

УДК 62-419.5

А. В. ЯРОВАЯ, доктор физико-математических наук, А. А. ПОДДУБНЫЙ, магистр технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ УПРУГОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

Рассмотрен изгиб упругой трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок. По длине балки выделены три участка, на каждом из которых нагрузки могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. На границах участков и на торцах могут действовать сосредоточенные силы и моменты. С помощью принципа Лагранжа выведена система дифференциальных уравнений равновесия. Получено ее общее аналитическое решение в перемещениях, выписаны граничные условия в усилиях и перемещениях, условия сопряжения на границах участков. Получены числовые значения прогибов теоретическим и экспериментальным путем, проведено сравнение с результатами других авторов.

Введение. Многослойные элементы конструкций применяются в промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах. Существуют методики, позволяющие найти перемещения, усилия и напряжения в таких конструкциях с различной степенью точности.

Чтобы результаты, полученные аналитическим путем, можно было считать достоверными, их необходимо сравнить с данными соответствующих экспериментов. Желательно также сопоставить их с результатами расчета по альтернативным методикам.

Однако не всегда удается найти данные экспериментов в научной литературе, а результаты расчета по формулам разных авторов часто значительно отличаются друг от друга. Поэтому актуальны разработка собственных методик расчета параметров напряженно-деформированного состояния трехслойных конструкций, а также проведение собственных экспериментов, подтверждающих справедливость предлагаемых методик.

Статическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовано в [1–3]. В работе [3] рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием локальных нагрузок с использованием разрывных функций Хевисайда и Дирака. В данной статье рассмотрен изгиб подобной балки при локальных нагрузках более сложного характера, причем балка может иметь ступенчато-переменное по длине сечение. Решения получены отдельно для трех участков, а затем «сшиты» с использованием условий равенства перемещений и усилий на границах. Для подтверждения адекватности полученных результатов были выполнены расчеты по методике других авторов, а также проведен собственный эксперимент.

Расчетная схема балки. Рассматривается прямоугольная трехслойная балка длиной l и размерами поперечного сечения $h \times b_0$ (рисунок 1). Наружные слои являются несущими, они тонкие и выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный толстый наполнитель разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте балки и обеспечивает их совместную работу.

Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью наполнителя. Ось x направлена вдоль бал-

ки, ось z – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а наполнитель – третьим (см. рисунок 1). Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$).

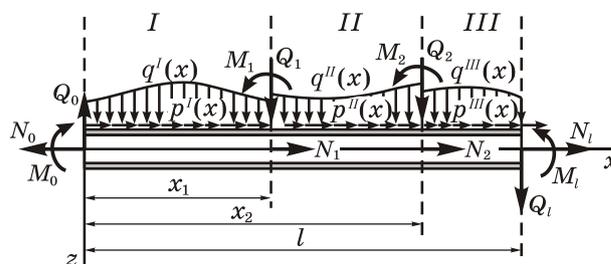


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной балки

На верхний внешний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси y . На торцах балки (при $x = 0$ и $x = l$) действуют сосредоточенные силы и моменты N_0, Q_0, M_0 и N_l, Q_l, M_l . К сечениям 1 ($x = x_1$) и 2 ($x = x_2$) приложены усилия N_1, Q_1, M_1 и N_2, Q_2, M_2 .

По длине балки выделим три участка: I ($0 \leq x \leq x_1$), II ($x_1 \leq x \leq x_2$), III ($x_2 \leq x \leq l$). Обозначим: $p^n(x), q^n(x)$ – продольная и поперечная распределенные нагрузки на n -м участке ($n = I, II, III$); h_1^n, h_2^n, c^n – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины наполнителя на n -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Слои трехслойного пакета могут быть ступенчато-переменными по длине.

Основные гипотезы. Будем считать, что при изгибе трехслойного пакета под действием приложенных продольных и поперечных нагрузок несущие слои в силу тонкости испытывают только растяжение-сжатие. В наполнителе дополнительно будем учитывать сдвиг. Согласно общепринятой терминологии в области трехслойных элементов конструкций [3], наполнитель считается жестким.

Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях нормаль остается перпендикулярной к деформированной оси балки; в наполнителе за счет сдвига она поворачивается на дополнительный угол.

Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Материалы слоев в общем случае считаются ортотропными, проявляют упругие свойства, для них справедлив закон Гука.

Искомые функции. Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомых величин принимаются функции $w^n(x)$, $u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n -м участке.

В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений:

$$\begin{aligned} w^I(x_1) &= w^{II}(x_1); \quad w^{II}(x_2) = w^{III}(x_2); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \\ u^{II}(x_2) &= u^{III}(x_2); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \quad \psi^{II}(x_2) = \psi^{III}(x_2); \\ w^I_{,xx}(x_1) &= w^{II}_{,xx}(x_1); \quad w^{II}_{,xx}(x_2) = w^{III}_{,xx}(x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Если на торцах балки предусмотрены жесткие диафрагмы, которые препятствуют повороту нормали в заполнителе, то

$$\psi^I(0) = 0; \quad \psi^{III}(l) = 0, \quad (2)$$

что может служить граничными условиями для искомых функций. Если же диафрагмы на торцах не предусмотрены, то углы сдвига в заполнителе для торцевых сечений необходимо учитывать.

Перемещения, деформации и напряжения. В направлении оси x перемещения $u_x^{(k)n}(x, z)$ для каждого из слоев выражаются с использованием введенных гипотез через три искомые функции зависимостями:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)n} &= u^n + c\psi^n - z w^n_{,x} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ u_x^{(2)n} &= u^n - c\psi^n - z w^n_{,x} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\ u_x^{(3)n} &= u^n + z\psi^n - z w^n_{,x} \quad (-c^n \leq z \leq c^n), \end{aligned} \quad (3)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Так как слои несжимаемы по толщине, то в направлении оси z перемещения точек балки равны прогибу срединной плоскости заполнителя: $u_z^{(k)n} = w^n$. В направлении оси y перемещения отсутствуют: $u_y^{(k)n} = 0$.

С помощью соотношений Коши и выражений для перемещений (3) в каждом слое определяются компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)n} &= u^n_{,x} + c\psi^n_{,x} - z w^n_{,xx} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ \varepsilon_x^{(2)n} &= u^n_{,x} - c\psi^n_{,x} - z w^n_{,xx} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\ \varepsilon_x^{(3)n}(x, z) &= u^n_{,x} + z\psi^n_{,x} - z w^n_{,xx} \quad (-c^n \leq z \leq c^n); \\ \varepsilon_{xz}^{(1)n} &= \varepsilon_{zx}^{(1)n} = 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)n} = \varepsilon_{zx}^{(2)n} = 0; \\ \varepsilon_{xz}^{(3)n} &= \varepsilon_{zx}^{(3)n} = \frac{1}{2}\psi^n_{,x}; \quad \varepsilon_z^{(k)n} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из компонент тензора напряжений ненулевыми являются $\sigma_x^{(k)n}$ и $\sigma_{xz}^{(3)n} = \sigma_{zx}^{(3)n}$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя; $n = I, II, III$ – номер участка). Они связаны с деформациями законом Гука.

Внутренние силы и моменты. Внутренние усилия для n -го участка вводятся в виде интегралов по толщине каждого слоя:

$$\begin{aligned} N^{(1)n}(x) &= b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} dz; \quad M^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} z dz; \\ N^{(2)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} dz; \quad M^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} z dz; \\ N^{(3)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} dz; \quad M^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} z dz; \\ Q^{(3)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)n} dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где $N^{(k)n}$, $M^{(k)n}$ – продольная сила и изгибающий момент в сечении с координатой x для k -го слоя; $Q^{(3)n}$ – поперечная сила для 3-го слоя (заполнителя); b_0 – ширина балки; $\sigma_x^{(k)n}$, $\sigma_{xz}^{(3)n}$ – компоненты тензора напряжений для k -го слоя.

Удобно ввести полные внутренние усилия для n -го участка, просуммировав силы и моменты (5) по слоям:

$$\begin{aligned} N^n &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)n}; \quad M^n = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n}; \quad Q^n = Q^{(3)n}; \\ H^n &= c^n(N^{(1)n} - N^{(2)n}) + M^{(3)n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где N^n , M^n , Q^n – полные продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила; H^n – дополнительный момент, возникающий из-за сдвига в заполнителе (момент сдвига).

Уравнения равновесия в усилиях. К деформированной балке применяется принцип возможных перемещений Лагранжа, который выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Для этого необходимо составить выражения возможных работ внешних и внутренних сил и приравнять их. Из полученного равенства следуют дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$\begin{aligned} N^n_{,x} + b_0 p^n &= 0; \quad H^n_{,x} - Q^n = 0; \\ M^n_{,xx} + b_0 q^n &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

силовые граничные условия

$$\begin{aligned} N^I(0) &= N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I_{,x}(0) = Q_0; \\ N^{III}(l) &= N_l; \quad M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III}_{,x}(l) = Q_l; \\ H^I(0) &= 0; \quad H^{III}(l) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков $x = x_1$ и $x = x_2$

$$\begin{aligned} N^I(x_1) - N^{II}(x_1) &= N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \\ M^I_{,x}(x_1) - M^{II}_{,x}(x_1) &= Q_1; \quad H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0; \\ N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) &= N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2; \\ M^{II}_{,x}(x_2) - M^{III}_{,x}(x_2) &= Q_2; \\ H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Если на левом ($x = 0$) и правом ($x = l$) торцах стержня имеются диафрагмы, то граничные условия (9) несправедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига на торцах (2). При отсутствии сосредоточенных внешних усилий в сечениях 1 и 2 в правой части условий (10) будут нули.

Закон Гука. В общем случае закон Гука для ортотропного упругого тела имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z} \sigma_z; & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{yz}}{E_z} \sigma_z - \frac{\nu_{yx}}{E_x} \sigma_x; & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G_{yz}} \sigma_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y} \sigma_y; & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G_{xz}} \sigma_{xz},\end{aligned}\quad (12)$$

где E_i , ν_{ij} , G_{ij} ($i, j = x, y, z$) – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига – девять независимых констант, необходимых и достаточных для описания свойств ортотропного материала.

При этом выполняются равенства

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x}; \quad \frac{\nu_{yz}}{E_z} = \frac{\nu_{zy}}{E_y}; \quad \frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x}.$$

Закон Гука для изотропного упругого тела следует из формул (12) при $E_i = E$, $\nu_{ij} = \nu$, $G_{ij} = G$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xz}.\end{aligned}\quad (13)$$

В девятимерно-шаровой форме закон Гука (13) для изотропного упругого тела имеет вид

$$s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}; \quad \sigma = 3K\varepsilon \quad (i, j = x, y, z),$$

где s_{ij} , ε_{ij} – девятимерные части тензоров напряжений и деформаций; σ , ε – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G – модуль сдвига, K – модуль объемной деформации.

Для констант изотропного материала справедливы равенства

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

При изгибе балки относительно оси y деформации $\varepsilon_y = 0$. Кроме этого, если материал несжимаем по толщине, то $\varepsilon_z = 0$. С учетом указанных обстоятельств напряжения σ_x выражаются из (12) следующим образом:

$$\sigma_x = A_x \varepsilon_x, \quad (14)$$

где

$$A_x = \frac{E_x(1 - \nu_{yz}\nu_{zy})}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{xz}\nu_{zy}\nu_{yx}}.$$

При расчете балок на изгиб часто не учитываются напряжения σ_y , σ_z в поперечном направлении [4]. При этом полагается, что модули Юнга $E_y = E_z = \infty$, а коэффициенты Пуассона $\nu_{yx} = \nu_{zx} = 0$. Тогда $A_x = E_x$.

В работах [2, 3] исследовались изотропные балки с учетом напряжений σ_y , σ_z . Для таких балок закон Гука принимает вид

$$\sigma_x = A \varepsilon_x,$$

где

$$A = \frac{E(1-\nu^2)}{1-3\nu^2-2\nu^3} = K + \frac{4}{3}G.$$

Выражение внутренних усилий через перемещения. Применяя соотношения (4), (5) и (14), выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения и далее внутренние силы и моменты через функции $w^n(x)$, $u^n(x)$, $\psi^n(x)$:

$$N^n = b_0(a_1^n u^n{}_{,x} + a_6^n \psi^n{}_{,x} - a_7^n w^n{}_{,xx});$$

$$H^n = b_0(a_6^n u^n{}_{,x} + a_2^n \psi^n{}_{,x} - a_3^n w^n{}_{,xx}); \quad Q^n = b_0 a_5^n \psi^n;$$

$$M^n = b_0(a_7^n u^n{}_{,x} + a_3^n \psi^n{}_{,x} - a_4^n w^n{}_{,xx}). \quad (15)$$

Подставим выражения (15) в уравнения (7). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной балки в перемещениях:

$$a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} = -p^n,$$

$$a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n = 0,$$

$$a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} = -q^n, \quad (16)$$

где a_1^n, \dots, a_7^n – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев на n -м участке:

$$a_1^n = A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + 2A_x^{(3)} c^n;$$

$$a_2^n = c^{n2} [A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^n];$$

$$a_3^n = c^n [A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) + A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n2}];$$

$$a_4^n = A_x^{(1)} h_1^n (c^{n2} + c^n h_1^n + \frac{1}{3} h_1^{n2}) +$$

$$+ A_x^{(2)} h_2^n (c^{n2} + c^n h_2^n + \frac{1}{3} h_2^{n2}) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n3};$$

$$a_5^n = 2G_{xz}^{(3)} c^n; \quad a_6^n = c^n [A_x^{(1)} h_1^n - A_x^{(2)} h_2^n];$$

$$a_7^n = A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) - A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n).$$

Определение перемещений на участках. Решив систему (16), получим следующие соотношения для сдвига в заполнителе $\psi^n(x)$, прогиба $w^n(x)$ и продольного перемещения срединной плоскости заполнителя $u^n(x)$ на n -м участке:

$$\psi^n(x) = C_1^n b_{11}^n + C_2^n \text{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n \text{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x);$$

$$w^n(x) = C_1^n (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^n b_{14}^n \text{ch}(\beta_3^n x) +$$

$$+ C_3^n b_{14}^n \text{sh}(\beta_3^n x) + C_4^n x^2 / 2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x);$$

$$u^n(x) = C_1^n (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^n b_{17}^n \text{sh}(\beta_3^n x) +$$

$$+ C_3^n b_{17}^n \text{ch}(\beta_3^n x) + C_4^n \alpha_{13}^n x + C_5^n \alpha_{13}^n +$$

$$+ C_7^n x + C_8^n + g_3^n(x), \quad (17)$$

где C_1^n, \dots, C_8^n – константы интегрирования, а входящие в (17) функции и коэффициенты определяются выражениями:

$$g_1^n(x) = b_{12}^n \text{sh}(\beta_3^n x) \int \text{ch}(\beta_3^n x) (q^n dx) dx -$$

$$- b_{12}^n \text{ch}(\beta_3^n x) \int \text{sh}(\beta_3^n x) (q^n dx) dx +$$

$$+ b_{13}^n \text{sh}(\beta_3^n x) \int \text{ch}(\beta_3^n x) p dx - b_{13}^n \text{ch}(\beta_3^n x) \int \text{sh}(\beta_3^n x) p dx;$$

$$g_2^n(x) = \alpha_{17}^n \int g_1^n dx + \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + \\ + \alpha_{19}^n \iiint p^n dx dx dx; \quad g_3^n(x) = b_{18}^n g_1^n(x) + b_{19}^n g_2^n(x) + \\ + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + b_{20}^n \iiint p^n dx dx dx;$$

$$(\beta_3^n)^2 = -\alpha_1^n = \frac{a_5^n [a_1^n a_4^n - (a_7^n)^2]}{A^n} > 0;$$

$$\alpha_{15}^n = \frac{a_1^n a_3^n - a_6^n a_7^n}{A^n}; \quad \alpha_{16}^n = \frac{a_4^n a_6^n - a_3^n a_7^n}{A^n};$$

$$A^n = a_1^n a_2^n a_4^n + 2a_3^n a_6^n a_7^n - a_1^n (a_3^n)^2 - a_2^n (a_7^n)^2 - a_4^n (a_6^n)^2;$$

$$\alpha_{17}^n = \frac{a_1^n a_3^n - a_6^n a_7^n}{a_1^n a_4^n - (a_7^n)^2}; \quad \alpha_{18}^n = \frac{a_1^n}{a_1^n a_4^n - (a_7^n)^2};$$

$$\alpha_{19}^n = \frac{-a_7^n}{a_1^n a_4^n - (a_7^n)^2}; \quad b_{11}^n = \frac{\alpha_{15}^n}{\alpha_1^n}; \quad b_{12}^n = \frac{\alpha_{15}^n}{\beta_3^n};$$

$$b_{13}^n = \frac{\alpha_{16}^n}{\beta_3^n}; \quad b_{14}^n = \frac{\alpha_{17}^n}{\beta_3^n}; \quad b_{15}^n = \frac{\alpha_{15}^n (\alpha_{12}^n + \alpha_{13}^n \alpha_{17}^n)}{\alpha_1^n};$$

$$b_{16}^n = \frac{\alpha_{13}^n \alpha_{18}^n}{2}; \quad b_{17}^n = \alpha_{12}^n + \alpha_{13}^n \alpha_{17}^n;$$

$$b_{18}^n = \frac{\alpha_{15}^n (\alpha_{12}^n + \alpha_{13}^n \alpha_{17}^n)}{\beta_3^n}; \quad b_{19}^n = \frac{\alpha_{16}^n (\alpha_{12}^n + \alpha_{13}^n \alpha_{17}^n)}{\beta_3^n};$$

$$b_{20}^n = \alpha_{14}^n + \alpha_{13}^n \alpha_{19}^n.$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Граничные условия. На левом и правом торцах балки должны выполняться условия для внутренних усилий (8), (9). Выразив усилия через перемещения, согласно (14), получим:

– на левом торце ($x = 0$):

$$1) N^I(0) = N_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1^I u^I{}_{,x} + a_6^I \psi^I{}_{,x} - a_7^I w^I{}_{,xx}) \Big|_{x=0} = N_0 / b_0;$$

$$2) M^I(0) = M_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_7^I u^I{}_{,x} + a_3^I \psi^I{}_{,x} - a_4^I w^I{}_{,xx}) \Big|_{x=0} = M_0 / b_0;$$

$$3) M^I{}_{,x}(0) = Q_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_7^I u^I{}_{,xx} + a_3^I \psi^I{}_{,xx} - a_4^I w^I{}_{,xxx}) \Big|_{x=0} = Q_0 / b_0;$$

$$4) H^I(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_6^I u^I{}_{,x} + a_2^I \psi^I{}_{,x} - a_3^I w^I{}_{,xx}) \Big|_{x=0} = 0; \quad (18)$$

– на правом торце ($x = l$):

$$5) N^III(l) = N_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1^III u^III{}_{,x} + a_6^III \psi^III{}_{,x} - a_7^III w^III{}_{,xx}) \Big|_{x=l} = N_l / b_0;$$

$$6) M^III(l) = M_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_7^III u^III{}_{,x} + a_3^III \psi^III{}_{,x} - a_4^III w^III{}_{,xx}) \Big|_{x=l} = M_l / b_0;$$

$$7) M^III{}_{,x}(l) = Q_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_7^III u^III{}_{,xx} + a_3^III \psi^III{}_{,xx} - a_4^III w^III{}_{,xxx}) \Big|_{x=l} = Q_l / b_0;$$

$$8) H^III(l) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_6^III u^III{}_{,x} + a_2^III \psi^III{}_{,x} - a_3^III w^III{}_{,xx}) \Big|_{x=l} = 0. \quad (19)$$

Если на левом и правом торцах балки имеются жесткие диафрагмы, то условия 4) и 8) в соотношениях (18), (19) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига (2):

$$4) \psi^I(0) = 0; \quad 8) \psi^III(l) = 0.$$

При решении конкретных задач для балки, шарнирно закрепленной на торцах, значения усилий N_0 , M_0 , Q_0 , N_l , M_l , Q_l не всегда известны. Поэтому вместо граничных условий 1)–3) и 5)–7) в усилиях (18), (19) удобнее условия в перемещениях. Рассмотрим два варианта (рисунок 2).

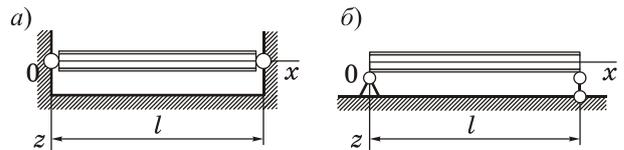


Рисунок 2 – Варианты шарнирного закрепления балки на торцах

При неподвижном шарнирном закреплении обоих торцов (см. рисунок 2, а) и наличии жестких диафрагм на них

$$1) w^I(0) = 0;$$

$$2) M_0 = 0 \Rightarrow (a_7^I u^I{}_{,x} + a_3^I \psi^I{}_{,x} - a_4^I w^I{}_{,xx}) \Big|_{x=0} = 0;$$

$$3) u^I(0) = 0; \quad 4) \psi^I(0) = 0; \quad 5) w^III(l) = 0;$$

$$6) M_l = 0 \Rightarrow (a_7^III u^III{}_{,x} + a_3^III \psi^III{}_{,x} - a_4^III w^III{}_{,xx}) \Big|_{x=l} = 0;$$

$$7) u^III(l) = 0; \quad 8) \psi^III(l) = 0. \quad (20)$$

При свободном опирании балки на две шарнирные опоры (слева – шарнирно-неподвижная, справа – шарнирно-подвижная) (см. рисунок 2, б) и наличии диафрагм на торцах

$$1) w^I(0) = 0;$$

$$2) M_0 = 0 \Rightarrow (a_7^I u^I{}_{,x} + a_3^I \psi^I{}_{,x} - a_4^I w^I{}_{,xx}) \Big|_{x=0} = 0;$$

$$3) u^I(0) = 0; \quad 4) \psi^I(0) = 0; \quad 5) w^III(l) = 0;$$

$$6) M_l = 0 \Rightarrow (a_7^III u^III{}_{,x} + a_3^III \psi^III{}_{,x} - a_4^III w^III{}_{,xx}) \Big|_{x=l} = 0;$$

$$7) N_l = 0 \Rightarrow (a_1^III u^III{}_{,x} + a_6^III \psi^III{}_{,x} - a_7^III w^III{}_{,xx}) \Big|_{x=l} = 0;$$

$$8) \psi^III(l) = 0. \quad (21)$$

Условия сопряжения на границах участков. На границах первого и второго ($x = x_1$) и второго и третьего ($x = x_2$) участков должны выполняться условия равенства перемещений и усилий с учетом приложенных сосредоточенных внешних сил и моментов.

Принимая во внимание выражения (10), (11), получим следующие условия сопряжения в перемещениях на границе участков I и II ($x = x_1$):

$$1) w^I(x_1) = w^II(x_1); \quad 2) u^I(x_1) = u^II(x_1);$$

$$3) \psi^I(x_1) = \psi^II(x_1); \quad 4) w^I{}_{,x}(x_1) = w^II{}_{,x}(x_1);$$

$$\begin{aligned}
5) & \left(a_1^I u^I{}_{,x} + a_6^I \psi^I{}_{,x} - a_7^I w^I{}_{,xx} - a_1^II u^{II}{}_{,x} - \right. \\
& \left. - a_6^II \psi^{II}{}_{,x} + a_7^II w^{II}{}_{,xx} \right) \Big|_{x=x_1} = N_1 / b_0; \\
6) & \left(a_7^I u^I{}_{,x} + a_3^I \psi^I{}_{,x} - a_4^I w^I{}_{,xx} - a_7^II u^{II}{}_{,x} - \right. \\
& \left. - a_3^II \psi^{II}{}_{,x} + a_4^II w^{II}{}_{,xx} \right) \Big|_{x=x_1} = M_1 / b_0; \\
7) & \left(a_7^I u^I{}_{,xx} + a_3^I \psi^I{}_{,xx} - a_4^I w^I{}_{,xxx} - a_7^II u^{II}{}_{,xx} - \right. \\
& \left. - a_3^II \psi^{II}{}_{,xx} + a_4^II w^{II}{}_{,xxx} \right) \Big|_{x=x_1} = Q_1 / b_0; \\
8) & \left(a_6^I u^I{}_{,x} + a_2^I \psi^I{}_{,x} - a_3^I w^I{}_{,xx} - a_6^II u^{II}{}_{,x} - \right. \\
& \left. - a_2^II \psi^{II}{}_{,x} + a_3^II w^{II}{}_{,xx} \right) \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

На границе участков *II* и *III* ($x = x_2$) следует использовать условия, аналогичные (22), заменив индекс *I* на *II*, *II* на *III*, а координату x_1 на x_2 .

Граничные условия на торцах и условия сопряжения на границах участков позволяют составить систему 24 линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Частные случаи нагружения. Были получены аналитические выражения для перемещений трехслойной балки при двух вариантах нагружения: 1) равномерно распределенная по всей длине нагрузка (рисунок 3, *a*); 2) локальная нагрузка по части пролета (рисунок 3, *б*).

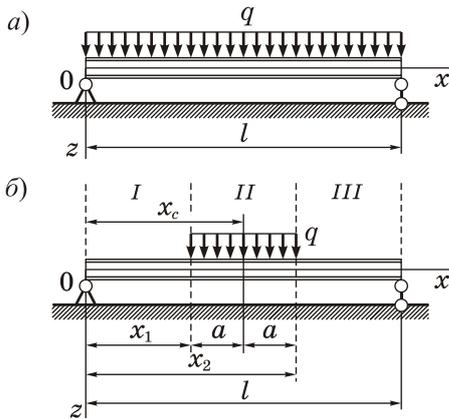


Рисунок 3 – Схемы нагружения балки

Определение прогибов трехслойной балки, свободно опертой на шарнирные опоры по методике В. Н. Кобелева [1]. Для балки, нагруженной равномерно распределенной по пролету нагрузкой q (рисунок 3, *a*), согласно [1], прогиб находится по формуле

$$w = \frac{qx}{2B_{\text{тр}}(h_2 - h_1)^2} \left[l \left(\frac{cB_{\text{тр}}}{G_{xz}^{(3)}} + \frac{l^2}{12} \right) - \frac{cB_{\text{тр}}}{G_{xz}^{(3)}} x - \frac{lx^2}{6} + \frac{x^3}{12} \right].$$

Наибольший прогиб возникает в сечении посередине балки ($x = l/2$):

$$w_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8B_{\text{тр}}(h_2 - h_1)^2} \left(\frac{cB_{\text{тр}}}{G_{xz}^{(3)}} + \frac{5l^2}{48} \right),$$

где

$$B_{\text{тр}} = \frac{B^{(1)}B^{(2)}}{B^{(1)} + B^{(2)}}; \quad B^{(k)} = E_x^{(k)} t_k; \quad \xi_k = \frac{c}{t_k}$$

$$h_1 = t_1(1 + \xi_1)/2; \quad h_2 = -t_2(1 + \xi_2)/2.$$

Здесь $k = 1, 2$ – номер слоя; t_1, t_2 – толщины несущих слоев; c – толщина заполнителя.

Для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q по части пролета (рисунок 3, *б*), согласно [1], прогиб определяется отдельно для каждого из трех участков по длине.

Для участка *I* ($0 \leq x \leq x_c - a$)

$$w_I = \frac{qax}{3B_{\text{тр}}(h_2 - h_1)^2} \left[\frac{x_c}{l} (2l^2 + x_c^2 + a^2) - 3x_c^2 - a^2 + \frac{l - x_c}{l} \left(\frac{2cB_{\text{тр}}}{G_{xz}^{(3)}} - x^2 \right) \right],$$

для участка *II* ($x_c - a \leq x \leq x_c + a$)

$$w_{II} = w_I + \frac{q}{2B_{\text{тр}}(h_2 - h_1)^2} [x - (x_c - a)]^2 \times \left\{ \frac{[x - (x_c - a)]^2}{12} - \frac{cB_{\text{тр}}}{G_{xz}^{(3)}} \right\},$$

для участка *III* ($x_c + a \leq x \leq a$)

$$w_{III} = w_I + \frac{qa(x - x_c)}{B_{\text{тр}}(h_2 - h_1)^2} \left[\frac{(x - x_c)^2 + a^2}{3} - \frac{2cB_{\text{тр}}}{G_{xz}^{(3)}} \right].$$

Описание эксперимента. Эксперимент был проведен в лаборатории при кафедре «Строительная механика» УО «БелГУТ». Испытывалась трехслойная балка прямоугольного поперечного сечения, несущие слои которой выполнены из семислойной березовой фанеры с модулями упругости $E_1 = 6000$ МПа, $G_1 = 750$ МПа, заполнитель – из пенополистирола, для которого $E_2 = 15$ МПа, $G_2 = 5,14$ МПа. Геометрические размеры балки следующие: длина (пролет) $l = 660$ мм, ширина $b_0 = 60$ мм, высота сечения $h = 66$ мм, толщины слоев $h_1 = h_2 = 8$ мм, $h_3 = 50$ мм.

Трехслойная балка устанавливалась на шарнирно-неподвижные опоры испытательной машины ИМЧ-30. Распределенная по всей длине нагрузка $q = 16$ кПа прикладывалась к балке с помощью 13 грузов по 5 кг (рисунок 4); локальная распределенная нагрузка $q = 4,3$ кПа на участке длиной $2a = 95$ мм – с помощью 5 грузов по 5 кг (рисунок 5).

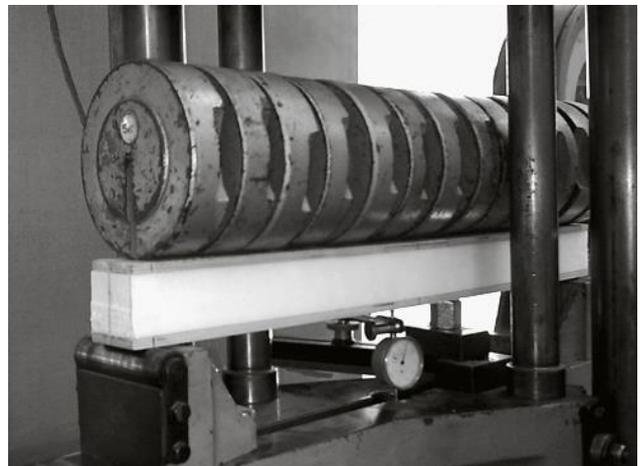


Рисунок 4 – Общий вид трехслойной балки под действием равномерно распределенной нагрузки по всей длине

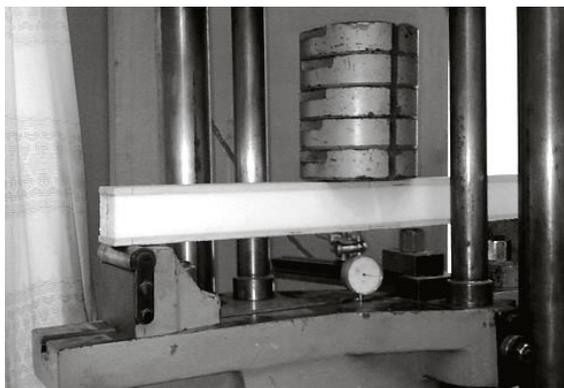


Рисунок 5 – Общий вид трехслойной балки под действием локальной равномерно распределенной нагрузки

Прогибы балки определялись при помощи индикаторов часового типа ИЧ-10.

Численные результаты, полученные теоретически по двум методикам и экспериментально. При численной реализации решений интенсивность распределенной нагрузки, модули упругости материалов и толщины слоев в трехслойном пакете фанера – пенополистирол – фанера принимались такими же, что и в проведенном эксперименте (см. выше).

На рисунках 6, 7 изображены прогибы трехслойной балки под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей длине и приложенной локально на участке длиной 95 мм.

Наибольший прогиб w_{\max} при нагрузке, равномерно распределенной по всей длине балки, составил: по первой методике (авторов статьи) – 2,4 мм, второй – 1,6 мм; по результатам эксперимента – 2,7 мм.

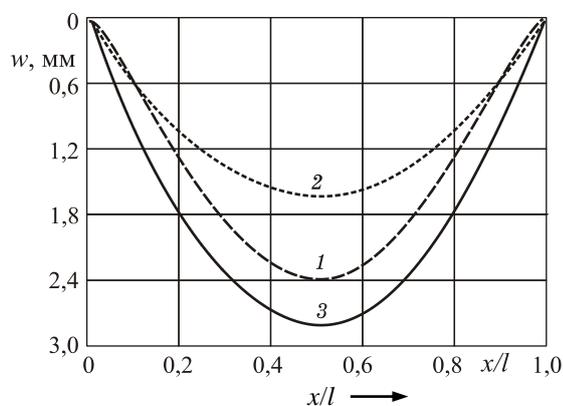


Рисунок 6 – Прогиб трехслойной балки при нагрузке, равномерно распределенной по всей длине: 1 – по первой методике (авторов статьи), 2 – по второй методике (В. Н. Кобелева с соавторами), 3 – по данным эксперимента

Получено 26.05.2012

A. V. Yarovaya, A. A. Poddubny. Theoretical and experimental study of deflections of the elastic hinged sandwich beams.

The bend of an elastic three-layer beam under the influence of the distributed and concentrated loadings is investigated. On length of a beam three sites are allocated, on each of which loadings can have the various size and the change law, and can be absent. Concentrated forces and the moments can act on borders of sites and at end faces. By means of the principle Lagrange is brought system of the differential equations of balance. Its common analytical decision in movements is received, boundary conditions in efforts and movements, interface conditions on borders of sites are written out. Numerical values of deflections theoretical and experimentally are received, comparison with results of other authors is carried out.

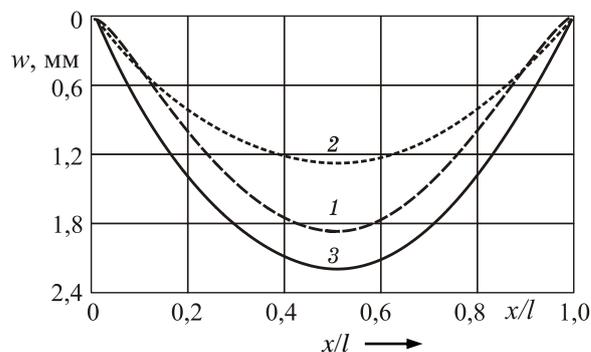


Рисунок 7 – Прогиб трехслойной балки при локальной распределенной нагрузке: 1 – по первой методике (авторов статьи), 2 – по второй методике (В. Н. Кобелева с соавторами), 3 – по данным эксперимента

Наибольший прогиб w_{\max} при нагрузке, приложенной локально, составил: по первой методике – 1,9 мм, второй – 1,3 мм, по результатам эксперимента – 2,2 мм.

Выводы. Числовые значения прогибов, полученных по методике авторов статьи, лучше согласуются с данными проведенного испытания балки, чем результаты, рассчитанные по методике [1]. Погрешность составляет не более 10 %. Также экспериментально установлено, что при разгрузке балки сохраняются остаточные прогибы, которые исчезают через некоторое время.

Однако расхождения результатов показывают на необходимость проведения дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, направленных на уточнение расчетных зависимостей для перемещений и напряжений в трехслойных конструкциях, которые являются во многих случаях элементами сложных и ответственных сооружений.

Список литературы

- 1 Кобелев, В. Н. Расчет трехслойных конструкций : справ. / В. Н. Кобелев, Л. М. Коварский, С. И. Тимофеев; под общ. ред. В. Н. Кобелева. – М. : Машиностроение, 1984. – 304 с.
- 2 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 3 Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. наука, 2004. – 386 с.
- 4 Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 2001. – 288 с.