УДК 532.5.032

*В. Н. КОХАНЕНКО[1], П. В. СИРОТИН[1], А. И. КОНДРАТЕНКО[2], С. И. ЕВТУШЕНКО[3]*
*[1]Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия*
*[2]Российский государственный аграрный университет – Московская сельскохозяйственная академия им. К. А. Тимирязева, Москва, Россия*
*[3]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

# СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПНЕВМОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ РЕССОРЫ

Приводится решение методом переменного масштаба в общем виде нелинейных уравнений колебаний самоходных машин. Решение позволяет оптимально выбрать параметры системы при проектировании пневмогидравлических рессор состоящих из нескольких гасителей колебаний. Сравнение результатов расчета по предложенной модели с результатами, полученными другими авторами (другими методами), показывает достаточную для практики пользования точность (погрешность не превышает 5 %) при сравнении с параметрами, полученным экспериментально. Модель позволяет достаточно просто определить амплитуды, полупериоды и частоты собственных колебаний системы для дальнейшей оценки возможности резонансных явлений при последующих внешних воздействиях.

**Ключевые слова:** метод переменного масштаба, математическая модель, пневмогидравлическая рессора, собственные колебания системы, амплитуда, полупериод, частота.

Для развития современной техники важна разработка математических моделей элементов динамических систем машин и иных объектов. Аналогичные задачи при рассмотрении колебаний зданий и сооружений различного назначения ставили авторы работ [1–4].

Одним из таких элементов является пневмогидравлическая рессора (ПГР), которая нейтрализует вертикальные колебания кузова самоходной машины и обеспечивает комфортные условия работы ее оператора. Структурная схема такой рессоры (ПГР) показана на рисунке 1.

В работе [5] представлены уравнения расходов жидкости в гидроцилиндре и газовых пружинах, прохождения жидкости через дроссели и ее непрерывности, газового состояния в газовых пружинах, а также второй закон Ньютона для поршней в системе, на основе которых показано, что эквивалентное уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x} + n \operatorname{sign} \dot{x} \cdot \dot{x}^2 + \alpha x = 0, \qquad (1)$$

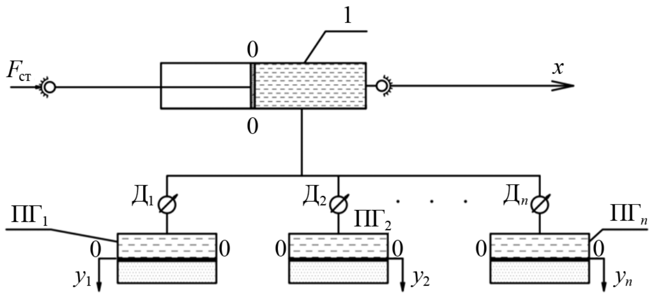


Рисунок 1 – Схема пневмогидравлической рессоры:
*1* – гидроцилиндр; $Д_i$ – дроссели; $ПГ_i$ – газовые пружины; $F_{ст}$ – сила статического равновесия системы; $0x$, $0y_1$, …, $0y_n$ – оси координат с началами в центрах равновесия элементов системы

где $x$ – перемещение поршня гидроцилиндра, точки над переменными обозначают дифференцирование по времени; $n$, $\alpha$ – обобщённые положительные коэффициенты, характеризующие систему.

Цель работы состоит в анализе методов решения этого уравнения для случая импульсных внешних воздействий.

Уравнение малых колебаний системы (1) при движении поршня гидроцилиндра в сторону возрастания $x$ будет следующим:

$$\ddot{x} + n\dot{x}^2 + \alpha x = 0, \tag{2}$$

в противном случае

$$\ddot{x} - n\dot{x}^2 + \alpha x = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) может быть выполнено стандартным методом [6]. Учитывая, что

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx},$$

приходим к линейному относительно $\dot{x}^2$ уравнению

$$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} + 2n\dot{x}^2 = -2\alpha x. \tag{4}$$

Его частное решение следует искать в виде

$$\dot{x}^2 = Ax + B.$$

В этом случае

$$\frac{d\dot{x}^2}{dx} = A,$$

и подстановка в уравнение (4) дает

$$A + 2n(Ax + B) = -2\alpha x;$$

$$A = -\frac{\alpha}{n}; \ \ B = \frac{\alpha}{2n^2}.$$

Соответственно общее решение уравнения (4)

$$\dot{x}^2 = C_1 e^{-2nx} + Ax + B,$$

где $C_1$ – постоянная, которую определяем по начальным условиям.

Принимая во внимание, что при движении поршня в сторону увеличения $x$ из положения

$$t = 0, x(0) = x_0, \ \dot{x}_0 = v_0 > 0,$$

получим

$$t = C_2 + \int_0^x \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

где $C_2$ – постоянная интегрирования;

$$f(u) = C_1 e^{-2nu} + Au + B.$$

Порядок расчетов по представленным формулам описан в [7], однако его использование связано с необходимостью применения пакетов компьютерных программ. Поэтому рассмотрим также решения задачи с применением классических методов нелинейной механики.

В источнике [8] предложено решение уравнения, аналогичного (1), в квадратурах методом переменного масштаба. Знак перед коэффициентом сопротивления $n$ меняет знак в зависимости от направления движения поршня гидроцилиндра в соответствии с формулами (2) и (3). При малых колебаниях амплитудная функция имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\alpha}{2}\left[e^{2nx}(2nx - 1) + 1\right]}.$$

Для начальных условий $t = 0$; $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$ решение уравнения (2) в явной форме имеет вид

$$f(t) = f(x_0)\cos\eta(t) + v_0 e^{nx_0}\sin\eta(t) = A_0\cos\psi(t),$$

где $$A_0 = \sqrt{f^2(x_0) + v_0^2 e^{2nx_0}}; \ \ \psi(\mathrm{t}) = \eta(\mathrm{t}) + \rho; \ \ \rho = \mathrm{arctg}\frac{-v_0 e^{nx_0}}{f(x_0)}.$$

Соответствующий график колебаний (рисунок 2) представляет собой затухающие колебания. В момент $t^*$ достижения максимального перемещения $x_{\max}$ получаем $f(x_{\max}) = A_0$, $\cos\psi = 1$, соответственно, $\psi = 0$, $\eta(t^*) = -\rho$.

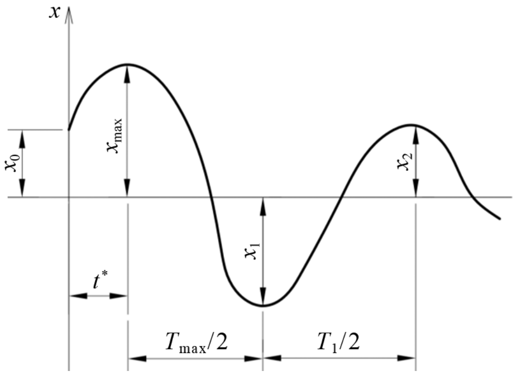

Рисунок 2 – График свободных колебаний при работе ПГР

Так как рассматриваются малые колебания системы, то $2nx \ll 1$ и справедливы приближённые равенства

$$\eta = \sqrt{\alpha\left(1-\frac{1}{2}n^2x_0^2\right)}\cdot t;\quad x_{\max} \approx \frac{A_0}{\sqrt{\alpha}} \approx \sqrt{\left(1+2nx_0\right)\cdot\left(x_0^2+\frac{v_0^2}{\alpha}\right)};$$

$$t_* \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{1}{4}n^2x_0^2\right)\operatorname{arctg}\left[\frac{v_0}{x_0\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{2}n^2x_0^2-1\right)\right].$$

Введём обозначение

$$\varepsilon_N = 2\cdot|n|\cdot x_N .$$

Тогда связь между последующей амплитудой $x_{N+1}$ и предыдущей $x_N$ записывается в виде

$$-\varepsilon_N + \ln\left(1+\varepsilon_N\right) = \varepsilon_{N+1} + \ln\left(1-\varepsilon_{N+1}\right).$$

Решив уравнение (18) относительно $\varepsilon_{N+1}$, определяем последующую амплитуду $x_{N+1}$.

Полупериод колебания с номером $N$ определяется по формуле

$$\frac{T_N}{2} = \frac{\Pi}{\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{1}{4}n^2x_N^2\right) = \frac{\Pi}{\sqrt{\alpha}}\left(1+\frac{\varepsilon_N^2}{16}\right).$$

**Выводы.**

1 Модель позволяет достаточно просто определить амплитуды, полупериоды и частоты собственных колебаний системы для дальнейшей оценки возможности резонансных явлений при последующих внешних воздействиях.

2 Приведённое в работе решение методом переменного масштаба позволяет оптимально выбрать параметры системы $n$, $\alpha$ при проектировании ПГР.

3 Сравнение результатов модели с другими методами показывает достаточную для практики пользования точность (погрешность не превышает 5 % по отношению к значениям, полученным экспериментально).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Воронцов, Г. В.** К задаче математического моделирования гасителей колебаний высотных сооружений / Г. В. Воронцов, С. И. Евтушенко // Вестник МГСУ. – 2009. – № 1. – С. 127–131.

2 **Burtseva, O. A.** Roller seismic impact oscillation neutralization system for high-rise buildings / O. A. Burtseva, A. N. Tkachev, S. A. Chipko // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 129. – P. 259–265.

3 **Бурцева, О. А.** Сравнение эффективности опорных поверхностей в кинематической системе виброизоляции высотных сооружений / О. А. Бурцева, С. А. Чипко, Н. Р. Абуладзе // Строительство и архитектура. – 2020. – Т. 8, № 3. – С. 5–11.

4 **Воронцов, Г. В.** К задаче оптимизации параметров инерционных автономных гасителей колебаний высотных сооружений / Г. В. Воронцов, С. И. Евтушенко // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Техн. Науки. – 2009. – № 2. – С. 81–90.

5 Динамическая модель пневмогидравлической рессоры / П. В. Сиротин [и др.] // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – Вып. 13. – С. 201–204.

6 **Поляков, Н. Н.** Теоретическая механика / Н. Н. Поляков, С. А. Зегжда, М. П. Юшков. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1985. – 536 с.

7 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.

8 **Бондарь, Н. Г.** Некоторые автономные задачи нелинейной механики / Н. Г. Бондарь. – Киев : Наукова думка, 1969. – 302 с.

*V. N. KOKHANENKO[1], P. V. SIROTIN[1], A. I. KONDRATENKO[2], S. I. EVTUSHENKO[3]*
*[1]Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia*
*[2]Timiryazev Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy, Moscow, Russia*
*[3]Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia*

## SELF-OSCILLATIONS OF A HYDRO-PNEUMATIC SPRING

There is demonstrated a solution of nonlinear equations of self-propelled machines' vibrations by the variable scale method in general form. The solution allows to select the system parameters optimally when designing pneumatic-hydraulic springs consisting of several vibration dampers. Comparison of calculation results obtained from the proposed model with the results achieved by other authors (by other methods) shows sufficient accuracy for practical use (not exceeding 5 %) in comparison with the experimentally obtained parameters. The model makes it quite easy to determine the amplitudes, half-periods, and frequencies of system natural oscillations for further evaluation of the possibility of resonant phenomena under subsequent external influences.

**Keywords:** variable scale method, mathematical model, pneumatic-hydraulic spring, natural vibrations of the system, amplitude, half-period, frequency.

Получено 08.10.2020