СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Программа инновационного развития ОАО «Российские железные дороги» на период до 2015 года. – М., 2011.

2 **Кушнир, И. В.** Стратегический менеджмент : электронный учеб. по стратегическому менеджменту. – Режим доступа: be5.biz›ekonomika/m017/index.htm.

3 Основы трибологии (трение, износ, смазка) : учеб. для технич. вузов / А. В. Чичинадзе [и др.] ; под общ. ред. А. В. Чичинадзе. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Машиностроение, 2001.

4 Стандарт ISO/IEC 15288 Системная инженерия – процессы жизненного цикла систем. – М., 2012.

5 Об утверждении методики планирования и нормирования расхода смазочных материалов для лубрикации зоны контакта колесо – рельс : распоряжение № 81р от 20.01.2012 г. – М., 2012.

6 **Ильина, О. В.** Аспекты управления жизненным циклом наукоемкой продукции / О. В. Ильина : тр. 64-й научно-технической конференции Санкт-Петербургского научно-технич. общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. – СПб, 2009. – С. 97–99.

S. BABAN, PhD, associate professor
A. GUSEV
Moscow State University of Railway Engineering

DEVELOPMENT MECHANISM OF TRIBOLOGICAL TECHNOLOGIES IN THE WHEEL-RAIL AS A FACTOR OF COMPETITIVENESS OF JSC "RUSSIAN RAILWAYS"

In line with the development of an innovative program of "Russian Railways" 2015 Methodical approaches to the development of resource-management mechanism Regan technology as a factor of competitiveness.

Получено 18.10.2012

ISSN 2225-6741. Рынок транспортных услуг
(проблемы повышения эффективности).
Вып. 5. Ч. 2. Гомель, 2012

УДК 659:657.22

Г. В. БУБНОВА, д-р экон. наук, профессор
Московский государственный университета путей сообщения

МОДЕЛИ ЗАВИСИМОСТИ ПРОДАЖ ОТ РЕКЛАМЫ

Рассмотрены различные каналы реализации продукции, приведены сравнение марковской и индукционной моделей продаж, оценка их достоинств и недостатков, даны конкретные рекомендации.

В условиях чистой конкуренции для повышения объемов продаж фирмы активно используют различные рычаги, включая рекламу, выделяя на ее организацию существенное финансирование. Вместе с тем, число продаж товара любой из фирм определяется не только размерами затрат на проведение рекламных кампаний, но и зависит от поведения каждого покупателя, принимающего решение приобрести товар. Рассмотрим две модели продаж: марковская и индукционная.

Марковская модель продаж. Допустим, что покупатель в течение некоторого периода времени принимает решение в пользу покупки товара или услуги одной определенной фирмы – А. Если же он примет подряд k раз решение о покупке только у этой фирмы, то в дальнейшем вне зависимости от рекламы конкурентов, он будет покупать товары фирмы А. В случае принятия покупателем решения в пользу конкурирующей фирмы В, далее он игнорирует все свои предыдущие решения и при повторении им k раз такого отбора окончательно переходит к покупке товаров фирмы В.

Будем полагать, что за период между двумя покупками средний покупатель принимает к сведению α раз рекламу фирмы А и β раз рекламу фирмы В. Обозначим через $p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, $q = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 1 - p$ – вероятности принятия покупателем соответствующих решений о покупках на основании частоты этих реклам.

Такой процесс описывается следующей Марковской цепью (риунок 1), характеризующей поведение покупателей [1].

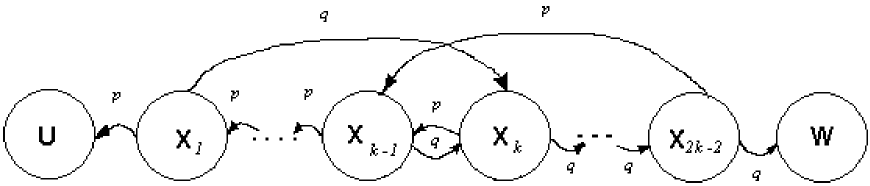

Рисунок 1 – Марковская цепь принятий решения о покупках

Здесь первое состояние характеризуется тем, что решение в пользу товара фирмы А было принято подряд k – 1 раз. Второе состояние соответствует тому, что решение в пользу товара фирмы А было принято подряд k –2 раза и т.д. (k – 1)-е состояние соответствует единственному решению в пользу товара производителя А. Состояние k показывает единственное решение в пользу производителя В. Состояние с номером 2k – 2 показывает, что было принято (k – 1)решение в пользу фирмы В. Конечные состояния: U – постоянная покупка товара фирмы А, W – постоянная покупка товары фирмы В.

Марковская цель принятия решения описывается следующей системой рекуррентных уравнений (1):

$$\begin{cases} U[n+1] = U[n] + pX_1[n] \\ X_1[n+1] = pX_2[n] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{K-2}[n+1] = pX_{K-1}[n] \\ X_{K-1}[n+1] = p(X_K[n] + X_{K+1}[n] + \ldots + X_{2K-2}[n]) \\ X_K[n+1] = q(X_1[n] + X_2[n] + \ldots + X_{K-1}[n]) \\ X_{K+1}[n+1] = qX_K[n] \\ X_{K+2}[n+1] = qX_{K+1}[n] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{2K-2}[n+1] = qX_{2K-3}[n] \\ W[n+1] = W[n] + qX_{2K-2}[n] \end{cases} \qquad (1)$$

Будем полагать, что фирмы попали на рынок одновременно в нулевой момент времени. Поэтому начальные условия на промежуточные и конечные состояния равны нулю, а вероятности состояний с одной рекламой соответственно равны p и q. Таким образом, начальные условия:

$$X_{k-1}[0] = p,\ X_k[0] = q,\ X_i[0] = 0, \text{ при } i \neq k-1,\ i \neq k, W[0] = U[0] = 0. \qquad (2)$$

Свойства параметров процесса :

$$p+q=1,\ p \geq 0,\ q \geq 0,\ \mathrm{k} \in \mathrm{N},\ \mathrm{k} > 1. \qquad (3)$$

Каждую фирму, прежде всего, интересуют финальные вероятности объемов продаж. Система (1) характеризует Марковский процесс с поглощением. Найдем финальные вероятности этого процесса.

Для этого сделаем следующее преобразование системы 1.

Обозначим:

$$S_i = \sum_{n=0}^{\infty} X_i[n]\ ,\ U = \sum_{n=0}^{\infty} U_i[n],\ W = \sum_{n=0}^{\infty} W_i[n]. \qquad (4)$$

Просуммировав все уравнения системы (1) от нуля до бесконечности, получим:

$$\begin{cases} U = pS_1 \\ S_1 = pS_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{K-2} = pS_{K-1} \\ S_{K-1} = p(S_K + S_{K+1} + \ldots + S_{2K-2}) + p \\ S_K = q(S_1 + S_2 + \ldots + S_{K-1}) + q \\ S_{K+1} = qS_K \\ S_{K+2} = qS_{K+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{2K-2} = qS_{2K-3} \\ W = qS_{2K-2} \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) в отличие от системы (1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Для ее решения последовательно найдем все состояния $S_1, S_2, \ldots S_{k-1}, \ldots, S_k$:

$$S_1 = \frac{U}{p}, \quad S_2 = \frac{U}{p^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \; S_{k-1} = \frac{U}{p^{k-1}}$$

$$S_{2k-2} = \frac{W}{q}, \quad S_{2k-3} = \frac{W}{q^2}, \ldots\ldots\ldots, \; S_k = \frac{W}{q^{k-1}} \cdot$$

Подставим полученные последние равенства в k – 1-е и в k-е уравнения системы (5) и получим систему уже двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{U}{p^{k-1}} = p + p\left(\dfrac{W}{q^{k-1}} + \dfrac{W}{q^{k-2}} + \ldots + \dfrac{W}{q}\right) \\ \dfrac{W}{q^{k-1}} = q + q\left(\dfrac{U}{p} + \dfrac{U}{p^2} + \ldots + \dfrac{U}{p^{k-1}}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Преобразовав, получим:

$$\begin{cases} p = \dfrac{U}{p^{k-1}} - \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{1}{q^{k-1}}}{1 - \dfrac{1}{q}} \cdot W \\ q = \dfrac{W}{q^{k-1}} - \dfrac{q}{p} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{1}{p^{k-1}}}{1 - \dfrac{1}{p}} \cdot U \end{cases} . \tag{7}$$

После упрощений найдем вероятности:

$$\begin{cases} p = \dfrac{U}{p^{k-1}} - \left(1 - \dfrac{1}{q^{k-1}}\right) W \\ q = \dfrac{W}{q^{k-1}} - \left(1 - \dfrac{1}{q^{k-1}}\right) U \end{cases} . \tag{8}$$

Решения этой системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} U = \dfrac{\left(1 - q^k\right) p^{k-1}}{q^{k-1} + p^{k-1} - (pq)^{k-1}} \\ W = \dfrac{\left(1 - p^k\right) q^{k-1}}{q^{k-1} + p^{k-1} - (pq)^{k-1}} \end{cases} . \tag{9}$$

В таблице 1 приведены конкретные виды формул (9) и (10) для частных случаев небольших *k*, наиболее интересные для практики.

Таблица 1 – **Формулы расчета объемов продаж *U* и *W* каждой из рассматриваемых фирм при $2 \le k \le 6$**

k	U	W
2	$\dfrac{(1-q^2)p}{q+p-(pq)}$	$\dfrac{(1-p^2)q}{q+p-(pq)}$
3	$\dfrac{(1-q^3)p^2}{q^2+p^2-(pq)^2}$	$\dfrac{(1-p^3)q^2}{q^2+p^2-(pq)^2}$
4	$\dfrac{(1-q^4)p^3}{q^3+p^3-(pq)^3}$	$\dfrac{(1-p^4)q^3}{q^3+p^3-(pq)^3}$
5	$\dfrac{(1-q^5)p^4}{q^4+p^4-(pq)^4}$	$\dfrac{(1-p^5)q^4}{q^4+p^4-(pq)^4}$
6	$\dfrac{(1-q^6)p^5}{q^5+p^5-(pq)^5}$	$\dfrac{(1-p^6)q^5}{q^5+p^5-(pq)^5}$

В таблице 2 показаны значения функции $U(p)$, рассчитанные по формуле (9), при различных значениях k и p.

Таблица 2 – **Значения функции *U*(*p*) при различных значениях *k* и *p***

U / *p*	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
k=2	0	0,021	0,086	0,194	0,337	0,5	0,663	0,806	0,914	0,979	1
k=3	0	0,004	0,03	0,11	0,271	0,5	0,729	0,89	0,97	0,997	1
k=4	0	0,0004	0,01	0,057	0,209	0,5	0,791	0,943	0,991	0,9997	1
k=5	0	0,00006	0,002	0,027	0,155	0,5	0,845	0,973	0,997	0,99999	1
k=6	0	0,0000007	0,0007	0,0013	0,112	0,5	0,888	0,997	0,999	0,99999	1

Семейства кривых зависимостей финальных вероятностей покупки товара фирмы А от параметра р показаны на рисунке 2.

Из формулы (9) следует, что все характеристики проходят через точку с координатами (0,5 , 0,5). Это имеет следующий экономический смысл: при равенстве частот рекламы фирм А и В они получают равное число покупателей.

Из графика видно, что при малых значениях параметра p значение U мало. Это значит, что при малых частотах рекламы количество покупок невелико. При больших же частотах рекламы дальнейшее её увеличение не эффективно, потому что и так рынок оказался практически целиком захваченным одним из конкурентов.

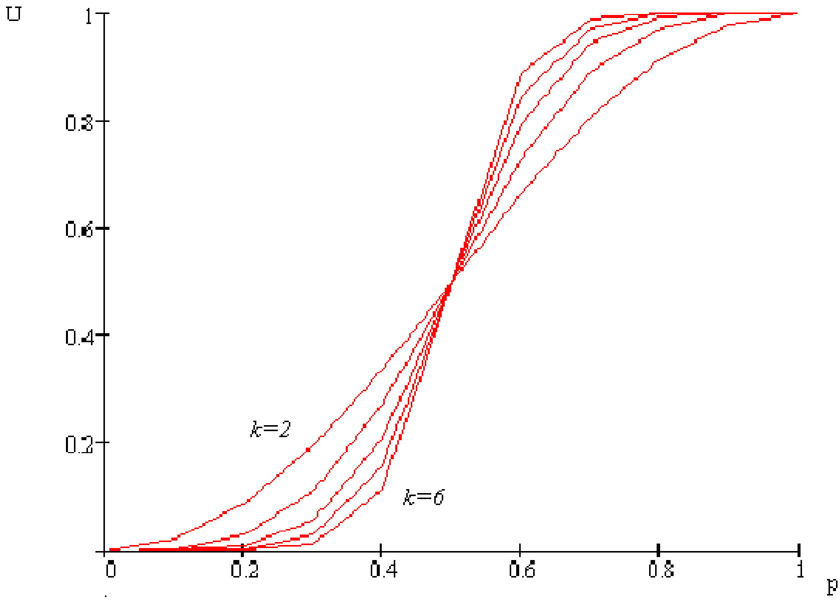

Рисунок 2 – Семейство финальных вероятностей

Полученные зависимости позволяют сделать вывод о том, что при больших значениях k характеристики имеют большую производную в точке (0,5, 0,5) и стремятся к релейной характеристике при стремлении k в бесконечность. Это связано с тем, что при высокой к неподатливости рекламе потребителей товара (больших k), на начальном и на конечном отрезке значений p происходит малое изменение числа покупок. Основной их прирост попадает на срединный участок значений этого параметра.

Можно доказать, что максимальное значение производной U достигается при p=1/2:

$$\frac{(k-1)2^k+1}{2^k-1}. \tag{10}$$

Вторая производная $U(p)$ положительна от 0 до 0,5 и отрицательна от 0,5 до 1.

Заметим, что для нахождения объемов продаж фирмы А достаточно умножить общее число продаж на рынке на полученную финальную вероятность U. Таким образом, U и W отражают те доли рынка, по которым его окончательно разделят фирмы-конкуренты.

Применение модели (1) возможно лишь в случае, когда известны параметры p и k. Идентификация этих параметров по результатам исследований реального поведения покупателей на рынке является необходимым этапом проведения расчетов.

Вероятность p покупки товара первой фирмы может быть определена с помощью обычного статистического маркетингового исследования частоты покупок. Исходной информацией для расчета величины k может являться значение функции U, которой соответствует некоторое искомое значение k. Эти величины связаны формулой (9), эта зависимость является нелинейной и трансцендентной. Поэтому следует разработать специальный численный способ решения уравнения (9). Обозначим $x = k - 1$. Тогда из уравнения (9) следует равенство

$$f(x) = q^{-x}(U-1) + p^{-x}U - U + q = 0. \qquad (11)$$

Исследование функции (11) показывает, что на интервале (x_0, ∞) эта функция возрастает, начиная с отрицательных значений до бесконечности, и имеет единственный ноль, которому соответствует искомое значение параметра k. Здесь

$$x_0 = \log_{\frac{p}{q}} \frac{U \ln p}{(1-U)\ln q}. \qquad (12)$$

Поэтому может быть предложен вариант метода дихотомии для нахождения корня уравнения (11) на указанном интервале.

Разработанные выше модели могут быть обобщены несколькими способами.

Если одна из фирм долго существовала на рынке, на который в некоторый момент выходит вторая фирма с аналогичным товаром, то исходная модель (1) остается в силе, но меняются начальные условия, которые фигурируют в некоторых правых частях уравнений системы (5).

Решив эту систему можно получить интересующие нас финальные вероятности.

Если число фирм более чем две, то по аналогии с системой (1) и марковской цепью (см. рисунок 1) может быть записана исходная математическая модель. По этой модели можно получить алгебраическую систему уравнений аналогичную системе (5). Такую линейную систему не сложно решить.

Может быть принята такая модель, когда на каждом этапе принятия решения о покупке можно рассматривать вариант и неизменности состояния марковской цепи с некоторой вероятностью. Этому соответствует случай, когда (p+q<1). Уравнения такой математической модели не сложно получить описанными выше методами.

Если представляет интерес экономическая ситуация, когда покупатель имеет возможность воздержаться от покупки товара, то можно ввести в модель понятие фиктивной фирмы, к услугам которой якобы прибегает покупатель, который отказывается от услуг или товара реальных фирм. В этом случае модель совпадает с одной из описанных выше.

Можно рассмотреть иную логику принятия решения покупателем, когда он определяется с окончательной покупкой после того, как число промежуточных решений в пользу выбора одной из фирм превышает число промежуточных решений в пользу другой фирмы на заданное значение. В этом варианте получается другая марковская цепь, финальные вероятности которой также найдены. В такой ситуации происходит более быстрая настройка на финальные вероятности.

Все рассмотренные модели обладают свойством устойчивости. Однако эта устойчивость не асимптотическая и конечные значения финальных вероятностей зависят от начальных условий, т.е. никакая реклама не может полностью выгнать конкурента с рынка.

Таким образом, предлагается целый спектр математических моделей, позволяющих проводить как численные, так и аналитические расчеты объема продаж на рынке в зависимости от частоты рекламы. Это может позволить конкретным товаропроизводителям определять для себя экономически целесообразный объем финансовых вложений, направляемых на рекламные проекты.

При разделе рынка между компаниями-конкурентами необходимо также учитывать, что покупатели получают информацию по различным каналам, не только из наружной рекламы, рекламы в средствах массовой информации, но путем общения с другими покупателями, имеющими опыт приобретения и оценки товара соответствующей фирмы. В этом случае возникает новая ситуация, которая требует специальной модели.

Индукционная модель продаж. При проведении маркетинговых исследований фирмы часто интересуются проблемой о долевом распределении рынка между ними. Такое распределение зависит от качества продукции фирм, объемов их рекламы, а также и от действий покупателей, распространяющих информацию о купленном ими товаре. Часто покупатели приобретают товар, основываясь не на рекламе фирмы, а на сведениях о качестве товара, полученных от третьих лиц, уже купивших и опробовавших данный товар. Такое явление будем называть индукционной или вторичной рекламой. Этот вид рекламы может сильно влиять на распределение долей рынка между конкурентами. Математическая модель такого явления должна объяснять следующие явления:

– внезапный спад интереса покупателей к товару;

– ажиотажный спрос на какой-либо товар;

– возникновение явления «торговой марки» (бренда).

Пусть две фирмы продают одинаковую продукцию. Покупатель будет приобретать товар у первой фирмы, если увидит рекламу А подряд k раз. Если же он увидит k раз подряд рекламу В, то будет покупать товар второй фирмы. Считаем, что конкуренты находятся в одинаковых условиях. Но на покупателей еще оказывают влияние слухи, распространяемые теми людей, которые уже приобрели товар у первой, либо у второй фирмы. Это влияние проявляется одинаково внутри одного периода покупки. Следовательно, считаем, что переходный процесс колебания покупателя (что купить) перед покупкой протекает много быстрее процесса изменения числа покупателей.

В этом случае можно пользоваться формулами финальных объемов продаж на каждом шаге изменения числа покупателей. Получается система с запаздыванием на такт и с положительной обратной связью (рисунок 3).

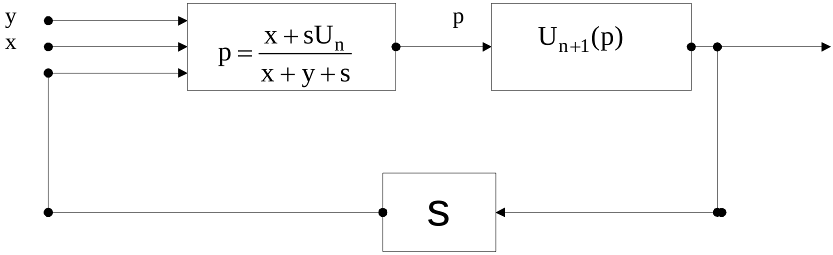

Рисунок 3 – Структурная схема индукционной модели продаж

При этом величина p, которая была постоянной в предыдущей модели, теперь меняется на каждом n-м значениb периода покупки p_n. Это выражается следующей формулой:

$$p_{n+1} = \frac{x + sU_n}{x + y + s} \quad . \tag{13}$$

В формуле (13) величина x – объем рекламы фирмы A, y – объем рекламы фирмы B, s – увеличения рекламы товаров фирмы A, связанный с потребительской индукцией.

Формула (13) получена из исследующих соображений. Частота рекламы товара фирмы A складывается из частоты рекламы, проводимой фирмой и частоты индукционной рекламы, пропорциональной числу покупок товара этой фирмы в предшествующем периоде покупок:

$$x + sU_n. \tag{14}$$

Симметричные рассуждения приводят к тому, что частота рекламы товаров второй фирмы

$$y + sW_n. \tag{15}$$

Общее число рекламных актов равно сумме выражений (14) и (15)

$$x + y + s(U_n + W_n) + x + y + s. \tag{16}$$

Поэтому относительная частота рекламs товаров первой фирмы определяется формулой (13). Из схемы (3) следует, что имеет место соотношение

$$U_{n+1} = F(p_{p+1}) = F\left(\frac{x + sU_n}{x + y + s}\right). \tag{17}$$

Рекуррентное уравнение (15) является математической модель. С индукционной рекламой. Уравнение для ее положений имеет следующий вид:

$$U_0 = F\left(\frac{x + sU_0}{x + y + s}\right). \tag{18}$$

Условие устойчивости положения равновесия (17) имеет вид:

$$\left|\frac{dF}{dU}\right|_{U=U_0} < 1. \tag{19}$$

Несложно показать, что уравнений (18) имеет хотя бы один корень $U \in [0,1]$. С другой стороны, это уравнение не может иметь более трех корней, потому что вторая производная функции F унимодальная. Возможны два основных случая:

1) при малых значения коэффициента обратной связи s имеет ровно одно устойчивое положение равновесия;

2) при больших значениях s имеются три положения равновесия. Два из них устойчивые и одно, промежуточное, неустойчивое.

В пограничном случае может быть ровно два положения равновесия, одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво.

В первом случае ситуация на рынке качественно мало отличается от той, которая описывается первой моделью. Во втором случае зависимость $U_0(x)$ имеет петлю гистерезиса. Это означает, что при одном и том же объеме рекламы первой фирмы может устанавливаться различное число продаж ее товара в зависимости от предшествующего числа продаж ее товара. Если фирма была еще неизвестна на рынке и постепенно наращивает рекламу, то число ее продаж сначала медленно растет, затем резко увеличивается. Если после этого увеличения снизить объем рекламы, то резкого падения числа продаж не произойдет. А точка режима будет двигаться по верхней части петли гистерезиса. Это означает, что рынок «помнит» хорошие качества товара данной фирмы (явление «бренда»).

Представляет практический интерес нахождение начального значения параметра s, при котором существует гистерезис. В случае, когда гистерезис отсутствует, производная функции $U_0(x)$ положительная при всех x. Можно показать, что минимум этой производной достигается при $p = 1/2$. Из этого не сложно получить значение граничного коэффициента

$$s_{\text{гр}} = \frac{2y}{F'(0{,}5) - 1}. \tag{20}$$

Производную в знаменателе формулы (20) можно найти пользуясь формулой (10).

При коэффициентах обратной связи больших $s_{\text{гр}}$ имеет место явление гистерезиса.

Число *s* характеризуется, прежде всего, коммуникабельностью покупателей на рынке и может быть определено с помощью обычного маркетингового исследования. Поэтому можно заранее предсказать возможность явления гистерезиса в каждой конкретной ситуации на рынке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Колмогоров, А. Н.** К теории цепей Маркова : Избранные труды. Т. 2 / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 2005.

G. BUBNOVA, Dr. Hab, professor
Moscow State University of Railway Engineering

MODEL CONDITION THE SALE OF ADVERTISING

The article discusses the various channels of sales, are compared Markov models and induction sale, valued their strengths and weaknesses, provide specific recommendations.

Получено 10.10.2012

**ISSN 2225-6741. Рынок транспортных услуг
(проблемы повышения эффективности).
Вып. 5. Ч. 2. Гомель, 2012**

УДК 629.4.015

С. Г. БУРЯКОВСКИЙ, канд. техн. наук, доцент,
А. А. РАФАЛЬСКИЙ,
В. В. СМИРНОВ
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта

ИССЛЕДОВАНИЕ И УСТРАНЕНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ БУКСОВАНИИ В СИСТЕМЕ «ТЯГОВЫЙ ЭЛЕКТРОПРИВОД – КОЛЕСО – РЕЛЬС»

Предложено использование метода полиномиальных уравнений с целью синтеза передаточной функции астатического регулятора скорости системы тягового частотно-регулируемого электропривода переменного тока, для подавления переменных составляющих большой амплитуды колебательного процесса.

Вследствие плохого состояния поверхности рельсового пути подземного транспорта процесс буксования часто возникает в процессе движения поез-