УДК 534

*С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, А. В. ДИМОВ, кандидат технических наук, Иркутский государственный университет путей сообщения, Россия*

# УПРУГИЕ ЭЛЕМЕНТЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ. ВОЗМОЖНОСТИ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Рассмотрена возможность введения в виброзащитные системы упругих элементов с отрицательной жесткостью. Представлены дифференциальные уравнения движения таких систем, описаны эффекты, возникающие при этом. Положительным моментом в предлагаемом подходе является потенциальная возможность иных представлений о свойствах известных решений при учете того обстоятельства, что при определенных условиях физической реализации у элементарных типовых звеньев могут быть отрицательные значения передаточных функций, но при этом они будут выполнять необходимые функции в составе виброзащитных систем.

При разработке виброзащитных систем на основе структурных подходов предполагается, что исходной расчетной схеме в виде некоторой механической колебательной системы сопоставляется по определенным правилам эквивалентная в динамическом отношении система автоматического управления (САУ). Дальнейшие исследования структурного аналога связаны с использованием передаточных функций, отражающих особенности как исходных расчетных схем, так и внешних воздействий [1]. При всей общности двух подходов, заключающейся в том, что в их основе лежат представления об использовании набора типовых элементарных звеньев, существуют и различия, которые, в частности, связаны с формированием цепи дополнительной обратной связи [2]. Такая связь в рамках структурной теории виброзащитных систем (ВЗС) формируется как дополнительная цепь, вводимая параллельно упругому звену базовой модели. В этом случае предопределяется физическая природа дополнительной цепи как некоторой обобщенной пружины, а также специфика соединения звеньев в самой цепи по правилам последовательного и параллельного соединений пружин, что не вызывает никаких противоречий с правилами коммутации в теории автоматического управления. Необходимо при этом отметить и то обстоятельство, что набор типовых элементарных звеньев в обоих случаях является разным.

Большинство типовых звеньев в САУ могут быть получены путем соединений элементарных звеньев ВЗС, тогда как в ВЗС элементарные звенья представляют собой набор элементов, которые не являются составными [3]. Развитие теории и практики виброзащиты связано с усложнением расчетных схем и дополнительных обратных связей [4], что находит свое отражение в структурах передаточных функций, которые часто принимают форму дробно-рациональных выражений высокого порядка. Необходим и учет особенностей, вносимых знаками коэффициентов. В теории автоматического управления этот вопрос связан с тем, что типовые звенья САУ разделяются на устойчивые и неустойчивые [5], тогда как этот вопрос в структурной теории ВЗС трактуется несколько иначе. Пружины с отрицательной жесткостью рассматривались, в частности, в работе [6], в которой делались попытки их конструктивной реализации, показана возможность иметь у элементов расширенного типового набора отрицательные значения параметров, так же, как и у звеньев САУ.

Рассмотрим виброзащитную систему (ВЗС), состоящую из объекта защиты (рисунок 1) массой $m_0$, базового упругого элемента с жесткостью $k_0$ и упругого элемента в виде двухзвенного механизма, вращающегося вокруг вертикальной оси и имеющего две дополнительные массы $m_1$. Такой механизм используется в устройствах регулирования скорости в турбинах, двигателях внутреннего сгорания и др. Жесткость вращающегося двухзвенника обозначим через $k_1$; упругие свойства такой дополнительной связи формируются центробежными силами инерции при вращении элементов с массами $m_1$ при постоянной скорости вращения $\omega_0$. Звенья рычагов приняты одинаковыми и равными $l$. Будем полагать, что внешнее воздействие носит кинематический характер – основание колеблется по известному закону (движение принимается гармоническим).

Колебания в системе на рисунке 1 происходят при смещении основания $z = z_0 \sin \omega t$, т. е. основание вибрирует. Двухзвенник с двумя шарами $m_1$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0$. Объект массой $m_0$ движется относительно неподвижной системы координат и характеризуется координатой $y$. Шары массой $m_1$ участвуют в сложном движении, определяемом участием во вращении вокруг вертикальной оси $AB$ с угловой скоростью $\omega$ = const; вектор линейной скорости шаров перпендикулярен плоскости рисунка и его можно обозначить как

$$v_1 = \omega_0 AE_1 \cdot \sin\alpha. \tag{1}$$

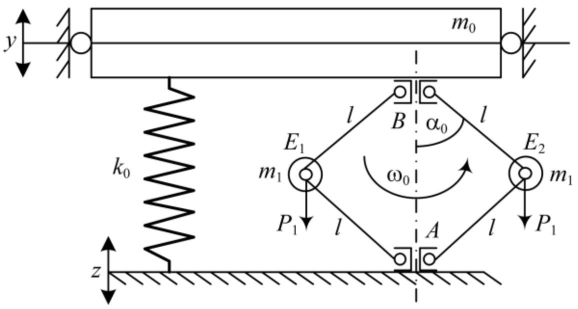


Рисунок 1 – Расчетная схема механической колебательной системы с упругим элементом $k_0$ и пружиной с отрицательной жесткостью $k_1$ в виде вращающегося двухзвенника

При этом будем полагать, что $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, где $\alpha_0$ – угол, характеризующий стационарное положение, относительно которого происходят малые колебания $\Delta\alpha$. В свою очередь, $\Delta\alpha$ связано с относительным смещением объекта $m_0$ относительно основания $(y - z)$.

Введем в рассмотрение вспомогательную схему (рисунок 2), на которой показано взаимное расположение точек $A$, $B$ и $E_1$, участвующих в движении.

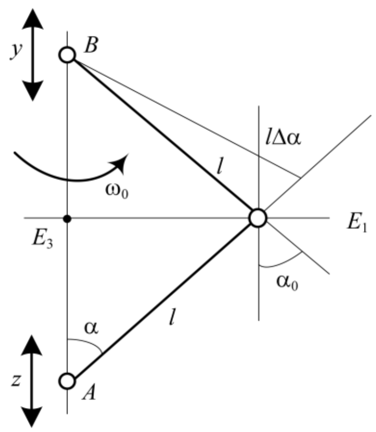


Рисунок 2 – Схема для определения смещений и скоростей движения $m_1$

Полагая $\Delta\alpha$ малым, можно записать, что

$$y - z = 2l \cdot \Delta\alpha \cdot \sin\alpha_0, \tag{2}$$

откуда

$$\Delta\alpha = \frac{y - z}{2l \cdot \sin\alpha_0}. \tag{3}$$

Аналогичный результат можно получить и другим способом:

$$y - z = 2l \cdot \cos\alpha_0 - 2l \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha), \tag{4}$$

откуда видим, что (4) совпадает с (3).

Скорость точек $E_1$ и $E_2$ в абсолютном движении найдем по теории сложения скоростей. Один из видов плоского движения шаров – это движение в плоскости, состоящее из переносного движения со скоростью $v_{\text{пер}} = \dot{y} - \dot{z}$ и относительного движения в форме вращения точки $E_1$ (и $E_2$) относительно точки $B$ – $\bar{v}_{\text{отн}}$, тогда

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_{\text{пер}} + \bar{v}_{\text{отн}}. \tag{5}$$

Скорость точек $E_1$ и $E_2$ во вращении вокруг оси $AB$ имеет вид

$$v_1 = \omega_0 \left( l\sin\alpha_0 + \frac{l(y - z)\cos\alpha_0}{l\sin\alpha_0} \right). \tag{6}$$

Скорость $m_1$ в абсолютном движении

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2. \tag{7}$$

Что касается $\bar{v}_{\text{отн}}$, то скорость может быть найдена из выражения

$$v_{\text{отн}} = \Delta\dot{\alpha} \cdot l, \tag{8}$$

тогда

$$v_2^2 = (\dot{y} - \dot{z})^2 + (\Delta\dot{\alpha} \cdot l)^2 - 2(\dot{y} - \dot{z})\Delta\dot{\alpha} \cdot l\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha). \tag{9}$$

В свою очередь, используя (5), получим

$$v_{\text{абс}}^2 = v_1^2 + v_2^2. \tag{10}$$

Знание $\bar{v}_{\text{абс}}$ необходимо для определения кинетической энергии шаров $m_1$. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 v_{\text{абс}}^2, \tag{11}$$

или

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 \Big\{ (\dot{y} - \dot{z})^2 + (\Delta\dot{\alpha} \cdot l)^2 -$$

$$-2(\dot{y} - \dot{z})\Delta\dot{\alpha} \cdot l\cos\alpha_0 + \omega_0^2 \left[ l\sin\alpha_0 + \frac{(y - z)\cos\alpha_0}{2\sin\alpha_0} \right]^2 \Big\}. \tag{12}$$

Приведем выражение (12) к виду

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}^2 + m_1 \dot{y}^2 + m_1 \dot{z}^2 - 2m_1 \dot{y}\dot{z} + m_1 l^2 \frac{(\dot{y} - \dot{z})^2}{4l^2 \sin^2\alpha_0} -$$

$$-2m_1 l\cos\alpha_0 \left[ \dot{y} \frac{(\dot{y} - \dot{z})}{2l\sin\alpha_0} - \dot{z} \frac{(\dot{y} - \dot{z})}{2l\sin\alpha_0} \right] + m_1 \omega_0^2 l^2 \sin^2\alpha_0 +$$

$$+\frac{m_1 \omega_0^2 l \sin\alpha_0 (y - z)\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} + \frac{m_1 \omega_0^2 (y - z)^2 \cos^2\alpha_0}{4\sin^2\alpha_0}. \tag{13}$$

Найдем необходимые соотношения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_0 \dot{y} + 2m_1 y - 2m_1 \dot{z} + \frac{m_1 \dot{y}}{2\sin^2\alpha_0} - \frac{m_1 \dot{z}}{2\sin^2\alpha_0} -$$

$$-\frac{m_1 \cos\alpha_0 2\dot{y}}{\sin\alpha_0} + \frac{m_1 \cos\alpha_0 \dot{z}}{\sin\alpha_0} + \frac{m_1 \cos\alpha_0 \dot{z}}{\sin\alpha_0}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -m_1 \omega_0^2 \cos\alpha_0 - \frac{m_1 \omega_0^2 y \cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0} + \frac{m_1 \omega_0^2 z \cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}.$$

Потенциальная энергия системы имеет две части, одна из которых связана с деформацией упругого элемента $k_0$, вторая определяется силами тяжести ($\Pi = \mathit{\Pi}_{\mathrm{I}} + \Pi_{\mathrm{II}}$)

$$\mathit{\Pi}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}k_0(y-z)^2.$$

Будем полагать, что система колеблется относительно своего положения равновесия, поэтому компоненту обобщенной силы от действия сил тяжести можно в первом приближении не учитывать, хотя силы инерции шаров при вращении изменяют положение равновесия.

Потенциальная энергия сил тяжести

$$\mathit{\Pi}_{\mathrm{II}} = m_0 g(y-z) + 2m_1 g(y-z-l\cos\alpha_0) + \\ + \frac{(y-z)l}{2l\sin\alpha_0}2m_1 g(y-z)\sin\alpha. \qquad (16)$$

Система дифференциальных уравнений движения системы в координатной системе $y$ имеет вид

$$\ddot{y}\left(m_0 + 2m_1 + \frac{m_1}{2\sin^2\alpha_0} - \frac{2m_1\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + k_0 y - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}y = \\ = \ddot{z}\left(2m_1 + \frac{m_1}{2\sin^2\alpha_0} - \frac{2m_1\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + \\ + z\left(k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}\right) + m_1\omega_0^2\cos\alpha_0 - \left(m_0 g + 2m_1 g\right) - \\ -2m_1 gl\cos\varphi_0 - m_1 g\sin\alpha_0. \qquad (17)$$

Обозначив в правой части выражения (17) постоянные члены в виде

$$A = m_1\omega_0^2\cos\alpha_0 - \left(m_0 g + 2m_1 g\right) - \\ -2m_1 gl\cos\varphi_0 - m_1 g\sin\alpha_0, \qquad (18)$$

можно перейти к рассмотрению условия $A = 0$, или ввести систему координат $y = y' + A$. Тогда система дифференциальных уравнений (17) может быть приведена к виду

$$\ddot{y}'\left(m_0 + 2m_1 + \frac{m_1}{2\sin^2\alpha_0} - \frac{2m_1\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + \\ + y'\left(k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}\right) = \\ = \ddot{z}\left(2m_1 + \frac{m_1}{2\sin^2\alpha_0} - \frac{2m_1\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + z\left(k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}\right). \quad (19)$$

Передаточная функция в такой системе имеет вид

$$W = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \\ = \frac{p^2\left(2m_1 + \frac{m_1}{2\sin^2\alpha_0} - 2m_1\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + \left(k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}\right)}{p^2\left(m_0 + 2m_1 + \frac{m_1}{2\sin^2\alpha_0} - 2m_1\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right) + \left(k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}\right)}. \quad (20)$$

Из анализа передаточной функции (20) следует, что введённый параллельно упругому элементу базовой модели $k_0$ механизм, состоящий из вращающихся масс, является пружиной с отрицательной жесткостью $k_{ng}$:

$$k_{ng} = -\frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}. \qquad (21)$$

Наличие пружины с отрицательной жесткостью позволяет создать режимы с квазинулевой жесткостью, выбирая в качестве настроечных параметров $m_1$, $\omega_0$ и $\alpha_0$ независимо от частоты внешнего воздействия $\omega$.

Приведенная жесткость виброзащитной системы в целом

$$K_{\text{пр}} = k_0 + k_{ng} = k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}. \qquad (22)$$

На рисунке 3 приведена зависимость приведенной жесткости виброзащитной системы от угловой скорости $K_{\text{пр}}(\omega_0)$.

Отметим, что в такой виброзащитной системе возможна реализация режима динамического гашения на частоте

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k_0 - \frac{m_1\omega_0^2\cos^2\alpha_0}{2\sin^2\alpha_0}}{m_1\left(\frac{4\sin^2\alpha_0 + 1}{2\sin^2\alpha_0} - 2\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right)} = \frac{k_0 + k_{ng}}{m_1\gamma}, \quad (23)$$

где $\gamma = \frac{4\sin^2\alpha_0 + 1}{2\sin^2\alpha_0} - 2\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}$ – безразмерный коэффициент.

Если последовательно развивать исходные положения структурной теории ВЗС, то надо согласиться (а это было показано в работах [3] и др.), что элементарное звено ВЗС с соответствующей достаточно простой передаточной функцией в физической своей реализации может оказаться далеко не простым. В данном случае пружина с отрицательной жесткостью реализуется через механизм регулятора вращения. Однако такой факт не должен вызывать удивления, поскольку элементарное звено ВЗС с передаточной функцией $W(p) = ap$, т. е. дифференцирующее звено первого порядка (или демпфер вязкого трения) также представляет собой гидравлический механизм, состоящий из поршня, цилиндра и еще одного звена – рабочей жидкости, т. е. звена нового типа, обладающего особыми распределенными, а не сосредоточенными свойствами.

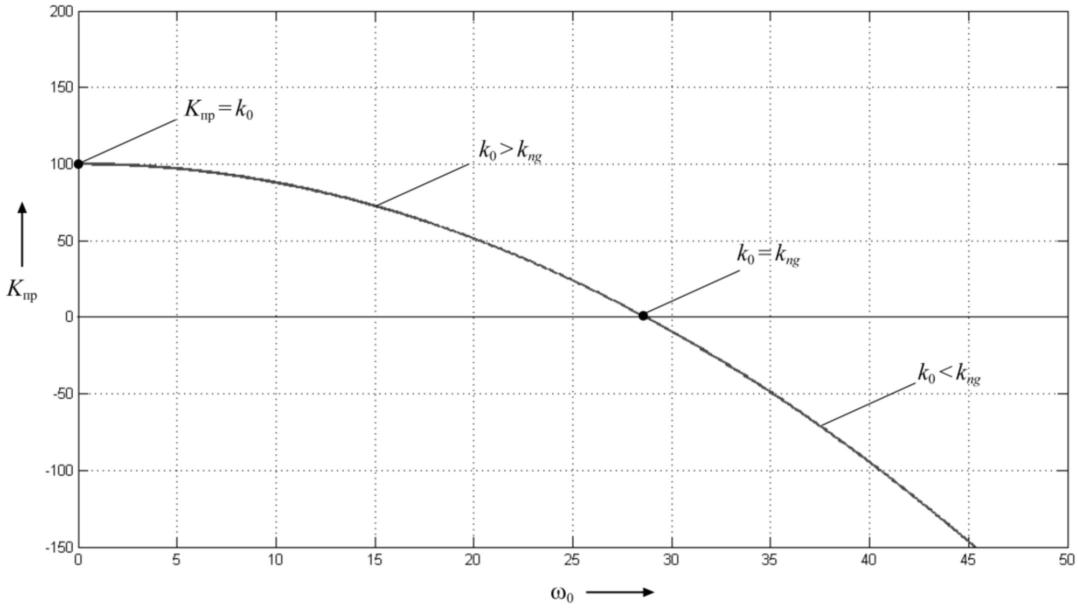


Рисунок 3 – График зависимости приведенной жесткости виброзащитной системы от угловой скорости $K_{пр}(\omega_0)$

Возвращаясь к анализу свойств ВЗС, имеющей в своем составе упругий элемент с отрицательной жесткостью, отметим, что наличие массы у элементов привносит в ВЗС дополнительные свойства. При кинематическом возмущении в системе с одной степенью свободы возникает режим динамического гашения, также возможно приближение к режиму квазинулевой жесткости. Необходимо отметить, что при выводе уравнений движения был сделан ряд упрощений. На самом деле возникающие процессы имеют более сложную природу. Поэтому техническая реализация предлагаемых подходов может потребовать определенных усилий. Положительным моментом в предлагаемом подходе является потенциальная возможность иных представлений о свойствах известных решений при учете того обстоятельства, что при определенных условиях физической реализации у элементарных типовых звеньев могут появляться отрицательные значения передаточных функций, но при этом они будут выполнять необходимые функции в составе ВЗС.

### Список литературы


1 **Елисеев, С. В.** Структурная теория виброзащитных систем / С. В. Елисеев. – Новосибирск : Наука, 1978. – 224 с.

2 **Елисеев, С. В.** Динамика механических систем с дополнительными связями / С. В. Елисеев, Л. Н. Волков, В. П. Кухаренко. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд., 1990. – 214 с.

3 Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С. В. Елисеев [и др.]. – Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2008. – 523 с.

4 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в задачах вибрационной защиты машин и оборудования / С. В. Елисеев, Р. Ю. Упырь // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск : ИрГУПС, 2008. – Вып. 4 (20). – С. 8–16.

5 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2003. – 288 с.

6 **Алабужев, П. А.** Виброзащитные системы с квазинулевой жесткостью / П. А. Алабужев, А. А. Гритчин, Л. И. Ким, под ред. К. М. Рагульскиса. – Л. : Машиностроение, Лен. отд. 1986. – 96 с.



Получено 20.10.2010



**S. V. Eliseev, A. V. Dimov.** Elastic elements with negative rigidity. Possibilities of physical realization.

Introduction possibility in vibroprotective systems of elastic elements with negative rigidity is considered. The differential equations of movement of such systems are presented, the effects arising thus are described. The positive moment in the offered approach is potential possibility of other representations about properties of known decisions at the account of that circumstance, that under certain conditions physical realisation elementary typical links can have negative values of transfer functions, but thus they will carry out necessary functions as a part of vibroprotective systems.