке, принадлежащей области i .

Подставляя (31), (33), (35), (37), (38), (39) в (46), получим выражения для δ_{iP} :

$$\delta_{1P} = \frac{PR^3}{2EI} ((\pi - \varphi)\cos\varphi + (f\varphi - 1)\sin\varphi), \quad (47)$$

$$\delta_{2P} = \frac{PR^3}{8EI} (-4 - 3f\pi + 4f\varphi + (-4 + 3f\pi - 2f\varphi)\cos\varphi + (2f + 3\pi - 2\varphi)\sin\varphi), \quad (48)$$

$$\delta_{3P} = \frac{PR^3}{8EI} (-4 - f\pi + 4f\varphi + (-4 + f\pi + 2f\varphi)\cos\varphi + (-10f + \pi + 2\varphi)\sin\varphi). \quad (49)$$

Решив систему (27), учитывая полученные выражения для δ_{ij} и δ_{iP} (40)–(45) и (47)–(49), найдем неизвестные активные силы X_1 , X_2 и X_3 :

$$X_1 = -\frac{P}{\pi^2 - 8} (-4 - 2f\pi + 4f\varphi + (-4 + 2f\pi + \pi^2 - \pi\varphi)\cos\varphi + (-4f + \pi + f\pi\varphi)\sin\varphi), \quad (50)$$

$$X_2 = \frac{PR}{\pi(\pi^2 - 8)} (\pi(-4f + \pi + f\pi^2 - f\pi\varphi) - (\pi(\pi - 2\varphi) + f(-4\pi + \pi^3 + 8\varphi - \pi^2\varphi)\cos\varphi + (24f + 6\pi - 2f\pi^2 - \pi^3 - 8\varphi - 2f\pi\varphi + \pi^2\varphi)\sin\varphi), \quad (51)$$

$$X_3 = -\frac{PR}{\pi(\pi^2 - 8)} (\pi(-4f - \pi + f\pi\varphi) + (\pi(\pi - 2\varphi) + f(4\pi - 8\varphi + \pi^2\varphi)\cos\varphi + (24f + 2\pi - 4f\pi^2 - 8\varphi - 2f\pi\varphi + \pi^2\varphi)\sin\varphi). \quad (52)$$

Таким образом, получим значения реакций опор X_B , M_B , M_A :

$$X_B = X_1, M_B = X_2, M_A = X_3. \quad (53)$$

Составим уравнения равновесия для исходной исследуемой модели и найдем другие три неизвестные реакции опор:

$$X_A = -\frac{P}{\pi^2 - 8}(-4 - 2f\pi + 4f\varphi + (4 + 2f\pi - \pi\varphi)\cos\varphi + (-12f + \pi + f\pi^2 + f\pi\varphi)\sin\varphi), \quad (54)$$

$$Y_A = \frac{P}{\pi}(f\varphi\cos\varphi + (-3f + \varphi)\sin\varphi), \quad (55)$$

$$Y_B = \frac{P}{\pi}(f(\pi - \varphi)\cos\varphi + (3f + \pi - \varphi)\sin\varphi). \quad (56)$$

После того, как реакции опор стали известными величинами, может быть описано напряженно-деформированное состояние модели:

а) область I ($0 < \psi < \varphi$)

$$\text{изгибающий момент: } M = Y_B R(1 - \cos\psi) - X_B R\sin\psi + M_B, \quad (57)$$

$$\text{поперечная сила: } N = Y_B \cos\psi + X_B \sin\psi, \quad (58)$$

$$\text{продольная сила: } Q = Y_B \sin\psi - X_B \cos\psi; \quad (59)$$

б) область II ($\varphi < \psi < \frac{\pi}{2}$)

$$M = Y_B R(1 - \cos\psi) - X_B R\sin\psi - PR\sin(\psi - \varphi) - fPR(1 - \cos(\psi - \varphi)) + M_B, \quad (60)$$

$$N = Y_B \cos\psi + X_B \sin\psi + P\sin(\psi - \varphi) - fP\cos(\psi - \varphi), \quad (61)$$

$$Q = Y_B \sin\psi - X_B \cos\psi - P\cos(\psi - \varphi) - fP\sin(\psi - \varphi); \quad (62)$$

в) область III ($\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$)

$$M = Y_A R(1 + \cos\psi) - X_A R\sin\psi + M_A, \quad (63)$$

$$N = -Y_A \cos\psi + X_A \sin\psi, \quad (64)$$

$$Q = Y_A \sin\psi + X_A \cos\psi. \quad (65)$$

Подставляя выражения (53)–(56) в (57)–(65) и учитывая (50)–(52), получим значения изгибающего момента, продольной и поперечной сил в любой точке бруса.

Задача при угле $AOB = 90^\circ$ (рисунок 8) решается аналогичным образом.

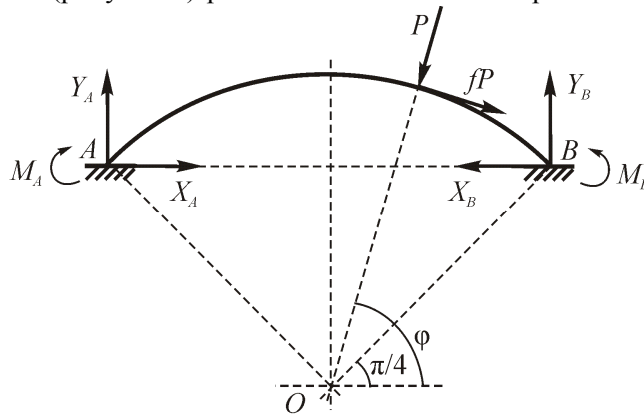


Рисунок 8 – Расчетная схема при угле $AOB = 90^\circ$

Проделив соответствующие операции, получим реакции опор, которые в этом случае будут иметь следующие значения:

$$X_A = \frac{P}{2(-16 + 2\pi + \pi^2)} (8\sqrt{2}(2 + f\pi - 2f\varphi) - (16 - 2\pi + \pi^2 + f(16 + 6\pi) - 4\pi\varphi)\cos\varphi + (-16 + 16f - 2\pi - 2f\pi + f\pi^2 - 4f\pi\varphi)\sin\varphi); \quad (66)$$

$$Y_A = -\frac{P}{2(\pi - 2)} (-4\sqrt{2}f + (-2 + f(2 + \pi - 4\varphi))\cos\varphi + (2 + 6f + \pi - 4\varphi)\sin\varphi); \quad (67)$$

$$M_A = -\frac{PR}{4(32 - 20\pi + \pi^3)} (32(1 + 2f - f\varphi) + 8\pi(-4 + 5f + 4f\varphi) + 8\pi^2(1 - 3f - f\varphi) + 2f\pi^3 + \sqrt{2}(32\varphi(-1 + 2f) - 8\pi(-4 - 3\varphi + 4f + f\varphi) - 2\pi^2(7 + 2\varphi - 3f + 2f\varphi)) + \pi^3(1 + f))\cos\varphi - \sqrt{2}(32(1 - 2\varphi + 2f - f\varphi) + 8\pi(1 + \varphi)(1 + 3f) + 2\pi^2(-1 + 2\varphi - 9f - 2f\varphi)) + \pi^3(f - 1))\sin\varphi); \quad (68)$$

$$X_B = \frac{P}{2\sqrt{2}(-16 + 2\pi + \pi^2)} (16(2 + f\pi - 2f\varphi) - \sqrt{2}(-16 + 2\pi + 3\pi^2 + 2f(8 + 3\pi) - 4\pi f)\cos\varphi + \sqrt{2}(-16 - 2\pi + f(-16 + 2\pi + 3\pi^2 - 4\pi\varphi))\sin\varphi); \quad (69)$$

$$Y_B = -\frac{P}{2(\pi - 2)} (4\sqrt{2}f + (2 + f(2 - 3\pi + 4\varphi))\cos\varphi + (2 - 6f - 3\pi + 4\varphi)\sin\varphi); \quad (70)$$

$$M_B = -\frac{PR}{4(32 - 20\pi + \pi^3)} (32(-1 + 2f + f\varphi) + 8\pi(4 + f - 4f\varphi) + 8\pi^2(-1 + f + f\varphi) - 6f\pi^3 + \sqrt{2}(32\varphi(1 + 2f) - 8\pi(3\varphi + 4f + f\varphi) + 2\pi^2(5 + 2\varphi + f - 2f\varphi)) + 3\pi^3(f - 1))\cos\varphi + \sqrt{2}(32(1 + 2\varphi - 2f - f\varphi) - 8\pi(7 + \varphi - f - 3f\varphi) + 2\pi^2(3 - 2\varphi - 3f - 2f\varphi)) + 3\pi^3(1 + f))\sin\varphi). \quad (71)$$

Характеристики напряженно-деформированного состояния модели через найденные реакции опор могут быть выражены следующим образом:

а) область I ($\frac{\pi}{4} < \psi < \varphi$)

$$M = Y_B R(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\psi) - X_B R(\sin\psi - \sin\frac{\pi}{4}) + M_B, \quad (72)$$

$$N = Y_B \cos\psi + X_B \sin\psi, \quad (73)$$

$$Q = Y_B \sin\psi - X_B \cos\psi; \quad (74)$$

б) область II ($\varphi < \psi < \frac{\pi}{2}$)

$$M = Y_B R(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\psi) - X_B R(\sin\psi - \sin\frac{\pi}{4}) - PR\sin(\psi - \varphi) - fPR(1 - \cos(\psi - \varphi)) + M_B, \quad (75)$$

$$N = Y_B \cos \psi + X_B \sin \psi + P \sin(\psi - \varphi) - fP \cos(\psi - \varphi), \quad (76)$$

$$Q = Y_B \sin \psi - X_B \cos \psi - P \cos(\psi - \varphi) - fP \sin(\psi - \varphi); \quad (77)$$

в) область 3 ($\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{4}$)

$$M = Y_B R(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \psi) - X_B R(\sin \psi - \sin \frac{\pi}{4}) + M_A, \quad (78)$$

$$N = -Y_A \cos \psi + X_A \sin \psi, \quad (79)$$

$$Q = Y_A \sin \psi + X_A \cos \psi. \quad (80)$$

Подставляя выражения (66)–(71) в (72)–(80), получим значения изгибающего момента, продольной и поперечной сил в любой точке бруса.

Для определения изгибных напряжений в кривом бруске воспользуемся следующими формулами:

$$\sigma_y^M = \frac{My}{eF(r_n - y)}, \quad \sigma_y^N = \frac{N}{F}, \quad e = R - r_n, \quad (81)$$

где r_n – радиус нейтральной линии; R – радиус средней линии; F – площадь поперечного сечения бруса.

Изменение радиуса кривизны бруса определим из известного соотношения

$$\rho_M = \frac{EI_z}{12M}, \quad (82)$$

где E – модуль Юнга для бруса; I_z – момент инерции относительно оси z .

Объединенное напряженное состояние. При решении подавляющего большинства контактных задач полагается (при условии изготовления контактирующих тел из одинаковых материалов), что в обоих телах в зоне контакта возникают одинаковые поля напряжений. В описываемой модели ситуация существенно иная в силу принципиальных различий в геометрии между колесом и рельсом. В соответствии с формулами (1)–(4) напряженное состояние ролика (колеса) описывается как чисто контактное, в то время как напряженное состояние кольца (рельса) описывается как промежуточное между контактным и изгибным. Таким образом, объединенное напряженное состояние для кольца получим как суперпозицию рассчитанных по формулам (23) и (25) контактных напряжений на заданном наборе точек и изгибных напряжений, рассчитанных по формулам (81) на том же наборе.

На основе полученных объединенных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, найдем компоненты главных напряжений в каждой точке $M(\xi, \eta, z)$ как корни $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (83)$$

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $I_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$, $I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}$ – инварианты тензора напряжений.

Далее определим интенсивность напряжений

$$\sigma_{\text{int}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (84)$$

Таким образом, формулами (1)–(4), (23), (25), (81), (83), (84) дается методика исчерпывающего анализа напряженного состояния в окрестности контакта колеса и ролика.

Результаты расчета. При исследовании напряженного состояния простейшей модели силовой системы колесо/рельс расчет проводился в области $z \in [0; 1,5a]$, $x \in [-1,5a; 1,5a]$, $y \in [-1,5a; 1,5a]$ для $20 \times 39 \times 39$ точек при нагрузке $F_N = 500$ Н. Приняты следующие значения для свойств материалов и геометрические характеристики $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $R_{11} = 0,05$ м, коэффициент трения $f = 0,05$, $R_{12} = 0,005$ м, $R_{21} = 0,015$ м, $R_{22} = \infty$, толщина и ширина кольца: $b = h = 0,006$ м. Результаты расчетов даны на рисунках 9–17. Их анализ позволяет сделать следующие заключения при указанных условиях расчета:

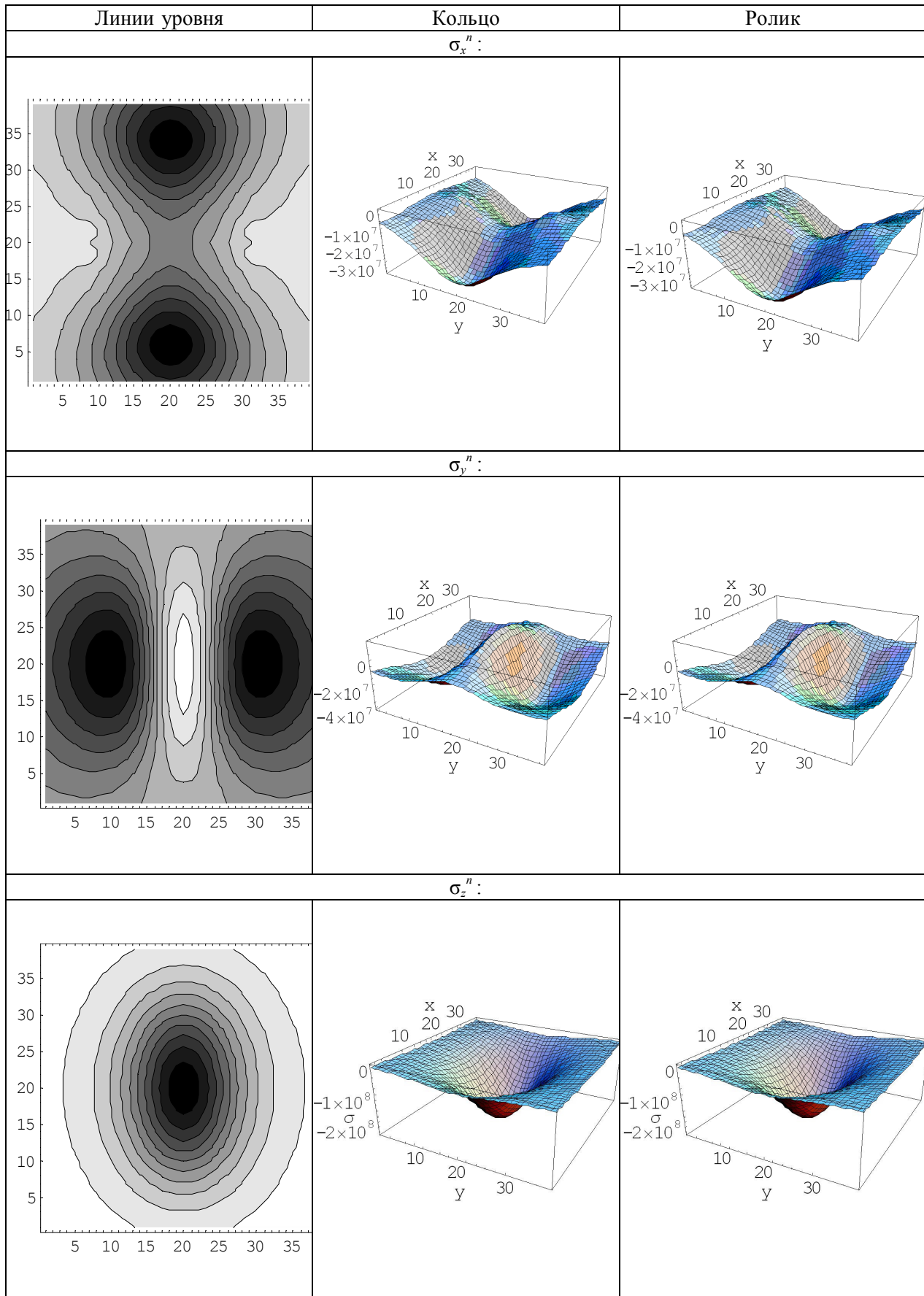


Рисунок 9 – Компоненты нормального напряжения от действия нормальных к поверхности контакта усилий

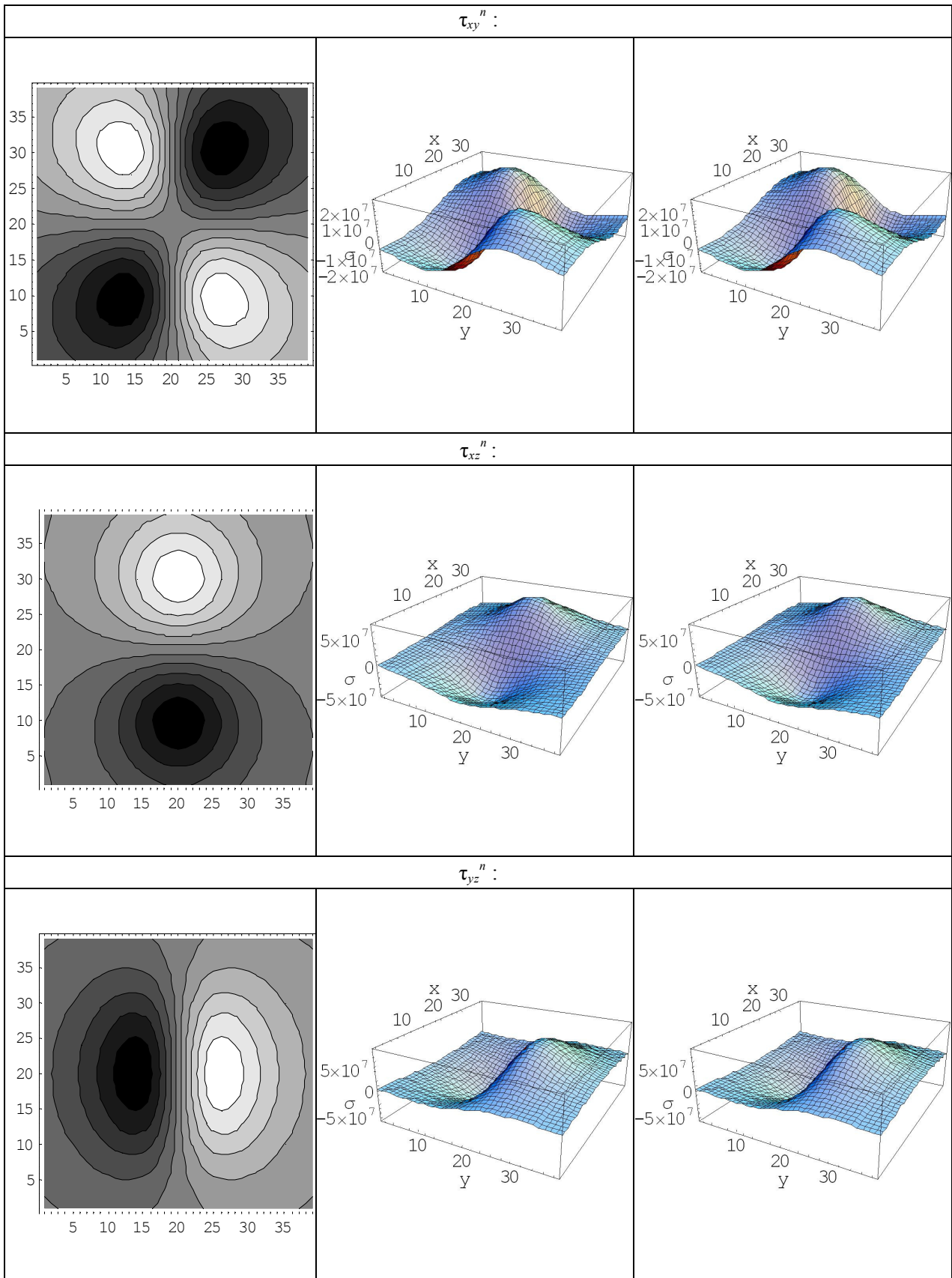


Рисунок 10 – Компоненты касательного напряжения от действия нормальных к поверхности контакта усилий

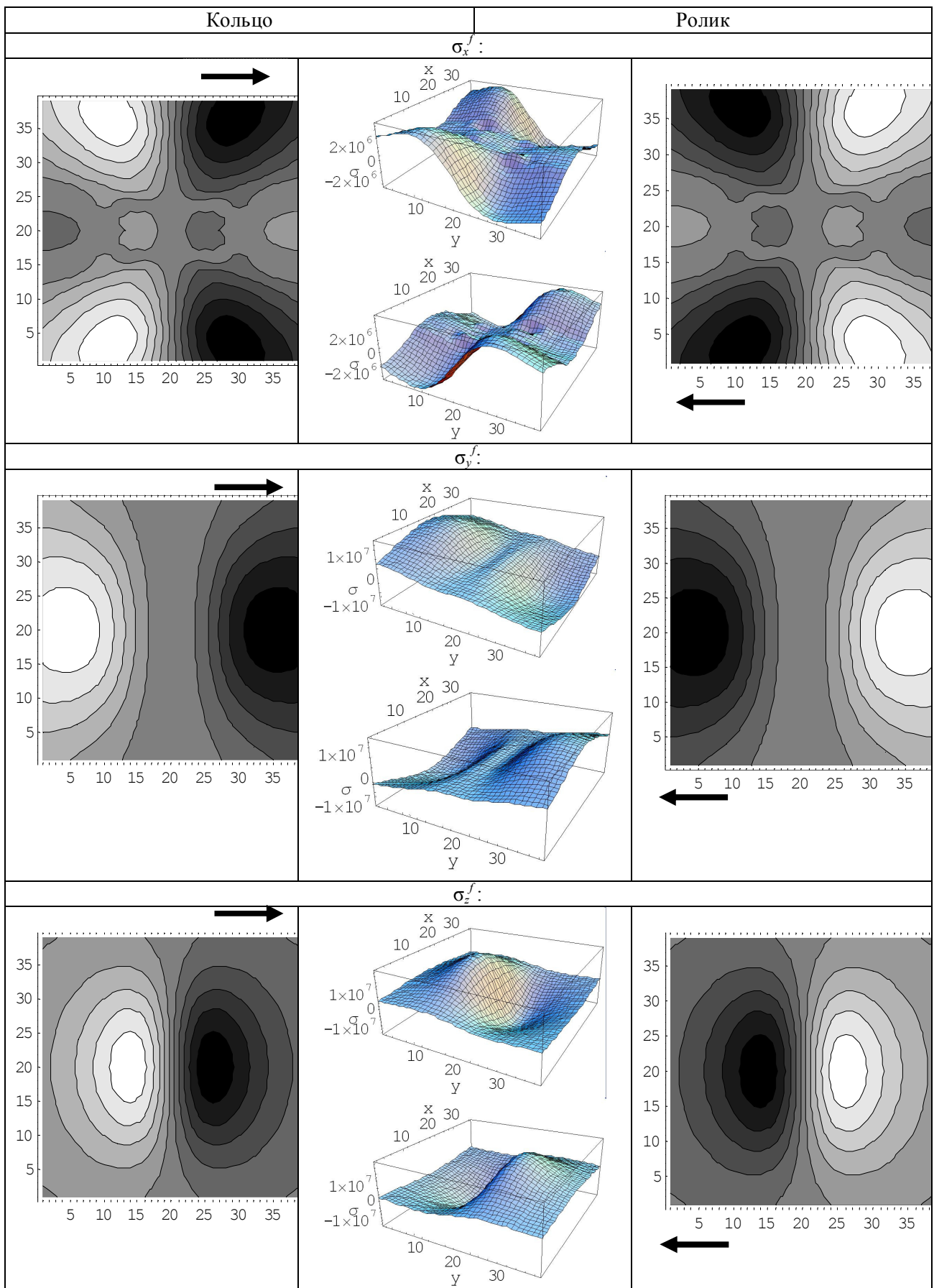


Рисунок 11 – Компоненты нормального напряжения от действия касательных к поверхности контакта усилий

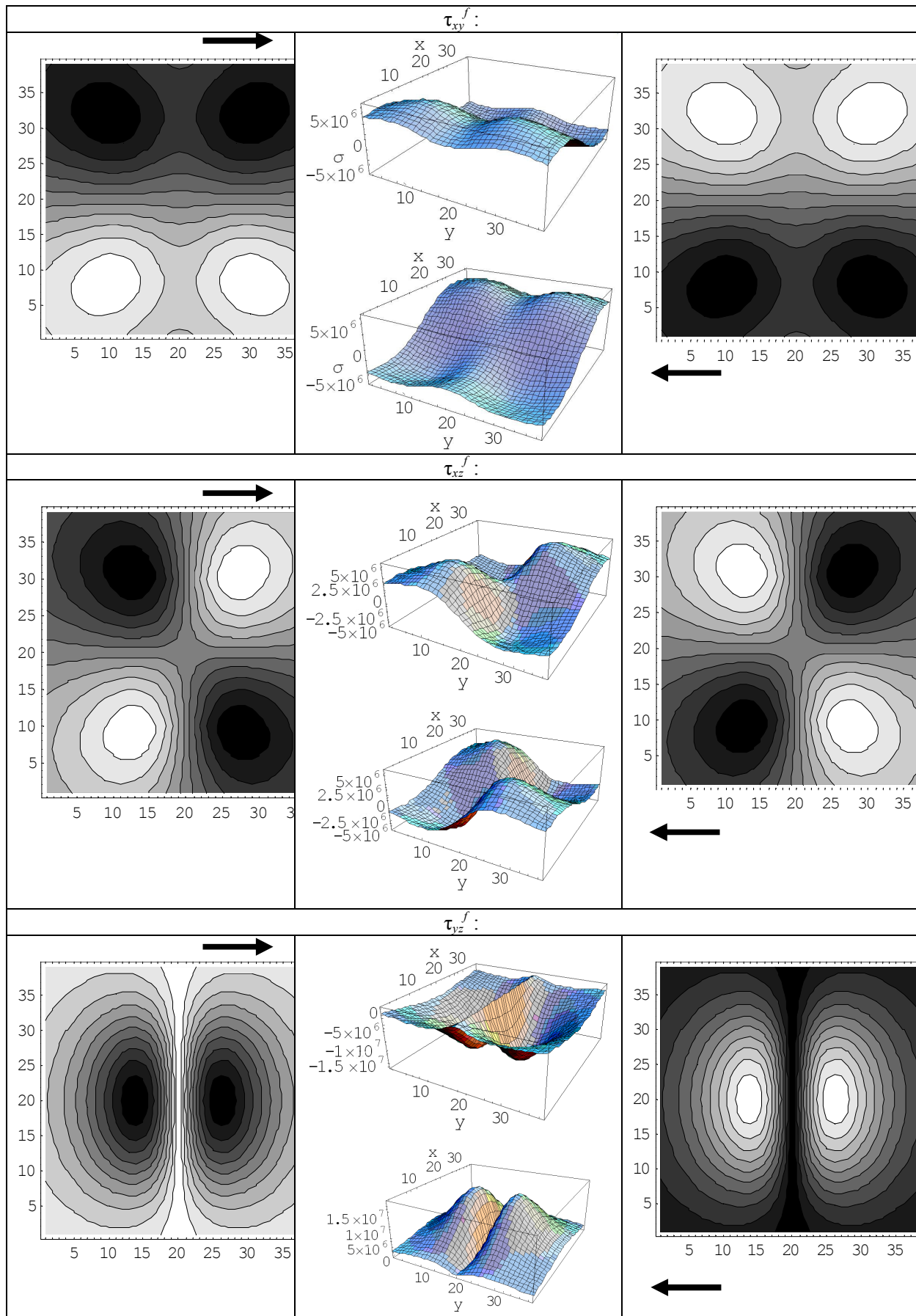


Рисунок 12 – Компоненты касательного напряжения от действия касательных к поверхности контакта усилий

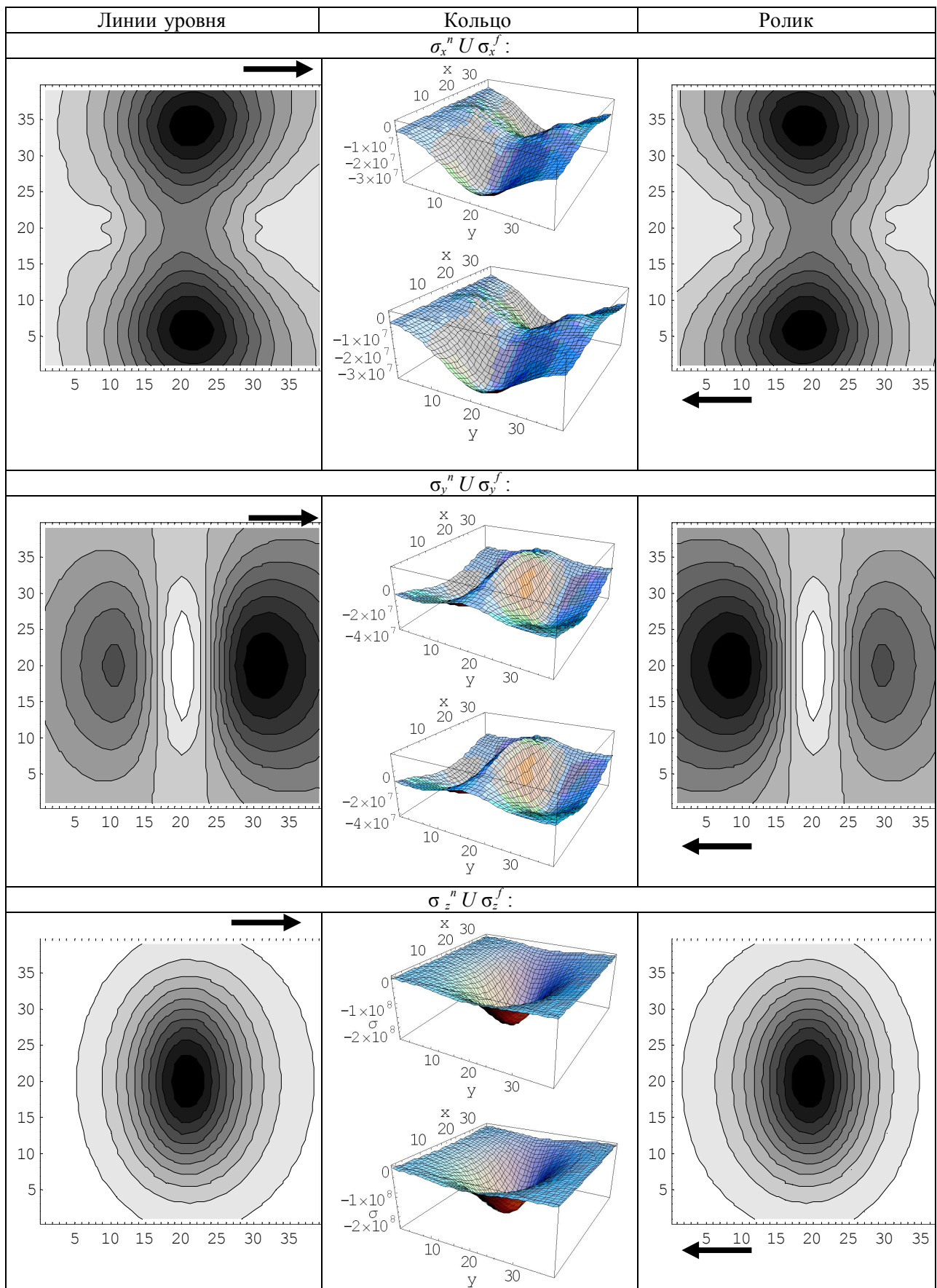


Рисунок 13 – Суперпозиция компонент нормального напряжения от действия касательных и нормальных к поверхности контакта усилий

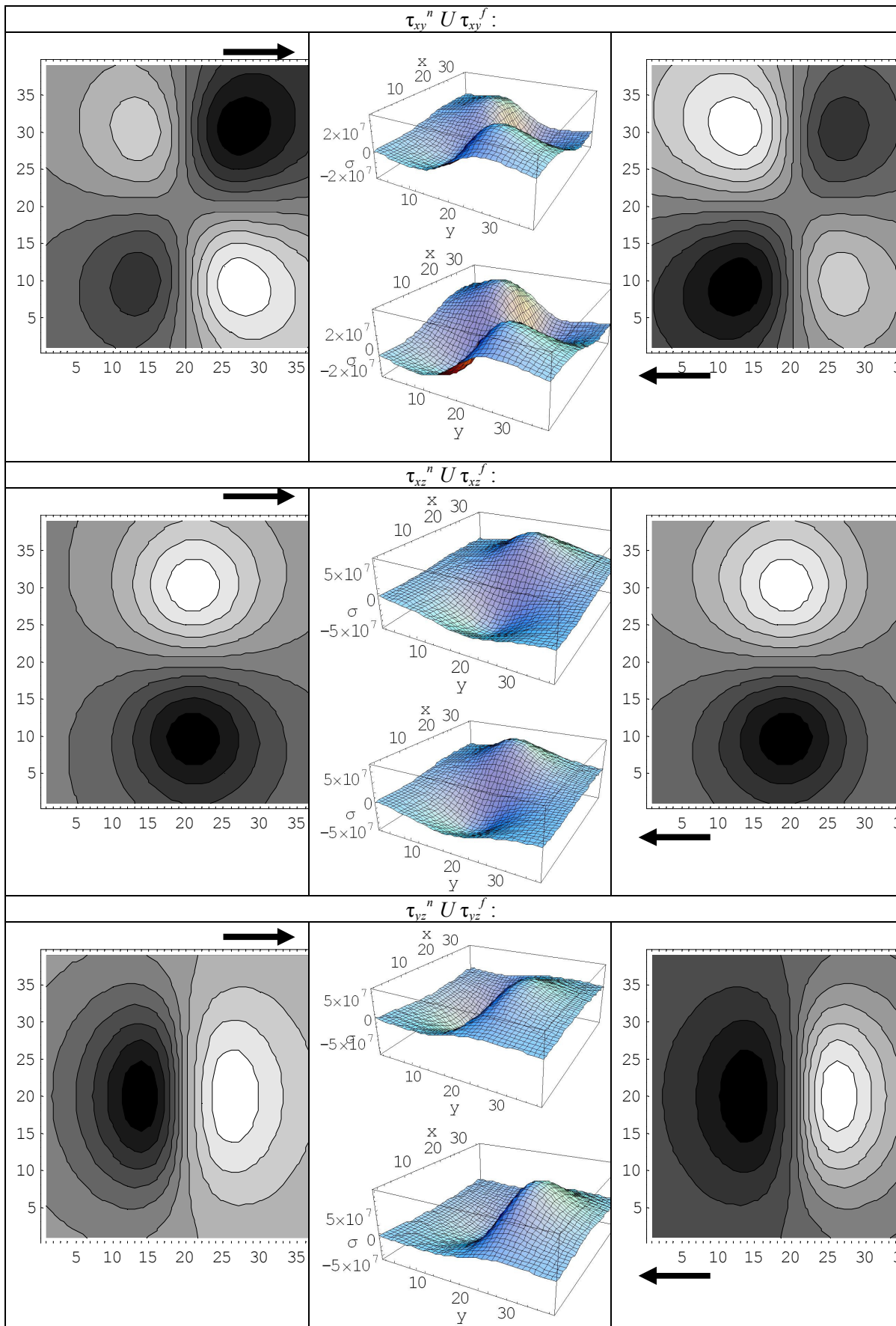


Рисунок 14 – Суперпозиция компонент касательного напряжения от действия касательных и нормальных к поверхности контакта усилий

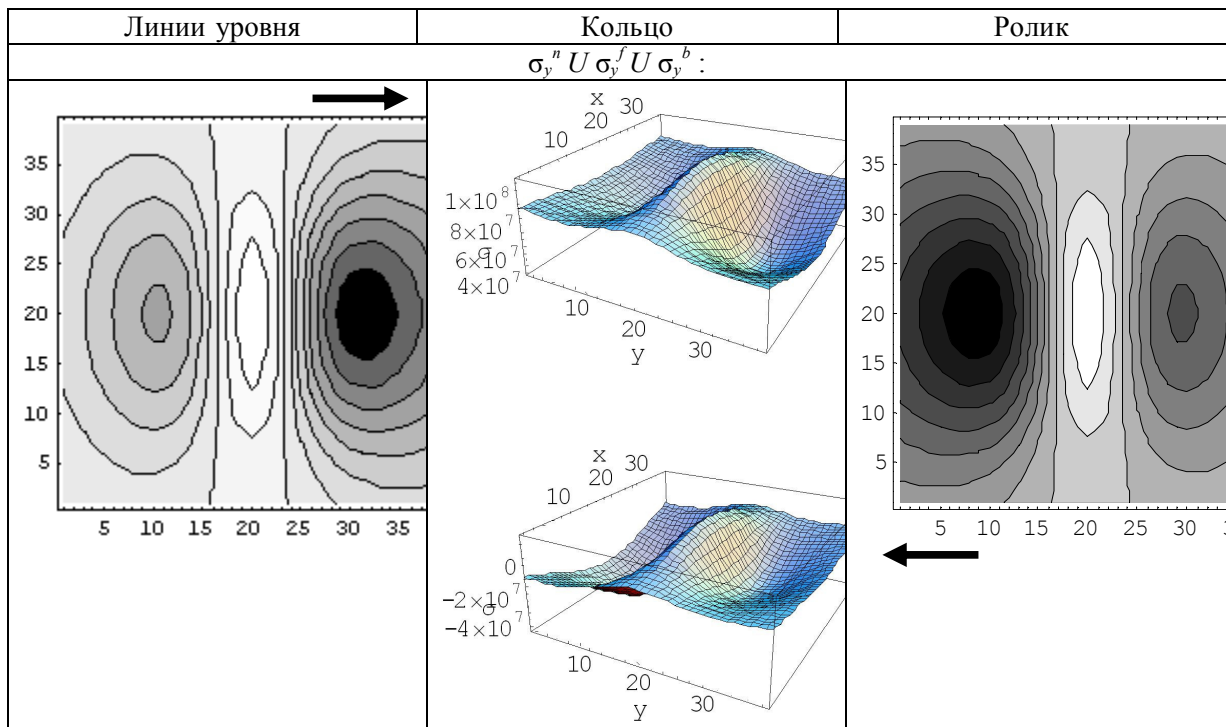


Рисунок 15 – Суперпозиция напряжений от действия касательных, нормальных к поверхности контакта и изгибных усилий

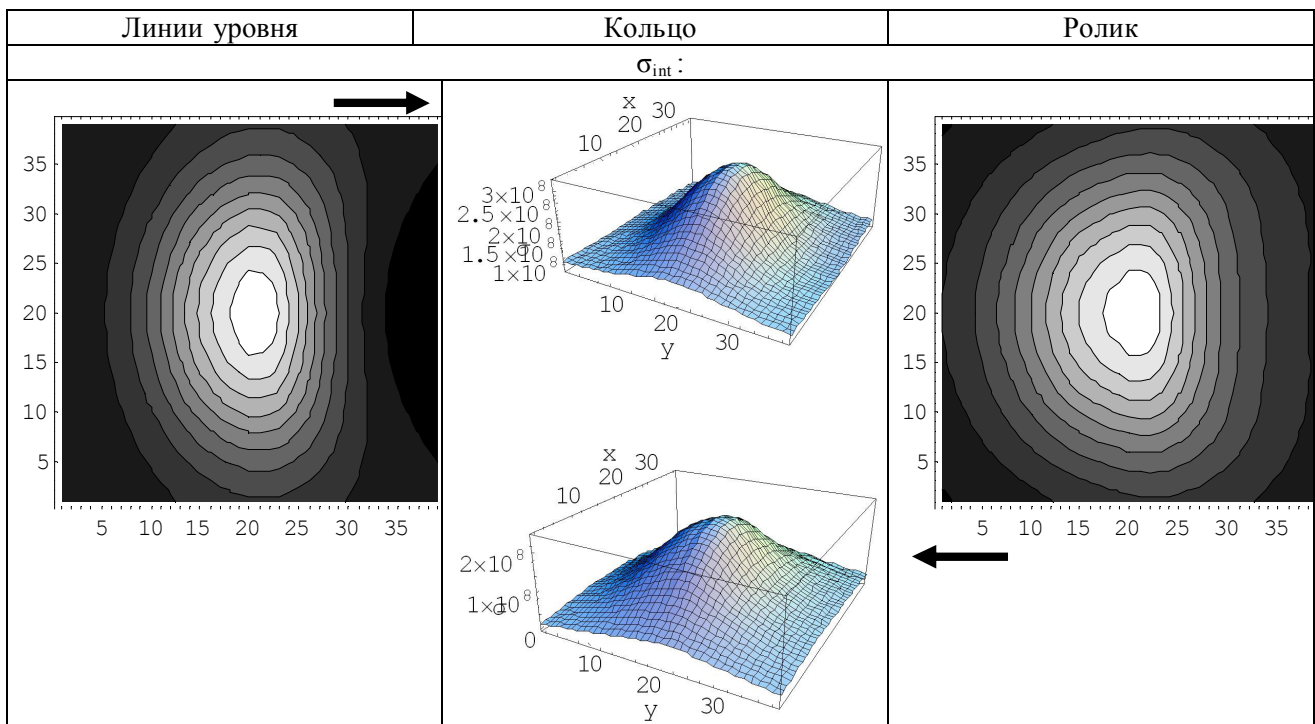


Рисунок 16 – Интенсивность напряжений

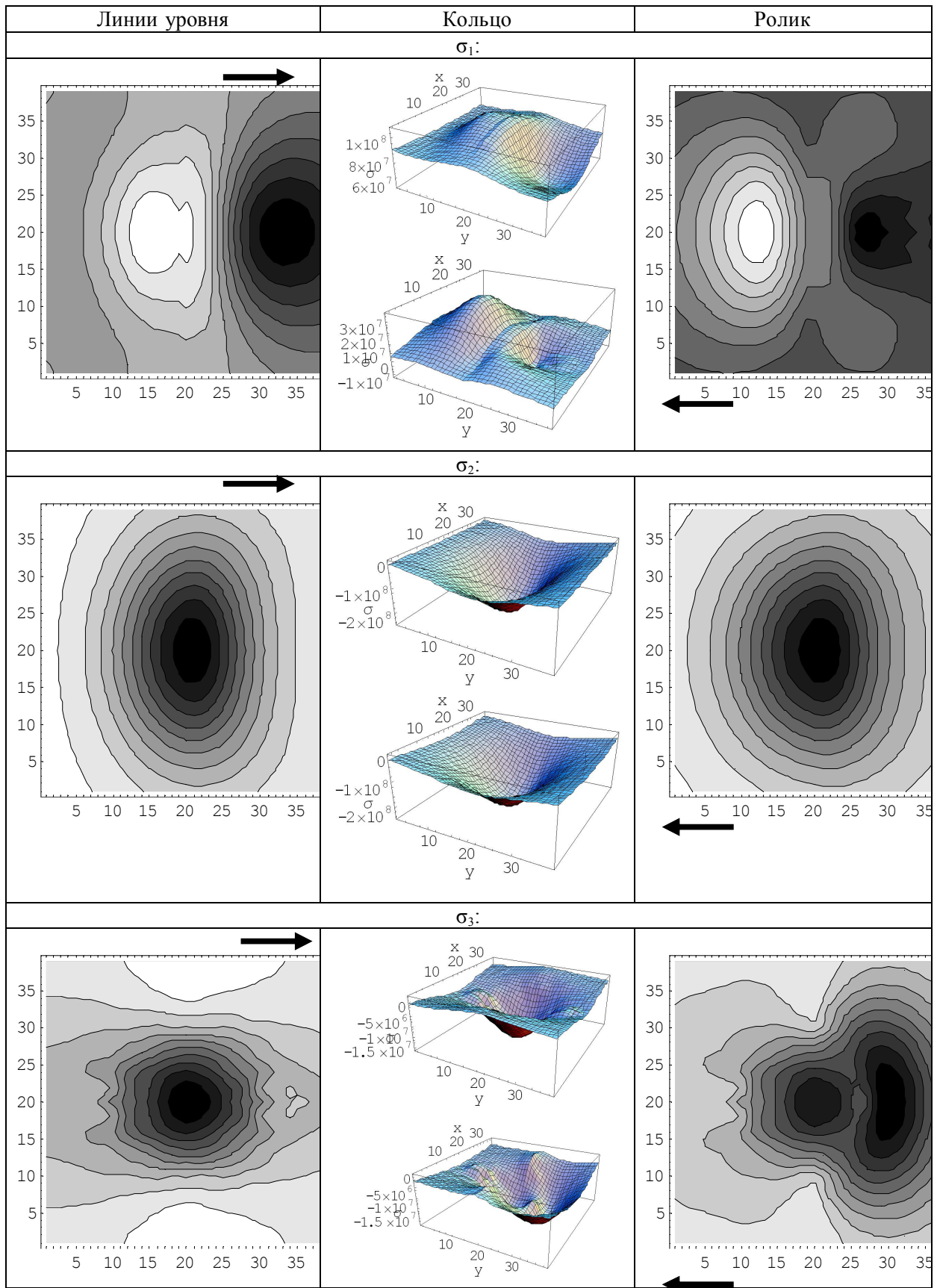


Рисунок 17 – Главные напряжения

1 Согласно рисункам 9 и 10 распределения компонент нормального и касательного напряжений в объемной зоне контакта одинаковы в качественном отношении для ролика и кольца, что соответствует обычному представлению в контактных задачах. Однако в количественном отношении обнаружено существенное (до ~30 % в условиях расчета) снижение уровня контактных напряжений вследствие влияния изгиба.

2 Согласно рисункам 11 и 12, распределения соответствующих компонент нормального и касательного напряжений симметричны относительно оси y . Это соответствует общим представлениям о протекании процессов трения. Однако в количественном отношении обнаружено существенное (до ~15 %) снижение силы трения вследствие влияния изгиба.

3 Рисунки 13 и 14 иллюстрируют изменение полей напряжений от нормальной контактной нагрузки в элементах системы вследствие влияния силы трения. Такое изменение имеет специфические черты для каждой из компонент объединенного напряженного состояния, обусловленного контактной нагрузкой. Однако обнаруживаются две характерные закономерности. Во-первых, для компонент $\sigma_y^n \cup \sigma_y^f$, $\tau_{xy}^n \cup \tau_{xy}^f$ и $\tau_{xz}^n \cup \tau_{xz}^f$ более характерно изменение уровня напряжений, тогда как для остальных компонент более характерно изменение формы распределения поля напряжения.

4 Согласно рисунку 15 (сравнить с рисунком 13 для $\sigma_y^n \cup \sigma_y^f$) влияние изгибных усилий на изменение напряженного состояния кольца состоит в том, что знаки действующих напряжений меняются на противоположные (поле сжимающих напряжений переходит в поле растягивающих напряжений). В количественном отношении такой переход приводит к изменению величины напряжений примерно до 80 МПа.

5 На рисунке 16 показано распределение интенсивности напряжений. Видно, что влияние изгиба характеризуется как изменением формы поля интенсивности напряжений, так и их величины (примерно в 1,5 раза).

6 Согласно рисунку 17 изгибные напряжения оказывают наиболее сильное влияние на характер распределения третьего и первого главных напряжений. В количественном отношении величины главных напряжений уменьшаются вследствие влияния изгиба примерно до двух раз.

Заключение. При разработке метода исследования напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс, построенной по типу ролик/кольцо, были поставлены и решены следующие задачи:

1 Сформулирована система принципов, положенных в основу решения задачи о напряженном состоянии элементов системы ролик/кольцо. В частности, предложена схема разделения приложенной к системе внешней нагрузки F_N на две составляющие, одна из которых обнаруживается в точке контакта ролика и кольца, а другая обуславливает плоский изгиб кольца.

2 При решении контактной задачи:

– учтено изменение параметров площадки контакта вследствие изгиба кольца;

– получена полная картина распределения напряжений в объемной зоне контакта, обусловленная действием нормальных и касательных эллиптически распределенных по поверхности контакта усилий, для чего введены упрощенные формулы (20) и (21) для подсчета напряжений σ_x и σ_y , а также записаны интегралы (23) и (25) для определения всех компонент напряжения под поверхностью контакта;

– для интегрирования в формулах (23) и (25) использованы численные методы, включающие формулу Симпсона, построение и интегрирование кубического сплайна;

– на основе полученной регулярной сетки значений напряжений разработаны:

а) процедура интерполирования для расчета напряжений в точках внутри ее;

б) процедура симметричного отображения массива точек, рассчитанного для четверти рассматриваемого объема, что позволило увеличить массив значений в 32 раза.

3 При решении изгибной задачи методом сил:

– получены решения (59)-(65) и (72)-(80) для расчета внутренних усилий в кривом брусе;

– учтено действие силы трения на изменение внутренних усилий в кривом брусе.

4 Описано полное поле напряжений в объемной зоне контакта путем суперпозиции соответствующих компонент контактных и изгибных напряжений (формулы (23), (25), (81)).

5 Приведены численные результаты анализа напряженного состояния элементов системы ролик/кольцо при заданных значениях определяющих параметров и переменных (рисунки 9–17). Общее заключение таково. Игнорирование изгибных напряжений, при анализе напряженного состояния системы ролик/кольцо (а следовательно, и колесо/рельс) лишь от контактной нагрузки, может приводить к искаженному представлению о нагруженности элементов системы и, следовательно, к неверной оценке ее работоспособности. Это находится в соответствии с основными положениями трибофатики [11], подтвержденными экспериментально.

Выше изложено лишь принципиальное решение поставленной задачи. Ее подробный анализ (в зависимости от уровня и соотношения контактной и изгибной нагрузок, определяющих размеров элементов системы, физико-механических свойств материалов, используемых для их изготовления, и т.п.) предстоит еще выполнить.

Список литературы

- 1 **Сосновский, Л. А.** О классификации контактных задач применительно к силовым системам машин / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков // *Современные методы проектирования машин: сб. науч. тр. Вып. 2. В 7 т.; под общ. ред. П. А. Витязя.* – Мн.: УП "Технопринт", 2004. – Т.4. – С. 48–58.
- 2 Новые способы испытаний применительно к системе колесо/рельс / С. А. Тюрин [и др.]. // *Вестник БелГУТа: Наука и транспорт.* – 2005. – № 2. – С. 54–63.
- 3 **Сосновский, Л. А.** Способ испытания образцов материалов на контактно-механическую усталость. Положительное решение Национального центра интеллектуальной собственности РБ по заявке на получение патента № а 20041059.
- 4 **Джонсон, К.** *Механика контактного взаимодействия* / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 555 с.
- 5 Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев и [др.]. – М.: Государственное науч.-техн. изд. машиностроит. лит-ры, 1958. – 432 с.
- 6 **Макушкин, А. П.** Контактные задачи / А. П. Макушкин, И. В. Крагельский // *Трение и износ.* – 1986. – Т.7. – №1. – С. 5-15.
- 7 **Рвачев, В. Л.** Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В. Л. Рвачев, В. С. Проценко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 648 с.
- 8 **Саверин, М. М.** Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузок / М. М. Саверин. – М.: Машгиз, 1946. – 238 с.
- 9 **Штаерман, И. Я.** Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 348 с.
- 10 **Тимошенко, С. П.** *Теории упругости* / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 567 с.
- 11 **Сосновский, Л. А.** *Основы трибофатики* / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т.1. – 246 с.; Т.2. – 234 с.
- 12 *Соппротивление материалов* / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.

Получено 09.04.2005

L. A. Sosnovskiy, V. I. Senko, S. S. Shcherbakov, N. A. Zalesskiy. Research of the stressed state of the elementary model of the wheel / rail system.

The method of research of a stressed state of elements of the roller / ring system at the movable contact is developed. The system of the principles laid in a basis of the solution of a problem stressed state of the roller / ring system is formulated. Numerical values of a stressed state of elements of the roller / ring system at preset values of diagnostic variables and variables are instanced.