

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет транспорта»

УДК 539.3

**КОЗЕЛ**  
**Анастасия Григорьевна**

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ  
ПЛАСТИНЫ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ  
ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности  
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2020

Работа выполнена в Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Старовойтов Эдуард Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика» Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Официальные оппоненты – **Тарлаковский Дмитрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»;

**Громыко Юрий Валерьевич**, кандидат технических наук, директор ООО «МОКС»

Оппонирующая организация – **Белорусский государственный университет**

Защита состоится 27 ноября 2020 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.27.01 при Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103, e-mail: smech@tut.by, телефон ученого секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан «16» октября 2020 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций



Д.В. Леоненко

## ВВЕДЕНИЕ

Ежегодно в строительстве, аэрокосмическом комплексе, на железнодорожном транспорте и в машиностроении требования к прочностным характеристикам изделий неуклонно возрастают, что приводит к появлению новых конструктивных материалов. Благодаря этому распространение получили композитные элементы конструкций, имеющие слоистую структуру.

Основы теории слоистых элементов конструкций были заложены еще в начале прошлого столетия, на сегодняшний день издано несколько десятков тысяч работ посвященных этой тематике. Подобные конструкции, обладая сравнительно небольшой массой, сочетают в себе высокие показатели прочности и изгибной жесткости, а также способны противостоять сейсмическим, радиационным, тепловым и ряду других негативных воздействий. Целое направление исследований связано с моделированием и расчетом трехслойных стержней, оболочек и пластин, связанных с деформируемым основанием.

Ранее для описания контакта трехслойной круговой пластины с упругим основанием использовалась простейшая однопараметрическая модель Винклера. Эта гипотеза неоднократно подвергалась вполне обоснованной критике, так как большинство реальных оснований, имеют распределительную способность, при которой в работу вовлекаются не только непосредственно нагруженные части основания, но и области к ним примыкающие. Одна из двухпараметрических моделей, адекватно отражающая работу основания, была предложена П.Л. Пастернаком.

В связи с этим возникает актуальная проблема разработки эффективных методик расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций, в том числе и круговых пластин, связанных с упругим двухпараметрическим основанием Пастернака.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Тема диссертации соответствует п. 12 «Междисциплинарные исследования» перечня направлений научных исследований Республики Беларусь на 2016 – 2020 годы (утверждено Постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 12.03.2015 № 190).

Работа входит составной частью в проект Т19РМ–089 «Статические и динамические задачи взаимодействия твердых тел и трехслойных пластин с упругими основаниями, при учете адгезионных и сдвиговых свойств», БРФФИ, № ГР 20192751, 01.06.2019–31.05.2021.

### **Цель и задачи исследования**

*Целью исследования* является разработка и анализ механико-математических моделей деформирования упругой и физически нелинейной трехслойных круговых пластин, связанных с основанием Пастернака, при различных нагрузках и граничных условиях.

Для ее достижения потребовалось решить следующие задачи:

- разработать постановки краевых задач о деформировании упругих и физически нелинейных круговых трехслойных пластин на двухпараметрическом основании Пастернака;
- получить аналитические решения в конечном виде ряда краевых задач теории упругости для трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений при произвольных осесимметричных распределенных нагрузках, в случае различных граничных условий;
- получить аналитические рекуррентные решения краевых задач о деформировании физически нелинейной круговой трехслойной пластины, связанной с двухпараметрическим основанием, позволяющие алгоритмизировать процесс расчета напряженно-деформированного состояния при произвольных осесимметричных внешних нагрузках и различных граничных условиях;
- провести численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, и установить зависимость величины перемещений, деформаций, напряжений и скорости сходимости метода упругих решений от коэффициентов сжатия и сдвига основания, геометрических и упругих параметров слоев, характеристик физической нелинейности материалов, величины внешней нагрузки.

**Научная новизна** результатов работы заключается в разработке механико-математических моделей деформирования упругих и физически нелинейных трехслойных круглых пластин на двухпараметрическом основании Пастернака, получении новых аналитических и численных решений соответствующих краевых задач, отличающихся учетом влияния сопротивления сдвигу упругого основания на напряженно-деформированное состояние круговой пластины, вовлечением в расчетную схему областей основания, расположенных за пределами пластины.

#### **Положения, выносимые на защиту**

- механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования трехслойных круговых пластин, учитывающие наряду со сжатием основания его сдвиговые свойства;
- аналитические решения краевых задач об изгибе упругих круговых трехслойных пластин, содержащие расчетные формулы перемещений, деформаций, напряжений и внутренних усилий при произвольных осесимметричных распределенных нагрузках и различных условиях закрепления контура, учитывающие оба коэффициента жесткости основания Пастернака, что позволяет давать уточненные прочностные оценки работы конструкции;
- аналитические рекуррентные решения краевых задач о деформировании физически нелинейных круговых трехслойных пластин, позволяющие алгоритмизировать процесс расчета, исследовать зависимость напряженно-деформированного состояния от характеристик физической нелинейности материалов слоев, коэффициентов сжатия и сдвига основания;

- численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, установивший зависимость величины перемещений, деформаций и напряжений, скорости сходимости метода упругих решений от коэффициентов сжатия и сдвига основания, геометрических и упругих параметров слоев, характеристик физической нелинейности материалов, величины внешней нагрузки.

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений исследования, разработке методов исследования и в анализе полученных результатов. Другим соавторам принадлежат результаты, не вошедшие в работу.

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение на:

- XVIII, XXI и XXII Республиканских научных конференциях «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2015, 2018, 2019);

- IV, V, VI и VII Международных научно-практических семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2016, 2017, 2018);

- XXII, XXIII, XXIV, XXV и XXVI Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2016–2020);

- VIII, IX Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2017, 2019);

- III Международной научно-технической конференции магистрантов «Инновации в технико-экономических системах» (Гомель, 2017);

- III, IV, V Международных научно-технических конференциях «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем» (Минск, 2017, 2018, 2019);

- V, VI Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2016, 2018);

- VI Международной научно-практической конференции, посвященной 65-летию БИИЖТа-БелГУТа «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018);

- 11-й Международной научно-технической конференции молодых ученых и студентов «Новые направления развития приборостроения» (Минск, 2018);

- 11-й Международной научно-технической конференции «Приборостроение-2018» (Минск, 2018);

- конференция с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред – 2019» (Чебоксары 2019);

• VI Международной научно-технической конференции «Теоретическая и прикладная механика» (Минск, 2020).

Отдельные результаты использованы в учебном процессе при чтении лекций по курсу «Теория упругости и пластичности» для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и при выполнении НИР № Т19РМ-089 в НИСе Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта», предполагаются к практическому использованию в НТЦК ОАО «Гомсельмаш».

### **Опубликование результатов диссертации**

По теме диссертации опубликовано 35 работ, в том числе 9 статей в научных изданиях, включенных в перечень ВАК, 5 статей в научных рецензируемых журналах и сборниках, 16 материалов конференций, 5 тезисов докладов, общим объемом 12,7 авторских листов.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, приложения. Объем диссертации составляет 107 страниц машинописного текста, список использованных источников из 80 наименований на 7 страницах, список публикаций автора из 35 наименований на 5 страницах, приложения на 3 страницах.

## **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

**В первой главе** проведен анализ основных механико-математических моделей, используемых для описания свойств деформируемого основания, обоснован выбор двухпараметрической модели основания Пастернака. Выполнен краткий обзор публикаций по деформированию конструкций, связанных с упругим основанием. Указано, что, как правило, для связи упругих слоистых конструкций с основанием использовалась однопараметрическая модель Винклера. При этом, вопросу деформирования физически нелинейных конструкций на упругом основании, уделено недостаточное внимание. Это позволило сделать вывод о необходимости проведения исследования деформирования трехслойных круговых пластин на упругом двухпараметрическом основании Пастернака с учетом физической нелинейности материалов слоев.

**Во второй главе** предложена кинематическая модель деформирования упругой трехслойной круговой пластины на упругом основании Пастернака (рисунок 1), проведена постановка краевой задачи в усилиях и перемещениях, сформулированы граничные условия.

Для изотропных несущих слоев толщиной  $h_1$ ,  $h_2$  приняты гипотезы Кирхгофа, в легком несжимаемом по толщине заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ . Радиальные перемещения линейно изменяются по толщине слоев. Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

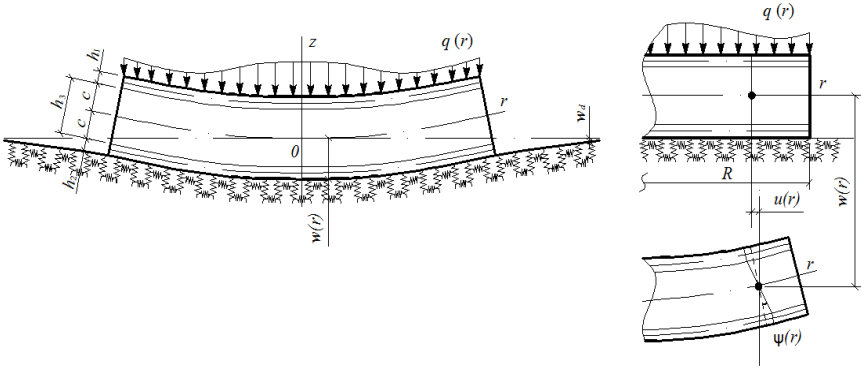


Рисунок 1. – Схема деформирования пластины при свободном опирании

Осесимметричная поверхностная нагрузка  $q(r)$  приложена к верхнему слою, на нижнюю поверхность пластины действует реакция основания  $q_R$ , которая соответствует модели Пастернака

$$q_R(r) = -\kappa_0 w(r) + t_f \Delta w(r), \quad (1)$$

где  $w(r)$  – прогиб пластины;

$\kappa_0, t_f$  – коэффициенты сжатия и сдвига основания;

$\Delta$  – оператор Лапласа в полярной системе координат.

В силу осесимметричности нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:  $u_\varphi^{(k)} = 0$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты  $\varphi$ , т. е.  $w(r), \psi(r), u(r)$ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Радиальные перемещения в слоях выражаются через три искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw,_{,r} & (c \leq z \leq c+h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw,_{,r} & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw,_{,r} & (-c-h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u,_{,r} + c\psi,_{,r} - zw,_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw,_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u,_{,r} - c\psi,_{,r} - zw,_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw,_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u,_{,r} + z\psi,_{,r} - zw,_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw,_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ), введем обобщенные внутренние силы  $T_\alpha$  и моменты  $M_\alpha, H_\alpha$  в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (4)$$

Уравнения равновесия в обобщенных усилиях рассматриваемой круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака, были получены с помощью вариационного принципа Лагранжа:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q. \quad (5)$$

На контуре пластины должны выполняться силовые граничные условия:

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad Q = M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (6)$$

Выразив обобщенных внутренние усилия и моменты в (5) через искомые перемещения с помощью деформаций (3), закона Гука и реакции основания (1), получим систему уравнений в перемещениях, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_r) = 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_r) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q, \quad (7)$$

где коэффициенты  $a_i$  выражаются через упругие и геометрические параметры слоев, а линейные дифференциальные операторы  $L_1, L_2$  определяются формулами

$$L_2(g) = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) = g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача замыкается присоединением к уравнениям (7) силовых (5) или кинематических граничных условий. В частности, при жесткой заделке на контуре пластины ( $r = R$ ) должны выполняться требования:

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad w_r = 0. \quad (8)$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0. \quad (9)$$

В случае свободного контура

$$\psi = 0, \quad T_r = 0, \quad M_r = 0, \quad Q = 0. \quad (10)$$

**В третьей главе** разработана методика решения краевой задачи об изгибе рассматриваемой упругой трехслойной круговой пластины на основании Па-



стернака, позволяющая сводить решение дифференциального уравнения четвертого порядка к решению системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка; получено соответствующее аналитическое решение краевой задачи и выполнен его численный параметрический анализ.

Рассмотрим процедуру решения системы уравнений (7). С помощью первых двух уравнений в третьем уравнении обнуляются коэффициенты перед функциями  $u$  и  $\psi$ . После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$\begin{aligned} u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \\ \Delta \Delta w - t_f D \Delta w + \kappa_0 D w = q D, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $b_1, b_2, D$  – параметры, выражаемые через коэффициенты  $a_i$ ;

$C_i$  – константы интегрирования.

Однородное уравнение, соответствующее третьему уравнению системы (11), после ряда преобразований и замены переменной  $x = \kappa r$  принимает вид:

$$\Delta \Delta w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0.$$

Решение этого уравнения четвертой степени сведено к решению системы из двух уравнений второго порядка

$$w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + a w_1 = 0, \quad w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a} w_2 = 0. \quad (12)$$

Общее решение для прогиба выпишем в виде суммы общего решения системы (12) и частного решения  $w_p$  уравнения (11)<sub>3</sub>:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}} \kappa r) + w_p, \quad (13)$$

где  $J_0(r)$  – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка;  $\kappa^4 = \kappa_0 D$ ;

$H_0^{(1)}(r), H_0^{(2)}(r)$  – функции Ханкеля первого и второго рода соответственно;

$a, \bar{a}$  – величины, выражаемые через параметры пластины и основания.

Исходя из условия ограниченности перемещений в начале координат, в решениях (11), (13) для сплошных пластин необходимо положить константы интегрирования  $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} u = b_1 w_{,r} + C_1 r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}} \kappa r) + w_p(r). \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_1, C_3, C_5, C_7$  – константы интегрирования, следующие из условий (8)–(10).

Частное решение  $w_p$  дифференциального уравнения (11)<sub>3</sub>, входящее в (13), можно построить, используя ядро Коши. В этом случае оно будет

$$w_p = \int_0^r K(r,s) q_1(s) ds, \quad (15)$$

где  $q_1 = q D$  – правая часть дифференциального уравнения (11)<sub>3</sub>;

$K(r,s)$  – ядро Коши.

Ядро Коши вычисляется через фундаментальные решения системы (12):

$$K(r,s) = C_1^{(1)}(s)J_0(\sqrt{a}kr) + C_2^{(1)}(s)H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + C_3^{(1)}(s)J_0(\sqrt{a}kr) + \\ + C_4^{(1)}(s)H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr).$$

Функции  $C_n^{(1)}(s)$  (это не константы интегрирования, введенные ранее) – являются решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1^{(1)}J_0(\sqrt{a}ks) + C_2^{(1)}H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) + C_3^{(1)}J_0(\sqrt{a}ks) + C_4^{(1)}H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) = 0, \\ C_1^{(1)}J_0'(\sqrt{a}ks) + C_2^{(1)}H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) + C_3^{(1)}J_0'(\sqrt{a}ks) + C_4^{(1)}H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) = 0, \\ C_1^{(1)}J_0''(\sqrt{a}ks) + C_2^{(1)}H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) + C_3^{(1)}J_0''(\sqrt{a}ks) + C_4^{(1)}H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) = 0, \\ C_1^{(1)}J_0'''(\sqrt{a}ks) + C_2^{(1)}H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) + C_3^{(1)}J_0'''(\sqrt{a}ks) + C_4^{(1)}H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) = 1, \end{cases}$$

где операции дифференцирования по параметру  $s$  обозначены штрихами.

В случае жесткой заделки контура пластины константы интегрирования

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_5 = \frac{w_{p,r}(R)J_0(\sqrt{a}kR) + \kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)w_p(R)}{\kappa\left[\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR) - \sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR)\right]},$$

$$C_7 = \frac{w_{p,r}(R)J_0(\sqrt{a}kR) + \kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)w_p(R)}{\kappa\left[\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR) - \sqrt{a}J_0(\sqrt{a}kR)J_1(\sqrt{a}kR)\right]}.$$

При свободном опирании контура следует учесть осадку поверхности основания  $w_d$  в области, внешней по отношению к пластине. Реакция основания в этом случае отсутствует, и выполняется однородное дифференциальное уравнение, предложенное В.З. Власовым:

$$\Delta w_d - \alpha_0^2 w_d = 0, \quad (16)$$

где  $\alpha_0$  – коэффициент, выражаемый через параметры основания и пластины.

При равномерно распределенной поверхностной нагрузке ( $q = q_0 = \text{const}$ ) частное решение будет

$$w_p = q_0 / \kappa_0.$$

Численные результаты получены для пластины радиуса  $R = 1$  м, слой которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–4–Д16Т. Соответствующие характеристики этих и других материалов, используемых при расчетах, заимствованы из литературы. Величина интенсивности поверхностной нагрузки  $q_0 = 1$  МПа; толщины слоев  $h_1 = h_2 = 0,04$  м,  $h_3 = 0,4$  м.

На рисунках 2–6 приведены результаты, полученные при защемленном контуре пластины в случае оснований средней  $30 \leq \kappa_0 \leq 650$  МПа/м (крупноблочный грунт, туф, глинистый сланец, известняк) и высокой жесткости  $\kappa_0 \geq 650$  МПа/м (песчаник, гнейс, гранит, базальт и др.).

На рисунке 2 а, б показано изменение прогиба  $w$  и относительного сдвига в заполнителе  $\psi$  вдоль радиуса пластины при основании средней жесткости

$\kappa_0 = 100$  МПа/м и различных коэффициентах сдвига  $t_f$  (МПа·м). При численном исследовании получено, что при значениях  $t_f < 0,1$  МПа·м изменения несущественные и сдвиговой деформацией основания можно пренебречь. При увеличении  $t_f$  до 1 МПа·м прогиб уменьшается на 5%, в случае  $t_f = 10$  МПа·м прогиб уменьшается на 37%. Аналогично изменяется сдвиг в заполнителе.

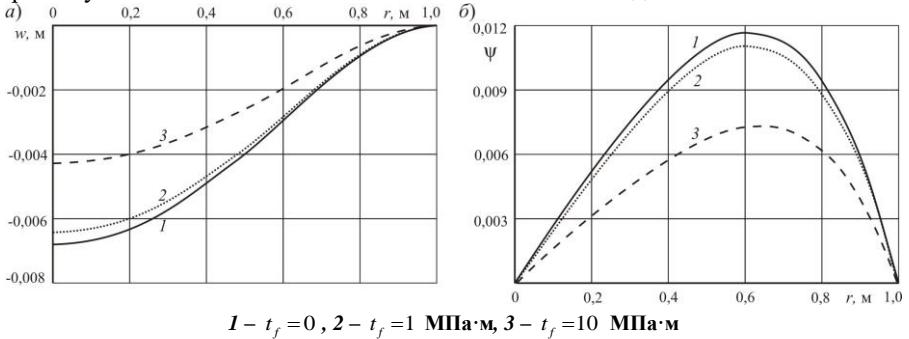


Рисунок 2. – Изменение прогиба и сдвига в заполнителе ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м)

При весьма жестких основаниях  $\kappa_0 = 5000$  МПа/м (базальт, гранит) аналогичные графики перемещений приведены на рисунке 3 а, б. При меньших значениях коэффициента  $t_f$  максимум прогиба сдвигается из центра пластины к сечению с координатой  $r = 0,45$ , а сдвиг в заполнителе меняет знак вдоль радиуса.

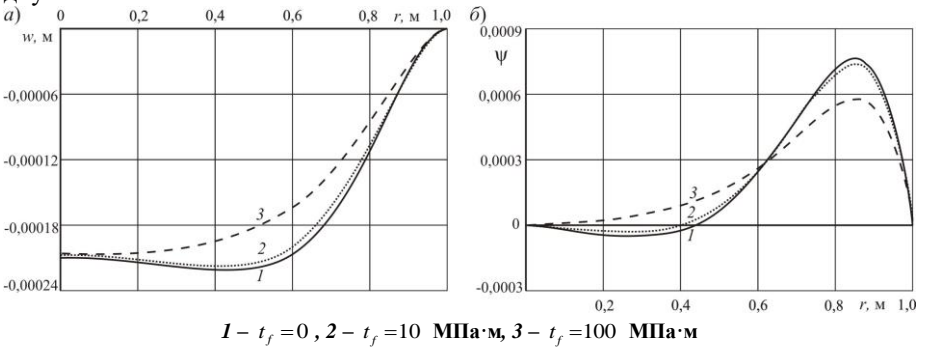


Рисунок 3. – Изменение прогиба и сдвига в заполнителе ( $\kappa_0 = 5000$  МПа/м)

Следует отметить, что при использовании модели основания Винклера решение аналогичной краевой задачи получено Яровой А.В. в функциях Кельвина. У нас, при использовании модели Пастернака, этот случай соответствует решению в функциях Бесселя при  $t_f = 0$ . В диссертации были проведены соответствующие сравнительные расчеты, показавшие численное совпадение обоих решений с высокой точностью, что подтверждает преемственность моделей.

На рисунке 4 показано изменение радиальных напряжений  $\sigma_r(z)$  по толщине пластины на ее контуре (а) и в центре (б) ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м). В центре пластины верхние части несущих слоев сжаты, заполнителя – растянуты, на

контуре – противоположная картина. В склейках слоев напряжения имеют одинаковые знаки, но терпят разрыв из-за различных упругих характеристик материалов. При  $t_f=10$  МПа·м напряжения уменьшаются, на контуре пластины до 29 %, в центре – на 41 %.

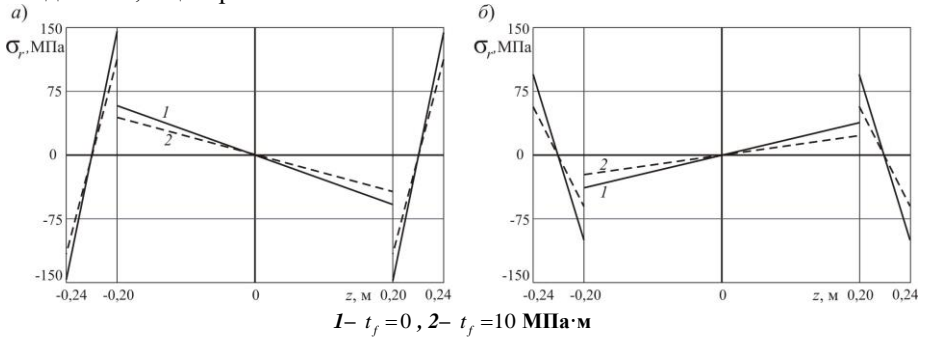
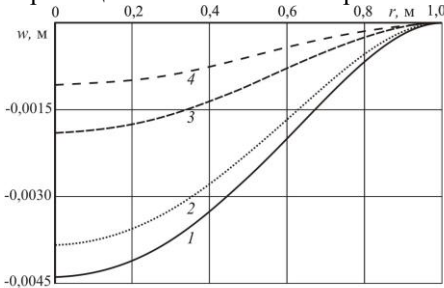


Рисунок 4. – Изменение радиальных напряжений  $\sigma_r$  по толщине пластины ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м)

Влияние материалов слоев на перемещения и напряжения в пластине отражают рисунки 5, 6 при  $\kappa_0 = 100$  МПа/м,  $t_f = 10$  МПа·м.

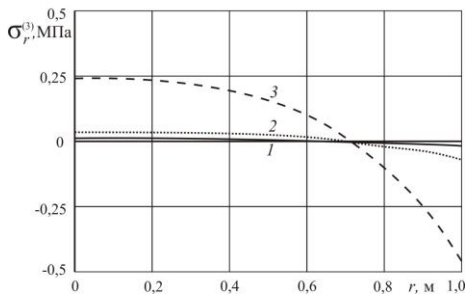
Рисунок 5 показывает прогиб трехслойной пластины при различных материалах несущих слоев. Если они выполнены из титана, то прогиб уменьшается на 13 % по сравнению с базовым пакетом Д16Т-фторопласт-Д16Т. При верхнем слое из кордиерита – на 57 %, в случае НККМ – на 76%.

Влияние материала заполнителя на радиальные напряжения в склейке с верхним слоем отражает рисунок 6. При замене фторопласта на пенопласт тангенциальные напряжения уменьшаются на 87 %, при пенополиуретане – на 95 %, что объясняется уменьшением упругих модулей этих материалов. На перемещения изменение материала заполнителя практически не влияет.



1 – Д16Т-фторопласт-Д16Т, 2 – титан-фторопласт-титан, 3 – кордиерит – фторопласт – Д16Т, 4 – НККМ-фторопласт-Д16Т

Рисунок 5. – Изменение прогиба в зависимости от материалов несущих слоев

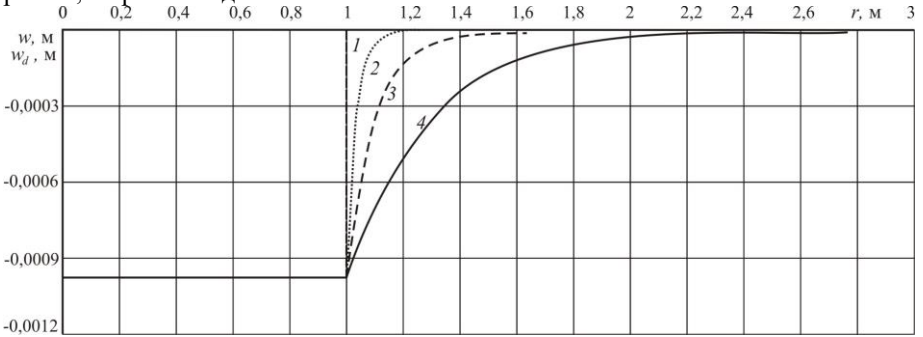


1 – пенополиуретан, 2 – пенопласт, 3 – фторопласт

Рисунок 6. – Изменение радиальных напряжений в заполнителе

Графики рисунка 7 показывают прогибы при свободном опирании пластины. Аналитическое решение (15) используется совместно с известным решени-

ем уравнения (16). При основании средней жесткости ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м) с увеличением  $t_f$  область и величина осадки основания  $w_d$  за пределами пластины растет, а прогиб под пластиной остается постоянным.



1 –  $t_f = 0$ , 2 –  $t_f = 0,1$  МПа·м, 3 –  $t_f = 1$  МПа·м, 4 –  $t_f = 10$  МПа·м.

Рисунок 7. – Изменение прогиба и осадки основания за пределами пластины ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м)

В четвертой главе приведена постановка и получено аналитическое рекуррентное решение краевой задачи об изгибе упругопластической трехслойной круговой пластины на основании Пастернака, проведена его численная апробация.

Предполагается, что материалы несущих слоев в процессе деформирования могут проявлять упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругие. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_{\alpha}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3\vartheta_{rz}^{(3)}(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)})), \quad (19)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\vartheta_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций в  $k$ -м слое ( $k = 1, 2, 3$ );

$G_k$ ,  $K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации;

$\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$  – универсальные функции физической нелинейности материалов слоев ( $\omega_k < 1$ );

$\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций;

$s_{rz}^{(3)}$ ,  $\vartheta_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе.

Используя соотношения (19) представим компоненты тензоров напряжений через девиаторную и шаровую части тензоров деформаций, выделив упругие (индекс «e») и неупругие (индекс « $\omega$ ») слагаемые:

$$\sigma_{\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rz e}^{(3)} - \sigma_{rz \omega}^{(3)}, \quad (20)$$

где

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k\vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k\theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k\vartheta_{\alpha}^{(k)},$$

$$\sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}.$$

Система уравнений в усилиях равновесия рассматриваемой пластины (5) и граничные условия (6) были получены без использования физических уравнений связи напряжений с деформациями, поэтому они будут справедливы и в рассматриваемом случае. Выразив внутренние усилия через перемещения, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) &= p_\omega, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) &= h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w &= -q + q_\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $p_\omega$ ,  $h_\omega$ ,  $q_\omega$  – нелинейные составляющие внутренних усилий.

Система дифференциальных уравнений (21) в соответствии с физическими уравнениями состояния (19), является нелинейной. Для ее решения необходимо применять приближенные или численные методы. Далее воспользуемся одним из эффективных приближенных методов – методом упругих решений Ильюшина. Согласно ему перепишем систему (21) в итерационном виде

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w, r) &= p_\omega^{(n-1)}, \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w, r) &= h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w, r) - \kappa_0 w^{(n)} + t_f \Delta w^{(n)} &= -q + q_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $n$  – номер приближения.

Нелинейные составляющие  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$  называют дополнительными «внешними» нагрузками. Их на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= T_{\alpha\omega}^{(n-1)}, r + \frac{1}{r} (T_{\alpha\omega}^{(n-1)} - T_{\phi\omega}^{(n-1)}), \quad h_\omega^{(n-1)} = H_{\alpha\omega}^{(n-1)}, r + \frac{1}{r} (H_{\alpha\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}), \\ q_\omega^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(n-1)}, r + \frac{1}{r} (2M_{\alpha\omega}^{(n-1)}, r - M_{\phi\omega}^{(n-1)}, r), \end{aligned}$$

где, в соответствии с соотношениями (20),

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)(n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_\alpha^{(k)(n-1)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3)(n-1)} + c (T_{\alpha\omega}^{(1)(n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)(n-1)}). \end{aligned}$$

Итерационное решение системы (22), с учетом ограниченности прогиба в центре пластины ( $C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = 0$ ), будет

$$u^{(n)} = b_1 w, r^{(n)} - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) dr dr + C_1^{(n)} r,$$

$$\Psi^{(n)} = b_2 w_{,r}^{(n)} + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) dr dr + C_3^{(n)} r,$$

$$w^{(n)} = C_5^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_7^{(n)} J_0(\sqrt{a} \kappa r) + w_{p\omega}^{(n)}(r).$$

где  $C_1^{(n)}$ ,  $C_3^{(n)}$ ,  $C_5^{(n)}$ ,  $C_7^{(n)}$  – константы интегрирования, определяемые на каждом шаге приближения из граничных условий;

$w_{p\omega}^{(n)}(r)$  – частное решение уравнения (22)<sub>3</sub>, включающее дополнительные «внешние» нагрузки.

В случае заделки контура пластины, используя условия (8), имеем:

$$C_1^{(n)} = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{R^2} \int r \int (a_2 h_\omega^{(n-1)} - a_4 p_\omega^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R},$$

$$C_3^{(n)} = -\frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{R^2} \int r \int (a_1 h_\omega^{(n-1)} - a_2 p_\omega^{(n-1)}) dr dr \Big|_{r=R},$$

$$C_5^{(n)} = \frac{w_{p\omega, r}^{(n)}(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) w_{p\omega}^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R))},$$

$$C_7^{(n)} = \frac{w_{p\omega, r}^{(n)}(R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) w_{p\omega}^{(n)}(R)}{\kappa(\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{a} \kappa R) J_1(\sqrt{a} \kappa R))}.$$

*Численные результаты* получены для трехслойной круглой пластины радиуса  $R = 1$  м, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–4–Д16Т. Толщины слоев пластины:  $h_1 = 0,02$  м,  $h_2 = 0,06$  м,  $h_3 = 0,4$  м; интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q_0 = 20$  МПа.

Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (19) принимаются в известном виде:

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases}$$

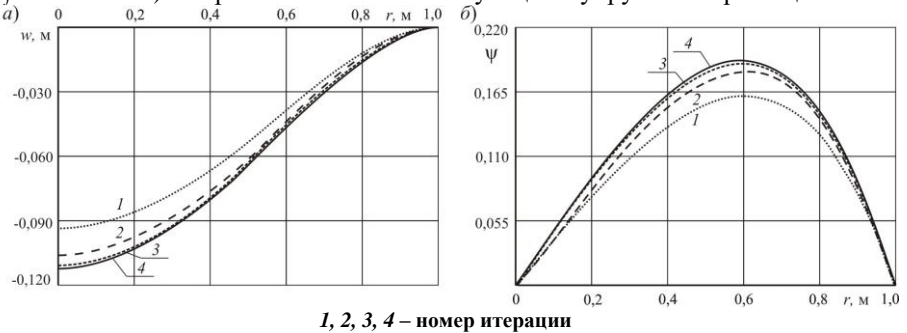
где  $A_k$ ,  $\alpha_k$  – константы нелинейности материалов слоев.

Для Д16Т:  $A_1 = 0,96$ ;  $\alpha_1 = 2,34$ ;  $\varepsilon_y^{(1)} = 0,735$  %, для фторопласта –  $A_3 = 0,905$ ;  $\alpha_3 = 1,48$ ;  $\varepsilon_s = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3$  %.

Рисунок 8 демонстрирует быструю сходимость метода упругих решений при основании средней жесткости ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м,  $t_f = 1$  МПа·м). Это подтверждают графики изменения прогиба  $w$  – (а) и относительного сдвига в заполнителе  $\psi$  – (б) вдоль радиуса. Номера кривых соответствует номеру итерации. За искомого решение принято 4-ое приближение, отличающееся от последующего менее чем на 0,5 %.

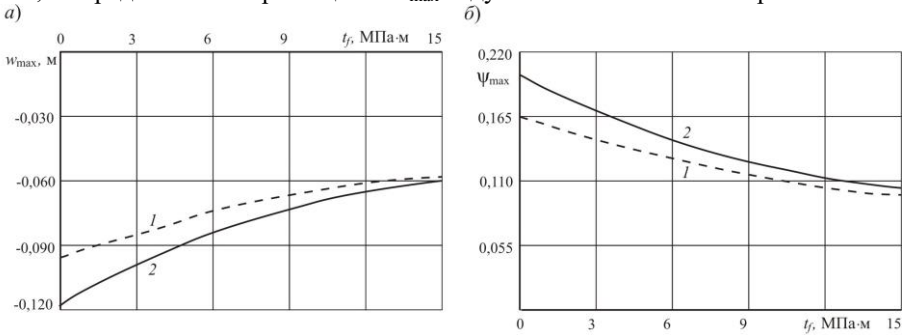
Рост расчетных перемещений за счет учета физической нелинейности материалов слоев составляет 19,5 %. При других значениях коэффициента сдвига основания учет физической нелинейности рассматриваемой пластины

приводит к увеличению расчетных перемещений до 21,7 % ( $t_f = 0$ ), и до 8,1 % ( $t_f = 10 \text{ МПа}\cdot\text{м}$ ) по сравнению с соответствующими упругими перемещениями.



**Рисунок 8. – Сходимость метода упругих решений ( $\kappa_0 = 100 \text{ МПа/м}$ )**

Рисунок 9 показывает изменение максимальных перемещений:  $a$  – прогиба  $w_{\max}$ ;  $b$  – сдвига  $\psi_{\max}$  в зависимости от величины коэффициента сдвига  $t_f$  ( $\kappa_0 = 100 \text{ МПа/м}$ ). С ростом  $t_f$  увеличивается жесткость основания, что приводит к уменьшению максимальных перемещений по модулю. Пластичность и физическая нелинейность материалов слоев здесь проявляется в меньшей степени: при  $t_f = 15 \text{ МПа}\cdot\text{м}$  разница между максимальными перемещениями в упругой и физически нелинейной пластине составляет не более 4,5 %. Отметим, что радиальные перемещения  $u_{\max}$  ведут себя аналогичным образом.



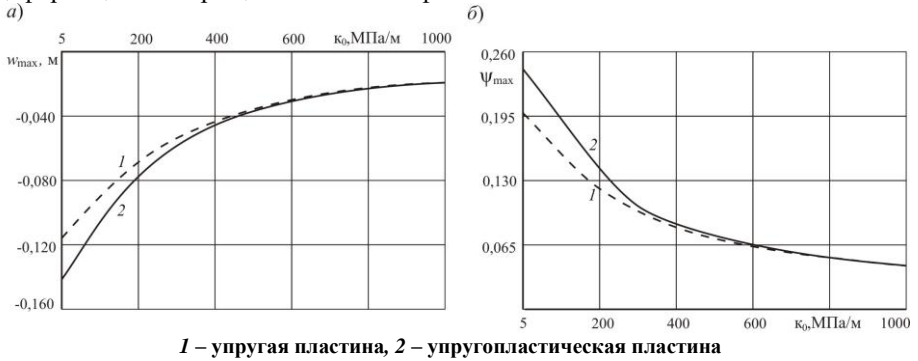
**1 – упругая пластина, 2 – упругопластическая пластина**

**Рисунок 9. – Зависимость максимальных перемещений от величины  $t_f$  ( $\kappa_0 = 100 \text{ МПа/м}$ )**

На рисунке 10 приведены графики изменения максимальных перемещений  $a$  – прогиба  $w_{\max}$ ;  $b$  – сдвига в заполнителе  $\psi_{\max}$  в зависимости от величины коэффициента сжатия основания  $\kappa_0$  при  $t_f = 1 \text{ МПа}\cdot\text{м}$ . С ростом коэффициента сжатия величина максимальных перемещений уменьшается по модулю. Разница между перемещениями в упругой и физически нелинейной пластине нивелируется – при коэффициенте сжатия основания  $\kappa_0 \geq 600 \text{ МПа/м}$  она составляет менее 1 %. Это объясняется уменьшением перемещений при увеличении

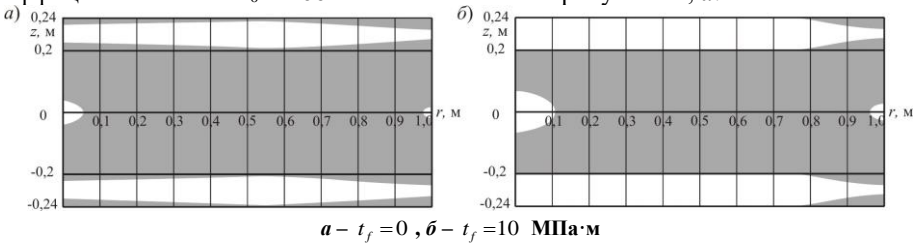


жесткости основания на сжатие, как следствие уменьшается интенсивность деформаций и сокращаются области физической нелинейности в слоях.



**Рисунок 10.** – Изменение максимальных перемещений от величины  $\kappa_0$  ( $t_f = 1$  МПа·м)

Распределение областей физической нелинейности материалов в слоях пластины (серый цвет заливки) при интенсивности нагрузки  $q_0 = 30$  МПа и коэффициенте сжатия  $\kappa_0 = 100$  МПа/м показано на рисунке 11, *a*.



**Рисунок 11.**– Области физической нелинейности в поперечном сечении пластины

Увеличение коэффициента сдвига основания приводит к существенному уменьшению областей нелинейности в несущих слоях и отсутствию их в центре пластины (рисунок 11, *b*).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В работе проведено теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных круговых пластин, связанных с упругим основанием Пастернака, и получены следующие новые научные результаты, включающие:

- механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования трехслойных круговых пластин, содержащие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, граничные условия, отличающиеся учетом наряду со сжатием основания его сдвиговых свойств [1–5, 10, 15–17, 25–27, 31–34];

- аналитические решения краевых задач об изгибе упругих круговых трехслойных пластин, содержащие расчетные формулы перемещений, деформаций, напряжений и внутренних усилий при произвольных осесимметричных распределенных нагрузках в случае заделки, шарнирного и свободного опираний ее контура, учитывающие оба коэффициента жесткости основания Пастернака, что позволяет давать прочностные инженерные оценки при упругой стадии работы материалов слоев [3–9, 12, 18–24, 30];

- аналитические рекуррентные решения краевых задач о деформировании физически нелинейных круговых трехслойных пластин, позволяющие алгоритмизировать процесс расчета, исследовать зависимость напряженно-деформированного состояния от упругопластических свойств материалов слоев, коэффициентов сжатия и сдвига основания при различных осесимметричных распределенных внешних нагрузках и граничных условиях [11, 13, 14, 28, 29, 35];

- численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, установивший зависимость величины перемещений, деформаций, напряжений и скорости сходимости метода упругих решений от коэффициентов сжатия и сдвига основания, геометрических и упругих параметров слоев, характеристик физической нелинейности материалов, величины внешней нагрузки, показавший, что для основания средней жесткости учет коэффициента сдвига ( $t_f = 10$  МПа·м) приводит к уменьшению перемещений упругой пластины на 37%, в то же время рост расчетных перемещений и деформаций за счет физической нелинейности составляет около 22 % [5, 7–9, 12–14, 28].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Полученные постановки и решения краевых задач, разработанные алгоритмы и компьютерные программы позволяют численно моделировать перемещения, деформации и напряжения в круговых трехслойных пластинах, связанных с упругими основаниями различной природы, включая грунтовые. Использование полученных механико-математических моделей и их численный параметрический анализ позволяет давать практические рекомендации при расчете слоистых пластин, что может привести к уменьшению материальных затрат и избежать дорогостоящих экспериментальных исследований. Аналитические решения представляют самостоятельную ценность как новые фундаментальные результаты.

Полученные результаты использованы в учебном процессе для студентов строительных специальностей в курсах «Теория упругости и пластичности» и «Строительная механика», читаемых на факультете «Промышленное и гражданское строительство» и при выполнении ГБТ НИСа Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Отдельные результаты предполагается использовать в расчетной практике НТЦК ОАО «Гомсельмаш».

Результаты внедрения подтверждены соответствующими актами и справками.

**СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ****Статьи в рецензируемых журналах и сборниках трудов**

1. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1(30). – С. 42–46.
2. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.
3. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.
4. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
5. Козел, А.Г. Деформированное состояние трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках [Электронный ресурс]. – 2018. – № 1. – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/17-60>. – Дата обращения: 11.06.2018.
6. Козел, А.Г. Механико-математическая модель деформирования трехслойной пластины на двухпараметрическом упругом основании / А.Г. Козел // НИРС 2017: сб. науч. работ студентов Республики Беларусь / Белорус. гос. ун-т. – Минск: БГУ, 2018. – С. 18–19.
7. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, №1. – С. 392–406.
8. Старовойтов, Э.И. Напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой пластины, связанной со сложным основанием / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Компьютерные моделирования: анализ, управления, оптимизация. – 2018. – № 2 (4). – С. 73–80.
9. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.
10. Козел, А.Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.
11. Козел, А.Г. Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 165–171.
12. Старовойтов, Э.И. Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трехслойной пластины / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – № 2. – С. 106–113.
13. Козел, А.Г. Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

14. Козел, А.Г. Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

### Материалы конференций

15. Козел, А.Г. Уравнение равновесия трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVIII Республ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2015 г.: в 2 ч./ Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – Ч.1. – С. 17–18.

16. Старовойтов, Э.И. Изгиб трехслойной упругой круговой пластины на основании с двумя характеристиками / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXII Междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 15–19 февраля 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва: ООО «ТР-принт», 2016. – Т. 1. – С. 166–171.

17. Козел, А.Г. Изгиб трехслойной пластины на основании с двумя характеристиками / А.Г. Козел // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы V Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 21-22 апреля 2016 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т трансп.– Гомель: БелГУТ, 2016. – Ч. 1. – С. 81–85.

18. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXIII Междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 13–17 февраля / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва: ООО "ТПП", 2017. – Т. 2. – С. 50–53.

19. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на сложном основании / А.Г. Козел // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. году науки, Гомель, 23–25 ноября 2017 г.: в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; редкол.: Ю.И. Кулаженко [и др.]. – Гомель: БелГУТ, 2017. – Ч. 2. – С. 189–191.

20. Козел, А.Г. Равномерное нагружение круглой трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXIV Междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 19–23 март. 2018 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва: ООО «ТР-принт», 2018. – Т. 1. – С. 130–133.

21. Козел, А.Г. Влияние основания Пастернака на деформирование трехслойной пластины / А.Г. Козел // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXI Республ. научн. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19–21 марта 2018 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – С. 59–60.

22. Козел, А.Г. Шарнирное опирание трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Новые направления развития приборостроения : материалы 11-й Международной научно-технической конференции молодых

ученых и студентов, Минск, 18–20 апреля 2018 г. / Белорус. нац. техн. ун-т.; редкол.: О. К. Гусев. [и др.]. – Минск: БНТУ, 2018. – С. 350.

23. Козел, А.Г. Влияние двухпараметрического основания на перемещения в трехслойной пластине / А.Г. Козел // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы VI Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 17–18 мая 2018 г.: в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; редкол.: А.А. Поддубный [и др.]. – Гомель: БелГУТ, 2018. – Ч. 1. – С. 77–79.

24. Козел, А.Г. Сэндвич-пластина на основании Пастернака / А.Г. Козел // Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 11–12 октября 2018 г.: в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; редкол.: Ю.И. Кулаженко [и др.]. – Гомель: БелГУТ, 2018. – Ч. 2. – С. 153–154.

25. Козел, А.Г. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины на сложном основании / А.Г. Козел // Приборостроение-2018: материалы 11-й Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 14–16 ноября 2018 г. / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол.: О.К. Гусев [и др.]. – Минск: БНТУ, 2018. — С. 287–289.

26. Козел, А.Г. Упругопластическая круговая трехслойная пластина на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXV Междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 18–22 марта 2019 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва: ООО «ТР-принт», 2019. – Т.1. – С. 123–125.

27. Козел, А.Г. Упругопластическая круговая трехслойная пластина, связанная с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXII Республ. научн. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2019 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины; редкол.: С.П. Жогаль [и др.] – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2019. – С. 22–23.

28. Козел, А.Г. Области физической нелинейности в трехслойной пластине на основании Пастернака / А.Г. Козел // Современные вопросы механики сплошных сред 2019: сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием, Чебоксары, 16–17 мая 2019 г./ Чувашский гос. ун-т имени И.Н. Ульянова. – Чебоксары, 2019. – С. 17–26.

29. Козел, А.Г. Упругопластический изгиб трехслойной пластины, защемленной по контуру, на сложном основании / А.Г. Козел, А.С. Оконечников // Проблемы безопасности на транспорте: матер. IX Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 28–29 ноября 2019 г.: в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол.: Ю. И. Кулаженко [и др.]. – Гомель: БелГУТ, 2019. – Ч. 2. – С. 218–220.

30. Козел, А.Г. Физически нелинейная пластина на основании Пастернака / А.Г. Козел // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова. – Вятчи, 16–20 март. 2020 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва: ООО «ТР-принт», 2020. – Т. 1. – С. 135–137.

### Тезисы докладов

31. Старовойтов, Э.И. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Динамиче-

ское деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докл. IV Междунар. науч. семинара, Москва, 15–19 февраля 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2016. – С. 141–143.

32. Козел, А.Г. Деформирование трехслойной пластины на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докл. V Междунар. науч. семинара, Москва, 17–19 октября 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2016. – С. 85–87.

33. Козел, А.Г. Постановка задачи о деформировании круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Инновации в технико-экономических системах: тез. докл. III Междунар. науч.-техн. конф. магистрантов, Гомель, 1–2 февраля 2017 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол.: А.Б. Невзорова [и др.]. – Гомель: БелГУТ, 2017. – С. 88–89.

34. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на сложном основании / А.Г. Козел // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докл. VI Междунар. науч. семинара, Москва, 8–10 ноября 2017 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет) – Москва, 2017. – С. 68–70.

35. Козел, А.Г. Упругопластическая круговая трехслойная пластина на основании Пастернака / А.Г. Козел, А.С. Оконечников // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докл. VII Междунар. науч. семинара, Москва, 12–13 ноября 2018 г / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2018. – С. 76–78.



## РЕЗЮМЕ

Козел Анастасия Григорьевна

### **Деформирование круговой трехслойной пластины на двухпараметрическом основании Пастернака**

*Ключевые слова:* трехслойная круговая пластина, основание Пастернака, упругость, пластичность, аналитические решения, численный анализ.

*Объект исследования:* трехслойные круговые пластины на двухпараметрическом основании; *предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние объекта.

*Цель работы:* разработка и анализ механико-математических моделей деформирования упругой и физически нелинейной трехслойных круговых пластин, связанных с основанием Пастернака, при различных нагрузках и граничных условиях.

Впервые приведены механико-математические модели деформирования упругой и физически нелинейной круговых трехслойных пластин на двухпараметрическом основании Пастернака. В конечном виде получено аналитическое решение соответствующей краевой задачи для упругой пластины, для физически нелинейной пластины – в итерационном виде. Решения содержат расчетные формулы для параметров напряженно-деформированного состояния, которые учитывают влияние коэффициентов сжатия и сдвига материала основания, в случае заделки, шарнирного или свободного опирания контура пластины. Разработаны алгоритмы решения поставленных задач.

Численно исследованы параметры напряженно-деформированного состояния физически линейных и нелинейных трехслойных пластин, связанных с упругим двухпараметрическим основанием, в зависимости от коэффициентов жесткости основания, геометрических и упругих параметров слоев, характеристик физической нелинейности, граничных условий, величины внешней нагрузки.

Результаты исследований являются новыми и вносят существенный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела, могут быть использованы заинтересованными проектными организациями в строительстве и машиностроении.

## РЭЗІЮМЭ

Козел Анастасія Рыгораўна

### Дэфармаванне кругавой трохслаёвай пласціны на двухпараметрычнай аснове Пастарнака

*Ключавыя словы:* трохслаёвыя кругавыя пласціны, аснова Пастарнака, пругкасць, пластычнасць, аналітычныя рашэнні, лікавы аналіз.

*Аб'ект даследавання:* трохслаёвыя кругавыя пласціны на двухпараметрычнай аснове; *прадмет даследавання:* напружана-дэфармаваны стан аб'екта.

*Мэта работы:* распрацоўка і аналіз механіка-матэматычных мадэляў дэфармавання пругкай і фізічна нелінейнай трохслаёвых кругавой пласціны, звязанай з асновай Пастарнака, пры розных нагрузках і гранічных умовах.

Упершыню прыведзены механіка-матэматычныя мадэлі дэфармавання пругкай і фізічна нелінейнай кругавых трохслаёвых пласцін на двухпараметрычнай аснове Пастарнака. У канчатковым выглядзе атрымана аналітычнае рашэнне адпаведнай краёвай задачы для пругкай пласціны, для фізічна нелінейнай пласціны - у ітэрацыйным выглядзе. Рашэння ўтрымліваюць разліковыя формулы для параметраў напружана-дэфармаванага стану, якія ўлічваюць уплыў каэфіцыентаў сціску і зруху матэрыялу асновы, у выпадку заладкі, шарнірнай або свабоднай апоры контуру пласціны. Распрацаваны алгарытмы рашэння пастаўленых задач.

Лікава даследаваныя параметры напружана-дэфармаванага стану фізічна лінейных і нелінейных трохслаёвых пласцін, звязаных з пругкай двухпараметрычнай асновай, у залежнасці ад каэфіцыентаў жорсткасці асновы, геаметрычных і пругкіх параметраў слаёў, характарыстык фізічнай нелінейнасці, гранічных умоў, велічыні вонкавай нагрузкі.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і ўносяць істотны ўклад у развіццё механікі дэфармаванага цвёрдага цела, могуць быць выкарыстаны зацікаўленымі практнымі арганізацыямі ў будаўніцтве і машынабудаванні.



## SUMMARY

Kozel Anastasiya Grigoryevna

### **Deformation of a circular three-layer plate on a two-parameter Pasternak foundation**

*Keywords:* three-layer circular plates, Pasternak foundation, elasticity, plasticity, analytical solutions, numerical analysis

*Object of study:* three-layer circular plates on a two-parameter foundation; *subject of study:* stress-strain state of the object.

*Objective of the work:* to develop and analyze mechanical and mathematical models of deformation of elastic and physically nonlinear circular three-layer plates connected with the Pasternak foundation under various loads and boundary conditions.

For the first time, mechanical - mathematical models of deformation of elastic and nonlinear circular three-layer plates on a two-parameter Pasternak foundation are presented. In the final form, an analytical solution is obtained for the corresponding boundary value problem for an elastic plate, for a physically nonlinear plate, in an iterative form. The solutions contain calculation formulas for the parameters of the stress-strain state, which take into account the influence of the compression and shear coefficients of the foundation material in the case of embedment, articulation or free support of the plate contour. Algorithms for solving the tasks are developed.

The parameters of the stress-strain state of physically linear and nonlinear three-layer plates associated with an elastic two-parameter foundation are studied numerically, depending on the stiffness coefficients of the foundation, geometric and elastic parameters of the layers, characteristics of physical nonlinearity, boundary conditions, and the value of the external load.

The research results are new and make a significant contribution to the development of mechanics of a deformable solid, can be used by interested design organizations in construction and engineering.

Научное издание

*КОЗЕЛ Анастасия Григорьевна*

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ  
НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 14.10.2020 г. Формат бумаги 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 1,4. Тираж 90 экз. Зак. 2925.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 1/361 от 13.06.2014.  
№ 3/1583 от 14.11.2017.  
Ул. Кирова, 34, 246653. Гомель