

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
С УЧЕТОМ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**

Рассмотрены свободные поперечные колебания упругого трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем с учетом сил вязкого трения. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы Бернулли и Тимошенко. Система уравнений движения выведена вариационным методом Гамильтона. Получены аналитические решения для частот свободных колебаний и искомых перемещений.

Ключевые слова: трехслойный стержень, затухание, свободные колебания.

Введение. В настоящее время теория колебаний различных систем достаточно хорошо изучена. Существует множество работ по исследованию статического и динамического деформирования стержней, пластин и оболочек различной формы и выполненных из различных материалов. Несмотря на это, область дальнейших исследований достаточно широка. Динамическое поведение слоистых оболочек различного очертания рассмотрено в [1–4]. Колебаниям круговых трехслойных пластин, в том числе и на упругом основании, посвящены работы [5–10]. В статье [11] рассмотрены геометрически нелинейные колебания сэндвич-стержней с вязкоупругими материалами.

Ранее в работах [12–14] исследовались свободные и вынужденные колебания трехслойного стержня без затухания. Здесь рассматриваются малые свободные поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем с учетом сил вязкого трения.

Постановка задачи. Рассматриваются поперечные колебания несимметричного по толщине трехслойного стержня в среде с сопротивлением (рисунок 1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком наполнителе справедлива гипотеза Тимошенко. В несущих слоях материал считаем несжимаемым, в наполнителе учитывается его поперечное деформирование, деформации малые. На границах контакта слоев перемещения непрерывны. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя.

Через $w_k(x, t)$ и $u_k(x, t)$ обозначены вертикальные и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя); b_0 – ширина стержня.

Силы сопротивления считаем пропорциональными скоростям движения точек стержня.

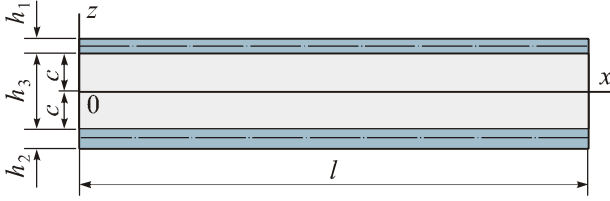


Рисунок 1 – Трехслойный стержень со сжимаемым наполнителем

Уравнения колебаний получим из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского [15]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - \Phi) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta \Phi) dt = 0, \quad (1)$$

где W – потенциальная энергия деформации; K – кинетическая энергия системы; Φ – диссипативная функция Релея [16].

Потенциальная энергия деформации

$$W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \epsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \epsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \epsilon_z^{(3)} dz \right] dx. \quad (2)$$

Кинетическая энергия

$$K = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\frac{\rho_k}{2} \left((\dot{w}^{(k)})^2 + (\dot{u}^{(k)})^2 \right) \right] dz dx, \quad (3)$$

где ρ_k – плотность материала; $w^{(k)}, u^{(k)}$ – перемещения точек k -го слоя.

Диссипативная функция Релея

$$\Phi = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\frac{\alpha_k}{2} \left((\dot{w}^{(k)})^2 + (\dot{u}^{(k)})^2 \right) \right] dz dx. \quad (4)$$

где α_k – коэффициент демпфирования k -го слоя, точки над перемещениями обозначают производные по времени.

Подстановка потенциальной энергии деформации (2), кинетической энергии (3) и диссипативной функции Релея (4) в (1) приводит к уравнению, которое должно тождественно выполняться при произвольных значениях варьируемых величин. Это возможно, если все коэффициенты при независимых вариациях приравнять нулю. В результате с учетом закона Гука приходим к следующей системе уравнений движения рассматриваемого трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_1,_{xx} - a_5 u_2,_{xx} + a_2 w_1,_{,x} + a_3 w_2,_{,x} - 2a_6 w_1,_{,xxx} + \\
& + a_7 w_2,_{,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 + m_8 \ddot{u}_2 + 2m_5 \dot{w}_1,_{,x} - m_7 \dot{w}_2,_{,x} + r_1 \dot{u}_1 + r_8 \dot{u}_2 + 2r_3 \dot{w}_1,_{,x} - r_7 \dot{w}_2,_{,x} = 0; \\
& - a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_1,_{xx} - a_9 u_2,_{xx} - a_{10} w_1,_{,x} - a_{17} w_2,_{,x} - a_6 w_1,_{,xxx} + \\
& + 2a_7 w_2,_{,xxx} + m_8 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + m_5 \dot{w}_1,_{,x} - 2m_7 \dot{w}_2,_{,x} + r_8 \dot{u}_1 + r_2 \dot{u}_2 + r_5 \dot{w}_1,_{,x} - 2r_7 \dot{w}_2,_{,x} = 0; \\
& - a_2 u_1,_{,x} + a_{10} u_2,_{,x} + 2a_6 u_1,_{,xxx} + a_6 u_2,_{,xxx} + a_{11} w_1,_{,xx} - a_{12} w_2,_{,xx} + a_{15} w_1,_{,xxx} - a_{16} w_2,_{,xxx} + \\
& + a_8 w_1 - a_8 w_2 - 2m_5 \ddot{u}_1,_{,x} - m_5 \ddot{u}_2,_{,x} + m_1 \dot{w}_1 + m_8 \dot{w}_2 - m_3 \dot{w}_1,_{,xx} + m_6 \dot{w}_2,_{,xx} - \\
& - 2r_5 \dot{u}_1,_{,x} - r_5 \dot{u}_2,_{,x} + r_1 \dot{w}_1 + r_8 \dot{w}_2 - r_3 \dot{w}_1,_{,xx} + r_6 \dot{w}_2,_{,xx} = 0; \\
& - a_3 u_1,_{,x} + a_{17} u_2,_{,x} - a_7 u_1,_{,xxx} - 2a_7 u_2,_{,xxx} - a_{12} w_1,_{,xx} + a_{14} w_2,_{,xx} - a_{16} w_1,_{,xxx} + a_{13} w_2,_{,xxx} - \\
& - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_7 \ddot{u}_1,_{,x} + 2m_7 \ddot{u}_2,_{,x} + m_8 \dot{w}_1 + m_2 \dot{w}_2 + m_6 \dot{w}_1,_{,xx} - m_4 \dot{w}_2,_{,xx} + \\
& + r_7 \dot{u}_1,_{,x} + 2r_7 \dot{u}_2,_{,x} + r_8 \dot{w}_1 + r_2 \dot{w}_2 + r_6 \dot{w}_1,_{,xx} - r_4 \dot{w}_2,_{,xx} = 0, \quad (5)
\end{aligned}$$

где a_i и m_j – коэффициенты, введенные ранее в [14] для стержня без учета сил сопротивления; коэффициенты r_j имеют вид

$$\begin{aligned}
r_1 &= \alpha_1 h_1 + \frac{2}{3} \alpha_3 c, \quad r_2 = \alpha_2 h_2 + \frac{2}{3} \alpha_3 c, \quad r_3 = \frac{\alpha_1 h_1^3}{12} + \frac{\alpha_3 c h_1^2}{6}, \\
r_4 &= \frac{\alpha_2 h_2^3}{12} + \frac{\alpha_3 c h_2^2}{6}, \quad r_5 = \alpha_3 \frac{\rho_3 c h_1}{6}, \quad r_6 = \frac{\alpha_3 c h_1 h_2}{12}, \quad r_7 = \frac{\alpha_3 c h_2}{6}, \quad r_8 = \frac{\alpha_3 c}{3},
\end{aligned}$$

а запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В однородную систему из четырех дифференциальных уравнений в частных производных (5) входят четыре искомые функции перемещений $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$.

В качестве граничных условий примем кинематические условия свободного опирания рассматриваемого трехслойного стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в конечных поперечных сечениях стержня $x = 0$; l (l – длина стержня) должны выполняться следующие требования по отношению к перемещениям в слоях:

$$w^{(k)} = u^{(k)},_{,x} = w^{(k)},_{,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

Начальные условия движения ($t = 0$) таковы:

$$\begin{aligned}
u^{(k)}(x, 0) &= u_0^{(k)}(x); \quad \dot{u}^{(k)}(x, 0) = \dot{u}_0^{(k)}(x); \\
w^{(k)}(x, 0) &= w_0^{(k)}(x); \quad \dot{w}^{(k)}(x, 0) = \dot{w}_0^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2), \quad (7)
\end{aligned}$$

где $u_0^{(k)}(x)$, $\dot{u}_0^{(k)}(x)$, $w_0^{(k)}(x)$, $\dot{w}_0^{(k)}(x)$ – заданные перемещения и скорости точек срединных линий несущих слоев в начальный момент времени.

Решение задачи. Для решения поставленной задачи (5)–(7) будем использовать метод Бубнова – Галеркина, согласно которому перемещения

$u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ представляются в виде разложения в тригонометрические ряды, удовлетворяющие принятым граничным условиям (6):

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi mx}{l} T_{m1}(t); \quad u_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi mx}{l} T_{m2}(t); \\ w_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi mx}{l} T_{m3}(t); \quad w_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi mx}{l} T_{m4}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Подстановка выражений (8) в (5) приводит к системе дифференциальных уравнений для определения функций $T_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$). В матричном виде она будет следующей:

$$[M]\{\ddot{T}\} + [R]\{\dot{T}\} + [B]\{T\} = 0. \quad (9)$$

Здесь $[M]$ – симметричная матрица масс четвертого порядка с элементами M_{mij} ; $\{T\}$, $\{\dot{T}\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – векторы, сформированные из искомых функций времени T_{mi} , их первых и вторых производных; $[R]$ – симметричная матрица демпфирования с элементами R_{mij} ; $[B]$ – симметричная квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов B_{mij} , определяемых через параметры b_i , зависящие от m [12]. В рассматриваемом случае имеем

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & m_8 & 2m_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & -m_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) \\ m_8 & m_2 & m_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & -2m_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) \\ 2m_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & m_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 & m_8 - m_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 \\ -m_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & -2m_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & m_8 - m_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 & m_2 + m_4 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 \end{bmatrix},$$

$$[R] = \begin{bmatrix} r_1 & r_8 & 2r_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & -r_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) \\ r_8 & r_2 & r_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & -2r_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) \\ 2r_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & r_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & r_1 + r_3 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 & r_8 - r_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 \\ -r_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & -2r_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right) & r_8 - r_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 & r_2 + r_4 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 \end{bmatrix},$$

$$\{T\} = \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \\ T_{m4} \end{bmatrix}, \quad \{\ddot{T}\} = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{m1} \\ \ddot{T}_{m2} \\ \ddot{T}_{m3} \\ \ddot{T}_{m4} \end{bmatrix}.$$

Домножив на M^{-1} , систему (9) можно переписать в виде

$$\{\ddot{T}\} + [\bar{R}]\{\dot{T}\} + [\bar{B}]\{T\} = 0, \quad (10)$$

где $[\bar{R}] = [M]^{-1}[R]$, $[\bar{B}] = [M]^{-1}[B]$.

Для замыкания задачи к системе (10) необходимо добавить начальные условия (7).

Чтобы решить полученную систему, сделаем замену

$$x_{m1} = T_{m1}, x_{m2} = T_{m2}, x_{m3} = T_{m3}, x_{m4} = T_{m4}, \\ x_{m5} = \dot{T}_{m1} = \dot{x}_{m1}, x_{m6} = \dot{T}_{m2} = \dot{x}_{m2}, x_{m7} = \dot{T}_{m3} = \dot{x}_{m3}, x_{m8} = \dot{T}_{m4} = \dot{x}_{m4}. \quad (11)$$

В дальнейшем предполагаем, что все искомые функции зависят от t , и индекс писать не будем. Тогда систему уравнений (10) можно записать

$$\{\dot{x}\} = [D]\{x\}, \quad (12)$$

где матрица D получена из элементов матриц $[\bar{R}]$ и $[\bar{B}]$ следующим образом:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{B}_{11} & -\bar{B}_{12} & -\bar{B}_{13} & -\bar{B}_{14} & -\bar{R}_{11} & -\bar{R}_{12} & -\bar{R}_{13} & -\bar{R}_{14} \\ -\bar{B}_{21} & -\bar{B}_{22} & -\bar{B}_{23} & -\bar{B}_{24} & -\bar{R}_{21} & -\bar{R}_{22} & -\bar{R}_{23} & -\bar{R}_{24} \\ -\bar{B}_{31} & -\bar{B}_{32} & -\bar{B}_{33} & -\bar{B}_{34} & -\bar{R}_{31} & -\bar{R}_{32} & -\bar{R}_{33} & -\bar{R}_{34} \\ -\bar{B}_{41} & -\bar{B}_{42} & -\bar{B}_{43} & -\bar{B}_{44} & -\bar{R}_{41} & -\bar{R}_{42} & -\bar{R}_{43} & -\bar{R}_{44} \end{bmatrix}.$$

Решение системы (12) ищем в виде

$$\{x_k\} = \{A_k\} e^{\bar{\omega}_k t}, \quad (k = 1, \dots, 8), \quad (13)$$

где $\bar{\omega}_k$ – частота; A_k – амплитуда, соответствующая $\bar{\omega}_k$.

Подставляя решение (13) в уравнение (12), получаем

$$\bar{\omega}_k \{A_k\} e^{\bar{\omega}_k t} = [D]\{A_k\} e^{\bar{\omega}_k t}.$$

После упрощения находим

$$[D]\{A_k\} = \bar{\omega}_k \{A_k\}, \quad \text{или} \quad ([D] - \bar{\omega}_k E)\{A_k\} = 0, \quad (14)$$

а это значит, что $\{A_k\}$ есть собственный вектор матрицы D с собственным значением $\bar{\omega}_k$.

Система уравнений (14) однородна относительно величин A_{mk} . Тривиальное решение в этом случае указывает на отсутствие колебаний точек стержня. Для нахождения ненулевого решения необходимо приравнять к нулю определитель матрицы системы. Это приводит к получению алгебраического уравнения 8-го порядка относительно $\bar{\omega}$. Корни этого уравнения (8 корней) определяют комплексные частоты. Имеется 4 пары корней вида

$$\bar{\omega}_{p\pm} = -n_p \pm i\omega_p \quad (p = 1, \dots, 4).$$

Действительная часть $-n_p$ корней определяет темп затухания амплитуд колебаний, а мнимая часть $\pm i\omega_p$ определяет частоту колебаний.

Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырёхчастотным. Следовательно, вместо решения (13) нужно принять

$$x_k = \sum_{j=1}^4 A_{kj}^{\pm} e^{(-n_j \pm i\omega_j)t} \quad (k = 1, \dots, 8). \quad (15)$$

Величины A_{kj}^{\pm} определяются из системы (14) после постановки в нее соответствующих $\bar{\omega}_j$ и учета начальных условий (7).

Таким образом, искомые перемещения определяются выражениями (8) с учетом замены (11) и выражений (15).

Выводы. В данной работе рассмотрена методика исследования свободных колебаний трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем с учетом вязкого трения. Получены аналитические выражения для частот свободных колебаний, а также искомых перемещений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Григолюк, Э. И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков. – М. : Машиностроение, 1973. – 172 с.

2 Кубенко, В. Д. Экспериментальное исследование колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45(55), № 6. – С. 53–79.

3 Крысько, В. А. Устойчивость и колебания неоднородных оболочек / В. А. Крысько, А. Н. Куцемако. – Саратов : Саратовск. гос. техн. ун-т, 1999. – 202 с.

4 Lakis, A. A. Non-linear free vibration analysis of laminated ortho-tropic cylindrical shells / A. A. Lakis, A. Selmane, A. Toledano // International Journal of Mechanical Sciences. – 1998. – Vol. 40, No. 1. – P. 27–49.

5 Adam, C. Moderately large flexural vibrations of composite plates with thick layers / C. Adam // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40, No. 16. – P. 4153–4166.

6 **Леоненко, Д. В.** Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 3. – С. 42–47.

7 **Старовойтов, Э. И.** Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 793–806.

8 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

9 **Коган, Е. А.** Нелинейные колебания заземленных по контуру трехслойных пластин / Е. А. Коган, А. А. Юрченко // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 5. – С. 25–34.

10 **Sherif, H. A.** Non-linear forced flexural vibrations of a clamped circular unsymmetrical sandwich plate / H. A. Sherif // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 182, No. 3. – P. 495–503.

11 **Jacques, N.** Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich beams by the harmonic balance and finite element methods / N. Jacques, E. M. Daya, M. Potier-Ferry // Journal of Sound and Vibration. – 2010. – Vol. 329, No. 20. – P. 4251–4265.

12 **Старовойтов, Э. И.** Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.

13 **Старовойтов, Э. И.** Колебания трехслойного стержня, скрепленного с деформируемым основанием / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 2 (6). – С. 45–51.

14 **Горшков, А. Г.** Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

15 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

16 **Бутенин, Н. В.** Теория колебаний / Н. В. Бутенин. – М. : Высш. шк., 1963. – 187 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FREE VIBRATION OF THREE-LAYERED RODS TAKING INTO ACCOUNT THE FORCES OF RESISTANCE

Free transverse vibrations of the elastic three-layered rod with a compressible filler are considered taking into account the forces of viscous friction. To describe the kinematics of a package asymmetric in thickness, the hypotheses of Bernoulli and Timoshenko are adopted. The system of motion equations is derived by Hamilton's variational method. The analytical solutions are obtained for the frequencies of free vibrations and the desired displacements.

Keywords: three-layered rod, damping, free vibrations.

Получено 19.10.2020