

УДК 534.8:624.011.04

В. И. РОЩАНСКИЙ

*Санкт-Петербургский морской технический университет, Санкт-Петербург,
М. У. ИСМАГАМБЕТОВ*

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва, Астана

ГАШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕМЕНТАМИ КОНСТРУКЦИЙ

Рассматриваются вопросы динамического гашения колебаний систем при периодическом негармоническом вынуждающем воздействии. Результаты могут быть полезны в случае защиты от вибраций сложных конструкций путём использования их простейших конструктивных элементов (струн, продольно колеблющихся стержней, валов и т. д.).

Некоторые вопросы динамического гашения колебаний систем при периодическом негармоническом вынуждающем воздействии рассмотрены в [1, 2]. В представленной работе предлагается новый подход к исследованию таких колебаний для систем с дискретными и распределёнными массами.

1 Для синтеза дискретных систем цепной структуры с заданными квадратами частот свободных колебаний λ_k предлагается отличная от схем [3] последовательность операций.

Зададимся произвольной симметрической положительно определённой матрицей $[A]$ размерностью $n \times n$ (порождающая матрица) и определим собственные векторы t_{ki} и собственные значения Λ_k этой матрицы. Им соответствует унитарное преобразование $[T]^T [T] = [I]$ и диагональная матрица $[A]$

$$[T][A][T]^T = [\Lambda],$$

где $[\]^T$ – операция транспонирования; $[I]$ – единичная матрица.

Определим симметрическую матрицу жёсткости $[C]$ с собственными значениями λ_k из диагональной матрицы $[\lambda]$ по правилу

$$[C] = [T]^T [\lambda][T].$$

Полученную матрицу жёсткости $[C]$ методом Гивенса [4] приведём к трёхдиагональному виду $[C^*]$. Для систем цепной структуры со свободным от внешних связей концевым элементом (масса m_1) посредством растяжения по первой строке и первому столбцу с матрицей преобразования $[T_1]$ вида

$$\begin{aligned} t_{ik} &= 0 \text{ для } i \neq k; \\ t_{1,1} &= |c_{1,2}^*| / c_{1,1}^*; \\ t_{ii} &= 1 \text{ для } i = 2, 3, \dots, n; \end{aligned}$$

получим матрицу жёсткости $[\mathbf{C}^{(1)}]$ и диагональную матрицу масс $[\mathbf{m}^{(1)}]$

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^{(1)}] &= [\mathbf{T}_i] [\mathbf{C}^*] [\mathbf{T}_i]; \\ [\mathbf{m}^{(1)}] &= [\mathbf{T}_i]^2 \end{aligned}$$

некоторой системы, имеющей ранее заданные частоты $\nu_k^2 = \lambda_k$ колебаний. Последующая цепочка преобразований однотипна и служит для получения окончательного варианта матрицы жёсткости $[\hat{\mathbf{C}}]$ с присущей цепным системам структурой соотношений между элементами \hat{c}_{ik} :

$$\hat{c}_{i,i} = |\hat{c}_{i,i+1}| + |\hat{c}_{i,i-1}| \text{ для } i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (1)$$

С этой целью выполняется конечная последовательность блочных растяжений, на i -м шаге которой получается матрица жёсткости $[\hat{\mathbf{C}}^{(i)}]$ и диагональная матрица $[\mathbf{m}^{(i)}]$. В матрице жёсткости условиям (1) удовлетворяют все строки и столбцы до номера i включительно.

Алгоритм преобразования:

– вычисляется очередной коэффициент растяжения:

$$\delta_i = |\hat{c}_{i,i+1}^{(i)}| / (|\hat{c}_{i,i}^{(i)}| - |\hat{c}_{i,i-1}^{(i)}|), \quad (2)$$

где $\hat{c}_{i,k}^{(i)}$ – элементы той матрицы жёсткости, которые сложились к шагу с номером i ;

– строится диагональная матрица очередного блочного растяжения $[\mathbf{T}_i]$ с элементами $t_{k,j}$:

$$\begin{aligned} t_{j,j} &= \delta_i \text{ для } j \leq i; \\ t_{j,j} &= 1 \text{ для } i < j \leq n; \end{aligned} \quad (3)$$

– шаг заканчивается применением к матрицам масс $[\mathbf{m}^{(i)}]$ и жёсткости $[\hat{\mathbf{C}}^{(i)}]$ преобразования $[\mathbf{T}_i]$

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{C}}^{(i+1)}] &= [\mathbf{T}_i] [\hat{\mathbf{C}}^{(i)}] [\mathbf{T}_i]; \\ [\mathbf{m}^{(i+1)}] &= [\mathbf{m}^{(i)}] [\mathbf{T}_i]^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Последовательность преобразований подобия (1)–(4) выполняется от $i = 2$ с дальнейшим наращиванием до $i = n - 1$, когда и получается матрица жёсткости $[\hat{\mathbf{C}}]$ и диагональная матрица масс $[\mathbf{m}]$ искомой механической системы с заданными частотами ν_k . В рассматриваемом здесь случае синтеза гасителей колебаний от периодического негармонического вынуждающего воздействия

$$\lambda_i = i^2; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Окончательно преобразование $[\hat{\mathbf{T}}]$, приводящее трёхдиагональную матрицу жёсткости $[\mathbf{C}^*]$ с собственными значениями λ_k к матрице жёсткости $[\hat{\mathbf{C}}]$ и диагональной матрице масс $[\mathbf{m}]$ цепной механической системы с тем же комплектом собственных частот ν_k , имеет вид

$$[\tilde{\mathbf{T}}] = \prod_{i=1}^{n-1} [\mathbf{T}_i]; [\mathbf{m}] = [\tilde{\mathbf{T}}][\tilde{\mathbf{T}}]; [\hat{\mathbf{C}}] = [\tilde{\mathbf{T}}][\mathbf{C}^*][\tilde{\mathbf{T}}].$$

Контрольный пример синтеза дискретной системы с пятью степенями свободы с частотами свободных колебаний $\nu_k = k$ при порождающей симметрической трёхдиагональной матрице $[\mathbf{A}]$ с элементами

$$a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,3} = 1; a_{2,2} = 2; a_{3,3} = 4; a_{3,4} = 3; a_{4,4} = 5; a_{4,5} = 2; a_{5,5} = 7$$

привёл к искомой трёхдиагональной матрице жёсткости $[\hat{\mathbf{C}}]$ с элементами

$$\hat{c}_{1,1} = \hat{c}_{1,2} = 0,82966; \hat{c}_{2,2} = 2,25712; \hat{c}_{2,3} = 1,42746; \hat{c}_{3,3} = 3,98200; \\ \hat{c}_{3,4} = 2,50454; \hat{c}_{4,4} = 5,71416; \hat{c}_{4,5} = 3,20962; \hat{c}_{5,5} = 9,31459$$

и диагональной матрице масс $[\mathbf{m}]$ с элементами $m_{i,i}$

$$m_{1,1} = 0.21284; m_{2,2} = 0.18108; m_{3,3} = 0.28080; m_{4,4} = 0.37358; m_{5,5} = 1.$$

2 Приближённый обратный переход от дискретной модели к эквивалентной распределённой системе для продольно колеблющегося стержня кусочно постоянного сечения с площадью участка F_k и длиной l_k из однородного материала плотностью ρ с модулем Юнга E можно произвести по формулам:

$$F_k = (c_k m_k / \rho)^{1/2}, l_k = (E m_k / \rho c_k)^{1/2}.$$

В таблице 1 приведён пример синтеза стержня из 20 участков кусочно постоянного сечения с комплектом частот $\nu_k = k$. Адекватность такой модели идеальному по расчёту стержню можно оценить из работы [5].

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_k	0,084	0,122	0,115	0,088	0,085	0,100	0,109	0,098	0,094	0,107
F_k	0,113	0,128	0,062	0,058	0,105	0,138	0,106	0,094	0,135	0,180

Продолжение таблицы 1

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
l_k	0,118	0,110	0,112	0,134	0,135	0,140	0,177	0,178	0,231	0,157
F_k	0,159	0,160	0,235	0,270	0,267	0,403	0,491	0,741	1,345	6,360

3 Эффективность динамических гасителей цепной структуры проверена экспериментально. С этой целью был изготовлен динамический гаситель в виде дискретной механической системы с пятью степенями свободы с общим весом 200 Н при основной частоте настройки $f = 73$ Гц с такими же соотношениями между параметрами инерции и жёсткости, что и в контрольном примере этой работы. Он устанавливался на судовом фундаменте общим весом около 2000 Н с опорами на переборках судна. В измерениях использовался аппаратный комплекс со сквозной погрешностью 5 %.

На рисунке 1 показаны результаты спектрального анализа в третьоктавном диапазоне: 1 – вынуждающей силы Q ; 2 – колебаний y точки возбуждения до установки динамического гасителя; 3 — то же y после установки гасителя колебаний. Ощутимый полезный эффект (≈ 10 дБ) наблюдается на первой f_1 и четвертой f_4 гармониках. На второй f_2 и пятой f_5 гармониках эффект снижения колебаний вообще незначителен, а на третьей гармонике f_3 присоединение экспериментального образца гасителя привело к увеличению колебаний (≈ 5 дБ).

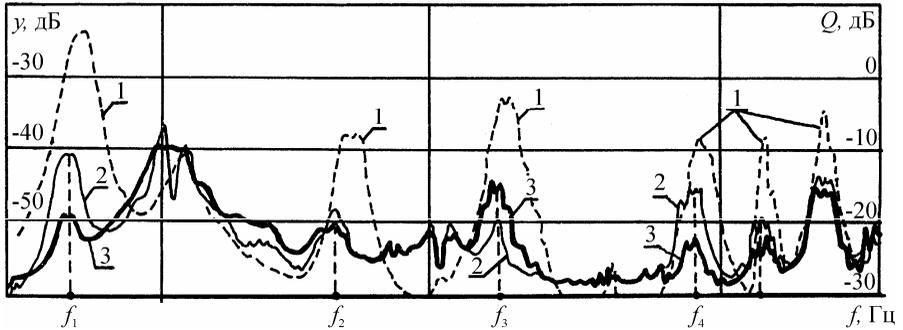


Рисунок 1 – Результаты спектрального анализа

Для пояснения этого неожиданного результата на рис. 2 показан фрагмент зависимости от частоты возбуждения ν динамической податливости q конструкции в точке приложения вынуждающей силы в окрестности гармоники ν_3 до (кривая 1) и после установки гасителя (кривая 2). Негативное влияние гасителя в полосу частот, примыкающей к ν_3 , объясняется сильно выраженной настроенностью соответствующего антирезонанса .

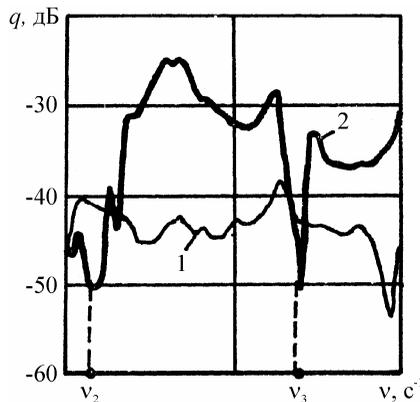


Рисунок 2 – Динамическая податливость в точке возбуждения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Рощанский, В. И.** Явление антирезонанса при произвольном силовом периодическом возбуждении / *В. И. Рощанский* // Динамика и прочность судовых конструкций: сб. науч. тр. / Л.: ЛКИ, 1986. – С. 116–121.

2 **Рябой, В. М.** О многокаскадной виброизоляции и динамическом гашении колебаний / *В. М. Рябой* // Колебания и виброакустическая активность машин и конструкций. – М.: Наука, 1986. – С. 11–16.

3 **Гринёв, В. Б.** Оптимизация стержней по спектру собственных значений / *В. Б. Гринёв, А. П. Филиппов*. – Киев: Наук. думка, 1979. – 211 с.

4 **Уилкинсон, Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений / *Дж. Х. Уилкинсон*. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

5 **Гур-Мильнер, С. И.** Оценки достоверности математических моделей упругих тел и их применение в численных расчётах / *С. И. Гур-Мильнер, М. У. Исмагамбетов*. – Астана: ЕНУ им. Л. Н. Гумилёва, 2005. – 268 с.

Получено 12.04.2006

**ISBN 978-985-468-276-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 1. Гомель, 2007**

УДК 550.347.097.34

Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ МЫШЕЧНОГО МОНОВОЛОКНА

Предложена новая модель мышечного моноволокна в виде тонкого вязкоупругого стержня. Разработана методика описания механического поведения данной модели при активизации сократительной функции мышцы. В режиме свободного сокращения получена временная зависимость скорости изменения длины моделируемого моноволокна. Установлено также распределение осевого напряжения по длине моноволокна на различных стадиях сокращения.

Введение. В настоящее время интенсивно развивается раздел механики, в котором изучается механическое движение и механические свойства живых тканей, органов и организма в целом. Данный раздел механики называют биомеханикой. Одной из основных задач биомеханики является описание и прогнозирование напряженно-деформированного состояния мышц. Мышцы в организме человека существенно различаются по форме, структуре, свойствам и функциям. В частности, все движения человека обеспечиваются скелетными мышцами [1]. На рисунке 1 представлена общая структура скелетной мышцы. Основным сократительным элементом мышцы является саркомер, образованный миозиновыми и актиновыми нитями и имеющий длину d порядка 2,2 мкм.