

**НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ**

УДК 652.72

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, директор НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования, А. А. САВЧЕНКО, зав. лабораторией, Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

**ОСОБЕННОСТИ РЫЧАЖНОГО ГАСИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ НА ОБЪЕКТЕ В ВИДЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ ОПОРАМИ**

Рассматривается механическая система, имеющая объект защиты в виде твердого тела на двух упругих опорах. Объект защиты имеет массу и момент инерции и может совершать колебания вокруг центра тяжести. Динамический гаситель колебаний имеет рычажную конструкцию и точку опоры на объекте в виде вращательного шарнира. Перемещение шарнира или выбор места установки гасителя могут существенно изменять свойства системы в целом. Особенности использования гасителя заключаются в том, что проявление динамических свойств зависят от выбора системы обобщенных координат. Предлагается методика построения математических моделей и оценки динамических свойств. Приводятся результаты численного эксперимента.

**Введение.** При всей развитости представлений о свойствах ДГ, особенностях их расчета и выборе параметров для различных случаев нагружения, многие вопросы не получили еще в исследованиях должного внимания. К малоизученным вопросам можно отнести особенности динамических взаимодействий ДГ с твердым телом на упругих опорах, влияние места расположения гасителя в структуре колебательной системы, выбор настроечных параметров и др. [1–3].

**I Общие положения.** Рассматриваются особенности динамического состояния, привносимые динамическим Г-образным гасителем с учетом координат его закрепления на объекте защиты. Расчетная схема системы представляет собой (рисунок 1) объект в виде балки или твердого тела, установленного на упругих опорах  $k_1$  и  $k_2$ . На рисунке 1 принят ряд обозначений:  $z_1$  и  $z_2$  – колебания основания;  $M, I, m_1$  и  $m_2$  – массинерционные параметры;  $y_1, y_2, y_3, y_4, \varphi, \phi_1$  – обобщенные координаты системы;  $l_1 - l_7$  – расстояния между характерными точками; т. С – точка крепления гасителя (ДГ); т.  $B_1, B_2$  – места закрепления упругих элементов  $k_3, k_4$  динамического гасителя. Центр тяжести расположен в т. А.

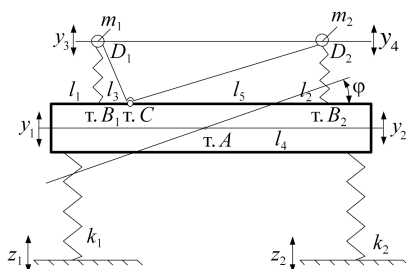


Рисунок 1 – Расчетная схема двумерного объекта с Г-образным динамическим гасителем

Для дальнейших расчетов запишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_4^2. \quad (1)$$

Введем ряд соотношений, отражающих связи между обобщенными координатами:

$$y = ay_1 + by_2, \quad \varphi = c(y_2 - y_1), \quad y_3 = y + a_1\varphi, \quad (2)$$

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad c = \frac{1}{l_1 + l_2}.$$

Элементы динамического гасителя  $m_1$  и  $m_2$  участвуют в двух движениях: поступательном со скоростью точки С  $V_C$  и вращательном – вокруг точки С с угловой скоростью  $\dot{\phi}_1$ . В этом случае, скорости  $m_1$  и  $m_2$  должны определяться векторными суммами:

$$\vec{y}_3 = \vec{V}_C + l_6 \vec{\phi}_1, \quad \vec{y}_4 = \vec{V}_C + l_7 \vec{\phi}_1, \quad (3)$$

где  $l_6$  и  $l_7$  зависят от геометрических особенностей Г-образного элемента; при этом выполняется соотношение

$$y_C = y - l_3\varphi, \quad (4)$$

а  $l_3 = AC$  определяется расстоянием между центром тяжести балки и точкой присоединения гасителя,  $\phi_1 = \phi_{10} + \Delta\phi_1$ . В рассмотрение также необходимо ввести и угол  $\phi_{20}$ , который определяет наклон рычага длиной  $l_7$ . Кинематическая схема для определения параметров движения элементов  $m_1$  и  $m_2$  представлена на рисунке 2.

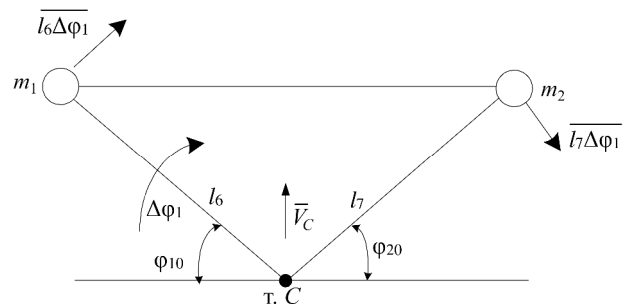


Рисунок 2 – Кинематическая схема для учета геометрических параметров Г-образного гасителя при сложном движении: поступательное ( $V_C$ ) и вращательное ( $\Delta\phi_1$ )

Значения абсолютных скоростей  $m_1$  и  $m_2, \dot{y}_3$  и  $\dot{y}_4$  могут быть получены из выражений (3). Для упрощения выкладок можно принять, что  $\phi_{10} = 0, \phi_{20} = 0$ , тогда значения скоростей могут быть найдены:

$$\dot{y}_3 = V_C + l_6 \Delta\dot{\phi}_1, \quad \dot{y}_4 = V_C + l_7 \Delta\dot{\phi}_1. \quad (5)$$

С учетом упрощений выражение для кинетической энергии можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_1(V_C + l_6\Delta\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(V_C - l_7\Delta\dot{\phi}_1)^2 \quad (6)$$

или

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_1(y - l_3\phi + l_6\dot{\phi}_1) + \frac{1}{2}m_2(y - l_3\phi - l_7\dot{\phi}_1), \quad (7)$$

где  $\Delta\dot{\phi}_1$  заменено для удобства на  $\dot{\phi}_1$ .

Предлагаемая схема кинематических соотношений отражает малые перемещения системы и, по существу, только вертикальные составляющие параметров движения, что упрощает рассмотрение процессов движения, но формирует лишь предварительный этап исследования и необходимость последующих уточнений. Выражение для потенциальной энергии системы может быть записано в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(y_3 - y_{B_1})^2 + \frac{1}{2}k_4(y_4 - y_{B_2})^2. \quad (8)$$

В выражении (8) принят ряд соотношений

$$y_{B_1} = y - l_4\phi, \quad y_{B_2} = y + l_5\phi, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} y_3 - y_{B_1} &= y_C + l_6\phi_1 - y + l_4\phi; \\ y_4 - y_{B_2} &= y_C - l_7\phi_1 - y + l_5\phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как  $y_C$  определяется выражением (4), то

$$y_3 - y_{B_1} = -l_3\phi + l_6\phi_1 + l_4\phi = \phi(l_4 - l_3) + l_6\phi_1; \quad (11)$$

$$y_4 - y_{B_2} = -l_3\phi - l_7\phi_1 - l_5\phi = -\phi(l_3 + l_5) - l_7\phi_1. \quad (12)$$

В окончательном виде выражение (8) можно записать:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_3[\phi(l_4 - l_3) + l_6\phi_1]^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_4[-\phi(l_3 + l_5) - l_7\phi_1]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

или, принимая  $a_1 = l_4 - l_3$ ,  $b_1 = l_3 + l_5$ , получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + k_2(y_2 - z_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_3(a_1\phi + l_6\phi_1)^2 + \frac{1}{2}k_4(\phi b_1 + l_7\phi_1)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (8) можно преобразовать, используя свертку

$$\begin{aligned} k_3a_1^2\phi^2 + 2k_3a_1\phi l_6\phi_1 + k_3l_6^2\phi_1^2 + k_4\phi^2b_1^2 + \\ + 2k_4\phi b_1l_7\phi_1 + k_4l_7^2\phi_1^2 = \phi^2(k_3a_1^2 + k_4b_1^2) + \\ + \phi\phi_1 2(k_3a_1l_6 + k_4b_1l_7) + \phi_1^2(k_3l_6^2 + k_4l_7^2), \end{aligned} \quad (15)$$

откуда

$$\begin{aligned} a_2 = k_3a_1^2 + k_4b_1^2, \quad b_2 = 2(k_3a_1l_6 + k_4b_1l_7); \\ a_3 = k_3l_6^2 + k_4l_7^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда выражение (14) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}[a_2\phi^2 + \phi\phi_1b_2 + \phi_1^2a_3]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Учтем, что  $\phi = c(y_2 - y_1)$ , поэтому составляющие уравнения (17) примут вид

$$\phi^2 = c^2a_2(y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2); \quad \phi\phi_1 = \phi_1c(y_2 - y_1).$$

Окончательно выражение для потенциальной энергии запишется:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}[a_2c^2(y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2) + b_2\phi_1c(y_2 - y_1)] + \phi_1^2a_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражение для кинетической энергии, в свою очередь, примет вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(\dot{y}_1a + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}Ic^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m_1(\dot{y} - l_3\dot{\phi} + l_6\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - l_3\dot{\phi} - l_7\dot{\phi}_1)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

После преобразований:

$$\dot{y} - l_3\dot{\phi} + l_6\dot{\phi}_1 = y_1(a + l_3c) + y_2(b - l_3c) + l_6\dot{\phi}_1,$$

$$\begin{aligned} \dot{y} - l_3\dot{\phi} - l_7\dot{\phi}_1 &= ay_1 + by_2 - l_3cy_2 + l_3cy_1 - l_7\dot{\phi}_1 = \\ &= y_1(a + l_3c) + y_2(b - l_3c) - l_7\dot{\phi}_1 \end{aligned}$$

и введения вспомогательных обозначений:

$$a + l_3c = a_4, \quad b - l_3c = a_5, \quad (20)$$

выражение (19) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}Ic^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m_1[y_1a_4 + y_2a_5 + l_6\dot{\phi}_1]^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m_2[y_1a_4 + y_2a_5 - l_7\dot{\phi}_1]^2. \end{aligned} \quad (21)$$

**II Построение математических моделей.** Используя формализм Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 [Ma^2 + Ic^2] + m_1a_4^2 + m_2a_4^2 + \\ + \ddot{y}_2 [Mab - Ic^2] + m_1a_4a_5 + m_2a_4a_5 + \\ + \dot{\phi}_1(m_1l_6a_4 - m_2l_7a_4) + k_1y_1 + y_1a_2c^2 - \\ - a_2c^2y_2 - b_2c\phi_1 = k_1z_1; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 [Mab - Ic^2] + m_1a_4a_5 + m_2a_4a_5 + \\ + \ddot{y}_2 [Mb^2 + Ic^2] + m_2a_5^2 + m_1a_5^2 + \\ + \dot{\phi}_1[m_1l_6a_5 - m_2l_7a_5] + k_2y_2 + a_2c^2y_2 - \\ - a_2c^2y_1 + b_2c\phi_1 = k_2z_2; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\ddot{y}_1(m_1l_6a_4 - m_2l_7a_4) + \ddot{y}_2(m_1l_6a_5 - m_2l_7a_5) + \ddot{\phi}_1(m_1l_6^2 + m_2l_7^2) + b_2cy_2 - b_2cy_1 + a_3\phi_1 = 0. \quad (24)$$

В таблице 1 представлены коэффициенты уравнений (22–24), приведенных к унифицированному виду в соответствии с работой [4].

В системе координат  $y_1$ ,  $y_2$  и  $\phi_1$  структура системы обеспечивает возможности «зануления» инерционно-упругих связей между координатами  $y_1$  и  $y_2$ , а также  $y_2$  и  $\phi_1$  (таблица 1). При условиях одновременного «зануления» обеих связей на одной и той же частоте, возможно такое состояние системы, при котором каждая из парциальных систем будет двигаться самостоятельно. При этом предполагается, что силы трения будут исчезающе малыми. На основе предварительного анализа полученных выражений можно сделать некоторые выводы.

1 Если  $a_1 = 0$ , то центр тяжести совпадает с центром вращения для динамического гашения колебаний.

2 Введение ДГ может рассматриваться как введение дополнительной обратной связи, влияющей через перекрестные взаимодействия на движение по координатам  $y_1$  и  $y_2$ . При этом изменяются параметры парциальных систем; что касается характера перекрестных связей, то они носят инерционно-упругий характер.

3 При выполнении условий симметрии характер связей меняется: из инерционно-упругих они превращаются в упругие связи

$$a_4m_1l_6 - m_2l_7a_5 = 0. \quad (25)$$

4 На определенных частотах Г-образный гаситель может обеспечить режим «зануления», то есть прекратить динамическое влияние по схеме «ДГ – координата  $y_2$ ». В частности, такая частота определяется так:

$$\omega^2 = \frac{b_2c}{m_1l_6a_4 - m_2l_7a_5}. \quad (26)$$

Однако реализация такого же режима по координате  $y_1$  через «зануление» возможна только при условии

$$\omega^2 = \frac{b_2c}{m_2l_7a_5 - m_1l_6a_4}. \quad (27)$$

### III Свойства систем. Выбор координат движения.

Как развитие исследования по детализации представлений о динамических свойствах, рассмотрим движение в системе координат  $y$ ,  $\phi$  и  $\phi_1$ . Выражение для кинетической энергии в этом случае имеет вид, определяемый (6); при введении соотношения (5) получим

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{y} - l_3\dot{\phi} + l_6\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - l_3\dot{\phi} - l_7\dot{\phi}_1)^2. \quad (28)$$

Потенциальная энергия системы определяется по уравнению (8). Тогда при соотношениях  $y_1 = y - l_1\phi$ ,  $y_2 = y + l_2\phi$  найдем, что

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y - l_1\phi - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y + l_2\phi - z_2)^2 + \frac{1}{2}(a_2\phi^2 + \phi\phi_1b_2 + \phi_1^2a_3). \quad (29)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения в координатах  $y$ ,  $\phi$ ,  $\phi_1$ , используя приемы, приведенные выше:

$$\ddot{y}(M + m_1 + m_2) + \ddot{\phi}(-m_1l_3 - m_2l_3) + \ddot{\phi}_1(m_1l_6 - m_2l_7) + k_1y + k_2y + \phi(k_2l_2 - k_1l_1) = k_1z_1 + k_2z_2; \quad (30)$$

$$\ddot{y}(-m_1l_3 - m_2l_3) + \ddot{\phi}(I + m_1l_3^2 + m_2l_3^2) + \ddot{\phi}_1(-m_1l_6l_3 + m_2l_7l_3) + y(k_2l_2 - k_1l_1) + \phi(k_1l_1^2 + k_2l_2^2) + \phi_1(b_2\phi_1 - k_2l_2 - k_1l_1); \quad (31)$$

$$\ddot{y}(m_1l_6 - m_2l_7) + \ddot{\phi}(m_2l_7l_3 - m_1l_6l_3) + \ddot{\phi}_1(m_1l_6^2 + m_2l_7^2) + \phi b_2 + a_3\phi_1 = 0. \quad (32)$$

Таблица 1 – Коэффициенты системы дифференциальных уравнений в координатах  $y_1$ ,  $y_2$  и  $\phi_1$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$[Ma^2 + Ic^2 + a_4^2(m_1 + m_2)]p^2 + (k_1 + a_2c^2)$	$[(Mab - Ic^2) + a_4a_5(m_1 + m_2)]p^2 - a_2c^2$	$(m_1l_6a_4 - m_2l_7a_4)p^2 - b_2c$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$[(Mab - Ic^2) + a_4a_5(m_1 + m_2)]p^2 - a_2c^2$	$[Mb^2 + Ic^2] + a_5^2(m_1 + m_2)]p^2 + k_2 + a_2c^2$	$(m_1l_6a_5 - m_2l_7a_5)p^2 + b_2c$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$(m_1l_6a_4 - m_2l_7a_4)p^2 - b_2c$	$(m_1l_6a_5 - m_2l_7a_5)p^2 + b_2c$	$(m_1l_6^2 - m_2l_7^2)p^2 + a_3$

Примечание –  $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$ ,  $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$ ,  $c = \frac{1}{l_1 + l_2}$ ,  $a_1 = l_4 - l_3$ ,  $b_1 = l_3 + l_5$ ,  $a_2 = k_3a_1^2 + k_4b_1^2$ ,  $b_2 = 2(k_3a_1l_6 + k_4b_1l_7)$ ,

$a_3 = k_3l_6^2 + k_4l_7^2$ ,  $a_4 = a + l_3c$ ,  $a_5 = b - l_3c$ ; при этом  $l_4 = l_6$ ,  $l_5 = l_7$  с учетом выбора конфигурации рычага: для координаты  $y_1 - b_1 = k_1z_1$ ; для координаты  $y_2 - b_2 = k_2z_2$ ; для координаты  $\phi_1 - b_3 = 0$ .

В таблице 2 представлены коэффициенты унифицированной системы уравнений (30–32).

В обобщенных координатах  $y$ ,  $\phi$  и  $\phi_1$  система перекрестных связей носит различный характер. Между

координатами  $y$  и  $\varphi$  имеется инерционно-упругая связь, которая на определенной частоте может «обнуляться» и обеспечивать независимое движение  $y$  по отношению к координате  $\varphi$ . В свою очередь, инерционно-упругая связь между  $\varphi$  и  $\varphi_1$  также обеспечивает возможность на определенной частоте сделать движения между  $\varphi$  и  $\varphi_1$  независимыми. Однако между  $y$  и  $\varphi_1$  существует инерционная связь, которая на всех частотах будет проявлять свое действие. Возможность совместных эффектов в связках координат  $y - \varphi$  и  $\varphi - \varphi_1$  зависит от параметров системы. В целом, при определенных условиях  $k_2 l_2 - k_1 l_1$  внешние воздействия при  $z_1 = z_2$  могут быть также уравновешены.

Таким образом, в системе координат  $y, \varphi$  и  $\varphi_1$  система обладает особенностями в спектре динамических свойств. В частности, перекрестная связь ( $a_{13}$ ) носит инерционный характер, а связь ( $a_{21}$ ) – инерционно-

упругий. Режимы развязки колебаний также изменяются; в данном случае «зануление» связи происходит при передаче движения между парциальными системами  $y$  и  $\varphi$  на частоте

$$\omega^2 = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{l_3 (m_1 + m_2)}. \quad (33)$$

**IV Передаточные функции систем. Динамические свойства.** Для получения передаточных функций в системе координат  $y, y_2, \varphi$  воспользуемся таблицей 1, полагая, что  $z_1 = z_2 = z$ , тогда

$$W_1 = \frac{\bar{y}_1}{z} = \frac{k_1 (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + k_2 (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33})}{A}, \quad (34)$$

$$W_2 = \frac{\bar{y}_2}{z} = \frac{k_1 (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{23}) + k_2 (a_{11} a_{33} - a_{13}^2)}{A}, \quad (35)$$

Таблица 2 – Коэффициенты системы дифференциальных уравнений в координатах  $y_1, \varphi$  и  $\varphi_1$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(M + m_1 + m_2)p^2 + k_1 + k_2$	$(-m_1 l_3 - m_2 l_3)p^2 + k_2 l_2 - k_1 l_1$	$(m_1 l_6 - m_2 l_7)p^2$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$(-m_1 l_3 - m_2 l_3)p^2 + k_2 l_2 - k_1 l_1$	$(I + m_1 l_3^2 + m_2 l_3^2)p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$	$(-m_1 l_3 l_6 + m_2 l_3 l_7)p^2 + b_2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$(m_1 l_6 - m_2 l_7)p^2$	$(m_2 l_3 l_7 - m_1 l_6 l_3)p^2 + b_2$	$(m_1 l_6^2 + m_2 l_7^2) + a_3$
Примечание – 1) Возмущение по координате $y \rightarrow (k_1 + k_2), z_1 = b_1$ ; 2) по координате $\varphi \rightarrow k_2 l_2 z_2 - k_1 l_1 z_1 = b_2$ ; 3) по координате $\varphi_1 \rightarrow 0 = b_3$ .		

$$W_3 = \frac{\bar{\varphi}}{z} = \frac{k_1 (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) + k_2 (a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32})}{A}, \quad (36)$$

где

$$A = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23}^2 + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{33} a_{12}^2 + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}^2, \quad (37)$$

при этом  $a_{i,j} (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3})$  берутся из таблицы 3.

В свою очередь, в системе обобщенных координат  $y, \varphi, \varphi_1$  также могут быть получены соответствующие передаточные функции при  $z_1 = z_2 = z$ . Тогда

$$W_1 = \frac{\bar{y}}{z} = \frac{(k_1 + k_2)(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + \dots}{A} \dots \frac{+(k_2 l_2 - k_1 l_1)(a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33})}{A}, \quad (38)$$

$$W_2 = \frac{\bar{\varphi}}{z} = \frac{(k_1 + k_2)(a_{22} a_{31} - a_{21} a_{23}) + \dots}{A} \dots \frac{+(k_2 l_2 - k_1 l_1)(a_{11} a_{33} - a_{13}^2)}{A}, \quad (39)$$

$$W_3 = \frac{\bar{\varphi}_1}{z} = \frac{(k_1 + k_2)(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) + \dots}{A} \dots \frac{+(k_2 l_2 - k_1 l_1)(a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32})}{A}. \quad (40)$$

Применение передаточных функций позволяет оценить динамические свойства системы, используя характеристическое частотное уравнение (37), а также частотные уравнения числителей выражений (34)–(36) и (38)–(40), для получения представлений о возможных режимах динамического гашения или других форм самоорганизации движения.

**V Оценка динамических свойств.** Оценка изменения положения  $l_3$  связана с соответствующими изменениями координат крепления пружин  $k_3$  и  $k_4$  ( $y_{B_1}$  и  $y_{B_2}$ ); при этом происходит смещение центра тяжести системы. Предварительная оценка изменения  $l_3$  может быть произведена с учетом того, что центр масс системы может быть определен по формуле (точка отсчета – левый конец балки, рисунок 1).

$$x = \frac{l_1 M + m_1 [l_1 - (l_3 + l_6)] + m_2 (l_1 - l_3 + l_7)}{m_1 + m_2 + M}. \quad (41)$$

Можно показать, что при  $m_1 = m_2, l_6 = l_7$  и  $b_3 = 0$  положение центра масс будет совпадать с положением точки  $A$  на рисунке 1. Если  $l_3 \neq 0$ , то при равных  $l_6$  и  $l_7, m_1$  и  $m_2$

$$x = l - \frac{2m_1 l_3}{M + 2m_1}, \quad (42)$$

т. е. при увеличении  $l_3$  – центр масс будет смещаться влево. Такая поправка может быть учтена при детализированных расчетах.

Примем для проведения расчетов ряд значений параметров. Пусть  $M = 10$  кг,  $k_1 = 10000$  Н/м,  $k_2 = 15000$  Н/м,  $l_1 = 0,5$  м,  $l_2 = 0,7$  м,  $I = 6,25$ ;  $l_3 = 1,1$  м,  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 7$  кг,  $l_6 = 0,3$  м,  $l_7 = 0,4$  м,  $k_3 = 10000$  Н/м,  $k_4 = 1200$  Н/м,  $l_4 = l_6$ ,  $l_5 = l_7$  (с учетом выбора  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ ). Тогда

$$\left. \begin{aligned} l_4 = l_6 = 1,1; 1,3; 1,5, \\ l_5 = l_7 = 0,1; 0,3; 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Для расчетов используется выражение (34). В таблице 3 представлены значения частот собственных колебаний и динамического гашения.

Таблица 3 – Частоты собственных колебаний динамического гашения при различных значениях  $l_4 = l_6$ ,  $l_5 = l_7$

Значения $l_4 = l_6$ , $l_5 = l_7$	$\omega_{\text{соб}}$	$\omega_{\text{дин}}$
$l_4 = l_6 = 1,1$ , $l_5 = l_7 = 0,1$	46,73 12,79 26,35	13,51 31,46
$l_4 = l_6 = 1,3$ , $l_5 = l_7 = 0,3$	46,73 12,79 26,35	33,05 12,79
$l_4 = l_6 = 1,5$ , $l_5 = l_7 = 0,5$	10,84 47,59 28,41	35,17 11,58

На рисунке 3 представлено семейство амплитудно-частотных характеристик, в которых изменяемым параметром выступает расстояние между центром тяжести объекта защиты и точкой крепления динамического гасителя колебаний к объекту защиты. Увеличение расстояния изменяет форму частотных характеристик (они сдвигаются в сторону уменьшения частот собственных колебаний).

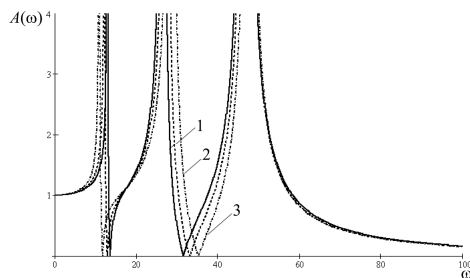


Рисунок 3 – Семейство АЧХ по координате  $y_1$  при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,1$ ;  $l_5 = l_7 = 0,1$ ; кривая 2 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,3$ ;  $l_5 = l_7 = 0,3$ ; кривая 3 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,5$ ;  $l_5 = l_7 = 0,5$

На рисунке 4 показано семейство АЧХ по второй координате объекта защиты. В таблице 4 приведены значения соответствующих частот собственных колебаний и динамического гашения, при этом видно, что частоты собственных колебаний совпадают. Частоты динамического гашения отличаются друг от друга.

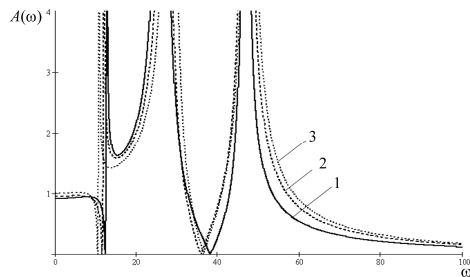


Рисунок 4 – Семейство АЧХ по координате  $y_2$  при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,1$ ;  $l_5 = l_7 = 0,1$ ; кривая 2 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,3$ ;  $l_5 = l_7 = 0,3$ ; кривая 3 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,5$ ;  $l_5 = l_7 = 0,5$

Таблица 4 – Частоты собственных колебаний динамического гашения при различных значениях  $l_4 = l_6$ ,  $l_5 = l_7$

Значения $l_4 = l_6$ , $l_5 = l_7$	$\omega_{\text{соб}}$	$\omega_{\text{дин}}$
$l_4 = l_6 = 1,1$ , $l_5 = l_7 = 0,1$	46,73 12,79 26,35	38,15 12,33
$l_4 = l_6 = 1,3$ , $l_5 = l_7 = 0,3$	46,73 12,79 26,35	35,87 11,52
$l_4 = l_6 = 1,5$ , $l_5 = l_7 = 0,5$	10,84 47,59 28,41	36,47 10,52

На рисунке 5 представлены АЧХ по координате  $\varphi$ . Отметим ряд характерных особенностей системы, для которой значение частот собственных колебаний и динамического гашения приведены в таблице 5. Обнаружено, что при равенстве нулю свободного члена частотного уравнения числителя передаточной функции (36) АЧХ имеет один режим динамического гашения: при этом в области низких частот АЧХ начинается с нулевого значения.

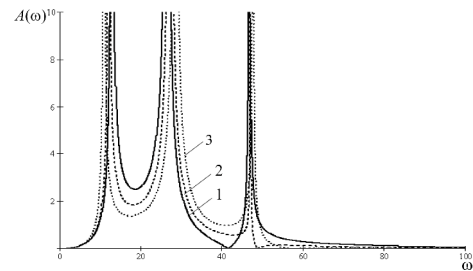


Рисунок 5 – Семейство АЧХ по координате  $\varphi$  при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,1$ ;  $l_5 = l_7 = 0,1$ ; кривая 2 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,3$ ;  $l_5 = l_7 = 0,3$ ; кривая 3 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,5$ ;  $l_5 = l_7 = 0,5$

Таблица 5 – Частоты собственных колебаний динамического гашения при различных значениях  $l_4 = l_6$ ,  $l_5 = l_7$

Значения $l_4 = l_6$ , $l_5 = l_7$	$\omega_{\text{соб}}$	$\omega_{\text{дин}}$
$l_4 = l_6 = 1,1$ , $l_5 = l_7 = 0,1$	46,73 12,79 26,35	41,48 0
$l_4 = l_6 = 1,3$ , $l_5 = l_7 = 0,3$	46,73 12,79 26,35	0 48,89
$l_4 = l_6 = 1,5$ , $l_5 = l_7 = 0,5$	10,84 47,59 28,41	0 58,08

В общем случае АЧХ виброзащитной системы с Г-образным динамическим гасителем колебаний представляет собой систему с тремя степенями свободы; ее АЧХ зависят по форме и наличию определяющих режимов от параметров, характеризующих условия закрепления ДГ на объекте.

Другими словами, динамический гаситель колебаний с сочленением в системе балочного типа может создать один или два режима динамического гашения, которые могут быть отнесены к различным точкам объекта защиты.

В этом плане особый интерес представляет ситуация, в которой в зависимости от выбора параметров настройки режимы динамического гашения могут размещаться различным образом.

На рисунке 6, а показана АЧХ, в которой можно отметить режим динамического гашения в диапазоне частот от 0 до частоты первого резонанса. Более подробно этот участок АЧХ показан на рисунке 6, б.

Отметим также, что режим первого динамического гашения может перейти в частотный диапазон  $\omega_{1\text{соб}} - \omega_{1\text{соб}}$ .

На рисунке 6, а этот режим показан точечной линией. Учитывая развитый характер связей, проявляющихся в значениях коэффициентов частотного уравнения числителя передаточной функции (34), можно предположить, что в системе существует возможность получения двух равных частот динамического гашения. Кроме того, становится возможным расширение понятия динамического гашения по разности координат  $y_2 - y_1$ . Исследование такого режима может быть проведено с использованием передаточной функции  $W(p) = (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) / \bar{z}$ .

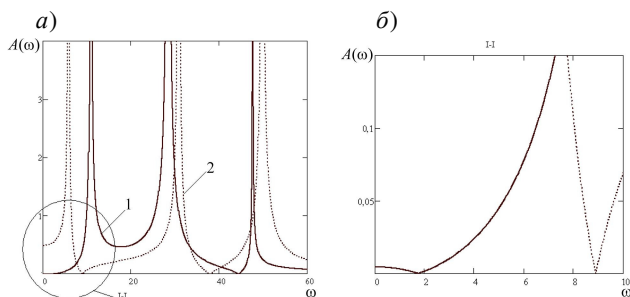


Рисунок 6 – Семейство АЧХ по разности координат  $y_2 - y_1$  при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний:

а – кривая 1 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,5; l_5 = l_7 = 0,5$ ; кривая 2 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,9; l_5 = l_7 = 0,9$ ; б – режим динамического гашения в диапазоне от 0 до частоты первого резонанса

Одновременно угол поворота объекта защиты будет равен нулю, то есть предлагаемый режим динамического гашения колебаний предопределяет возвратно-поступательное движение объекта защиты при вибрации основания. Такой эффект обеспечивается динамическим гасителем с сочленением (Г-образный ДГ) при соответствующем выборе параметров.

Отметим, что выбор координат расширяет представления о возможных формах режимов динамического гашения колебаний, к примеру, при выборе системы координат в виде  $y -$  координата центра масс и  $\varphi -$  угол поворота объекта защиты относительно центра масс можно предположить возможность стабилизации объекта защиты по  $y$  и  $\varphi$  одновременно.

Введение ДГ может существенным образом изменить и амплитудно-частотные характеристики системы, приведенной на рисунке 7, где показано семейство АЧХ системы при координатах  $y, \varphi, \varphi_1$ . При упомянутых условиях из рисунка 7 видно, как изменяется АЧХ по координате  $y$  в зависимости от частоты  $\omega$ .

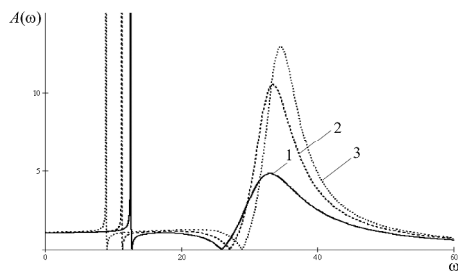


Рисунок 7 – Семейство АЧХ по координате  $y$  при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,1; l_5 = l_7 = 0,1$ ; кривая 2 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,3; l_5 = l_7 = 0,3$ ; кривая 3 соответствует  $l_4 = l_6 = 1,5; l_5 = l_7 = 0,5$

Получено 04.06.2012

**S. V. Eliseev, A. A. Savchenko.** Lever absorber of oscillations in mechanical system with object for vibroprotection as rigid body with elastic supports.

Mechanical system with object of vibroprotection from vibration as rigid body with elastic supports are considered. Object of vibroprotection has mass-international properties and can move around center of gravity. Dynamical absorber has lever construction and contact point for cylindrical pair. Change of location of cylindrical pair on object and selection of systems of coordinates can very change dynamical properties of systems. Methodics of creature of mathematical models and method for estimation dynamical properties are offered. Results of digital modeling are shown.

Отметим, что АЧХ имеет специфичный вид, определяющий значения коэффициентов передачи амплитуды колебаний от основания к объекту. Характерными являются зоны между  $\omega_{2\text{соб}}$  и  $\omega_{3\text{соб}}$ . Отсутствие резонансных пиков, которых можно было бы ожидать при отсутствии сил трения (как это полагалось изначально), позволяет предполагать появление в системе определенных динамических взаимодействий, в которых реализуются эффекты, внешне эквивалентные действию диссипативных сил. Построение виброзащитных систем, обладающих свойствами, как показано на рисунке 7, могло бы создать условия для построения виброзащитных систем, эффективных в достаточно широких частотных диапазонах внешних возмущений.

**Заключение.** Авторами предлагаются математические модели для динамических гасителей, у которых основным узлом является сочленение в виде кинематической пары V класса с объектом защиты. Показано, что в системах с большим числом степеней свободы Г-образные гасители, в силу эффектов сочленения, обладают динамическими особенностями, делающими их перспективными в плане выбора возможных путей настройки, поднастройки и управляемости во время работы.

Развитие теоретических основ построения сочленений позволяет вводить и контролировать динамические свойства виброзащитных систем, включающих в свой состав механизмы для преобразования движения. Исследования показывают, что введение сочленений на основе предлагаемого метода, точнее формирование математических моделей сочленений, в большей степени проявляется в системах комбинированного типа, в которых возвратно-поступательные движения взаимодействуют с возвратно-вращательными. Последнее особенно интересно тем, что при вращательной паре на вибрирующем основании появляется возможность использовать для уменьшения колебаний объекта переносные силы инерции. Такой подход в теории и практике решения задач защиты машин и оборудования от вибраций и ударов четко не обозначался и это может стать актуальным для поиска и разработки активных средств вибрационной защиты.

#### Список литературы

- 1 **Елисеев, С. В.** Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С. В. Елисеев. [и др.]. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2008. – 523 с.
- 2 **Артюнин, А. И.** Динамическое гашение в виброзащитных системах с сочленениями // А. И. Артюнин, С. В. Елисеев, А. П. Хоменко // Вестник Белорусского государственного университета транспорта : Наука и транспорт. Вып. 1 (22). – Гомель : БелГУТ, 2011. – С. 83–89.
- 3 **Елисеев, С. В.** Рычажные связи в задачах динамики транспортных подвесок / С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко, В. Б. Кашуба // Системы. Методы. Технологии. Вып. 1 (19). – Братск : БрГУ, 2011. – С. 24–31.
- 4 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в задачах динамики механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. П. Резник. – Новосибирск, 2011. – 394 с.