

УДК 620.178

Д. А. ЧЕРНОУС<sup>1</sup>, Е. В. КОДНЯНКО<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь<sup>2</sup>ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

## ОЦЕНКА ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРОВА ОСНОВАНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПОКРЫТИЯ

В осесимметричной постановке с использованием интегрального преобразования Ханкеля получено решение задачи теории упругости о действии распределенной нагрузки на покрытие, образованное трансверсально изотропным материалом, которое находится на изотропном основании. Предложен вариант решения задачи с помощью упрощенной модели, где для описания деформирования покрытия используется модель Винклера, а основание рассматривается как изотропное полупространство, нагрузки на которое передаются без изменений с внешней поверхности покрытия. Проведен сравнительный анализ результатов использования модели Винклера и точного решения, основанного на интегральном преобразовании.

**Ключевые слова:** упругий слой, трансверсально-изотропный материал, осесимметричная постановка, функция Лява, преобразование Ханкеля, модель Винклера.

**Введение.** В настоящее время в различных узлах машин и механизмов широко используются детали с покрытиями или модифицированным поверхностным слоем. Применение покрытия позволяет без изменения основного материала детали существенно изменить параметры контактного взаимодействия (контактную жесткость, коэффициент трения, скорость изнашивания и др.). Выбор оптимальных свойств, толщин и способов нанесения покрытия требует разработки расчетных методик, позволяющих с приемлемой точностью прогнозировать эти параметры. Данное обстоятельство обусловило значительный научный интерес к решению контактных задач для тел с покрытиями.

Задачи о взаимодействии жесткого индентора с линейно-упругим покрытием, свободно лежащим или адгезионно связанным с упругим основанием, решены для условий плоской деформации и плоского напряженного состояния [1], а также в осесимметричной [2] и произвольной пространственной [3, 4] постановках. Общие (для покрытия произвольной толщины) решения данных задач предполагают использование интегральных преобразований, что затрудняет применение разработанных математических моделей для инженерных расчетов. В связи с этим получили широкое распространение асимптотические решения рассматриваемых задач, обеспечивающие приемлемую точность расчетных оценок для относительно тонких (толщина покрытия  $h$  много меньше радиуса  $R$  области контакта) и относительно толстых ( $h \gg R$ ) покры-

тий [5–10]. Результаты решения контактной задачи для покрытия, находящегося на недеформированном основании, при условии  $h \gg R$  с увеличением толщины  $h$  асимптотически сходятся к результатам решения задачи Герца [11] для полупространства, а при условии  $h \ll R$  с уменьшением  $h$  – к результатам, полученным при моделировании покрытия винклеровым основанием [12].

В научной литературе в настоящее время более полно и подробно исследованы асимптотические решения контактных задач для толстых покрытий. Получены разложения общих решений в степенные ряды по малому параметру [5, 6]  $q_a = R/h$ , установлена расчетная зависимость от данного параметра средней относительной погрешности решения Герца [7]. Для тонких изотропных [8, 9] и анизотропных [10, 13] покрытий показано, что модель основания Винклера обеспечивает те же расчетные оценки упругих смещений, что и общее решение, в котором оставлены линейные по малому параметру  $q_h = h/R$  слагаемые. Однако не была определена погрешность расчетов, обусловленная использованием данной модели и возрастающая с увеличением параметра  $q_h$ . Не исследовалось влияние на эту погрешность анизотропии материала покрытия, способа крепления покрытия к основанию и деформирования основания. Вместе с тем асимптотическое приближение общего решения задачи теории упругости для тонкого слоя вследствие своей относительной простоты широко используется при описании деформирования неоднородных вязкоупругих [14, 15] и упругопластических [16] покрытий.

В связи с вышесказанным целью настоящего исследования является установление зависимости погрешности расчетных оценок, полученных на основе модели винклера основания, от толщины и анизотропии материала тонкого покрытия, а также от относительной жесткости основания.

**Постановка задачи.** Рассмотрим деформируемый слой толщиной  $h$ , расположенный на деформируемом полупространстве. Полупространство образовано линейно упругим изотропным материалом, который характеризуется модулем Юнга  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ . Ось  $z$ , перпендикулярная к поверхности полупространства, является осью симметрии упругих характеристик трансверсально изотропного материала слоя. Для описания его свойств используем продольный  $E_z$  (вдоль оси симметрии) и поперечный  $E_{izo}$  (в плоскости изотропии) модули упругости; коэффициент Пуассона  $\nu_{izo}$  в плоскости изотропии; коэффициент Пуассона  $\nu_{zr}$  и модуль сдвига  $G_{zr}$  для любой плоскости, содержащей ось  $z$  и перпендикулярной плоскости изотропии.

Будем рассматривать два режима нагружения слоя:

1 На внешней поверхности слоя по круговой площадке радиуса  $R$  равномерно распределено давление  $p_c$ .

2 По той же площадке осесимметрично распределено сдвиговое напряжение  $q = q_c (r/R)$ , где  $q_c$  – максимальное значение напряжения сдвига,  $r$  – расстояние от рассматриваемой точки покрытия до оси  $z$ . Такая зависимость позволит в дальнейшем избежать неопределенности при  $r = 0$ .

Описание деформирования слоя и полупространства будем проводить в цилиндрической системе координат  $z, r, \varphi$ . Ось  $z$  проходит через центр площадки, по которой распределена нагрузка, перпендикулярно поверхности полупространства. Поверхность контакта слоя с полупространством соответствует координате  $z = 0$ , в внешняя поверхность слоя  $- z = h$ . Будем рассматривать два идеализированных режима фиксации слоя на поверхности полупространства.

1 Опиране без трения. При этом на поверхности  $z = 0$  равна нулю сдвиговая компонента тензора напряжений  $\sigma_{zr}$  и выполняется условие неразрывности осевой проекции упругих смещений  $u_z$ .

2 Жесткое сцепление поверхностей. При этом на поверхности  $z = 0$  выполняются условия неразрывности осевой  $u_z$  и радиальной  $u_r$  проекций упругих смещений.

В цилиндрической системе координат связь компонент тензора напряжений и деформаций для материала слоя можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= C_{1111}\varepsilon_{rr} + C_{1122}\varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{1133}\varepsilon_{zz}; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= C_{1111}\varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{1122}\varepsilon_{rr} + C_{1133}\varepsilon_{zz}; \\ \sigma_{zz} &= C_{1133}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}) + C_{3333}\varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{rz} = C_{1313}\gamma_{rz}; \\ \sigma_{r\varphi} &= C_{1212}\gamma_{r\varphi}; \quad \sigma_{z\varphi} = C_{1313}\gamma_{z\varphi}.\end{aligned}\tag{1}$$

Углы сдвига, использованные в уравнениях (1), связаны со сдвиговыми компонентами тензора деформаций  $\gamma_{rz} = 2\varepsilon_{rz}$ ,  $\gamma_{z\varphi} = 2\varepsilon_{z\varphi}$ ,  $\gamma_{r\varphi} = 2\varepsilon_{r\varphi}$ .

Ненулевые компоненты тензора модулей упругости выражаются через упругие характеристики  $E_z, E_{izo}, \nu_{izo}, \nu_{zr}, G_{zr}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}C_{1111} &= \frac{Z(E_z - E_{izo}\nu_{zr}^2)}{E_z(1 + \nu_{izo})}, \quad C_{1122} = \frac{Z(E_z\nu_{izo} + E_{izo}\nu_{zr}^2)}{E_z(1 + \nu_{izo})}, \quad C_{1133} = Z\nu_{zr}, \\ C_{3333} &= Z\frac{E_z(1 - \nu_{izo})}{E_{izo}}, \quad C_{1212} = G_{izo}, \quad C_{1313} = G_{zr}.\end{aligned}$$

Здесь для краткости записи введены комбинации характеристик

$$Z = \frac{E_z E_{izo}}{E_z(1 - \nu_{izo}) - 2E_{izo}\nu_{zr}^2}, \quad G_{izo} = \frac{E_{izo}}{2(1 + \nu_{izo})}.$$

Аналогичные уравнениям (1) соотношения для материала полупространства имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= Z_0 \left[ (1 - \nu_0)\varepsilon_{rr} + \nu_0(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) \right]; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = Z_0 \left[ (1 - \nu_0)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu_0(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) \right]; \\ \sigma_{zz} &= Z_0 \left[ (1 - \nu_0)\varepsilon_{zz} + \nu_0(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}) \right]; \quad \sigma_{rz} = G_0\gamma_{rz}; \quad \sigma_{r\varphi} = G_0\gamma_{r\varphi}; \quad \sigma_{z\varphi} = G_0\gamma_{z\varphi}.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$Z_0 = \frac{E_0}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)}, \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}.$$

### Решение задачи.

*Использование интегрального преобразования.* Для всех вариантов решаемой задачи конструкция исследуемого объекта и режим нагружения имеют осесимметричный характер. При этом уравнения равновесия элементарного объема материала в цилиндрической системе координат следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (3)$$

Связь компонент тензора деформаций с проекциями упругого смещения для осесимметричной постановки задачи в цилиндрической системе координат описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{z\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi} = 0, \quad u_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Один из распространенных методов решения задач теории упругости для слоя подразумевает введение функции Лява  $\chi$ , которая связана с ненулевыми проекциями упругого смещения следующим образом [17]:

$$u_r = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = A \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + B \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Здесь  $A, B$  – не зависящие от координат величины, определяемые при подстановке выражений (5) в уравнения равновесия.

Подставим соотношения (5) последовательно в уравнения (4), (1) и (3). После математических преобразований можно установить, что первое уравнение равновесия (3) выполняется для любой функции  $\chi$ , если

$$A = \frac{C_{1111}}{C_{1133} + G_{zr}}, \quad B = \frac{G_{zr}}{C_{1133} + G_{zr}}. \quad (6)$$

Тогда второе уравнение (3) сводится к следующему

$$a \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} + b \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + c \left( \frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = 0. \quad (7)$$

Здесь для краткости записи введены комбинации упругих характеристик

$$a = C_{3333} G_{zr}, \quad b = C_{1111} C_{3333} - C_{1133} (C_{1133} + 2G_{zr}), \quad c = C_{1111} G_{zr}.$$

Слой содержит точки с координатой  $r = 0$  и не ограничен по радиальной координате. Следовательно, функция  $\chi$  должна обеспечить ограниченность

параметров напряженно-деформированного состояния при  $r = 0$  и равенство напряжений и деформаций нулю на бесконечном удалении от площадки приложения нагрузки (при  $r \rightarrow \infty$ ). Для нахождения общего решения уравнения (7) будем использовать интегральное преобразование Ханкеля [17]

$$\tilde{\chi}(k, z) = \int_0^{\infty} \chi(r, z) r J_0(kr) dr . \quad (8)$$

Здесь  $J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, являющаяся решением уравнения [18]

$$\frac{d^2 J_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0(x)}{dx} + J_0(x) = 0 . \quad (9)$$

Умножим обе части равенства (7) на  $r J_0(kr)$  и произведем интегрирование по  $k$  от нуля до бесконечности. В результате с учетом соотношения (9) получим уравнение для изображения  $\tilde{\chi}(k, z)$  искомой функции

$$a \frac{\partial^4 \tilde{\chi}}{\partial z^4} - bk^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} + ck^4 \tilde{\chi} = 0 . \quad (10)$$

Общее решение уравнения (10) будем искать в виде

$$\tilde{\chi} = \sum_{i=1}^4 D_i \exp(\gamma_i kz) . \quad (11)$$

Здесь  $D_i$  – коэффициенты, являющиеся функциями переменной  $k$ , которые определяются из граничных условий. Подставив представление (11) в уравнение (10), определим четыре значения параметра  $\gamma$ :

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} \left( b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right)}, \quad \gamma_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} \left( b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right)} . \quad (12)$$

Зная функцию  $\tilde{\chi}(k, z)$ , для определения функции Лява применим обратное преобразование Ханкеля

$$\chi(r, z) = \int_0^{\infty} \tilde{\chi}(k, z) k J_0(kr) dk . \quad (13)$$

Далее по формулам (5) определяем проекции упругого смещения, затем по формулам (4) и (1) – компоненты тензоров деформации и напряжения.

При реализации изложенной методики решения для изотропного полупространства вместо соотношений (1) при определении компонент тензора напряжений используются равенства (2). В этом случае константы  $A_0$  и  $B_0$ , аналогичные величинам  $A$  и  $B$  в представлении (5), таковы:

$$A_0 = 2(1 - \nu_0), \quad B_0 = 1 - 2\nu_0 . \quad (14)$$

Здесь и далее нижний индекс «0» означает, что соответствующая величина относится к изотропному полупространству.

Для констант, входящих в уравнение (7), в случае изотропного материала получим:  $a_0 = c_0 = 1$ ,  $b_0 = 2$ . Тогда использование выражения (11) общего решения уравнения (10) приведет к двум различным значениям параметра  $\gamma$ :  $\gamma = \pm 1$ . Следовательно, для изотропного полупространства представление (11) требуется дополнить другими функциями. Заменим в (11) коэффициент  $D$  некоторой заранее не известной функцией координаты  $z$  и подставим полученное представление в (10) при  $a_0 = c_0 = 1$ ,  $b_0 = 2$ . После ряда математических преобразований для функции  $\tilde{\chi}_0(k, z)$  получим

$$\tilde{\chi}_0 = (D_{01} + kzD_{02})\exp(kz) + (D_{03} + kzD_{04})\exp(-kz). \quad (15)$$

Здесь  $D_{0i}$  – определяемые из граничных условий коэффициенты для полупространства. Переменная  $k$  при  $D_{02}$  и  $D_{04}$  обеспечивает одинаковую размерность всех слагаемых. Так как полупространство не ограничено в области отрицательных значений  $z$ , то  $D_{03} = 0$  и  $D_{04} = 0$ .

При использовании интегральных преобразований итоговые выражения проекций упругого смещения  $u_r$ ,  $u_z$  и компонент тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{rz}$  представляют собой интегралы по переменной  $k$  от нуля до бесконечности. Поэтому при нахождении коэффициентов  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_{01}, D_{02}$  удобнее использовать граничные условия не для самих величин  $u_r, u_z, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$ , а для их изображений. При этом приравниваются не интегралы, а подынтегральные выражения. В частности, изображения заданных на поверхности слоя ( $z = h$ ) нормального давления и сдвигового напряжения имеют следующий вид:

$$p(r) = \begin{cases} p_c, & r < R; \\ 0, & r \geq R; \end{cases} \quad q(r) = \begin{cases} q_c \frac{r}{R}, & r < R; \\ 0, & r \geq R; \end{cases} \quad (16)$$

$$\tilde{p}(k) = \int_0^{\infty} p(r)rJ_0(kr)dr = p_c \frac{R}{k} J_1(kR); \quad \tilde{q}(k) = \int_0^{\infty} q(r)rJ_1(kr)dr = q_c \frac{R}{k} J_2(kR).$$

В представлении сдвигового напряжения использована функция Бесселя первого порядка  $J_1(x)$ . Данный выбор обусловлен тем, что в итоговом выражении для сдвиговой компоненты  $\sigma_{rz}$  функция  $J_0(x)$  заменяется функцией  $J_1(x)$  в соответствии с правилом [18]:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x).$$

Нормальное давление  $p(r)$  определяет осевую компоненту тензора напряжений  $\sigma_{zz}$  в слое при  $z = h$ :

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=h} = -p(r). \quad (17)$$

Выразим компоненту  $\sigma_{zz}$  через функцию Лява с использованием соотношений (5), (4) и (1). Затем воспользуемся представлением (13) с учетом общего решения (11). После выполнения математических преобразований равенство (17) переписывается в виде

$$\sum_{i=1}^4 \gamma_i (C_{3333} \gamma_i^2 B - C_{3333} A + C_{1133}) \exp(\gamma_i kh) D_i = -\frac{\tilde{p}}{k^3}. \quad (18)$$

Сдвиговое напряжение  $q(r)$  на поверхности слоя определяет компоненту  $\sigma_{rz}$  при  $z = h$ . Следовательно

$$\sigma_{rz} \Big|_{z=h} = q(r) \Rightarrow \sum_{i=1}^4 [\gamma_i^2 (1-B) + A] \exp(\gamma_i kh) D_i = \frac{\tilde{q}}{G_{zr} k^3}. \quad (19)$$

Условия неразрывности осевой и сдвиговой компонент тензора напряжений на границе «слой – полупространство» позволяют записать уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \Big|_{z=0} = \sigma_{zz0} \Big|_{z=0} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^4 \gamma_i (C_{3333} \gamma_i^2 B - C_{3333} A + C_{1133}) D_i &= -2G_0 [D_{01} - D_{02} (1 - 2\nu_0)]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{z=0} = \sigma_{rz0} \Big|_{z=0} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 [\gamma_i^2 (1-B) + A] D_i = \frac{G_0}{G_{zr}} (D_{01} + 2\nu_0 D_{02}). \quad (21)$$

Неразрывность осевой проекции упругого смещения сводится к

$$u_z \Big|_{z=0} = u_{z0} \Big|_{z=0} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (\gamma_i^2 B - A) D_i = -2[D_{01} - D_{02} (1 - 2\nu_0)]. \quad (22)$$

При опирании слоя на поверхность полупространства без трения на данной поверхности отсутствует сдвиговое напряжение

$$\sigma_{rz} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow D_{01} + 2\nu_0 D_{02} = 0. \quad (23)$$

При сцеплении поверхностей слоя и полупространства должно выполняться условие неразрывности радиальной проекции упругого смещения

$$u_r \Big|_{z=0} = u_{r0} \Big|_{z=0} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 \gamma_i D_i = D_{01} + D_{02}. \quad (24)$$

Система линейных алгебраических уравнений (18)–(23) (или (18)–(22), (24)) позволяет определить коэффициенты  $D_1$ – $D_4$ ,  $D_{01}$ ,  $D_{02}$ , которые будут зависеть от переменной интегрирования  $k$ . Данные коэффициенты однозначно определяют интегральное преобразование функции Лява (11) для слоя или (15) для полупространства. Таким образом, получено решение задачи теории упругости для трансверсально-изотропного слоя на изотропном полупространстве. Данное решение значительно проще описанного в работе [3] и требующего использования двойного интегрального преобразования для трех бигармонических функций.

*Использование гипотезы Винклера.* Если рассматривать слой как основание Винклера [12], то параметры напряженно-деформированного состояния данного слоя не будут зависеть от осевой координаты  $z$ . Такой слой передает без изменений приложенные к его поверхности давления  $p(r)$  и  $q(r)$  на поверхность полупространства. В данном случае для определения проекций смещения точек поверхности  $z = 0$  можно использовать известные [17] решения задач Буссинеска и Черрути для изотропного линейно-упругого полупространства. Перейдем в них от декартовой системы координат к цилиндрической. Используя принцип суперпозиции, проекции упругого смещения точек поверхности  $z = 0$  полупространства представим в виде интегралов

$$\begin{aligned}
 u_{z0}|_{z=0} &= \frac{p_c(v_0 - 1)}{2\pi G_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\psi d\rho}{\eta(r, \rho, \varphi, \psi)} + \frac{q_c(2v_0 - 1)}{4\pi G_0 R} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 (r \cos(\psi - \varphi) - \rho) d\psi d\rho}{\eta(r, \rho, \varphi, \psi)^2}; \\
 u_{r0}|_{z=0} &= \frac{p_c(1 - 2v_0)}{4\pi G_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r - \rho \cos(\psi - \varphi)) d\psi d\rho}{\eta(r, \rho, \varphi, \psi)} + \frac{q_c}{2\pi G_0 R} \times \\
 &\times \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{(1 - v_0) \cos(\psi - \varphi)}{\eta(r, \rho, \varphi, \psi)} + \frac{v_0 f(r, \rho, \varphi, \psi)}{\eta(r, \rho, \varphi, \psi)^3} \right] \rho^2 d\psi d\rho. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Здесь для краткости записи введены функции

$$\begin{aligned}
 \eta(r, \rho, \varphi, \psi) &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi)}, \\
 f(r, \rho, \varphi, \psi) &= (r \cos \varphi - \rho \cos \psi)(r \sin \varphi - \rho \sin \psi) \sin(\psi + \varphi) + \\
 &+ (r \cos \varphi - \rho \cos \psi)^2 \cos \varphi \cos \psi + (r \sin \varphi - \rho \sin \psi)^2 \sin \varphi \sin \psi.
 \end{aligned}$$

В результате численного интегрирования в (25) можно убедиться в соблюдении условия осесимметричности для смещений точек поверхности полупространства. То есть радиальная и осевая проекции этих смещений не зависят от угла  $\varphi$ .

Определим смещения точек внешней  $z = h$  поверхности слоя относительно поверхности полупространства. Основание Винклера деформируется только под областью приложения нагрузки. При этом давление в окрестности некоторой точки поверхности основания прямо пропорционально вертикальному смещению данной точки. Так как нормальное давление в диапазоне от  $r = 0$  до  $r = R$  распределено равномерно, то и относительное вертикальное смещение в данном диапазоне не будет зависеть от  $r$ :

$$u_{z\text{отн}} = u_z|_{z=h} - u_{z0}|_{z=0} = -\frac{p_c}{k_n}, \quad (26)$$

где  $k_n$  – коэффициент нормальной жесткости основания Винклера.

В работе [19] определены коэффициенты  $k_n$  для тонкого трансверсально изотропного слоя, расположенного на недеформируемой поверхности. Пока-

зано, что при опирании слоя без трения  $k_n = \frac{C_{1111}C_{3333} - C_{1133}^2}{C_{1111}h}$ , а при жест-

ком сцеплении с поверхностью  $k_n = \frac{C_{3333}}{h}$ .

Для сдвиговых напряжений классическая модель винклера основания не используется. Однако, как было показано в [20], в нулевом приближении по толщине слоя ( $h/R \rightarrow 0$ ) выполняется прямая пропорциональность между сдвиговой компонентой тензора напряжений  $\sigma_{rz}$  на поверхности слоя и радиальным смещением точек поверхности. При этом

$$u_{r\text{отн}} = u_r|_{z=h} - u_{r0}|_{z=0} = \frac{q_c}{k_\tau} \frac{r}{R}. \quad (27)$$

Здесь  $k_\tau = \frac{G_{zr}}{h}$  – коэффициент сдвиговой жесткости слоя.

Таким образом, при использовании модели основания Винклера проекции упругого смещения точек внешней поверхности слоя в области распределения нагрузки задаются соотношениями

$$u_z|_{z=h} = u_{z\text{отн}} + u_{z0}|_{z=0}, \quad u_r|_{z=h} = u_{r\text{отн}} + u_{r0}|_{z=0}. \quad (28)$$

Здесь проекции смещений точек поверхности полупространства  $u_{z0}|_{z=0}$ ,  $u_{r0}|_{z=0}$  определяются интегралами (25), а проекции относительных смещений  $u_{z\text{отн}}$ ,  $u_{r\text{отн}}$  – равенствами (26) и (27).

**Результаты расчетов.** Рассмотрим пример использования описанных расчетных методик. В рамках примера изотропное полупространство будет образовано алюминием. Выбор данного материала позволяет анализировать как относительно «мягкие», так и относительно «жесткие» покрытия.

В качестве материала «мягкого» (антифрикционного) покрытия рассмотрим эпоксидную смолу, армированную углеродными волокнами [21]. Волокна ориентированы нормально к поверхности полупространства. Объемная доля волокон составляет 5 %. Для сравнения будем рассматривать также покрытие из углепластика при том же соотношении компонент, но хаотичной ориентации волокон. Материал данного покрытия является макроскопически изотропным.

Относительно «жесткое» (упрочняющее) покрытие образовано анодным оксидом алюминия, ослабленным сплошными (по всей толщине слоя) цилиндрическими порами [22]. Объемная доля пор – 15 %. Также будем рассматривать покрытие из пористого оксида алюминия при равномерном распределении сферических пор.

Заемствованные из литературных источников значения упругих характеристик изотропных материалов, использованных в расчетном примере, представлены в таблице 1. Для определения эффективных упругих характеристик трансверсально-изотропных материалов композитных покрытий используем

трехфазную модель однонаправленно волоконно-армированного композита, описанную, в частности, в работе [23]. Значения характеристик макроскопически изотропных композитов определялись путем ориентационного усреднения характеристик однонаправленно армированного материала [23]. Результаты использования данной модели представлены в таблице 2.

Таблица 1 – Упругие характеристики изотропных материалов

Материал	$E$ , ГПа	$\nu$	Источник информации
Алюминий	66	0,343	[24]
Фторопласт	0,33	0,489	[25]
Эпоксидная смола	0,33	0,34	[26]
Технический углерод (волокна)	228	0,257	[21]
Оксид алюминий	140	0,321	[27]

Таблица 2 – Расчетные значения упругих характеристик трансверсально-изотропных и макроскопически изотропных ( $E_i, \nu_i$ ) материалов композитных покрытий

Композит	$E_z$ , ГПа	$E_{z0}$ , ГПа	$\nu_{z0}$	$\nu_{zr}$	$G_{zr}$ , ГПа	$E_r$ , ГПа	$\nu_i$
Углепластик	11,714	0,402	0,504	0,331	0,136	2,262	0,268
Пористый оксид алюминия	119,023	92,505	0,318	0,321	39,167	99,628	0,297

При сравнительном анализе расчетных методик будем сопоставлять значения вертикального и радиального смещений точек поверхности слоя, полученные при использовании преобразования Ханкеля функции Лява для слоя (11) и полупространства (15), с соответствующими результатами использования гипотезы Винклера основания (28). Для оценки погрешности расчетов введем следующие отношения:

$$\alpha_{p \max} = \frac{u_{z \max}}{u_{z0 \max} - \frac{p_c}{k_n}}, \quad \alpha_{p1/2} = \frac{u_{z1/2}}{u_{z01/2} - \frac{p_c}{k_n}},$$

$$\alpha_{q \max} = \frac{u_{r \max}}{u_{r0 \max} + \frac{q_c r_{\max}}{k_\tau R}}, \quad \alpha_{q1/2} = \frac{u_{r1/2}}{u_{r01/2} + \frac{q_c}{2k_c}}.$$

Здесь  $u_{z \max}$  – максимальное (при  $r = 0$ ) значение вертикального смещения точек внешней поверхности слоя, вычисленное по уточненной методике с использованием преобразования Ханкеля при  $q_c = 0$ ;  $u_{z0 \max}$  – максимальное (при  $r = 0$ ) значение вертикального смещения точек поверхности основания, вычисленное по формулам (25) при  $q_c = 0$ ;  $u_{z1/2}$ ,  $u_{z01/2}$  – смещения, вычисленные по тем же соотношениям для  $r = R/2$ ;  $u_{r \max}$  – максимальное (при  $r = r_{\max}$ ) значение радиального смещения точек внешней поверхности слоя, вычисленное по уточненной методике с использованием преобразования Ханкеля при  $p_c = 0$ ;  $u_{r0 \max}$  – максимальное значение радиального смещения точек по-

верхности основания, вычисленное по формулам (25) при  $p_c = 0$ ;  $u_{r1/2}$ ,  $u_{r01/2}$  – смещения, вычисленные по тем же соотношениям для  $r = R/2$ . Максимум радиального смещения точек поверхности при  $p_c = 0$  соответствует радиальной координате  $r_{\max} = 0,85R$ .

Чем ближе значения введенных отношений к единице, тем меньше погрешность расчетов, связанная с использованием модели основания Винклера. Очевидно, что эта погрешность будет возрастать с увеличением параметра  $q_h$ , равного отношению толщины слоя к радиусу распределения поверхностной нагрузки.

На рисунке 1 представлены результаты расчета отношений  $\alpha_{p\max}$  и  $\alpha_{p1/2}$  для покрытия из армированной эпоксидной смолы. Заметим, что во всём рассматриваемом диапазоне толщины покрытия (до  $0,6 a$ ) использование гипотезы Винклера приводит к погрешности  $\pm 5\%$  по сравнению со значениями, полученными методом интегрального преобразования.

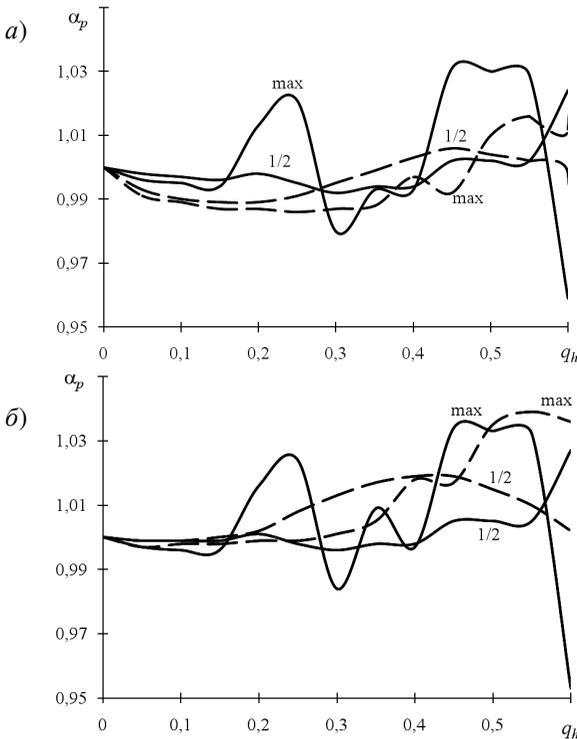


Рисунок 1 – Отношения  $\alpha_{p\max}$  и  $\alpha_{p1/2}$  при разных  $q_h$  для армированной эпоксидной смолы при наличии (а) и при отсутствии (б) сцепления покрытия с основанием. Сплошные кривые – трансверсально изотропный материала покрытия; пунктир – макроскопически изотропный

Также отметим, что при использовании в качестве материала полимерного наполнителя материала с коэффициентом Пуассона, близким к 0,5, погрешность модели Винклера при жестком сцеплении покрытия с основанием значительно возрастает. Так, на рисунке 2 представлено сравнение расчетных значений  $\alpha_{p\max}$  и  $\alpha_{p1/2}$  для макроскопически изотропного угленаполненного фторопласта ( $E_i = 2,446$  ГПа;  $\nu_i = 0,426$ ) и эпоксидной смолы.

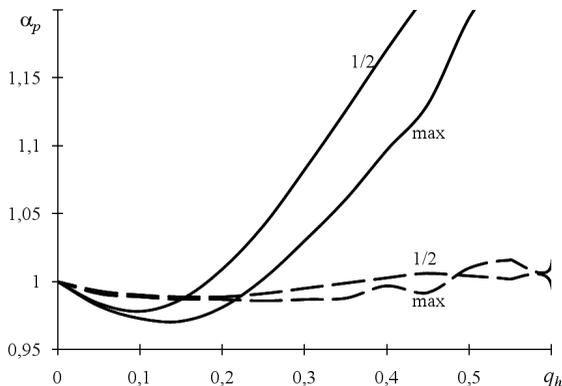


Рисунок 2 – Зависимости отношений  $\alpha_{p\max}$  и  $\alpha_{p1/2}$  от параметра  $q_h$  для жестко сцепленного с основанием покрытия из макроскопически изотропного угленаполненного фторопласта (сплошные кривые) и угленаполненной эпоксидной смолы (пунктир)

На рисунке 3 приведены расчетные оценки отношений  $\alpha_{q\max}$  и  $\alpha_{q1/2}$  для углепластикового покрытия. При наличии только сдвиговой поверхностной нагрузки рассматривается только вариант жесткого сцепления слоя с основанием. При отсутствии сцепления нагрузка на основание не передается.

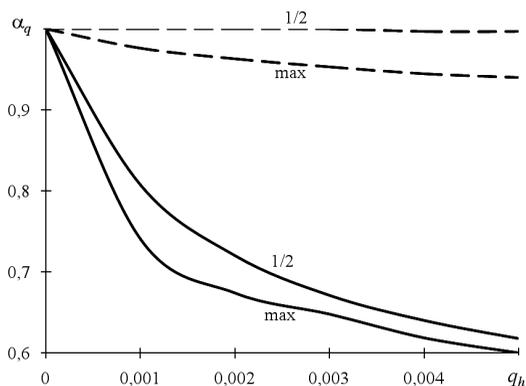


Рисунок 3 – Расчетные зависимости отношений  $\alpha_{q\max}$  и  $\alpha_{q1/2}$  от параметра  $q_h$  для жестко сцепленного с основанием покрытия из угленаполненной эпоксидной смолы

При расчете сдвигового смещения погрешность гипотезы винклера основания для макроскопически изотропного покрытия значительно меньше, чем для трансверсально-изотропного. Данное обстоятельство обусловлено тем, что модуль сдвига трансверсально-изотропного материала ( $G_{zt} = 0,136$  ГПа) мал по сравнению с модулем сдвига макроскопически изотропного материала ( $G_i = E_i/2(1+\nu_i) = 0,892$  ГПа).

На рисунках 4 и 5 представлены результаты расчетов для покрытия, образованного пористым оксидом алюминия. Можно отметить, что для вертикального смещения погрешность расчета, обусловленная использованием модели Винклера, в случае относительно жесткого покрытия выше, чем в случае относительно «мягкого». Данное обстоятельство связано с тем, что деформативность системы, содержащей жесткое покрытие, определяется, главным образом, жесткостью основания. При этом возрастает отрицательное влияние на точность расчетных оценок допущения о неизменной передаче нагрузки по толщине покрытия, принятое в рамках модели Винклера.

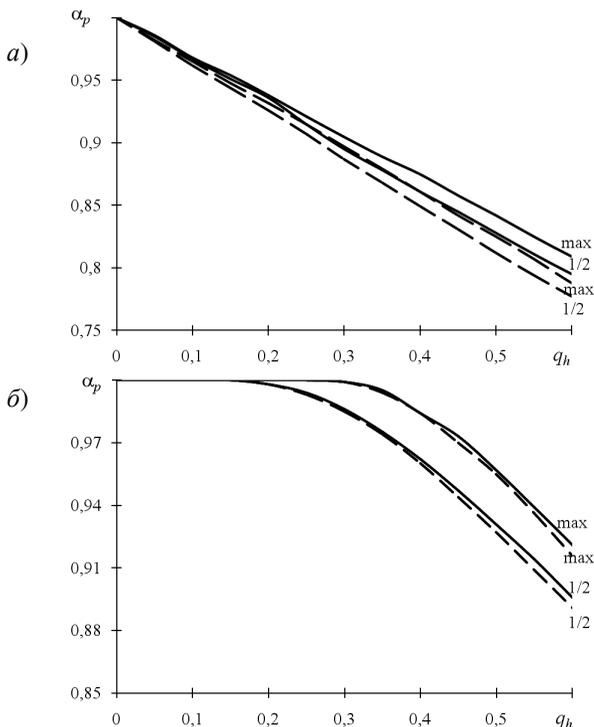


Рисунок 4 – Зависимости отношений  $\alpha_{p\max}$  и  $\alpha_{p1/2}$  от параметра  $q_h$  для пористого оксида алюминия при наличии (а) и отсутствии (б) сцепления покрытия с основанием. Сплошные кривые – трансверсально-изотропный материал покрытия; пунктир – макроскопически изотропный

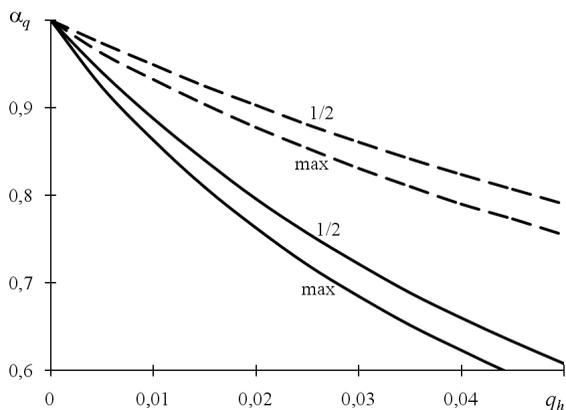


Рисунок 5 – Расчетные зависимости отношений  $\alpha_{q_{\max}}$  и  $\alpha_{q_{1/2}}$  от параметра  $q_h$  для жестко сцепленного с основанием покрытия из пористого оксида алюминия. Сплошные кривые построены для трансверсально-изотропного материала покрытия; пунктирные – для макроscopicически изотропного

Для сцепленного с основанием жесткого покрытия погрешность модели Винклера практически линейно возрастает с увеличением параметра  $q_h$ . При рассмотрении покрытия, находящегося на условно недеформированном основании, в соответствии с винклеровой моделью вертикальные смещения точек поверхности в пределах области равномерного распределения давления  $p$  будут одинаковы. При использовании точного решения задачи теории упругости абсолютные значения этих смещений будут уменьшаться от центра к границам области распределения нагрузки. Поэтому погрешность модели Винклера для вертикального смещения центральной точки ( $\alpha_{p_{\max}}$ ) несколько меньше, чем для смещения точки, находящейся на расстоянии  $a/2$  от центра области распределения нагрузки. Также можно отметить, что для трансверсально-изотропного материала покрытия погрешность расчетов при использовании модели Винклера несколько меньше, чем для макроscopicически изотропного.

При отсутствии сцепления жесткого покрытия с основанием погрешность модели Винклера значительно меньше, чем при наличии сцепления. При малых значениях параметра  $q_h$  и отсутствии сдвиговых напряжений на границе покрытия с основанием напряженно-деформированное (НДС) состояние части покрытия, находящейся непосредственно под областью распределения нормального давления  $p$ , является однородным и соответствует допущениям модели Винклера. Однородность нарушается вблизи границы указанной области ( $r = a$ ), что обеспечивает неразрывность смещений при переходе от нагруженной части поверхности к ненагруженной. С увеличением параметра  $q_h$  неоднородное НДС «распространяется» к центру нагруженной

области. Поэтому результаты использования модели Винклера для расчета вертикального смещения точки поверхности с радиальной координатой  $r$  будут отличаться от результатов использования точного решения только начиная с некоторого значения параметра  $q_n$ . Чем меньше координата  $r$ , тем больше соответствующее значение параметра  $q_n$ , что отображено на рисунке 4, б.

Как и для относительно «мягкого» покрытия, диапазон применимости модели Винклера при прогнозировании горизонтальных смещений под действием сдвиговой поверхностной нагрузки (рисунок 5) значительно уже, чем при анализе нормального нагружения покрытия. Так же как и для мягкого покрытия, погрешность расчета горизонтального смещения для анизотропного материала выше, чем для изотропного. Однако для жесткого покрытия разница между этими погрешностями значительно меньше.

### **Заключение**

В результате сравнительного анализа результатов использования упрощенной модели винклера основания и точного решения задачи теории упругости, основанного на интегральном преобразовании Ханкеля, установлено следующее.

1 Для рассматриваемых в расчетном примере анизотропного и изотропного относительно «мягких» покрытий погрешность расчетных оценок вертикального смещения точек поверхности покрытия, обусловленная использованием модели Винклера, для толщины покрытия менее  $0,5a$  колеблется в диапазоне  $\pm 5\%$ .

2 Для «мягкого» изотропного покрытия, коэффициент Пуассона которого превышает 0,4, отмеченная погрешность возрастает с ростом относительной толщины покрытия. При этом модель Винклера приводит к заниженным оценкам смещения.

3 При расчете горизонтального смещения точек поверхности под действием сдвиговой поверхностной нагрузки погрешность модели Винклера существенно выше, чем при расчете вертикального смещения под действием нормального давления. Для трансверсально-изотропного покрытия погрешность прогноза горизонтального смещения выше, чем для макроскопически изотропного.

4 Для относительно жесткого покрытия, сцепленного с основанием, погрешность модели Винклера при расчете вертикального смещения практически линейно возрастает с увеличением относительной толщины покрытия.

5 При отсутствии сцепления жесткого покрытия с основанием погрешность модели Винклера для вертикального смещения данной точки поверхности существенна только начиная с некоторого значения относительной толщины покрытия. Это значение возрастает с уменьшением радиальной координаты данной точки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Можаровский, В. В.** Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 74–82.

2 **Klindukhov, V. V.** Indentation of a smooth axisymmetric punch into a transversely isotropic layer / V. V. Klindukhov // *Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol. 44, No. 5. – P. 737–743.

3 **Fabrikant, V. I.** Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space // V. I. Fabrikant // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2009. – Vol. 223, No. 11. – P. 2487–2499.

4 **Fabrikant, V. I.** Contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic half-space / V. I. Fabricant // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2011. – Vol. 91, No. 3. – P. 214–246.

5 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg [et al.] // *Tribology International*. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.

6 **Солдатенков, И. А.** К решению контактной задачи теории упругости для толстой полосы со сцеплением / И. А. Солдатенков // *Прикладная математика и механика*. – 2003. – Т. 67, № 5. – С. 877–884.

7 **Argatov, I. I.** Depth-sensing indentation of a transversely isotropic elastic layer: Second-order asymptotic models for canonical indenters / I. I. Argatov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2011. – № 15. – P. 3444–3452.

8 **Aleksandrov, V. M.** Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer / V. M. Aleksandrov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1969. – Vol. 33, No 1. – P. 49–63.

9 **Argatov, I. I.** The pressure of a punch in the form of an elliptic paraboloid on a thin elastic layer / I. I. Argatov // *Acta Mechanica*. – 2005. – Vol. 180. – P. 221–232.

10 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 1989. – Vol. 31, Iss. 3. – P. 229–235.

11 **Hertz, H.** *Miscellaneous Papers* / H. Hertz. – London : Macmillan, 1896. – 205 p.

12 **Winkler, E.** *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit* / E. Winkler. – Prag : Verlag von H. Dominicus, 1867. – 1 Theil. – 388 p.

13 **Захаров, Д. Д.** Эффективные аппроксимации высокого порядка для слоистых покрытий и прослоек из анизотропных упругих, вязкоупругих и нематических материалов / Д. Д. Захаров // *Прикладная математика и механика*. – 2010. – Т. 74, № 3. – С. 403–418.

14 **Горячева, И. Г.** Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения / И. Г. Горячева, М. М. Губенко, Ю. Ю. Маховская // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 99–107.

15 **Черноус, Д. А.** Расчетная оценка коэффициента сопротивления качению автомобильного колеса / Д. А. Черноус, С. Б. Анфиногенов // *Трение и износ*. – 2006. – Т. 27, № 5. – С. 484–490.

16 **Christoforou, A. P.** On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate / A. P. Christoforou // *Composite Structures*. – 1993. – № 26. – P. 77–82.

- 17 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975 – 865 с.
- 18 **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973 – 736 с.
- 19 **Xinguo, N.** Analysis of tribological performance in transversely isotropic materials utilizing analytical and finite element methods : Doctoral Dissertation / N. Xinguo. – Pittsburgh : University of Pittsburgh, 2002. – 122 p.
- 20 **Jaffar, M. J.** A general solution to the axisymmetric frictional contact problem of a thin bonded elastic layer / M. J. Jaffar // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 1997. – Vol. 211, Is. 7. – P. 549–557.
- 21 Углеродные волокна и углекомпозиаты : пер. с англ. / Э. Фитцер [и др.] ; под ред. Э. Фитцера. – М. : Мир, 1988. – 336 с.
- 22 Investigation of elastic modulus of nanoporous alumina membrane / P. Gu [et al.] // Journal of Materials Science. – 2004. – Vol. 39, No. 10. – P. 3369–3373.
- 23 **Кристенсен, Р.** Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М. : Мир, 1982. – 334 с.
- 24 **Третьяков, А. В.** Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. Справочник / А. В. Третьяков, В. И. Зюзин. – М. : Металлургия, 1973. – 224 с.
- 25 **Машков, Ю. К.** Трибофизика и свойства наполненного фторопласта / Ю. К. Машков. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1997. – 192 с.
- 26 **Мошинский, Л.** Эпоксидные смолы и отвердители / Л. Мошинский. – Тель-Авив : Аркадия пресс Лтд, 1995. – 370 с.
- 27 Механические и трибологические свойства наноструктурированных покрытий на основе многокомпонентных оксидов / Е. В. Торская [и др.] // Трение и износ. – 2013. – Т. 34, № 2 – С. 129–137.

*D. A. CHARNAVUS<sup>1</sup>, A. V. KADNIANKA<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

*<sup>2</sup>JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus*

## **ESTIMATION OF THE APPLICABILITY OF THE WINKLER BASE MODEL FOR ANISOTROPIC COATING**

A solution to the elasticity theory problem about the distributed load action on a located on an isotropic base coating formed by a transversely isotropic material is obtained in an axisymmetric formulation using the Hankel integral transform. There is proposed a variant of problem solving using a simplified model, where the Winkler model is used for the coating deformation description and the base is considered as an isotropic half-space loaded by the transferred without changes from the coating outer surface loads. The results comparative analysis is carried out for the Winkler model and the exact solution based on the integral transformation.

**Keywords:** elastic layer, transversally isotropic material, axisymmetric formulation, Lyav function, Hankel transform, Winkler model.

Получено 14.11.2020