Секция I

ФИЗИКА, МЕХАНИКА И МАТЕМАТИКА ПРИ РАСЧЁТЕ И КОНСТРУИРОВАНИИ ИСКУССТВЕННЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

А. Г. КОЗЕЛ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Вопросу расчета конструкций на упругом основании посвящено большое количество работ. Для описания свойств деформируемого основания используются разнообразные механико-математические модели, однако до сих пор среди них нет общепризнанной.

В течение долгого времени единственной расчетной моделью была так называемая модель Винклера (Фусса–Винклера–Циммерманна). Ее можно представить в виде набора линейных несвязанных между собой пружин, расположенных под пластиной. Такое основание характеризуется одним коэффициентом постели – жёсткостью пружин. Главное преимущество этой модели – математическая простота. Благодаря этому, она и сейчас популярна и продолжает применяться.

Модель Винклера ещё в 20–30-х годах прошлого века подвергалась острой и резкой критике. Большинство реальных оснований, например, плотные и скальные грунты, имеют распределительную способность, при которой в работу вовлекаются не только непосредственно нагруженные части основания, но и области за пределами приложения нагрузки.

Для преодоления недостатков модели Винклера ряд исследователей независимо друг от друга предлагали двухпараметрические модели упругого основания, учитывая при этом его распределительные свойства, позволяющие описывать не только его сжатие, но и сдвиг. Среди двухпараметрических моделей, модель основания Пастернака является наиболее естественным продолжением модели Винклера для однородных оснований, благодаря этому она получила большее распространение.

Рассмотрим деформирование круговой трехслойной пластины (рисунок 1).

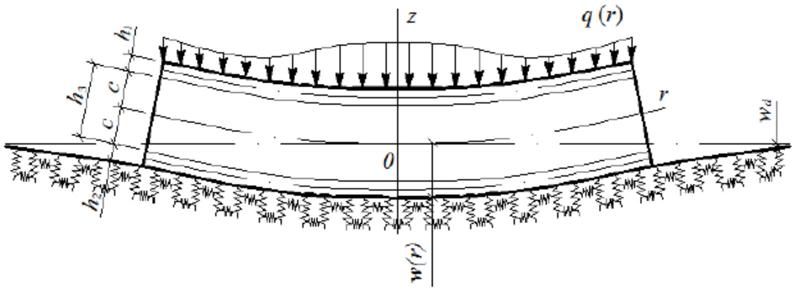

Рисунок 1 – Схема деформирования пластины при свободном опирании контура

Приведена постановка и решение краевой задачи об осесимметричном изгибе физически нелинейной пластины на двухпараметрическом основании Пастернака. Для внешних несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа, для достаточно толстого, легкого, несжимаемого по толщине заполнителя применяется модель Тимошенко. Цилиндрическая система координат r, φ, z связана со срединной плоскостью заполнителя. За искомые функции приняты: прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$. Через h_k обозначена толщина k-го слоя, $h_3 = 2c$, w_d – осадка основания за пределами пластины.

Осесимметричная нагрузка $q(r)$ распределена по верхнему слою пластины, реакция основания согласно модели Пастернака [1]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w\,, \qquad (1)$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига материала основания, Δ – оператор Лапласа

Деформирование упругой трехслойной пластины описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, полученных с помощью вариационного принципа Лагранжа [2]. Поэтому её можно применить и здесь как исходную.

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях линейные и нелинейные составляющие и подставляя их, выраженными через перемещения, в уравнения равновесия, с учетом (1), получим систему в виде:

$$\begin{gathered} \mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r) = p_\omega\,, \\ \mathrm{L}_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r) = h_\omega\,, \\ \mathrm{L}_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q + q_\omega\,, \end{gathered} \qquad (2)$$

где a_i – коэффициенты, учитывающие упругие и геометрические параметры слоев; L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы.

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщённых внутренних усилий. С индексом ω введены нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части.

Система дифференциальных уравнений (2) в силу физических уравнений состояния является нелинейной. Решение поставленной задачи представляет собой сложную задачу. Аналитическое решение в этом случае получить в конечном виде не представляется возможным, поэтому чаще всего решение задачи теории пластичности строится с применением приближенных либо численных методов.

Наиболее эффективным из приближенных методов для решения задач теории малых упругопластических деформаций следует считать метод последовательных приближений А. А. Ильюшина, называемый методом упругих решений. Согласно ему перепишем систему (2) в итерационном виде:

$$\mathrm{L}_2(a_1u^{(n)}+a_2\psi^{(n)}-a_3w,_r^{(n)})=p_\omega^{(n-1)},$$
$$\mathrm{L}_2(a_2u^{(n)}+a_4\psi^{(n)}-a_5w,_r^{(n)})=h_\omega^{(n-1)},$$
$$\mathrm{L}_3(a_3u^{(n)}+a_5\psi^{(n)}-a_6w,_r^{(n)})-\kappa_0w^{(n)}+t_f\Delta w^{(n)}=-q+q_\omega^{(n-1)}, \tag{3}$$

где n – номер приближения.

Аналитическое решение системы (3) было получено в [3] в виде:

$$u^{(n)}=b_1w,_r^{(n)}-\frac{1}{a_1a_4-a_2^2}\frac{1}{r}\int r\int(a_2h_\omega^{(n-1)}-a_4p_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r+C_1^{(n)}r,$$

$$\psi^{(n)}=b_2w,_r^{(n)}+\frac{1}{a_1a_4-a_2^2}\frac{1}{r}\int r\int(a_1h_\omega^{(n-1)}-a_2p_\omega^{(n-1)})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r+C_3^{(n)}r,$$

$$w^{(n)}=C_5^{(n)}J_0(\sqrt{a}\kappa r)+C_7^{(n)}J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r)+w_p^{(n)}(r), \tag{4}$$

где $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}$ – константы интегрирования на n-м шаге;

$$t_{f1}=t_fD,\ \kappa^4=\kappa_0D,\ q=q_0D,\ f_\omega^{(n)}=-Dq_\omega^{(n-1)}+D_1\frac{1}{r}(rp_\omega^{(n-1)}),_r+D_2\frac{1}{r}(rh_\omega^{(n-1)}),_r,$$

b_1, b_2, D, D_1, D_2 – параметры, выражаемые через коэффициенты a_i, интегралы здесь определённые с переменным верхним пределом от 0 до r.

Численное исследование решения (4) показало, что использование модели основания Пастернака позволяет значительно уточнить оценку расчётного ресурса конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

Список литературы

1 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре. – 1954. – 55 с.

2 **Козел, А. Г.** Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2018. – № 33. – С. 318–323.

3 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2019. – № 12. – С. 105–112.

УДК 539.374

НАГРУЖЕНИЕ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Д. В. ЛЕОНЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Сэндвич-панели широко используются в строительстве и восстановлении искусственных сооружений. Разработка методов, адекватно описывающих их поведение под нагрузкой, является актуальной задачей современного строительства. Существует довольно много моделей расчета подобных панелей как на статические, так и динамические нагрузки [1], однако недостаточно обширно представлен расчет на температурное воздействие [2].

В статье рассматривается изгиб несимметричной по толщине упругой трехслойной панели при действии комплексного термосилового нагружения.

Поперечное сечение панели состоит из трех слоев. В несущих внешних слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В среднем слое, называемом заполнителем, используется гипотеза типа Тимошенко. Несущие слои служат для восприятия силового нагружения, заполнитель может воспринимать и сопротивляться температурному воздействию.

Со стороны внешних несущих слоев может действовать как силовая нагрузка, так и стационарное температурное поле. Задачу распределения тепла в трехслойном пакете считаем известной [3], изменение упругих характеристик материалов несущих слоев принимаем в соответствии с формулой Белла [4].

Получены дифференциальные уравнения изгиба панели, найдены их решения, а также выполнен численный анализ зависимостей напряженно-деформированного состояния материалов слоев панели от температурного воздействия.

Список литературы

1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. − М. : Машиностроение, 1980. − 375 с.