УДК 631.173.4(07)

В. С. МИЛЕНЬКИЙ, кандидат технических наук, БелНИИТ «Транстехника»; П. Е. КРУГЛЫЙ, кандидат технических наук, С. П. КРУГЛЫЙ, инженер, Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК ГРУЗОВ АВТОМОБИЛЬНЫМ ТРАНСПОРТОМ

Наиболее эффективный вид транспортного средства или вид перевозки можно выбрать на основе сравнения нескольких вариантов машин или маршрутов. При этом в виде критерия эффективности могут быть приняты затраты на приобретение и эксплуатацию транспортных средств; оптимальным будет считаться вариант, при котором приведенные затраты на транспортирование единицы груза будут минимальными. Как правило, задачи по оптимизации комплекса переменных решают поэтапно. Сначала разрабатывают маршруты движения транспортных средств, затем выбирают вид транспортного средства и осуществляют оптимизацию методами линейного программирования.

Транспортная задача, как частный случай общей задачи линейного программирования, может быть решена по предложенной в статье методике.

Предположим, что имеется m грузообразующих пунктов, из которых отправляется груз, и n грузопоглощающих пунктов. Известен общий объем партии груза (a_i) и объем в разрезе каждого пункта разгрузки (b_i). Известна стоимость перевозки единицы груза (тонны) от каждого пункта отправления до определенного пункта назначения (c_{ij}). Для решения задачи по оптимизации партии перевозимого груза необходимо составить план перевозок, который может быть представлен в виде таблицы (матрицы), где строки соответствуют пунктам отправления, а столбцы пунктам назначения (таблица 1).

Таблица 1 – **Матрица плана перевозок**

Пункты отправления		Пункты назначения				
		1	…	j	…	n
		Спрос				
		b_1	…	b_j	…	b_n
		C_{11}		C_{1j}		C_{1n}
1	a_1		…		…	
		X_{11}		X_{1j}		X_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
		C_{i1}		C_{ij}		C_{in}
1	a_1		…		…	
		X_{i1}		X_{ij}		X_{in}
…	…	…	…	…	…	…
		C_{m1}		C_{mj}		C_{mn}
m	a_m		…		…	
		X_{m1}		X_{mj}		X_{mn}

В левом столбце таблицы проставляют номера пунктов, из которых доставляется груз, и их объемы. В остальных столбцах таблицы номера пунктов назначения и величина спроса на данный вид груза.

В верхнем левом углу каждой ячейки матрицы проставляется стоимость перевозки (C_i), а в правом нижнем – объемы перевозки (X_{ij}).

Затраты на одну тонну перевозки груза от пункта отправления (i) до пункта назначения (j) можно выразить произведением $C_{ij}X_{ij}$. Тогда общие затраты на все перевозки можно определить по формуле

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}. \qquad (1)$$

Объемы перевозки грузов (X_{ij}) этой линейной функции связаны между собой следующим образом. Сумма всех перевозок, расположенных в первой строке таблицы 1, равна объемам отправлений из пункта 1:

$$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1j} + \ldots + X_{1n} = a_1. \qquad (2)$$

Аналогичные равенства можно написать и для остальных строк. В результате получим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Сумма всех объемов перевозок, расположенных в первом столбце, равна потребности первого грузопоглощающего пункта:

$$X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{i1} + \ldots + X_{m1} = b_1. \qquad (4)$$

Для всех столбцов это система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Решение этой задачи имеет смысл только при положительных значениях величин

$$X_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6)$$

В общем виде транспортная задача линейного программирования сводится к получению минимума затрат на перевозку груза

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \to \min. \qquad (7)$$

При этом должны быть соблюдены следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m);\\ &\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n);\\ &X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Критерий минимума затрат на перевозку груза не всегда является основным при решении подобных задач. При перевозке ряда скоропортящихся грузов требуется минимизировать время на их перевозку. В этом случае можно использовать приведенную методику, только вместо показателя C_{ij} применяется параметр продолжительности перевозки груза из пункта i в пункт j – T_{ij}.

Транспортная задача может иметь две формы:

1) замкнутую модель, если общий объем отправляемого груза со всех грузообразующих пунктов равен объему, доставляемому на все грузопоглощающие пункты

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{9}$$

2) открытую модель, при которой общий объем отправляемого груза со всех грузообразующих пунктов не равен объему, доставляемому на все грузопоглощающие пункты:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{10}$$

Открытую модель всегда можно привести к «замкнутой», введя фиктивный пункт назначения.

Для решения транспортных задач разработано несколько методов (алгоритмов). В зависимости от размера матрицы (числа грузоотправителей и грузополучателей) применяют те или иные из них.

Решение транспортной задачи, как правило, состоит из двух этапов: построения исходного или начального плана с использованием определенных методов и примеров; опираясь на начальный план, последовательно однообразными математическими действиями (итерациями) переходят к другому, улучшенному плану, до тех пор, пока не достигнут оптимального решения.

Начальным может быть любой базисный план. Однако время решения задачи зависит от числа итераций, которые необходимо сделать, чтобы прийти к оптимальному плану. Чем лучше начальный план, тем меньше число итераций надо сделать и, следовательно, затратить меньше времени на решение задачи.

Рассмотрим решение транспортной задачи методом наименьшей стоимости.

Задан план перевозок в виде матрицы (таблица 2).

Таблица 2 – **Начальный план перевозок (стоимость перевозки тыс. руб./т)**

Пункты отправления		Пункты назначения, т				Остаток
		1	2	3	4	
		16	20	25	9	
1	15	4	11	2 II 15	17	К
2	25	12	1 I 20	22	8 III 5	5 К
3	30	21 V 16	19	15 IV 10	23 VI 4	20 4 К
Остаток	–	К	К	10 К	4 К	–

В пунктах отправления 1–3 находятся 15, 25 и 30 тонн груза соответственно. Грузополучатели 1–4 требуют соответственно 16, 20, 25 и 9 тонн груза. Стоимости перевозки 1 т груза в тысячах рублей из пунктов отправления в пункты потребления показаны в соответствующих клетках матрицы в левом верхнем углу.

При перевозке груза из пункта отправления 2 в пункт назначения 2 (ячейка 2.2) стоимость перевозки наименьшая из всех вариантов и составляет 1 тыс. руб. за 1 т груза, а перевозка из пункта отправления 3 в пункт назначения 4 является максимальной по стоимости и составляет 23 тыс. руб. за 1 т груза (ячейка 3.4). При составлении плана необходимо в ячейку 2.2 назначить максимально возможное количество перевозок, а в 3.4 – минимально возможные или даже совсем не включать перевозки.

При планировании перевозок грузов последовательно с ячеек, имеющих минимальную стоимость, к ячейкам с большей стоимостью распределяется объем перевозок и составляется план перевозок.

В элемент матрицы (см. таблицу 2) с минимальной стоимостью (ячейка 2.2) назначаем максимально возможную перевозку. Для этого сравниваем ресурсы второй строки (25 т) и спрос второго столбца (20 т). Меньшую цифру (20) помещаем в рассматриваемую ячейку (2.2) и вычитаем из сравниваемых величин. В остатке второго столбца останется ноль (ставим букву К), а в остатке второй строки – 5.

Второй столбец из дальнейшего рассмотрения исключаем, а в оставшихся ячейках матрицы ищем следующий элемент с минимальной стоимостью. Им будет ячейка 1.3.

Определяем величину перевозки, которую необходимо поместить в ячейку 1.3. Для этого сравниваем ресурсы первой строки (15 т) и спрос третьего столбца (25 т). Меньшую цифру (15) помещаем в ячейку 1.3 и разность 25 – 15 = 10 записываем в остаток третьего столбца. Первую строку из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как объем пункта 1 исчерпан. В остатке первой строки ставим букву К.

В оставшихся ячейках матрицы ищем следующий элемент с минимальной стоимостью. Им будет ячейка 2.4. Определяем величину перевозки, которую необходимо назначить в ячейку 2.4. Для этого сравниваем остаток ресурсов второй строки (5 т) и спрос четвертого столбца (9 т). Меньшую цифру (5) записываем в ячейку 2.4, разность 9 – 5 = 4 записываем в остаток четвертого столбца. Вторую строку из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как ресурсы второго пункта отправления 25 т полностью исчерпаны. В остатке второй строки проставляем букву К. Далее в оставшихся ячейках матрицы ищем следующий элемент с минимальной стоимостью перевозки. Это ячейка 3.3. Определяем объем перевозки, который необходимо поместить в ячейку 3.3. Сравниваем ресурсы третьей строки (30 т) и неудовлетворенный спрос третьего столбца (10 т). Меньшую цифру (10) записываем в ячейку 3.3, а разность 30 – 10 = 20 заносим в остаток третьей строки. Столбец 3 из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как спрос третьего грузопоглощающего пункта 25 т полностью удовлетворен. В остатке третьего столбца ставим букву К.

Следующим элементом матрицы с минимальной стоимостью перевозки будет ячейка 3.1. Определяем объем перевозки груза, который необходимо доставить в грузопоглощающий пункт, приведенный в ячейке 3.1. Сравниваем остаток ресурсов третьей строки (20 т) со спросом первого столбца (16 т). Меньшую цифру 16 заносим в ячейку 3.1, разность 20 – 16 = 4 записываем в остаток строки 3. Столбец 1 из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как спрос первого пункта назначения 16 т удовлетворен. В оставшуюся клетку 3.4 назначаем перевозку 4 т. В остатках третьей строки и четвертого столбца записываем букву К.

Таким образом, объем перевозок полностью распределен (римскими цифрами указана очередность назначения перевозок).

Теперь подсчитываем себестоимость перевозок по данному плану:

$$C = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 8 \cdot 5 + 15 \cdot 10 + 21 \cdot 16 + 23 \cdot 4 = 668 \text{ тыс. руб.}$$

Метод наименьшей стоимости довольно прост и удобен для решения задач при малых размерах матрицы. При больших ее размерах возникают трудности поиска клеток с минимальной стоимостью, что может привести к ошибке, а следовательно, и к увеличению числа итераций при построении оптимального плана перевозок. Поэтому при больших размерах матрицы решение необходимо выполнять с применением персонального компьютера.

Список литературы

1 **Матюшин, И. Е.** Применение математических методов на промышленном транспорте / И. Е. Матюшин, Ю. А. Катькало. – Мн. : Выш. шк., 1997. – 192 с.

2 Надежность и ремонт машин / под ред. В. В. Курчаткина. – М. : Колос, 2000. – 560 с.

Получено 29.11.2012

V. S. Milenky, P. E. Krugly, S. P. Krugly. Optimization of cargo transportation by road.

The most effective type of vehicle or ty pe of transportation can be selected on the basis of comparison of several variants of vehicles and routes. At the same time as the efficiency criterion the cost of vehicle purchasing and operating can be taken; the best variant is to minimize the cost of the unit load transporting. Generally, the task of optimizing the complex variables is solved be stages.

First, develop routes for vehicles, then choose the type of vehicle and perform optimization by linear programming. However, the transportation problem, as a special case of the general linear programming problem can be solved by the proposed method in the article.