Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2011. № 1 (22)

УДК 652.72

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, Ю. В. ЕРМОШЕНКО, кандидат технических наук, Иркутский государственный университет путей сообщения (Россия)

РАСШИРЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О НАЛОЖЕНИИ СВЯЗЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ С СОЧЛЕНЕНИЯМИ

Рассматриваются общие вопросы построения математических моделей механических колебательных систем с сочленениями. Предлагается расширение известной в теоретической механике теоремы о наложении связей.

В ряде работ [1–3], посвященных изучению особенностей динамического состояния механических колебательных систем с сочленениями звеньев, рассмотрены возможности использования некоторых приемов для построения математических моделей.

Предлагаемые приемы можно рассматривать как форму своеобразного доказательства возможности получения результатов на сопоставлении двух подходов. Первый заключается в том, чтобы получить математическую модель в специально выбранной системе обобщенных координат. Такая система содержит координаты относительного движения, которое в случае формирования сочленения «удаляется», а соответствующая координата относительного движения принимается равной нулю. В формализованном виде математическая модель системы с сочленениями может быть получена из матрицы коэффициентов дифференциальных уравнений исходной системы путем исключения соответствующих строки и столбца, для которых координата принимается равной нулю; исключается при этом и соответствующая обобщенная сила. Перегруппировка обобщенных сил на соответствие обобщенным координатам происходит в процессе вывода уравнений и как отдельная операция может не вводиться.

Второй подход заключается в том, что расчетная (или исходная) схема сразу приводится к конечному виду, содержащему все необходимые сочленения с последующим выводом дифференциальных уравнений движения. Как показывает сравнение (что и следовало ожидать), оба подхода дают совпадающие результаты. Истоки подходов связаны с понятиями наложения связей, которые нашли отражение в ряде работ, в частности в [4, 5], в которых одновременно рассматривалось влияние процессов наложения или устранения связей, в том числе на частоты собственных колебаний системы.

Общие положения. Сочленения, которые реализуются через соединения между собой различных звеньев (в частности, звеньев в виде твердых тел, в том числе и неподвижное звено), можно рассматривать как наложение связей. Так, например, связь $y_2 - y_1 \to 0$ (где $y_2 = y_2' + z_2$, а $y_1 = y_1' + z_1$), можно записать как линейное однородное уравнение относительно координат системы. Если $y_2 - y_1 = 0$, и задача заключается в выполнении этого условия при движении системы, то уравнение может принять вид

$$f(y_1, y_2) = 0. \qquad (1)$$

Такая задача может рассматриваться при движении цепной механической цепи при увеличении жесткости k_2 до ∞ между элементами с массами m_1 и m_2 (рисунок 1) [2].

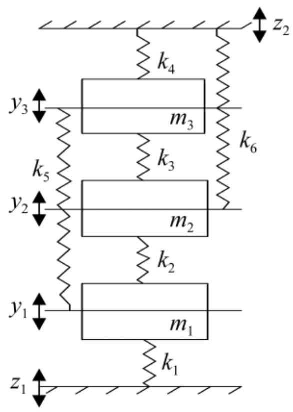

Рисунок 1 – Расчетная схема виброзащитной системы цепного типа с возможностями сочленения звеньев с массами m_1 и m_2

В общем случае можно полагать, что связь задана уравнением

$$f(q_1, q_2, ..., q_n) = 0, \qquad (2)$$

где $q_1, q_2, ..., q_n$ – обобщенные координаты системы.

Предполагается, что налагаемая связь не должна приводить к смещению положения равновесия, в котором по предложению все $q_i = 0$, то есть

$$f(0, 0, ..., 0) = 0, \qquad (3)$$

что характерно для многих случаев виброзащитной практики [9].

Разложим (3) по степеням координат y_i, начиная с членов первого порядка. Если ограничиться только этими членами разложения, то уравнение связи можно представить в виде

$$A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + ... + A_{1n}q_n = 0, \quad (4)$$

где A_{11}, A_{12}, ..., A_{1n} – постоянные числа.

Произведем в (4) подстановку до наложения связей. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} &r_1 = A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \ldots + A_{1n}q_n;\\ &r_2 = q_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &r_n = q_n. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

От такой подстановки собственные частоты не изменятся (по существу, одна система обобщенных координат заменяется на другую). Кинетическая и потенциальная энергии в новых координатах $r_1(i=\overline{1,n})$ примут вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\dot{a}_{ik}\dot{r}_i\dot{r}_k,\ \ \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}r_ir_k. \quad (6)$$

Отметим, что две квадратичные формы, из которых одна определенно положительна, одним линейным преобразованием могут быть приведены к каноническому виду. В частности, построив соответствующим образом линейные преобразования, можно получить

$$\left.\begin{aligned} &q_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \ldots + b_{1n}\xi_n;\\ &q_2 = b_{21}\xi_2 + b_{22}\xi_2 + \ldots + b_{2n}\xi_n;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &q_n = b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \ldots + b_{nn}\xi_n. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

В конечном итоге, для системы в целом можно записать:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad (8)$$

где одно выражение – кинетическая энергия – определенно положительно и имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2), \quad (9)$$

а второе –

$$\Pi = \frac{1}{2}(\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2).$$

Координаты ξ_i, в которых кинетическая и потенциальные энергии выражаются суммами квадратов, называются нормальными координатами, что позволяет придавать уравнениям движения простые формы.

Малые колебания системы с n степенями свободы около положения устойчивого равновесия, определяемые изменениями обобщенных координат, имеют вид

$$\begin{aligned} &q_1 = \lambda_{11}\sin(p_1t+\varepsilon_1)+\lambda_{12}\sin(p_2t+\varepsilon_2)+\ldots+\lambda_{1n}\sin(p_nt+\varepsilon_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &q_n = \lambda_{n1}\sin(p_1t+\varepsilon_1)+\lambda_{n2}\sin(p_2t+\varepsilon_2)+\ldots\lambda_{nn}\sin(p_nt+\varepsilon_n) \end{aligned}$$

и представляют собой линейные наложения n главных гармонических колебаний.

Введем выражение, которое отражает ряд подстановок, в результате которых частотное уравнение системы принимает вид

$$\left\|\begin{matrix} a'_{11}p^2-c'_{11} & a'_{12}p^2-c'_{12}\ \ldots\ a'_{1n}p^2-c'_{1n}\\ a'_{21}p^2-c'_{21} & a'_{22}p^2-c'_{22}\ \ldots a'_{2n}p^2-c'_{2n}\\ a'_{n1}p^2-c'_{n1} & a'_{n2}p^2-c'_{n2}\ \ldots a'_{nn}p^2-c'_{nn} \end{matrix}\right\| = 0. \quad (11)$$

Предположим теперь, что на систему накладывается связь (4), то есть формируется сочленение через процедуру устремления к нулю некоторой выбранной координаты относительного движения. В новых координатах r_i такая связь имеет уравнение

$$r_1 = 0. \quad (12)$$

При этом, n – 1 корней p'_k системы с сочленением располагаются между корнями p_k частотного уравнения исходной системы.

$$p_1 \le p'_1 \le p_2 \le p'_2 \le \ldots \le p'_{n-1} \le p_n. \quad (13)$$

Таким образом, если на систему с n степенями свободы наложена линейная связь, то частоты полученной системы с n – 1 степенями свободы располагаются между частотами первоначальной системы. То есть наложение связи не нарушает условий движения, в смысле их осуществимости и устойчивости, но приводит к сдвигам в спектре частот собственных колебаний. Теорема может быть также расширена на случай нескольких сочленений (или связей). Если на систему с n степенями свободы наложены n линейных связей

$$A_s(q) = A_{s1}q_1 + A_{s2}q_2 + \ldots + A_{sn}q_n = 0 \quad (14)$$
$$(s=\overline{1,\ h}),$$

то частота системы с сочленениями

$$p_1^{(h)} < p_2^{(h)} < \ldots < p_{n-h}$$

удовлетворяют неравенствам

$$p_k \le p_h^{(h)} \le p_{k+h}(k=\overline{1,n-h}), \quad (15)$$

где p_k – частота заданной системы с n степенями свободы.

Связи (14) можно всегда представить уравнениями

$$\begin{aligned} &A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \ldots + A_{1n}q_n = 0; \\ &B_{22}q_2 + \ldots + B_{2n}q_n = 0; \\ &H_{hh}q_h + \ldots + H_{hn}q_n \end{aligned} \qquad (16)$$

и налагать их на заданную систему не сразу все, а последовательно – одна за другой. Переход к координатам, связанным с q_i соотношением (5), не изменяет уравнений естественных связей [4]. Положив $r_1 = 0$, получим систему с $n - 1$ степенями свободы, собственные частоты $p_k^{(1)}$ которых удовлетворяют неравенству

$$p_k \le p_h^{(1)} \le p_{k+1}(k = \overline{1, n-h}), \qquad (17)$$

что можно преобразовать относительно координат S_i, связанных с r_1 (i = 2, 3, ..., n) уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &S_2 = B_{22}r_2 + B_{23}r_3 + \ldots + B_{2n}r_n; \\ &S_3 = r_3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = r_n. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Полагая $S_2 = 0$, получим систему с $n - 2$ степенями свободы, частоты которой $p_k^{(2)}$ будут удовлетворять неравенствам

$$p_k^{(1)} \le p_k^{(2)} \le p_{k+1}(k = \overline{1, n-2}),$$

или на основании неравенства (12)

$$p_k \le p_k^{(2)} \le p_{k+2}(k = 1, \overline{n-2}). \qquad (19)$$

Продолжая процедуры и вводя последовательно сочленения (связи), можно получить неравенства (16), которые будут иметь место для частот системы после наложения на нее всех k связей (15).

Отметим, что предлагаемые приемы составления математических моделей позволяют детализировать представления о технологии формирования различных классов математических моделей и возможностях операции инверсии моделей, восстановления исходных моделей при «разборке» сочленения.

Заключение. Разные формы сочленений предполагают наличие особенностей в приемах соединений с учетом сложности их конструктивного исполнения. Чаще всего движение элементов системы происходит в одной плоскости; обычно выделяют два класса звеньев: неподвижные и подвижные. В связи с этим одним из наиболее распространенных сочленений является шарнирное соединение в виде кинематической вращательной пары. В простейших вариантах звенья, соединяемые шарниром, допускают вращательно-качательные движения относительно друг друга. При этом сочленение из общего числа степеней свободы производит «исключение» одной степени свободы в движениях. Увеличение количества сочленений, соответствующих числу шарниров, обеспечивает уменьшение общего числа степеней свободы (или числа независимых переменных).

Кроме соединения подвижных звеньев между собой часто встречаются соединения твердых тел с неподвижными звеньями или с основанием (или условно неподвижной системой). Такое сочленение на рисунке 2 показано подштриховкой.

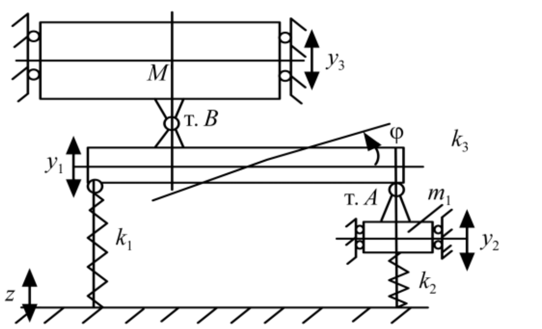

Рисунок 2 – Расчетная схема ВЗС, имеющей сочленения: между подвижными звеньями, а также между подвижными и неподвижными звеньями (в точках A и B – сочленения в виде вращательных кинематических пар)

Механические колебательные системы могут иметь сочленения различных типов, что обеспечивает особенности структуры системы и так называемой «метрики». Математическая модель системы может быть представлена в виде системы обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$Ay = b,$$

где A – матрица коэффициентов; y – вектор-столбец переменных; b – вектор столбец внешних воздействий.

В общем случае матрица A имеет порядок $n \times n$ и является симметричной:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь $a_{\alpha,\beta}$ $(\alpha = \overline{1, n},\ \beta = \overline{1, n})$ содержат переменные Лапласа $p = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$).

При построении математических моделей систем с сочленениями могут использоваться различные системы обобщенных координат, главным образом такие, в которых координаты отражают относительное движение. Сочленение может быть реализовано по отношению к элементу, совершающему «абсолютное» движение, то есть в неподвижной системе координат. Естественно при этом, что системы координат допускают взаимные преобразования.

Введение сочленения означает исключение соответствующих столбцов и строк матрицы коэффициентов, включая и «исключения» соответствующей правой части уравнения [6].

Физический смысл операции заключается в том, что сочленение, представленное разностью соответствующих координат, исключается в физическом смысле; вместе с переменной исключаются одновременно и коэффициенты матрицы, определяющие связи между убираемой парциальной системой и остальными. Правая часть уравнения, определяемого строкой, также исключается, поскольку физически «исчезает» точка приложения сил. Внешнее воздействие в этом случае перераспределяется соответствующим образом при выборе систем обобщенных координат, где необходимо соблюдать условия равенства виртуальных работ обобщенных сил в различных системах обобщенных координат.

В работах [1–3] рассматривается ряд конкретных примеров использования процедур построения математических моделей, а также примеры сочленений. Набор возможных сочленений может обеспечивать и более сложные формы взаимодействий, в том числе и на основе кинематических пар IV и III классов. Важно отметить, что возможности учета особенностей сочленения, в плане построения математических моделей, могут быть распространены и на другие системы с голономными связями.

Список литературы

1 **Хоменко, А. П.** Виброзащитные системы с сочленениями. Технология построения математических моделей / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск : ИрГУПС, 2010. – Вып. 3 (27). – С. 8–18.

2 **Елисеев, С. В.** Возможности сочленения твердых тел в цепных механических системах / С. В. Елисеев, Ю. В. Ермошенко, И. В. Фомина // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск : ИрГУПС, 2010. – Вып. 3 (27). – С. 138–146.

3 **Хоменко, А. П.** Сочленения в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы системы / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск : ИрГУПС, 2010. – Вып. 4 (28). – С. 8–15.

4 **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1968. – 549 с.

5 **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики: в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – Т. 2: Динамика. – 640 с.

6 Мехатроника виброзащитных систем. Элементы теории / И. В. Фомина [и др.]. – Иркутск : ИрГУПС, 2009. – Деп. в ВИНИТИ 27.11.09, № 738-В. – 128 с.

Получено 23.02.2011

S. V. Eliseev, Yu. V. Ermoshenko. Elastic elements with negative rigidity. Possibilities of physical realization.

General problems of constructing mathematical models of mechanical vibrating systems stems are discussed. Extension of the well-known theorem in theoretical mechanics of the bonds imposition is proposed.