

УДК 625.1.001

Г. В. АХРАМЕНКО, кандидат технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ НА ЛОКАЛЬНЫХ УЧАСТКАХ

Исследуется проблема принятия решений в задачах оптимизации проектирования железных дорог. Рассматривается возможность применения методов оптимизации на основе чисел Фибоначчи и множества Парето. Приводятся конкретные примеры использования чисел Фибоначчи для сокращения числа вариантов принятия решений и множества Парето для выбора величины руководящего уклона при трассировании железных дорог в сильнопересеченной местности с наличием водоразделов.

Принятие оптимальных проектных решений в строительстве является одним из наиболее действенных средств улучшения качества проектирования и повышения эффективности инвестиций. Оптимизация отличается от выбора вариантов тем, что предполагает рассмотрение всех допустимых решений, тогда как при выборе вариантов рассматривается лишь несколько из них, которые назначаются проектировщиком.

Как правило, оптимизационный процесс включает в себя формулировку задачи, выбор оптимизируемых параметров, установление ограничений, выбор и оценку влияния внешних факторов, выбор критериев оптимальности, определение целевой функции по каждому критерию, поиск и принятие решения с учетом неопределенности и риска.

При проектировании железных дорог задачи с выявлением оптимального решения в функции одной управляемой переменной имеют наибольшее распространение. Такие задачи могут включать:

- нахождение отдельных параметров проектирования трассы железной дороги (величины руководящего уклона, полезной длины приемо-отправочных путей, норм размещения отдельных пунктов и т. д.);
- определение оптимальной длины тоннеля, глубины перевальной выемки, высоты насыпи при пересечении крупных рек;
- выбор положения трассы на отдельных участках;
- определение величины радиуса кривой в плане и т. п.

При проектировании конкретных железнодорожных линий, отвечающих определенным требованиям народного хозяйства, выборе их направления на отдельных локальных участках, параметров их проектирования, а также при проектировании их отдельных устройств и сооружений сравнение вариантов сводится к количественной оценке искомых величин (критерия эффективности, соответствующих значений параметров проектирования).

При таком сравнении объективное решение может быть выявлено с использованием соответствующих математических методов поиска экстремальных значений.

Главная задача, возникающая перед разработчиком проекта железной дороги, состоит в том, чтобы принять обоснованные решения по структуре элементов системы и их параметрам [1]. Эта задача может быть сформулирована следующим образом: разработать проект железной дороги с такой структурой элементов и их параметрами, чтобы обеспечить заданные размеры перевозок (параметры цели) при минимальных затратах. В условиях, когда затраты на строительство железной

дороги регламентированы, возможна постановка другой задачи проектирования: разработать проект железной дороги с такой структурой элементов, чтобы обеспечить максимальные размеры перевозок при заданных затратах. В общем случае оптимизация проектных задач сводится к выявлению показателя (критерия оптимальности), по величине которого можно производить оценку сравниваемых вариантов и к выявлению условий, при которых этот показатель принимает искомое, наиболее рациональное значение.

В зависимости от характера решаемых проектных задач критерий оптимальности может быть выражен в соответствующих для этой задачи измерителях (объемах работ, трудоемкости, стоимостных показателях и т. п.). Опыт показывает, что для многих задач в области строительства недостаточно применять один критерий оптимальности – необходим многогранный комплекс критериев, позволяющий выбрать наилучшее решение. Однако многокритериальная оптимизация весьма сложна и на практике применяется мало. Из критериев, учет которых целесообразен для обоснованной оценки проекта, можно выделить:

- стоимостные критерии: минимум чистой приведенной стоимости, минимальный срок окупаемости инвестиций, максимальная внутренняя норма доходности;
- критерии безопасности: снижение аварийности объекта, улучшение условий труда, снижение заболеваемости и травматизма;
- функциональные критерии: максимум надежности, адаптивности, регулируемости функций объекта, долговечности;
- технологические: максимальная технологичность возведения и организационно-технологическая надежность, ремонтпригодность, эргономичность, минимальная продолжительность строительства;
- ресурсные: минимум расхода трудовых, природных, материальных, энергетических ресурсов при строительстве и эксплуатации;
- социальные: организация дополнительных рабочих мест, улучшение качества жизни, в том числе маломобильных групп населения;
- экологические: минимум отрицательного воздействия на окружающую природу (биосферу, атмосферу, гидросферу, почву, недра).

Одновременное удовлетворение всем критериям, как правило, невозможно. Не всегда можно составить единый комплексный критерий, так как многие из них плохо формализуются. Следует отметить, что применение некоторых критериев в отсутствие остальных критериев

может привести к абсурдным результатам. Таким образом, задача поиска оптимального решения становится многокритериальной. Единого общего метода решения многокритериальных задач не существует. Наиболее часто применяется «свертка» критериев в один комплексный, выражаемый в условных единицах (баллах). Такие подходы разработаны в квалиметрии [1]. Особенностью многокритериальных задач является предположение о наличии некоторого компромиссного решения, при отклонении от которого «качество» решения в целом ухудшается (оптимальность по Парето [2]).

Наибольшее развитие получил стоимостный критерий оптимальности (чистый доход, т. е. доход за вычетом расходов), обладающий рядом достоинств:

- критерий совпадает с экономической эффективностью проекта;
- численная величина имеет наглядное денежное выражение;
- могут быть учтены как единовременные, так и длительные по времени затраты и эффекты;
- путем добавления дополнительных слагаемых могут быть учтены разнообразные факторы, получающие стоимостную оценку.

Наиболее интересные и важные примеры оптимизации проектных решений возникают в тех случаях, когда можно учесть капитальные затраты, эксплуатационные расходы, особенности возведения и использования объекта. Для оптимизации такого рода задач в проектной практике применяются стоимостные показатели, выраженные обычно суммой приведенных (эквивалентных) строительных и эксплуатационных затрат [3], которые определяются по формуле

$$S_{\text{п}} = E_{\text{н}}K + C, \quad (1)$$

или

$$S_{\text{пн}} = K + CT_{\text{н}}, \quad (2)$$

где $E_{\text{н}}$ – нормативный коэффициент эффективности; K – капитальные вложения, тыс. руб.; C – текущие расходы, тыс. руб./год; $T_{\text{н}}$ – нормативный срок окупаемости, лет [3].

Принцип таких расчетов понятен из рисунка 1.

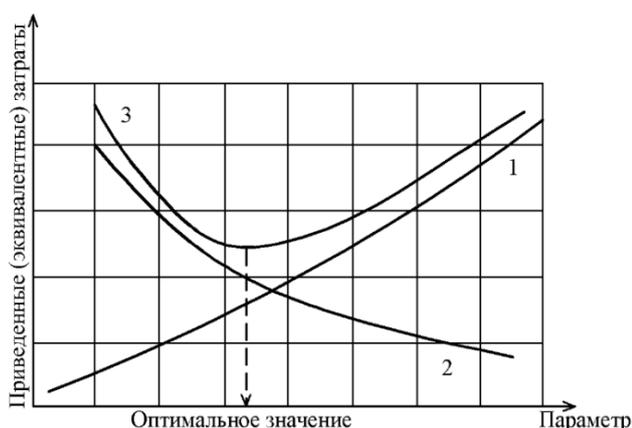


Рисунок 1 – Схема определения оптимума:

- 1 – капитальные затраты; 2 – эксплуатационные расходы;
- 3 – приведенные (эквивалентные) затраты

Часто при изменении какого-либо параметра возрастают капитальные затраты и уменьшаются эксплуатационные затраты, приведенные к известному эквиваленту, или наоборот. Тогда сумма эквивалентных затрат будет иметь минимум (возможно, не единственный), которому

будет соответствовать оптимальное значение оптимизируемого параметра. В качестве оптимального значения часто ошибочно принимают точку пересечения функций капитальных и эксплуатационных расходов, на самом деле это далеко не так (см. рисунок 1).

Величина критерия зависит от значения переменных, отыскание которых осуществляется при решении той или иной проектной задачи. Эти переменные являются независимыми, но так как их величина или шаг изменения для достижения того или иного значения критерия может назначаться проектировщиком, то их можно считать управляемыми. Если функциональная зависимость между критерием и управляемыми переменными полностью выявлена, то при дискретном изменении этих переменных задачи по отысканию оптимума могут быть решены с использованием линейного и динамического программирования. Однако в большинстве случаев при проектировании железных дорог зависимость между критерием и управляемой переменной известна не полностью и процесс нахождения оптимума связан с необходимостью производства эксперимента (разработкой вариантов проектных решений).

Набор правил, т. е. стратегия поиска оптимального решения, по которой осуществляется назначение числа и последовательности производства экспериментов, где заранее назначаются и выполняются все без исключения эксперименты, является пассивной. Стратегия, в которой все последующие эксперименты (их число и последовательность выполнения) зависят от результатов предшествующих, является последовательной или направленного поиска [3].

Стратегии пассивного поиска предполагает, что все эксперименты осуществляются до или же в процессе выявления оптимального решения, но при условии, что все сопоставляемые эксперименты должны быть выполнены и рассмотрены без какого-либо сокращения. Выявление оптимального варианта с использованием стратегии пассивного поиска может быть осуществлено простым или неупорядоченным перебором, или же производя этот перебор в определенном порядке, т. е. упорядоченным перебором, который наиболее целесообразен при наличии большого числа различных вариантов (экспериментов). Такой перебор может быть осуществлен с применением методов решения транспортных задач, нахождения «кратчайшего» пути в графе, на основании применения основных принципов динамического программирования и т. п. [4, 5].

Все методы решения задач с применением стратегии последовательного или направленного поиска сводятся к установлению первоначального интервала неопределенности, проведению некоторого числа опытов в пределах этого интервала, сопоставлению результатов этих опытов и, на основании этого, к выявлению нового (сокращенного) интервала неопределенности, в пределах которого осуществляется новая группа опытов и производится дальнейшее уменьшение интервала неопределенности, и так до тех пор, пока не будет выявлено окончательное оптимальное решение.

Для назначения необходимой последовательности производства опытов (экспериментов) в математике рекомендуются различные методы: метод Фибоначчи, метод дихотомии, «золотого сечения», поиск по дискретным точкам.

В данной статье рассматривается стратегия последовательного поиска с применением метода Фибоначчи, который может быть с достаточной эффективностью применен при решении ряда проектных задач [6]. Метод Фибоначчи построен американцем Дж. Кифером (J. Kiefer) в 1953 году и назван в честь использованной в нем последовательности чисел Фибоначчи: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = F_1 = 1$. Он основан на производстве экспериментов для последовательного уменьшения интервала неопределенности в порядке, соответствующем числам Фибоначчи [2]. Подобно методу золотого сечения процедура поиска с использованием чисел Фибоначчи требует двух вычислений функции на первом шаге, а на каждом последующем – только по одному. Однако, в отличие от метода золотого сечения, в этой процедуре общее число S вычисления функции должно быть выбрано заранее.

Числа Фибоначчи – элементы числовой последовательности 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, ..., в которой первые два числа равны либо 1 и 1, либо 0 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Если обозначить число Фибоначчи F_n , где n соответствует порядковому номеру числа, то

$$F_0 = F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

Для n от нуля до 10 эти числа приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Числа Фибоначчи

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

За счет применения этих чисел существенно сокращается диапазон поиска или интервал неопределенности. Так, если для выявления какого-либо оптимального значения при стратегии пассивного поиска необходимо осуществить 89 экспериментов или известно, что это оптимальное значение находится в интервале неопределенности, соответствующем 89 экспериментам, что соответствует числу Фибоначчи F_{10} , то при последовательном поиске в направлении к F_1 можно найти это оптимальное значение, осуществив всего лишь 10 экспериментов.

Для демонстрации данного метода на практике возьмем условную задачу по определению оптимальной высоты насыпи при пересечении крупного водотока в пределах до 13 м. Если высота насыпи определяется с точностью до 1,0 м, то в этом случае первоначальный интервал неопределенности можно считать равным 13, и при стратегии пассивного поиска следовало бы осуществить 13 экспериментов. В качестве критерия можно принять минимальные приведенные расходы, которые определяются по формуле (1) или (2).

Цифра 13 соответствует числу Фибоначчи F_6 . Учитывая, что это число получено как $F_6 = F_4 + F_5$ ($F_4 = 5$ и $F_5 = 8$) (см. таблицу 1), при направленном поиске с использованием чисел Фибоначчи намечается первая группа экспериментов, соответствующая проектировке насыпи при высоте 5 и 8 м (два эксперимента). При этих высотах насыпи определяются критерии S_{n8} и S_{n5} . Исходя из унимодальности функции, можно предположить, что если $S_{n5} > S_{n8}$, то искомый минимум S_n расположен правее точки 5 и может находиться в интервале между точками 5 и 8 или 8 и 13, но не может быть в

интервале 1–5 (рисунок 2). В этом случае интервал 1–5 отпадает. Наоборот, если $S_{n5} < S_{n8}$, то отпадает интервал от точки 8 до 13. Таким образом, после двух экспериментов интервал неопределенности сокращается до 8.



Рисунок 2 – Последовательность поиска при помощи чисел Фибоначчи

Допустим, что в рассматриваемом случае $S_{n8} > S_{n13}$, перенесем начало координат в точку 8. В связи с тем, что новый интервал неопределенности, равный 13, соответствует числу Фибоначчи F_5 , а $F_5 = F_4 + F_3$ при $F_4 = 5$ и $F_3 = 3$, то следующие эксперименты назначаются в точках 3 и 5, что соответствует высотам насыпи 8 и 10 м (см. рисунок 2). Если и в этом случае $S_{n3} > S_{n5}$, то экстремум находится правее точки 3 и интервал до точки 3 (в старой нумерации) отпадает.

Новый интервал неопределенности ($13 - 8 - 5$) соответствует $F_4 = 5$, в котором дополнительный эксперимент назначается при высоте насыпи 11 м. При $S_{n10} > S_{n11}$ выявляется новый интервал неопределенности, соответствующий $F_3 = 3$. Процесс продолжается до тех пор, пока критерий нового эксперимента не станет больше предыдущего. С использованием чисел Фибоначчи общее число вариантов сократилось с 13 до 6.

Приведенный на рисунке 2 пример соответствует выявлению минимума критерия при наибольшей высоте насыпи (крайний случай). Как было сказано ранее, применение метода Фибоначчи требует всегда установления первоначального интервала неопределенности, совпадающего с каким-либо числом Фибоначчи, установить такой интервал неопределенности можно выбором соответствующего масштаба или точности расчета.

Предложенный метод предполагает наличие одного экстремума (в данном случае это минимум приведенных затрат) и является по своей сути задачей унивариальной. Задачи, связанные с оптимизацией решений при проектировании железных дорог, в большинстве случаев являются многокритериальными, т. е. это процесс одновременной оптимизации двух или более конфликтующих целевых функций в заданной области определения. Как правило, решение многокритериальных задач включает в себя следующие процедуры:

- разработку математической модели;
- структурно-параметрическую идентификацию модели;
- определение состава критериев, качества и их формализацию;
- проведение численных экспериментов с моделью;
- поиск оптимальных структур и параметров модели.

При решении таких задач появляется несколько целей, обусловленных наличием критериев, которые же-

лательно оптимизировать. Однако, как правило, эти цели противоречивы, что вносит в задачу неопределенность, преодолеть которую формальными методами нельзя. В таких задачах по выбору оптимального решения, формализуемых в виде модели векторной оптимизации, первым естественным шагом следует считать выделение области компромиссов – решений, оптимальных по Парето [2]. Решение $x \in X$ называется оптимальным по Парето, если не существует такого решения $x_0 \in X$, для которого выполнены неравенства $f(x_0) \geq f(x)$ и $f(x_0) \neq f(x)$. Любой вектор, который не является оптимальным по Парето, доминируется оптимальным вектором. Областью компромиссов является подмножество допустимого множества решений X , обладающего тем свойством, что все принадлежащие ему решения не могут быть улучшены одновременно по всем критериям [3]. Оптимальное решение, выбираемое на основе многокритериального подхода независимо от избираемого принципа оптимальности, всегда должно принадлежать области компромиссов. Иначе оно может быть улучшено и, следовательно, не является оптимальным. Поэтому при выборе решения по векторному критерию можно ограничить поиск оптимального решения областью компромиссов, которая, как правило, значительно уже всей области возможных решений X .

Принцип эффективности по Парето заключается в следующем. Пусть имеется многокритериальная задача с несколькими критериями, для простоты допустим, что их необходимо максимизировать. Предположим, что в составе множества возможных решений есть такие, у которых все значения критериев для одного решения больше или равны соответствующим значениям критериев для другого решения. Если какой-то вариант решения не представляется перспективным, то он вытесняется другим вариантом. В результате описанной процедуры отбрасываются непригодные варианты решений, множество оставшихся решений сокращается, и в нем сохраняются так называемые «эффективные» (паретовские) решения, характерные тем, что ни у одного из них не существует доминирующего решения. Таким образом, множество Парето содержит только те варианты, которые не доминируются другими вариантами. После того, как получены «паретовские» варианты, можно пользоваться другими приемами сведения к обобщенному показателю уже только недоминируемых вариантов.

Рассмотрим, например, задачу по выбору положения трассы железной дороги при пересечении водораздела. Пусть определены n допустимых вариантов уклонов трассирования i_1, i_2, \dots, i_n , т. е. для укладки трассы мы располагаем n значениями уклонов. На линии водораздела имеются седловины (седла), число которых составляет k и которые определяют возможные направления трассы железной дороги.

Теоретически число возможных вариантов трассы r равно $r = kn$ и может быть большим. Например, при $k = 4$ и $n = 5$ число вариантов трассы $r = 20$. Учитывая, что проектирование каждого варианта для получения приведенных строительно-эксплуатационных затрат требует достаточно много времени, сделаем попытку уменьшить их число. Для этого на карте запроектируем n магистральных ходов через все седла с уклонами i_1, i_2, \dots, i_n ; всего kn . Для каждого магистрального хода оп-

ределим коэффициент удлинения λ . В результате для каждого варианта трассы получим два показателя: уклон i и коэффициент удлинения λ . Для наглядности представим каждый вариант в виде точки в системе координат $iO\lambda$ (рисунок 3). На плоскости множеству допустимых вариантов соответствует область ω . Цифрами 1, 2, 3 и 4 обозначим крайние точки области ω .

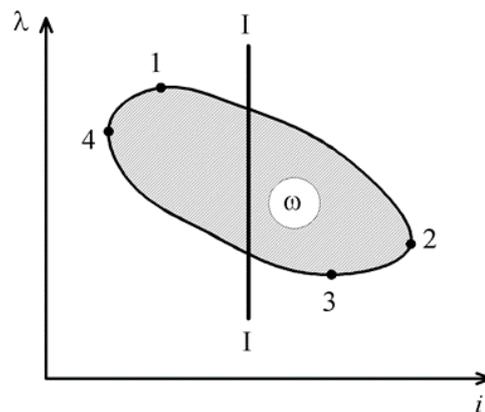


Рисунок 3 – Выделение конкурентных вариантов

Точке 4 соответствует минимум, а точке 2 – максимум уклона, точке 1 – максимум, а точке 3 – минимум коэффициента удлинения. Анализ показывает, что варианты с меньшими уклонами лежат на левой границе области ω (дуга 1 – 4 – 3), а варианты с меньшими коэффициентами удлинения лежат на нижней границе области ω (дуга 4 – 3 – 2). Общим для дуг 1 – 4 – 3 и 4 – 3 – 2 является их отрезок 4 – 3. Для вариантов, лежащих на дуге 4 – 3, справедлива следующая зависимость между i и λ : чем больше i , тем меньше λ . Для дуг 4 – 1 и 3 – 2 зависимость между i и λ имеет иной характер: чем больше i , тем больше λ . Понятно, что варианты с такой зависимостью между i и λ неприемлемы. На дуге 1 – 2 зависимость между i и λ такая же, как и на дуге 4 – 3, но варианты, принадлежащие дуге 1 – 2, имеют больший коэффициент удлинения, чем варианты, относящиеся к отрезку 4 – 3, например в сечении I – I. Значит, только варианты, лежащие на дуге 4 – 3, могут принимать участие в процедуре принятия решения.

Множество вариантов дуги 4 – 3 и является множеством Парето [2]. Пары чисел i и λ , характеризующие множество Парето, образуют доминирующую последовательность. Доминирующая последовательность является информацией для принятия решения. Рассмотрим процедуру Парето на конкретном примере выбора вариантов направления трассы железной дороги.

Конкретизируем задачу по выбору положения трассы железной дороги при пересечении водораздела, приведенную выше. Топографические условия проектирования таковы, что имеется три различных направления железной дороги, которые определяются фиксированными точками – седлами водораздела, располагающегося между опорными пунктами. В результате процедуры формирования множества Парето [2] выявлены три варианта с разными уклонами. Для всех трех вариантов уложены магистральные ходы и определены коэффициенты удлинения (таблица 2). Для наглядности представим эти данные на рисунке 4.

Таблица 2 – Коэффициенты удлинения магистральных ходов

Номер седла	1			2			3		
Номер варианта	0	2	4	0	2	4	0	2	4
$i, \%$	9	7	12	9	7	12	9	7	12
λ	1,15	1,52	1,09	1,25	1,33	1,13	1,44	1,47	1,28

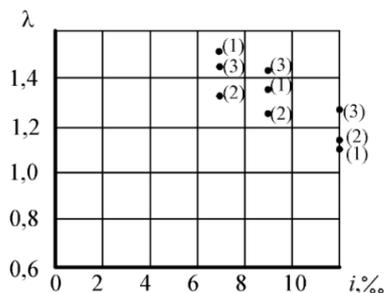


Рисунок 4 – Множество вариантов магистральных ходов

Пары чисел λ и i расположим в порядке возрастания λ (таблица 3). Такая упорядоченная последовательность пар λ и i является последовательностью, ранжированной по λ .

Для сокращения числа вариантов к последовательности, представленной в таблице 3, применим операцию просеивания и в результате получим доминирующую последовательность (множество Парето) пар чисел (λ, i) , которая определяет варианты направлений и соответствующие им уклоны (таблица 4).

Таблица 3 – Последовательность пар (λ, i) , ранжированная по λ

Номер пары	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер седла	1	2	2	3	2	1	3	3	1
λ	1,09	1,13	1,25	1,28	1,33	1,35	1,44	1,47	1,52
$i, \%$	12	12	9	12	7	9	9	7	7

Таблица 4 – Конкурентные варианты направлений и уклонов

Номер ранжированной последовательности	1	3	5
Номер седла	1	2	2
λ	1,09	1,25	1,35
$i, \%$	12	9	7

Из таблицы 4 следует, что трассированию подлежат: через седло 1 – вариант с $i = 12 \%$, через седло 2 – варианты с $i = 9 \%$ и $i = 7 \%$. Следовательно, число вариантов для трассирования сократилось с 9 до 3.

Таким образом, выбор того или иного оптимизационного метода в значительной степени определяется постановкой задачи, а также используемой математической моделью объекта оптимизации. Традиционные методы проектирования ограничивают возможность многовариантных подходов и не позволяют осуществить оптимизацию проектных решений, возникает противоречие между существующими потребностями и возможностями проектно-конструкторских организаций и коллективов.

Получено 10.04.2021

G. V. Akhramenko. Optimization of design solutions when designing railways in local sites.

The problem of decision making in the problems of optimizing the design of railways is investigated. The possibility of using optimization methods based on Fibonacci numbers and Pareto sets is considered. Specific examples of the use of Fibonacci numbers to reduce the number of decision-making options and the Pareto set for choosing the value of the steering slope when tracing railways in rugged terrain with the presence of watersheds are given.

Оптимизацию проектных решений при проектировании железных дорог можно условно разделить на два уровня. Первый предусматривает рассмотрение всех вариантов, которые технически возможно осуществить в заданных местных условиях для проектируемого объекта с учетом всех его особенностей. Второй уровень оптимизации предусматривает перебор всех возможных сочетаний параметров вариантов, намеченных к проектированию. Для определения необходимой последовательности производства экспериментов, а также сокращения числа вычислительных процедур предлагается применить метод Фибоначчи и принцип Парето.

Использование чисел Фибоначчи позволяет сократить общее число вариантов, подлежащих рассмотрению. В рассматриваемом примере при определении оптимальной высоты насыпи общее число вариантов сократилось в три раза. Недостаток метода Фибоначчи заключается в том, что в нем априори необходимо задавать число испытаний n , так как на первом этапе поиска требуется вычислять n -е и $(n - 1)$ -е числа Фибоначчи для определения интервала неопределенности. Это можно произвести выбором соответствующего масштаба или точности расчета.

При наличии нескольких критериев для выявления оптимального решения предлагается использовать принцип Парето, что в рассматриваемом примере позволило сократить число вариантов также в три раза. Доминирующая последовательность, полученная в результате применения принципа Парето, является информацией для ЛПР. Для поиска компромиссного решения можно использовать «метод уступок» или «метод идеальной точки».

Предлагаемые методы оптимизации позволяют производить все необходимые расчеты непосредственно на компьютере, в вариантном исполнении, а также могут являться одними из основных модулей в создании информационных моделей проектирования железных дорог.

Список литературы

- 1 Азгальдов, Г. Г. Квалиметрия в архитектурно-строительном проектировании / Г. Г. Азгальдов. – М. : Стройиздат, 1989. – 264 с.
- 2 Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Физматлит, 2007. – 256 с.
- 3 Изыскания и проектирование железных дорог / И. В. Турбин [и др]. – М. : Транспорт, 1989. – 400 с.
- 4 Лесин, В. В. Основы методов оптимизации / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – М. : МАИ, 2011. – 344 с.
- 5 Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М. : Лань, 2015. – 512 с.
- 6 Воробьев, Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – М. : Наука, 1969. – 112 с.
- 7 Мелькумова, Е. М. Один из подходов к решению задачи многокритериальной оптимизации / Е. М. Мелькумова // Вестник ВТУ. – Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – № 2.