

УДК 539.3

С. А. СТАРОВОЙТОВ, аспирант; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Предложена постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии трехслойного стержня на упругом основании. Получено аналитическое решение. Численные результаты приведены для стержня, заделанного по концам.

Слоистые элементы конструкций в настоящее время широко используются в различных отраслях промышленности и строительства. Однако существующие математические модели не учитывают влияние упругого основания. Это обуславливает необходимость создания метода предварительного проектного расчета, позволяющего исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) трехслойных элементов.

Целью данной работы является исследование НДС трехслойного стержня на упругом основании

под действием равномерно распределенной нагрузки, определение влияния коэффициента постели на прогиб и напряжения в стержне.

Рассматривается упругий несимметричный по толщине трехслойный стержень длины l , лежащий на упругом основании Винклера [1]. На внешние слои стержня действуют распределенная силовая нагрузка $q_0(x)$ и реакция упругого основания $q_r(x)$. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1).

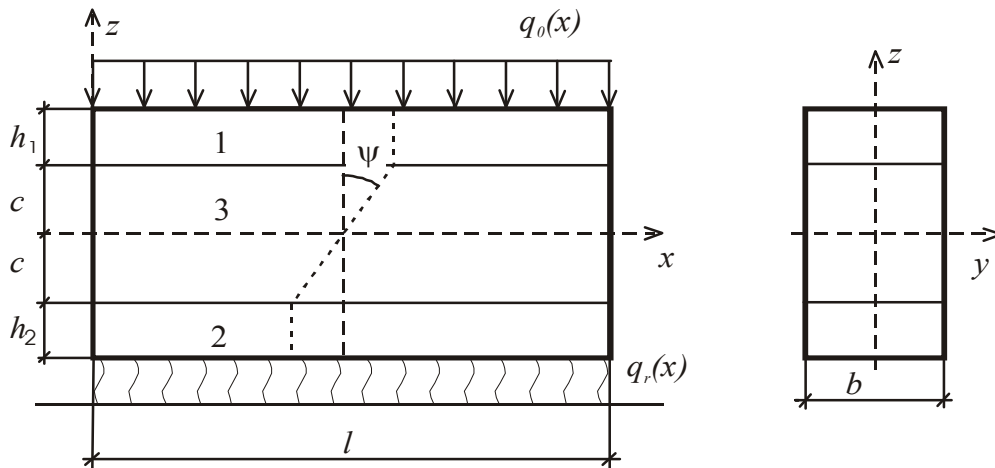


Рисунок 1

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Материалы всех слоев считаются несжимаемыми в поперечном направлении. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев.

В работах [2], [3] было исследовано напряженно-деформированное состояние трехслойного металлополимерного стержня, находящегося под комплексным термосиловым воздействием. В данной статье рассматривается напряженное состояние подобного стержня, лежащего на упругом основании, под действием распределенной нагрузки.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия получены с использованием принципа

возможных перемещений. Затем внутренние силовые факторы, входящие в них, выражаются через три линейно независимые функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$ – тангенциальное перемещение, сдвиг и прогиб срединной плоскости заполнителя. В результате следует система нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} = 0;$$

$$a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi = 0;$$

$$a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} - a_7 w_{,xxxx} = q_0 + q_r, \quad (1)$$

где $q_r = -kw$, k – коэффициент постели;

$$a_1 = \left(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)} \right) h_1 + \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) h_2 + 2c \left(K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)} \right);$$

$$a_2 = c \left[\left(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)} \right) h_1 - \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) h_2 \right]; \quad \alpha_1 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_4 = 0. \quad (5)$$

$$a_3 = \left(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)} \right) h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right);$$

$$a_4 = c^2 \left[\left(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)} \right) h_1 + \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) h_2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} c \left(K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)} \right) \right];$$

$$a_5 = 2G^{(3)} c;$$

$$a_6 = c \left[\left(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)} \right) h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} c^2 \left(K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)} \right) \right];$$

$$a_7 = \left(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)} \right) h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + \left(K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)} \right) h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} c^3 \left(K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)} \right).$$

Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Рассмотрим решение системы (1) при $q_0 = \text{const}$. Исключим $u_{,xx}$ из второго и третьего уравнений при помощи первого, продифференцируем второе уравнение один раз и исключим $\psi_{,xxx}$ с помощью третьего уравнения. Продифференцировав два раза второе уравнение и заменив в нем $\psi_{,xxx}$ с помощью третьего, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами для определения прогиба балки:

$$\alpha_1 w_{,xxxxxx} + \alpha_2 w_{,xxxx} + \alpha_3 w_{,xx} + \alpha_4 w = a_1 q_0, \quad (2)$$

где

$$\alpha_1 = (a_1 a_6 - a_2 a_3)^2 - (a_1 a_7 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2);$$

$$\alpha_2 = a_1 a_5 (a_1 a_7 - a_3^2);$$

$$\alpha_3 = -a_1 (a_1 a_4 - a_2^2) \kappa;$$

$$\alpha_4 = a_1^2 a_5 \kappa.$$

Решение (2) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения неоднородного уравнения w_p :

$$w(x) = w_0(x) + w_p. \quad (3)$$

Для нахождения $w_0(x)$ выпишем характеристическое уравнение, соответствующее (2):

$$\alpha_1 \lambda^6 + \alpha_2 \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_4 = 0. \quad (4)$$

Это бикубическое уравнение. Обозначим $\lambda^2 = t$. Тогда уравнение (4) принимает вид:

Если в качестве материала несущих слоев принять сплав Д16Т, а материал заполнителя – фторопласт [4], то получим, что дискриминант уравнения (5) больше нуля. Следовательно, данное уравнение имеет три действительных корня t_1, t_2, t_3 (вид которых здесь не приводится из-за громоздкости). Численный анализ показал, что они положительны (t_1, t_2, t_3). Тогда корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{t_1}$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{t_2}$, $\lambda_5 = -\lambda_6 = \sqrt{t_3}$. Общее решение однородного уравнения, соответствующего (2), можно выписать в виде

$$w_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{-\lambda_3 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} + C_6 e^{-\lambda_5 x}, \quad (6)$$

где C_1, C_2, \dots, C_6 – константы интегрирования, определяемые из условия закрепления стержня.

Частное решение уравнения (2) можно принять в виде

$$w_p = \frac{a_1 q_0}{\alpha_4}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (3) и учитывая (6), получим прогиб балки в окончательном виде

$$w(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{-\lambda_3 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} + C_6 e^{-\lambda_5 x} + \frac{a_1 q_0}{\alpha_4}. \quad (8)$$

Угол сдвига в заполнителе $\psi(x)$ и продольное перемещение $u(x)$ следуют из остальных уравнений системы (1):

$$\psi(x) = C_1 a_{11} e^{\lambda_1 x} - C_2 a_{11} e^{-\lambda_1 x} + C_3 a_{12} e^{\lambda_3 x} + C_4 a_{12} e^{-\lambda_3 x} + C_5 a_{13} e^{\lambda_5 x} - C_6 a_{13} e^{-\lambda_5 x} + b_1 A_0 x + b_2 q_0 x + C_7; \\ u(x) = C_1 a_{21} e^{\lambda_1 x} - C_2 a_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_3 a_{22} e^{\lambda_3 x} + C_4 a_{22} e^{-\lambda_3 x} + C_5 a_{23} e^{\lambda_5 x} - C_6 a_{23} e^{-\lambda_5 x} + B_1 b_1 A_0 x + B_1 b_2 q_0 x + B_1 C_7 + C_8 x + C_9, \quad (9)$$

где C_1, C_2, \dots, C_9 – константы интегрирования;

$$b_1 = \frac{(a_4 a_1 - a_2^2) \kappa}{a_5 (a_2 a_3 - a_1 a_6)};$$

$$b_2 = -\frac{(a_4 a_1 - a_2^2)}{a_5 (a_2 a_3 - a_1 a_6)};$$

$$a_{11} = b_1 \lambda_1^3 + \frac{b_2}{\lambda_1};$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= b_1 \lambda_2^3 + \frac{b_2}{\lambda_2}; \\
a_{13} &= b_1 \lambda_3^3 + \frac{b_2}{\lambda_3}; \\
a_{21} &= B_1 \left(b_1 \lambda_1^3 + \frac{b_2}{\lambda_1} \right) + B_2 \lambda_1; \\
a_{22} &= B_1 \left(b_1 \lambda_2^3 + \frac{b_2}{\lambda_2} \right) - B_2 \lambda_2; \\
a_{23} &= B_1 \left(b_1 \lambda_3^3 + \frac{b_2}{\lambda_3} \right) + B_2 \lambda_3; \\
B_1 &= -\frac{a_2}{a_1}.
\end{aligned}$$

Для определения девяти констант интегрирования C_1, C_2, \dots, C_9 имеем только восемь граничных условий (по четыре на каждом конце стержня). Однако при решении системы (1) мы дополнительно дифференцировали ее второе уравнение, что может привести в конечном итоге к появлению лишних решений, не удовлетворяющих исходным уравнениям равновесия. Поэтому проведем проверку решений (8), (9), подставив их во второе уравнение системы (1) и потребовав его тождественного удовлетворения. Отсюда вытекает, что при действии равномерно распределенной нагрузки $C_7 = 0$.

После чего искомые функции принимают вид:

$$\begin{aligned}
w(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \\
&+ C_4 e^{-\lambda_3 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} + C_6 e^{-\lambda_5 x} + \frac{a_1 q_0}{\alpha_4}; \\
\psi(x) &= C_1 a_{11} e^{\lambda_1 x} - C_2 a_{11} e^{-\lambda_1 x} + \\
&+ C_3 a_{12} e^{\lambda_3 x} + C_4 a_{12} e^{-\lambda_3 x} + C_5 a_{13} e^{\lambda_5 x} - \\
&- C_6 a_{13} e^{-\lambda_5 x} + b_1 A_0 x + b_2 q_0 x; \\
u(x) &= C_1 a_{21} e^{\lambda_1 x} - C_2 a_{21} e^{-\lambda_1 x} + \\
&+ C_3 a_{22} e^{\lambda_3 x} + C_4 a_{22} e^{-\lambda_3 x} + C_5 a_{23} e^{\lambda_5 x} - \\
&- C_6 a_{23} e^{-\lambda_5 x} + B_1 b_1 A_0 x + B_1 b_2 q_0 x + C_8 x + C_9. \quad (10)
\end{aligned}$$

Для защемленного с двух сторон стержня необходимо потребовать, чтобы при $x = 0, l$; $u = \psi = w = w_{,x} = 0$. Подставив сюда решение (10), получим систему из 8 линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + \frac{a_1 q_0}{\alpha_4} &= 0; \\
C_1 a_{11} - C_2 a_{11} + C_3 a_{12} + C_4 a_{12} + C_5 a_{13} - C_6 a_{13} &= 0; \\
C_1 a_{21} - C_2 a_{21} + C_3 a_{22} + C_4 a_{22} + C_5 a_{23} - C_6 a_{23} + C_9 &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 \lambda_1 - C_2 \lambda_1 - C_3 + C_4 \lambda_2 + C_5 \lambda_3 - C_6 \lambda_3 &= 0; \\
C_1 e^{\lambda_1 l} + C_2 e^{-\lambda_1 l} + C_3 e^{\lambda_3 l} + C_4 e^{-\lambda_3 l} + \\
+ C_5 e^{\lambda_5 l} + C_6 e^{-\lambda_5 l} + \frac{a_1 q_0}{\alpha_4} &= 0; \\
C_1 e^{\lambda_1 l} a_{11} - C_2 e^{-\lambda_1 l} a_{11} + C_3 a_{12} e^{\lambda_3 l} + \\
+ C_4 a_{12} e^{-\lambda_3 l} + C_5 e^{\lambda_3 l} a_{13} - C_6 e^{-\lambda_3 l} a_{13} + \\
+ b_2 \frac{a_1 q_0}{\alpha_4} l + b_3 q_0 l &= 0; \\
C_1 e^{\lambda_1 l} a_{21} - C_2 e^{-\lambda_1 l} a_{21} + C_3 a_{22} e^{\lambda_3 l} + \\
+ C_4 a_{22} e^{-\lambda_3 l} + C_5 e^{\lambda_3 l} a_{23} - C_6 e^{-\lambda_3 l} a_{23} + \\
+ B_1 b_2 \frac{a_1 q_0}{\alpha_4} l + B_1 b_3 q_0 l + C_8 l + C_9 &= 0; \\
C_1 e^{\lambda_1 l} \lambda_1 - C_2 e^{-\lambda_1 l} \lambda_1 + C_3 e^{\lambda_3 l} \lambda_3 - \\
- C_4 e^{-\lambda_3 l} \lambda_3 + C_5 e^{\lambda_5 l} \lambda_5 - C_6 e^{-\lambda_5 l} \lambda_5 &= 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Аналитическое решение системы (11) громоздко и здесь не приводится.

Деформации выражаются через полученные функции $u(x), \psi(x), w(x)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)} &= u_{,x} + c \psi_{,x} - z w_{,xx}; \quad c < z < c + h_1; \\
\varepsilon_x^{(2)} &= u_{,x} - z \psi_{,x} - z w_{,xx}; \quad -c - h_1 < z < -c; \\
\varepsilon_x^{(3)} &= u_{,x} + z \psi_{,x} - z w_{,xx}; \quad -c < z < c.
\end{aligned}$$

По ним из закона Гука определяем нормальные напряжения, действующие в слоях стержня $\sigma_x^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$), конечный вид которых не приводится из-за громоздкости:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(1)} &= (K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) \varepsilon_x^{(1)}; \\
\sigma_x^{(2)} &= (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) \varepsilon_x^{(2)}; \\
\sigma_x^{(3)} &= (K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)}) \varepsilon_x^{(3)},
\end{aligned}$$

где $G^{(k)}, K^{(k)}$ – модули сдвига и объемной деформации k -го слоя ($k = 1, 2, 3$).

Численная реализация решения (10) проведена для трехслойного стержня в случае пакета Д16Т – фторопласт – Д16Т и трехслойного пакета с металлическими несущими слоями и заполнителем увеличенной жесткости. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к длине стержня l . Величина распределенной нагрузки и относительные толщины слоев принимались таким образом, чтобы не выйти за пределы упругих деформаций.

На рисунке 2 показано изменение прогиба w по длине стержня и нормальных напряжений $\sigma^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) в поперечном сечении при $x = 0$ в зависимости от коэффициента постели κ при равных толщинах несущих слоев. При этом использованы следующие характеристики слоев пакета: $G^{(1)} = G^{(2)} = 26700$ МПа, $G^{(3)} = 90$ МПа, $K^{(1)} = K^{(2)} = 80000$ МПа, $K^{(3)} = 4700$ МПа. Заметим, что при увеличении же-

сткости основания прогиб уменьшается, но его распределение по длине принимает более сложный характер. Напряжения в слоях с увеличением κ становятся одного знака.

На рисунке 3 изображено изменение прогиба w и нормальных напряжений σ в поперечном сечении стержня при $x = 0$ в зависимости от коэффициента постели κ при следующих характеристиках несущих слоев и заполнителя стержня: $G^{(1)} = G^{(2)} = 26700$ МПа, $G^{(3)} = 90$ МПа, $K^{(1)} = K^{(2)} = 80000$ МПа, $K^{(3)} = 2350$ МПа. При увеличении жесткости основания напряжения в стержне увеличиваются. В несущих слоях они становятся одного знака только при жесткости упругого основания $\kappa = 10^{10}$ Па/м.

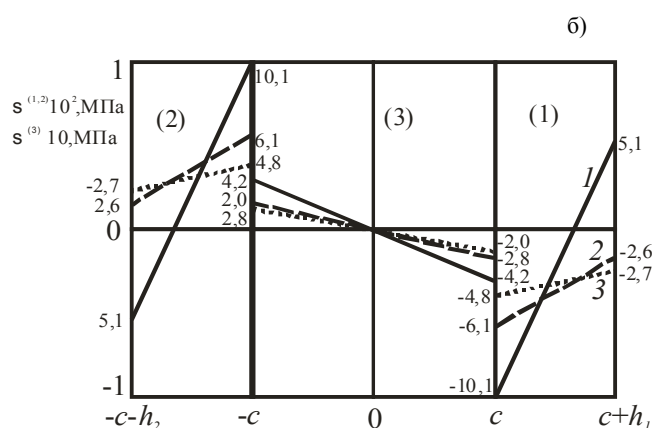
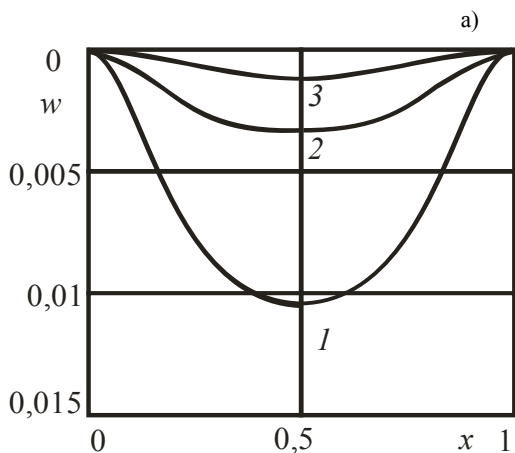


Рисунок 2 – Прогиб стержня (а), нормальные напряжения в сечении $x=0$ (б) ($c = 0,1$; $h_1 = h_2 = 0,02$): 1 – $\kappa = 10^7$ Па/м; 2 – $\kappa = 10^8$ Па/м; 3 – $\kappa = 10^{10}$ Па/м

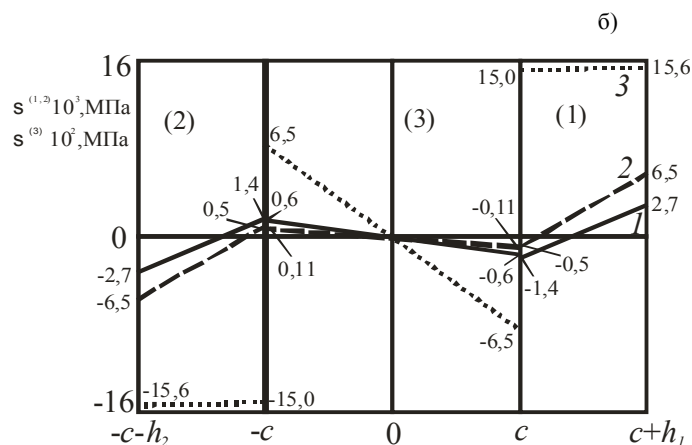
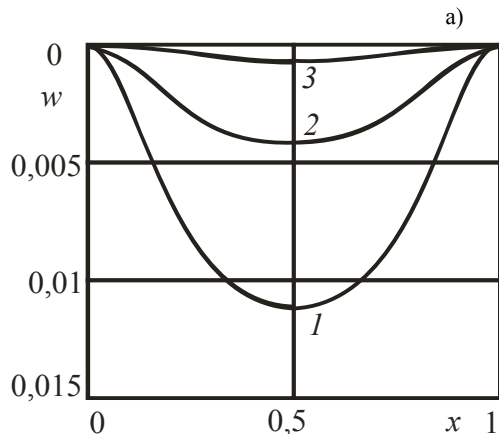


Рисунок 3 – Прогиб стержня (а), нормальные напряжения в сечении $x=0$ (б) ($c = 0,1$; $h_1 = h_2 = 0,02$): 1 – $\kappa = 10^7$ Па/м; 2 – $\kappa = 10^8$ Па/м; 3 – $\kappa = 10^{10}$ Па/м

Список литературы

- 1 Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 492 с.
- 2 Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Упругопластический изгиб трехслойного стержня // Материалы, технологии, инструменты – 1997. – № 2. – С. 88–92.

менты – 1997. – № 2. – С. 88–92.

- 3 Яровая А. В. Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня в условиях абляции // Материалы, технологии, инструменты. – 2000. – № 3. – С. 23–25

- 4 Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.

Получено 19.04.2004

S. A. Starovoitov. The mode of deformation of sandwich beam on elastic foundation.

Formulation of the problems of the mode of deformation of sandwich beam on elastic foundation has been suggested. Analytic solution has been obtained. Numerical results are presented for the fixed beam.